Universidad Nacional del Sur

Estructuras algebraicas para la lógica fuzzy

Tesis Magister en Matemática

Rosana Virginia Entizne Jtten

Bahia Blanca Argentina

2009

Universidad Nacional del Sur

Estructuras algebraicas para la lógica fuzzy

Tesis Magister en Matemática

Rosana Virginia Entizne Jtten

Bahia Blanca Argentina

2009

Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Magister en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur, y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática, durante el período comprendido entre el 1 de agosto de 1992 y el 23 de marzo de 2009, bajo la dirección de la Mg. Diana M. Brignole, Profesora Asociada Jubilada del Departamento de Matemática y el Dr. Ignacio Darío Viglizzo, Profesor Adjunto del Departamento de Matemática.

1 de abril de 2009

Departamento de Matemática

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR Secretaría General de Posgrado y Educación Continua
La presente tesis ha sido aprobada el .../.../... , mereciendo la calificación de ...... (   )

Agradecimientos

De corazón, debo agradecer:

A la Mg. Diana M. Brignole que me impulsó a comenzar esta tesis.

Al Dr. Ignacio D. Viglizzo que me obligó a terminarla.

A todos los que pusieron obstáculos en mi camino, porque me ayudaron a ver que tengo verdaderos amigos a mi lado.

A todos los que me apoyaron en este trabajo, que no puedo nombrar uno a uno, ya que se duplicaría la cantidad de páginas.

Muy especialmente a la Lic. Susana Gastaminza.

Resumen

En esta tesis se dan las nociones básicas de conjuntos fuzzy presentadas por Zadeh, para luego abocarse al estudio de la estructura algebraica subyacente.
Esta estructura, esencialmente un retículo en el cual se ha definido un par adjunto conformado por un producto y un residuo, presenta una gran diversidad según las propiedades del producto en cuestión y su relación con la estructura de retículo. Presentamos estos casos desde el más general hasta los casos más particulares, entre ellos el presentado por Zadeh. Para estos casos particulares analizamos las estructuras lógicas asociadas.
Desarrollamos, asimismo, los conceptos de homomorfismos, subálgebras y productos en retículos residuales.
Finalmente, utilizando la noción de jerarquía de conceptos clásica y fuzzy, damos una aplicación a la economía determinando una función de pertenencia asociada al contexto.

Abstract

In this dissertation, we give the basic notions of fuzzy sets, as presented by Zadeh, and the we study the underlying algebraic structure.
This structure, essentially a lattice endowed with a Galois connection formed by a product and a residuation, appears in many forms, according to the properties of the product and its relation to the lattice structure.
We present these cases going from the general to the specific, including the one introduced by Zadeh.
For these particular cases we analyze the associated logics.
We also expand of the concepts of homomorphisms, subalgebras and products of residuated lattices.
Finally, using both, the classic and fuzzy notions of formal concepts analysis, we give an application to Economic Sciences that helps determine membership functions associated to a context.

Índice general

Introducción vii

Introducción vii

1. Algunas definiciones básicas **1**
- 1.1. Definición de conjunto fuzzy 1
- 1.2. Operaciones con conjuntos fuzzy 9
- 1.3. Relaciones Fuzzy 12
- 1.4. Conjuntos L-fuzzy 14

2. Retículos Residuales **19**
- 2.1. Retículos residuales generalizados 20
- 2.2. Retículos residuales integrales 46
- 2.3. Retículos residuales lineales 53
- 2.4. Retículos residuales divisibles 58
- 2.5. Retículos residuales de Girard 64
- 2.6. BL álgebras 70
- 2.7. MV álgebras 73
- 2.8. Resumen 85

3. Homomorfismos, Subálgebras y Productos **89**
- 3.1. Teoría de Homomorfismos 89
  - 3.1.1. Homomorfismos 89
  - 3.1.2. Filtros en retículos residuales integrales 92
  - 3.1.3. Sistemas deductivos en retículos residuales integrales 98
  - 3.1.4. Congruencias y cocientes 102
- 3.2. Subretículos residuales 107
- 3.3. Producto directo de retículos residuales 110
- 3.4. Ultrafiltros y sistemas deductivos categóricos 113

4. Elementos Especiales **125**
4.1. Elementos regulares 125
4.2. Elementos densos 128
4.3. Elementos idempotentes 130
4.4. Elementos nilpotentes 134
4.5. Elementos booleanos 135

5. Casos Particulares **137**
5.1. t-normas 137
5.1.1. Otras implicaciones a partir de las t-normas: 153
5.2. Álgebra de De Morgan y de Kleene 154
5.2.1. Álgebras de De Morgan con implicación 156

6. Lógica básica para $PC(\otimes)$ **161**
6.1. Definiciones previas 161
6.2. Lógica Básica (BL) 163
6.2.1. Álgebra de Lindenbaum 170
6.2.2. Completud 177
6.3. Estructuras lógicas asociadas a las t-normas 177

7. Jerarquía de conceptos **185**
7.1. Jerarquía de conceptos clásicos 185
7.1.1. Contexto multivaluado 189
7.2. Obtención de funciones de pertenencia 191
7.2.1. Aplicación a la teoría de desarrollo 193
7.3. Jerarquía de conceptos fuzzy 197
7.4. Apéndice 202
7.4.1. Listado de los 52 Conceptos del Ejemplo 7.5 202
7.4.2. Proceso de obtención de las funciones de pertenencia usando el operador κ 207

8. Conclusiones **211**

Introducción

Si vamos a buscar la base de un desarrollo conciso de la lógica y la matemática, debemos remontarnos a Aristóteles, quien introdujo las denominadas *Leyes básicas del Pensamiento*. En la lógica formal, hacemos referencia a la ley de identidad, contradicción, exclusión del centro y la razón suficiente. Es decir, cualquier proposición sólo puede ser verdadera o falsa. En contraposición a ellas, Heráclito propuso cosas que podrían ser simultáneamente ciertas y falsas; finalmente Platón es quien afirma "hay una tercera región entre lo verdadero y lo falso donde los opuestos se presentan juntos". La primera formulación sistemática de la lógica de vaguedades fue desarrollada entre 1917 y 1920 por el filósofo Jan Łukasiewicz [Luk20], quien agrega a los valores clásicos 0 y 1 un tercer grado de verdad que en su primer trabajo llama "2". En 1937 el filósofo cuántico Max Black [Bla37] define el primer conjunto difuso mediante una curva que recogía la frecuencia con que se pasaba de un estado a su opuesto, pero su idea pasó totalmente inadvertida dado que se oponía al empirismo lógico reinante en esa época. Sin embargo no fue hasta 1965 que L. A. Zadeh [Zad65], motivado por problemas de teoría de sistemas perfeccionó la idea de la lógica multivaluada de Łukasiewicz, considerando a funciones valuadas en $([0,1],\leq)$ como funciones características de un nuevo tipo de conjuntos, llamados *conjuntos fuzzy*. (Esta palabra, *fuzzy*, es un término fotográfico que hace alusión a los bordes "movidos", "poco definidos" o "borrosos". Por ello en la literatura en castellano, también suelen mencionarse como *conjuntos difusos* o *borrosos*.)

El modelo matemático para los conjuntos fuzzy presentado por Zadeh representa el significado del lenguaje natural por un cierto tipo de *grado*. Por ejemplo si consideramos la proposición "Juan es joven", no siempre es posible determinar fehacientemente si es *verdadera* o *falsa*, pero si conocemos el valor x de la edad de Juan, podemos calcular en qué grado son compatibles x y "ser joven" y es claro, también, que $x = 18$ es más compatible con "ser joven" que $x = 25$ esto sugiere que la relación de pertenencia a un conjunto puede ser en cualquier grado entre 0 (es absolutamente incompatible) y 1 (es totalmente compatible), es decir, el grado de pertenencia a un conjunto fuzzy es cualquier número en el intervalo real $[0,1]$.

En palabras del propio Zadeh, en lógica fuzzy todo es cuestión de grado, el razonamiento exacto es un caso límite del razonamiento aproximado, el conocimiento se interpreta

como una colección de restricciones elásticas sobre un conjunto de variables, se opera con conjuntos en lugar de números. En esencia: la representación de la información imita el mecanismo de razonamiento aproximado que realiza la mente humana.
Considerando el hecho que un conjunto A clásico en un universo $\mathcal{U}$ puede determinarse por completo mediante su función característica $\chi_A : \mathcal{U} \to \{0,1\}$, se define un *conjunto fuzzy* A de $\mathcal{U}$ por una función $\mu_A : \mathcal{U} \to [0,1]$, y se lo denomina indistintamente A ó μ_A. La primera de estas notaciones suele llamarse la *etiqueta lingüística* del conjunto. Para cada $u \in \mathcal{U}$, $\mu_A(u)$ es el *grado de pertenencia* del elemento u al conjunto fuzzy etiquetado A. Las funciones cuya imagen sean el conjunto $\{\,0,1\}$ definen claramente conjuntos clásicos y se ve de este modo, que los conjuntos fuzzy extienden la noción de conjuntos clásicos. Dado un concepto fuzzy, pueden darse diferentes funciones que lo modelicen. Una vez elegida la función de pertenencia queda totalmente determinado el conjunto. Tal elección es subjetiva y depende del contexto de trabajo.

Definidos ya los conjuntos fuzzy, para poder operar con ellos se deben definir las funciones que determinen el grado de pertenencia a la unión, intersección y complemento, de modo tal que extiendan las operaciones clásicas. Estas operaciones conjuntistas darán lugar a la definición de los conectivos lógicos asociados a la lógica fuzzy. Al introducir los conjuntos fuzzy, Zadeh los presenta esencialmente como conjuntos clásicos con una función de pertenencia valuada en el intervalo real [0,1]. Los grados de pertenencia se perciben como valores de verdad de la lógica fuzzy con valores de verdad en el intervalo unitario, y usa la lógica de Łukasiewicz para los conectivos proposicionales, sin explicar el por qué. En la literatura encontramos muchos casos en que debe ser usada la lógica de Łukasiewicz, pero existen muchos otros que no tienen esta restricción. Veremos que existen diferentes extensiones, cada una asociada a una estructura algebraica diferente.

Dos años más tarde, Goguen[Gog67] extiende la idea original de Zadeh al marco de la teoría de retículos y llama a estos nuevos conjuntos L-fuzzy. En este trabajo apunta que no existe una necesidad matemática para restringirse al intervalo unitario, ni a la lógica de Łukasiewicz. En la mayoría de las lógicas convencionales, los modelos algebraicos son retículos distributivos en el cual el ínfimo se corresponde con la conjunción y el supremo con la disyunción. La implicación y la negación definen operaciones adicionales binaria y unaria respectivamente. Por ejemplo, las álgebras de Heyting son modelos para la lógica intuicionista, donde la implicación se corresponde con el pseudo-complemento relativo. Como es bien conocido, un complemento relativo puede ser expresado en términos de conjunción y orden parcial. En efecto: $x \to y$ es el mayor z tal que $x \wedge z \leq y$. Para muchos cálculos lógicos la implicación en sus modelos puede ser expresada de manera similar. Siguiendo la idea de Goguen, debe reemplazarse la conjunción por otra operación binaria (que llamaremos multiplicación) adecuada al modelo.

Analicemos las condiciones que debe cumplir un buen candidato para la función de ver-

dad del conectivo *conjunción*. Por nuestro conocimiento intuitivo, podemos requerir que la función sea no decreciente en ambos argumentos, ya que es de esperar que φ y ψ tengan un grado alto de verdad si y sólo si la conjunción φ & ψ lo tiene. Siguiendo la misma línea de pensamiento asociaremos a 1 la unidad y a 0 el primer elemento.
Llegamos así a la definición de *t-norma* $\otimes$: una operación en $[0, 1]$ que es conmutativa y asociativa, no decreciente en ambos argumentos con 1 como elemento neutro y 0 como absorbente. Los ejemplos más conocidos de t-normas continuas son la t-norma de Łukasiewicz, la de Gödel y la t-norma producto. Trataremos estos temas en el capítulo 5.

Queda elegir una función de verdad para la implicación. En la lógica 2-valuada: la implicación $\varphi \Rightarrow \psi$ es verdadera si y sólo si el valor de verdad de φ es menor o igual al de ψ. Generalicemos esta noción pidiendo que el valor de verdad de $\varphi \Rightarrow \psi$ sea alto sólo si el valor de verdad de φ no es mucho mayor que el de ψ. Esto nos dice que la función de verdad debe ser no creciente en la primera variable y no decreciente en la segunda. Aún más, pedimos *sanidad* para el Modus Ponens Fuzzy: a partir de una cota inferior para el grado de verdad de $\varphi \Rightarrow \psi$ y φ queremos establecer una cota inferior para el grado de verdad de ψ. Esta operación debe ser claramente no decreciente en ambos argumentos y de modo similar podemos establecer que el 1 sea la unidad y el 0 el elemento neutro para la operación en cuestión. Esto garantizará la integralidad de la lógica.
Con estas condiciones resulta que $(\otimes, \Rightarrow)$ satisface: Si $a \leq x$ y $b \leq x \Rightarrow y$, entonces $a \otimes b \leq y$.
En particular, tomando $a = x$ se tiene:

$$\text{si } z \leq x \Rightarrow y, \text{ entonces } x \otimes z \leq y \tag{1}$$

Por otra parte, uno quiere elegir $x \Rightarrow y$ tan grande como se pueda, entonces cada vez que $x \otimes z \leq y$, si z es un posible candidato para $x \Rightarrow y$, uno pide, recíprocamente:

$$\text{Si } x \otimes z \leq y, \text{ entonces } z \leq x \Rightarrow y \tag{2}$$

Claramente, de (1) y (2) resulta:

$$x \otimes z \leq y \text{ si y sólo si } z \leq x \Rightarrow y.$$

Y entonces $x \Rightarrow y$ es el mayor elemento z que satisface $x \otimes z \leq y$.
Se prueba que si $\otimes$ una t-norma continua, existe una única operación $\Rightarrow$ que satisface para todo $x, y \in [0, 1]$, $x \otimes z \leq y$ si y sólo si $x \leq x \Rightarrow y$, que se denomina *residuo asociado a la t-norma* $\otimes$ y está definida por: $x \Rightarrow y = max\{z | x \otimes z \leq y\}$.
Las estructuras así obtenidas más empleadas en la literatura y aplicaciones son: las *álgebras de Heyting* que se encuentran ligadas a trabajos intuicionistas; *MV-álgebras*, relacionadas con la lógica fuzzy positivista y las *estructuras de semigrupo* en el intervalo unitario real que conforman las *t-normas* y aparecen relacionadas con el tratamiento

probabilístico de la lógica fuzzy.

Desde un punto de vista sintáctico las lógicas no clásicas son fragmentos de la lógica clásica. Si dejamos de lado por un momento la lógica cuántica, las lógicas no clásicas se caracterizan por el abandono de la ley *tertium non datur*, manteniendo la integralidad, la importación, la exportación y la ley de Duns Scotus.
Es decir,

$$(\alpha \Rightarrow \alpha) \qquad \text{integralidad}$$

$$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \& \beta) \Rightarrow \gamma) \qquad \text{ley de importación}$$

$$((\alpha \,\&\, \beta) \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \qquad \text{ley de exportación}$$

$$((\alpha \,\& \sim \alpha) \Rightarrow \beta) \qquad \text{ley Duns Scotus}$$

El abandono del principio del tercero excluído (tertium non datur) puede ser expresado de varios modos: Sea $\otimes$ la operación conmutativa y asociativa que representará la conjunción, entonces la idempotencia de esta operación implica la equivalencia entre la negación de la ley del tercero excluído y la no involución de la negación. Recíprocamente, si es válida la doble negación, el hecho de negar la ley del tercero excluído fuerza la no idempotencia de la conjunción.
Sabemos que en el primer caso estamos en la lógica intuicionista de Heyting, mientras que al perder la idempotencia entramos en la Lógica lineal de Girard. Si en este segundo caso agregamos el axioma de divisibilidad, entonces obtenemos los axiomas de Wajsberg y llegamos a la lógica de Łukasiewicz infinito valuada.
Cada una de estas lógicas tiene su propio campo de aplicación: la lógica intuicionista juega un rol de gran importancia en la matemática constructivista, la lógica de Łukasiewicz admite las antinomias y arroja una luz especial sobre las paradojas de teoría de conjuntos.

Según Zadeh, contrariamente a la teoría de modelos multivaluada, la lógica fuzzy toma como base un retículo muy especial: el intervalo unitario real. Una vez que los predicados unarios son interpretados como aplicaciones valuadas en el retículo, la conjunción y disyunción están dadas respectivamente por min y max y finalmente la negación se interpreta por la involución en [0,1]: $\neg x = 1 - x$. Más tarde vimos que la teoría de conjuntos y la lógica fuzzy tienen un carácter local, y admiten distintas formas de definir operaciones como la unión, la intersección o el complemento de los conjuntos fuzzy. Se presenta así el problema de precisar la estructura algebraica necesaria , a la que se requiere que admita un producto y un residuo que cons-tituyan lo que se ha llamado *par adjunto*.
Citando a Enric Trillas [Tri93] [1] *"La lógica fuzzy ha abierto una ventana para, a través*

[1]Cuando Trillas habla de R y F se refiere justamente a la elección de un par adjunto (F, R) para cada caso que dependerá de la estructura lógica a analizar.

de la determinación de la función R y de la operación F en cada contexto, determinar la lógica que un experto humano está usando, en un momento dado, en un razonamiento concreto".

La lógica fuzzy ha sido aplicada, históricamente, en diversas oportunidades. En 1974 por Mandani para diseñar el primer sistema de control difuso experimental para un motor de vapor. En 1980 una compañía danesa (F.L.Smidth & Co. A/S) usa teoría difusa para control de un horno de cemento. En 1980 Fuji Electric Co. Ltda (Japón) implementa un sistema de inyección química para plantas purificadoras de agua. En 1987 empieza a funcionar el regulador automático de las operaciones de trenes del metro de sendai (Japón) diseñado por el equipo Hitachi, ésta hace el viaje más cómodo al controlar las aceleraciones y frenadas en función de los pasajeros. En 1990 empiezan en Japón las aplicaciones domésticas, tales como: lavarropas fuzzy, ollas cocineras de arroz (marca Zojirushi), cámaras de video y fotográficas, etc.
Todas estas aplicaciones pueden clasificarse en:

- Control de sistemas: Control de tránsito de vehículos, control de compuertas en plantas hidroeléctricas y térmicas, ascensores, etc.
- Predicción y optimización: Predicción de terremotos, optimización de horarios, etc.
- Reconocimiento de patrones y visión por ordenador: seguimiento de objetos con cámara, reconocimiento de letra manuscrita, de objetos, compensación de vibraciones, etc.
- Sistemas de información y conocimiento: bases de datos, sistemas expertos, etc.

A futuro se piensa aplicar inteligencia computacional a acústica, vibraciones y procesamiento de señales y en evaluación de recintos.

En el presente trabajo, dedicaremos el capítulo 1 a algunas definiciones básicas de teoría de conjuntos fuzzy y L-fuzzy.
En el capítulo 2 describiremos la estructura de retículo residual, a partir de la noción de retículo residual generalizado dada por Turunen, y agregaremos condiciones hasta llegar a la BL álgebra propuesta por Hájek. Se realizarán comparaciones entre MV álgebras presentadas por Chang y vistas como retículo residual.
En el capítulo 3 desarrollaremos los conceptos de homomorfismos, subálgebras y productos en retículos residuales.
En el capítulo 4 nos ocuparemos de elementos especiales y posibles descomposiciones de retículos residuales.
En el capítulo 5 nos dedicaremos a los retículos residuales definidos en el intervalo real unitario, con t-normas como operador de conjunción y analizaremos las álgebras de De Morgan como posibles retículos residuales.

En el capítulo 6 analizaremos brevemente las estructuras lógicas asociadas a las t-normas, denominada lógica básica por Petr Hájek. Distinguiremos especialmente las asociadas a las t-normas continuas de mayor uso, es decir, la lógica intuicionista, la lógica producto y la lógica de Łukasiewicz.
En el capítulo 7 daremos la noción de jerarquía de conceptos clásica y fuzzy, con una aplicación a la economía dada por la determinación de una función de pertenencia asociada al contexto.

Capítulo 1

Algunas definiciones básicas

1.1. Definición de conjunto fuzzy

La idea original de Zadeh al definir los conjuntos fuzzy es extender la noción de conjuntos clásicos (*crisp*) para poder representar la noción "pertenece en cierto grado". Considera, entonces un conjunto clásico, no vacío, X que llama *conjunto referencial* o *universo de definición*. Cualquier conjunto clásico $A \subseteq X$ queda unívocamente determinado por la función característica que se define del siguiente modo:

Definición 1.1. Dado un conjunto referencial $X \neq \emptyset$, y $A \subseteq X$, se define la *función característica* de A y se nota $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

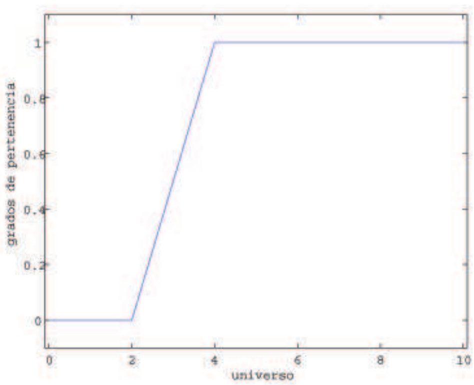
Es decir, se asigna a un elemento del universo el valor 1 si dicho elemento pertenece al conjunto A en cuestión, y el valor 0 en caso contrario. Más precisamente: 0 y 1 son los "valores extremos" de pertenencia. Para permitir representar "cuánto pertenece", "en qué medida" satisface las condiciones de A, Zadeh considera funciones con rango en el intervalo unitario real, $[0, 1] \subset I\!R$, del siguiente modo:

Definición 1.2. [Zad65] Dado un conjunto de puntos (objetos) $X \neq \emptyset$, que denominaremos *universo*, un *conjunto fuzzy* A de X está caracterizado por una *función de pertenencia* que asocia a cada punto de X un valor en el intervalo real unitario $[0, 1]$, es decir, $\mu_A : X \to [0, 1]$. $\mu_A(x)$ es el *grado de pertenencia* de x a A. Si $\mu_A(x) = 0, x \notin A$, si $\mu_A(x) = 1$, x es un elemento de A. Cuanto mayor sea $\mu_A(x)$, mayor será el grado de pertenencia de x a A, para cada $x \in X$.

Esencialmente un conjunto fuzzy de A de X es una función $\mu_A : X \to [0, 1]$. La elección de la función de pertenencia que define a cada conjunto fuzzy depende del contexto del trabajo en el que se la desee definir. A un conjunto fuzzy siempre asociamos una proposición y $\mu_A(x)$ es justamente el grado en que el elemento x del dominio X (conjunto clásico) satisface la proposición que define el conjunto. A proposiciones atómicas se asocian funciones de pertenencia continua a a trozos, preferentemente que tomen el valor 1 al menos en un punto, y cuyos intervalos de crecimiento precedan a los de decrecimiento. Para las proposiciones compuestas, asociamos, como es habitual, la unión fuzzy a la disyunción, la intersección a la conjunción y el complemento a la negación. Veremos luego cómo definir estas operaciones. Las funciones asociadas a proposiciones atómicas de mayor uso son:

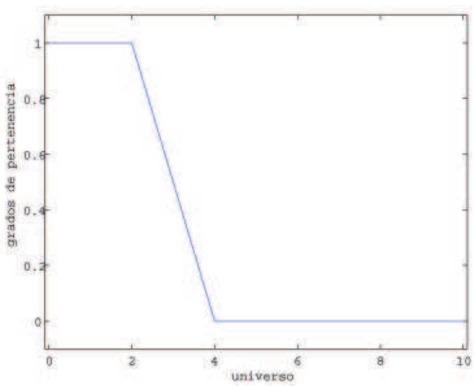
$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a; \\ \dfrac{x-a}{m-a}, & \text{si } x \in [a, m]; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el gráfico: $a = 2,\ m = 4$.



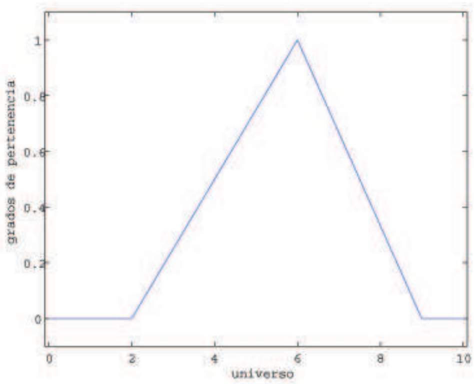
$$L(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq a; \\ 1 - \dfrac{x-a}{m-a}, & \text{si } x \in (a, m); \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el gráfico: $a = 2,\ m = 4$.



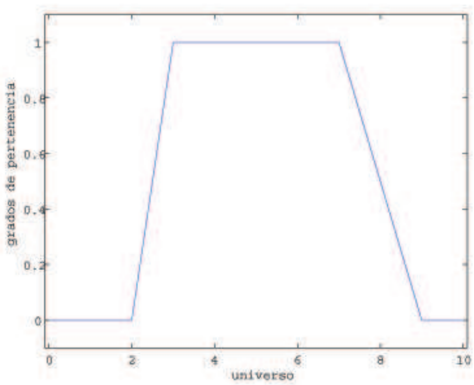
$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a; \\ \dfrac{x-a}{m-a}, & \text{si } x \in (a, m]; \\ \dfrac{b-x}{b-m}, & \text{si } x \in (m, b]; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el gráfico: $a = 2,\ b = 9,\ m = 6.$



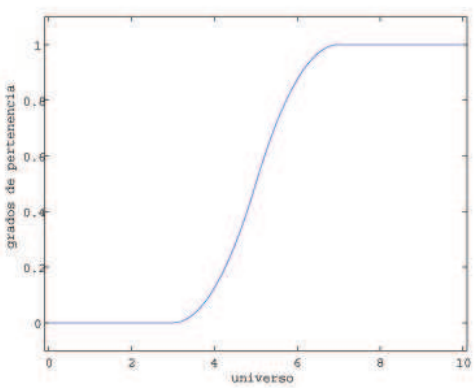
$$\Pi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{si } x \in (a, b]; \\ 1, & \text{si } x \in (b, c]; \\ \dfrac{d-x}{b-c}, & \text{si } x \in (c, d]; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el gráfico: $a = 2,\ b = 3,\ c = 7,\ d = 9.$



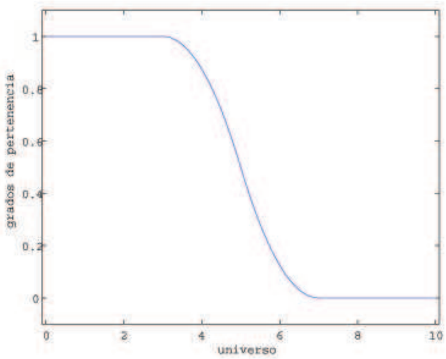
$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a; \\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2, & \text{si } x \in (a, \tfrac{a+c}{2} \\ 1 - 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2, & \text{si } x \in (\tfrac{a+c}{2}, c \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el gráfico: $a = 3,\ c = 7.$



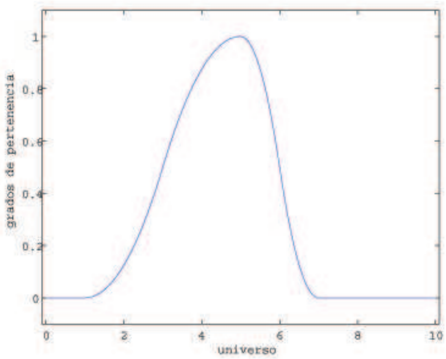
$$Z = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq a; \\ 1 - 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2, & \text{si } x \in (a, \frac{a+c}{2}]; \\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2, & \text{si } x \in (\frac{a+c}{2}, c]; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el gráfico: $a = 3,\ c = 7$.



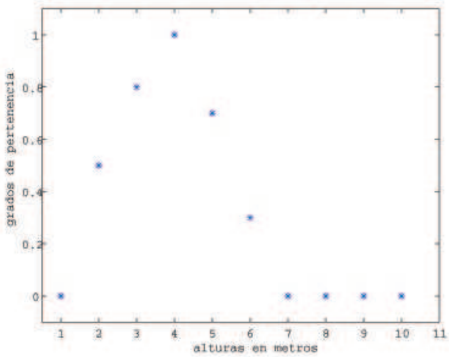
$$SZ(x) = \begin{cases} S(x), & \text{si } x \leq b; \\ \\ Z(x), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el gráfico: $b = 4$,
S con $a = 1,\ c = 5$ y
Z con $a = 5,\ c = 7$.



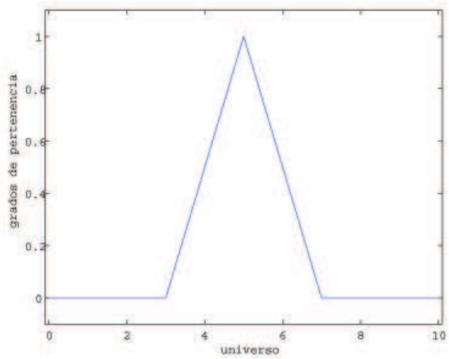
Ejemplo 1.1. Sea el universo $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, conjunto de casas representadas por el número x de dormitorios.

Sea A el conjunto fuzzy de casas confortables para cuatro personas.
Por medio de encuestas, estadísticas, u otros procedimientos consideramos:
$A = \{\langle 2, 0.5\rangle, \langle 3, 0.8\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 5, 0.7\rangle, \langle 6, 0.3\rangle\}$
Los pares $\langle x, \mu_A(x)\rangle$ si $\mu_A(x) = 0$, se omiten en esta representación.



Ejemplo 1.2. Sea $X = I\!R^+$, el conjunto de los números reales positivos. Definimos el conjunto fuzzy A de los números próximos a 5, por: $A = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle,\ \text{para } x \in I\!R^+\}$, donde μ_A está dada por:

$$\mu_A(x) = \Lambda(x).$$



Particularmente, el conjunto fuzzy que acabamos de describir recibe el nombre de *número fuzzy triangular* y es de uso muy frecuente en las aplicaciones.

Notación 1.1. En el caso de universos finitos un conjunto fuzzy suele indicarse:

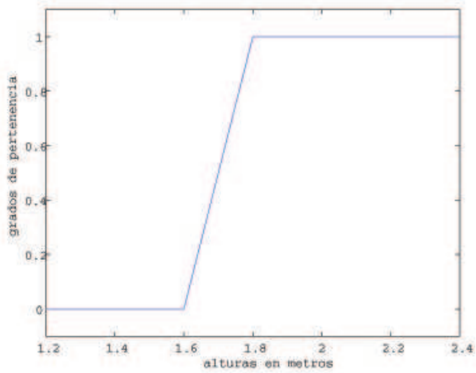
$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + ... + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i.$$

y aún en el caso de que X sea numerable, o infinito, se escribe, respectivamente:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i)/x_i. \qquad\qquad A = \int_X \mu(x)/x.$$

Ejemplo 1.3. Para definir el conjunto fuzzy A de las personas altas de una cierta población, consideramos como universo de definición X un intervalo de $\mathbb{R}$, rango de alturas posibles (en metros): $X = \{x : 1 \leq x \leq 3\}$ adoptando la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1.60; \\ 5 \cdot (x - 1,60), & \text{si } 1.60 < x < 1.80; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Los conjuntos fuzzy se definen por medio de una expresión denominada *etiqueta lingüística* , del tipo de "temperatura baja", "persona joven", etc. Estas etiquetas son valores que asumen las variables lingüísticas.

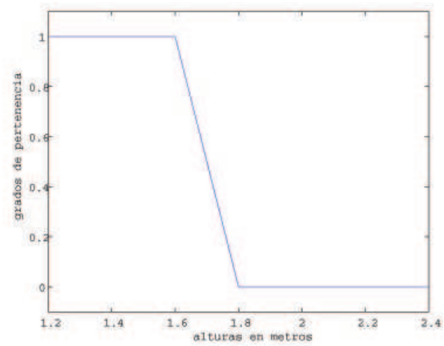
Definición 1.3. Una *variable lingüística* es una 5-upla $(A, T(A), U, G, M)$ donde A es el nombre de la variable, $T(A)$ el conjunto de términos que pueden asociarse a la variable, U el universo de discurso donde se define $T(A)$, es decir, el conjunto de valores que puede tomar, G es una regla sintáctica para generar los nombres de los valores de A y M una regla semántica para asociar un significado a cada valor.

Ejemplo 1.4. Consideremos A: "velocidad", entonces $T(A)$ puede ser "muy baja", "baja","no baja", "no alta", "alta", "muy alta". Si estamos hablando de velocidades de autos en carreteras, el conjunto de valores que tiene sentico considerar podría ser: $U = \{x : 55 \leq x \leq 200\}$, donde estamos pensando en km/h. Cada término en $T(A)$ está asociado a un conjunto fuzzy en el universo U. La regla sintáctica G determina el orden de las palabras de los valores lingüísticos de *velocidad*: como en alta, no alta y muy alta, donde "no" y "muy" son modificadores que preceden al término primario "alta". La regla semántica M asocia cada valor lingüístico con su significado: "alta es mayor de 180 km/h, y "baja" es menor de 70 km/h. Elegida la función de pertenencia asociada a "alta" y "baja", G viene dado por los modificadores lingüísticos.

Definición 1.4. Un *modificador* es una función $m : [0, 1] \to [0, 1]$ que modeliza el efecto de un adverbio sobre la propiedad que determina el conjunto fuzzy, mediante la composición de funciones.
Dado un conjunto fuzzy A, algunos de los modificadores son:

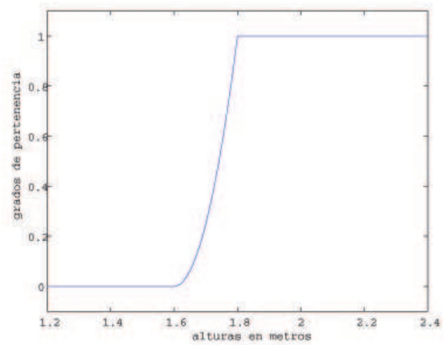
no A

$\mu_{no\,A}(x) = 1 - \mu_A(x)$



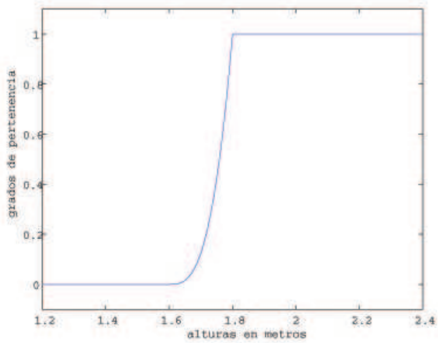
muy A

$\mu_{muy\,A}(x) = (\mu_A(x))^2$



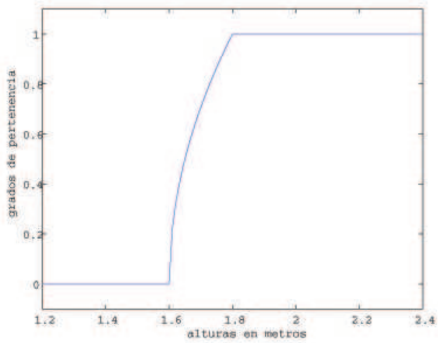
extremadamente A

$\mu_{extremadamente\, A}(x) = (\mu_A(x))^3$



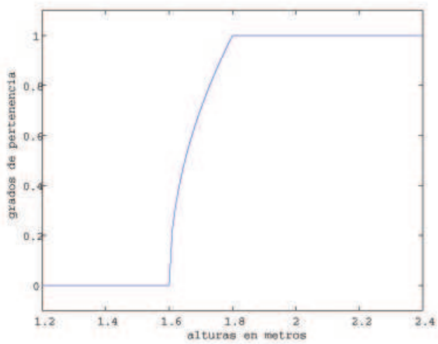
algo A

$\mu_{algo\, A}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$



mas o menos A

$\mu_{mas\ o\ menos\, A}(x) = \sqrt[3]{\mu_A(x)}$



Definición 1.5. Dos conjuntos fuzzy $A, B \subseteq X$ son *iguales* si y sólo si:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X.$$

Definición 1.6. Dados dos conjuntos fuzzy $A, B \subseteq X$ se dice que A *está contenido en* B si y sólo si:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X.$$

Definición 1.7. Dado un universo X y un conjunto fuzzy A, se define el *soporte* de A y se nota $sop(A)$ al conjunto (clásico) de los elementos de X que tienen un grado de pertenencia no nula a A. En símbolos:

$$sop(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

Definición 1.8. Sea A un conjunto fuzzy de X. El nivel α de A es el conjunto (clásico):

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

Algunos autores denominan a estos conjuntos *niveles α débiles* definiendo como *nivel α fuerte* al conjunto: $\{x : \mu_A(x) > \alpha\}$.

Observación 1.1. Si el soporte de un conjunto fuzzy, convexo A está contenido en $I\!R$ y μ_A es una función continua entonces A_α es un intervalo cerrado de $I\!R$.

Teorema 1.1. Principio de resolución. Dado un conjunto de referencia X, la función de pertenencia de un conjunto fuzzy A puede expresarse por medio de los niveles α por:

$$\mu_A(x) = \bigvee_{\alpha \in (0,1]} (\alpha \wedge \mu_{A_\alpha}(x))$$

Demostración:
Dado que $\mu_{A_\alpha}(x) = 1$ si y sólo si $\mu_A(x) \geq \alpha$, resulta $\alpha \wedge \mu_{A_\alpha}(x) = \alpha$ si y sólo si $\mu_A(x) \geq \alpha$. En cualquier otro caso $\alpha \wedge \mu_{A_\alpha}(x) = 0$. El resultado es consecuencia directa de este hecho. $\square$

Hemos hablado acerca de los conjuntos fuzzy, nombrados por etiquetas lingüísticas, y cómo obtener nuevos subconjuntos fuzzy a partir de los modificadores lingüísticos, pero no hemos tocado el tema de cómo determinar un conjunto fuzzy. En general, cada aplicación en particular tiene un método de determinación de función de pertenencia para el conjunto fuzzy buscado. En la literatura los más frecuentes son:

1. Método horizontal: Se basa en las respuestas de n expertos. La pregunta tiene el siguiente formato: "¿Puede ser x considerado compatible con el concepto A?". Sólo se acepta un *si* o *no* por respuesta. Luego $\mu_A(x) = \dfrac{\text{cant. de respuestas afirmativas}}{n}$.

2. Método vertical: basado en el principio de resolución. Se eligen varios $\alpha \in [0, 1]$ para construir los α-cortes, se identifican los x que pertenecen a cada conjunto clásico de α-corte y se construye el conjunto fuzzy por el principio de resolución o el teorema de representación.

3. Método de comparación de parejas (Saaty,1980).

4. Métodos basados en la especificación del problema.

5. Métodos basados en la optimización de parámetros.

6. Métodos basados en *fuzzy clustering*.

7. Algoritmo *Fuzzy Isodata* (Bezdek,1981).

1.2. Operaciones con conjuntos fuzzy

Recordemos que si $A, B \subseteq X$, son conjuntos clásicos, las operaciones usuales entre conjuntos, unión, intersección y complementación se definen, respectivamente:

$$\begin{array}{ll} A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ ó } x \in B\}, & \text{i.e.: } \chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) \\ A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ y } x \in B\}, & \text{i.e.: } \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) \\ \overline{A} = \{x \in X : x \notin A\}, & \text{i.e.: } \chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x) \end{array}$$

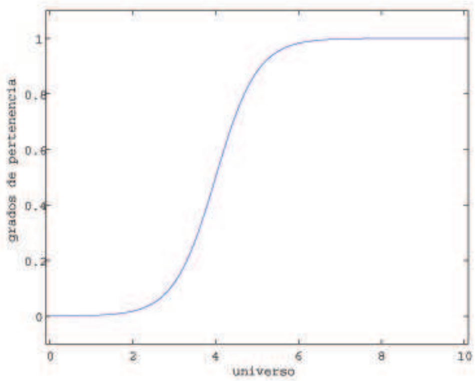
Para generalizar estas operaciones sobre los conjuntos fuzzy de X, Zadeh propone reemplazar las funciones características por las funciones de pertenencia, del siguiente modo:

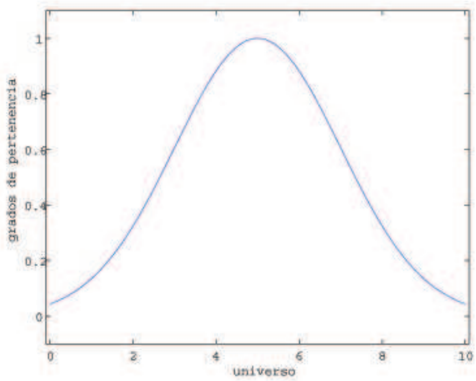
Definición 1.9. Sean A, B conjuntos fuzzy de X, entonces:

$$\begin{array}{ll} A \cup B = \{(x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x)), x \in X\}, & \text{i.e.: } \mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \\ A \cap B = \{(x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)), x \in X\}, & \text{i.e.: } \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \\ \overline{A} = \{(x, 1 - \mu_A(x), x \in X\}, & \text{i.e.: } \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \end{array}$$

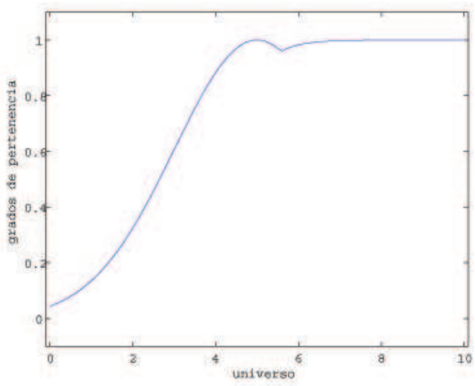
Veamos un ejemplo de estas operaciones.

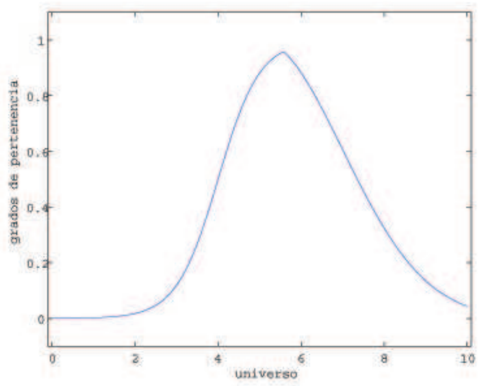
Ejemplo 1.5. Consideremos los subconjuntos fuzzy A y B dados, respectivamente por:





Los siguientes son los gráficos correspondientes a las operaciones unión e intersección de A y B, respectivamente.





Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes o conjuntos clásicos de X. Entonces $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, -)$ es un *álgebra de Boole*, es decir, es un retículo distributivo con primer y último elemento $\emptyset, X$, respectivamente, y en el cual todo elemento tiene un complemento booleano. Es decir, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ existe un $\overline{A} \in \mathcal{P}(X)$, tal que: $A \cup \overline{A} = X$ (último elemento) y $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (primer elemento).
Consideremos ahora $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(X)$ como el conjunto clásico de los subconjuntos fuzzy de X con las operaciones antes definidas.

Lema 1.1. *La relación* $\subseteq$ *definida en* 1.6 *determina un orden parcial en* $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(X)$.

Lema 1.2. *Dado un conjunto referencial* X, *en* $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(X)$ *se verifican las siguientes propiedades:*

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}1$) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — *Propiedad asociativa de* $\cup$

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}2$) $A \cup B = B \cup A$ — *Propiedad conmutativa de* $\cup$

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}3$) $A \cup A = A$ — *Propiedad idempotente de* $\cup$

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}4$) $A \cup (A \cap B) = A$ — *Ley de absorción*

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}5$) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — *Propiedad asociativa de* $\cap$

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}6$) $A \cap B = B \cap A$ — *Propiedad conmutativa de* $\cap$

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}7$) $A \cap A = A$ — *Propiedad idempotente de* $\cap$

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}8$) $A \cap (A \cup B) = A$ — *Ley de absorción*

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}9$) $A \cup \emptyset = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset$ — $\emptyset$ *es el primer elemento*

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}10$) $A \cup X = X,\ A \cap X = A$ — X *es el último elemento*

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}11$) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — *Propiedad distributiva*

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}12$) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — *Propiedad distributiva*

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}13$) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *Ley de De Morgan*

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}14$) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *Ley de De Morgan*

($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}15$) $\overline{\overline{A}} = A$ *Propiedad involutiva de* $\overline{A}$

Demostración: Todas las propiedades son consecuencia de las propiedades de los operadores $\wedge$ y $\vee$ para números reales y la definición de $\overline{A}$. □

Definición 1.10. Dado $A \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(X)$ se define el *pseudo complemento* de A y se nota A^* al conjunto fuzzy cuya función de pertenencia está dada por:

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu_A(x) \neq 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lema 1.3. *Si* $A, B \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(X)$, *se verifica* $A \cap B = \emptyset$ *si y sólo si* $B \subseteq A^*$.

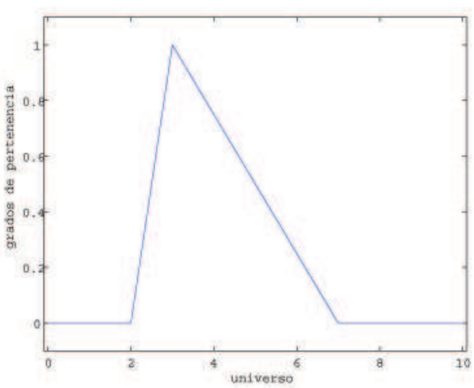
Demostración: Supongamos en primer lugar que $A \cap B = \emptyset$, entonces, para todo $x \in X$, se verifica $\mu_A(x) = 0$ ó $\mu_B(x) = 0$. Si $\mu_B(x) \neq 0$, entonces $\mu_{A^*}(x) = 1$ y se verifica $B \subseteq A^*$.
Recíprocamente, si $B \subseteq A^*$, entonces $\mu_B(x) \wedge \mu_A(x) \leq \mu_{A^*} \wedge \mu_A(x) = 0$, y resulta $B \cap A = \emptyset$. □

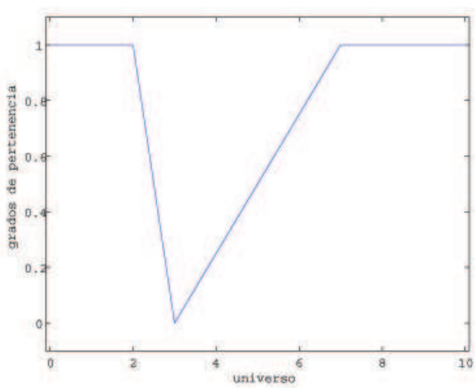
Teorema 1.2. $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(X), \cap, \cup, ^-)$ *es un retículo distributivo pseudo complementado.*

Demostración: Las propiedades ($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}1$) a ($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}12$) afirman que se trata de un retículo distributivo. El Lema 1.3 completa la demostración. □

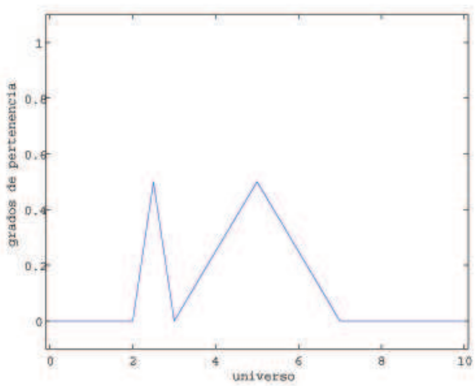
El siguiente ejemplo muestra claramente que no es un álgebra de Boole, ya que en general $A \cup \bar{A} \neq X$, y $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$:

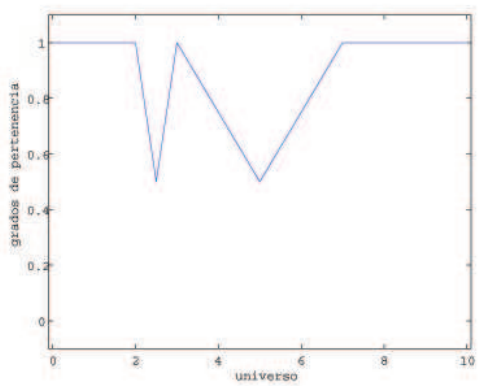
Ejemplo 1.6. Consideremos el conjunto fuzzy A y su complemento $\bar{A}$ definidos en los siguientes gráficos:





Representamos la intersección a la izquierda y la unión a la derecha. Claramente A y $\bar{A}$ no son complementarios en el sentido de Boole, ya que ni su intersección es el conjunto vacío, ni su unión el universal.





1.3. Relaciones Fuzzy

Dados dos conjunto clásicos X e Y, una relación binaria de X en Y se define como un subconjunto del producto cartesiano de $X \times Y$. Obviamente, un subconjunto del producto cartesiano de $X \times X$ es una relación binaria en X. Veamos ahora la generalización de este concepto.

Definición 1.11. Dados dos conjuntos clásicos X e Y, una *relación binaria fuzzy* R de X e Y, es un conjunto fuzzy de $X \times Y$, e igual que antes puede identificarse por su función de pertenencia. Es decir: $\mu_R : X \times Y \to [0, 1]$. Cuando $X = Y$, R se dice una *relación binaria fuzzy sobre* X.

Ejemplo 1.7. Si $X = I\!\!R$ (conjunto de los números reales), la relación binaria R: "x es mucho mayor que y" es una relación fuzzy que en este caso definimos por:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \geq x; \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{10}{x - y}}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La representación matricial de una relación se generaliza del siguiente modo:
Si $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ y $R \subseteq X \times Y$, la relación fuzzy R puede expresarse por la siguiente matriz $m \times n$:

$$R = \begin{pmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \cdots & \mu_R(x_1, y_n) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \cdots & \mu_R(x_2, y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_R(x_m, y_1) & \mu_R(x_m, y_2) & \cdots & \mu_R(x_m, y_n) \end{pmatrix}$$

Esta representación extiende claramente el concepto de matriz asociada a una relación binaria en el caso clásico.

Si deseamos expresar la relación R por medio de un grafo, siendo R una relación binaria sobre X, los vértices del grafo son los $x_i \in X$, y el arco que va de x_i a x_j tendrá asignado el número $\mu_R(x_i, y_j) \in [0,1]$.

Observación 1.2. Como las relaciones fuzzy son conjuntos fuzzy, a ellas se aplican las operaciones sobre conjuntos ya consideradas: unión, intersección, complemento, así como las relaciones de igualdad e inclusión.

Definición 1.12. Dadas las relaciones fuzzy $R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$, Zadeh define la *composición max-min* de estas relaciones a la relación fuzzy $R \circ S \subseteq X \times Z$, definida por: $\mu_{R\circ S}(x,z) = \bigvee\limits_y (\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z))$.

Esta definición original de Zadeh, se generaliza mediante:

Definición 1.13. Dadas las relaciones fuzzy $R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$, se define como *composición max-$\star$* de estas relaciones a la relación fuzzy $R \circ S \subseteq X \times Z$, definida por: $\mu_{R\circ S}(x,z) = \bigvee\limits_y (\mu_R(x,y) \star \mu_R(y,z))$, donde $\star$ es una operación binaria conveniente en $[0,1]$, es decir $\star : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, por ejemplo, una t-norma.

Ejemplo 1.8. Sea $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y sea R la relación binaria fuzzy sobre X: "x e y están próximos" definida por:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y; \\ \dfrac{1}{|x-y|}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y sea S la relación binaria sobre X: "x^2 e y^2 están próximos" definida en la forma natural, a partir de la definición de R.

La representación más adecuada de ambas relaciones es la forma matricial, obteniéndose:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/ & 1/9 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/6 & 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/8 & 1/7 & 1/6 & 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/9 & 1/8 & 1/7 & 1/6 & 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $x_i = i \in X$.
análogamente:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 & 1/15 & 1/24 & 1/35 & 1/48 & 1/63 & 1/80 & 1/99 \\ 1/3 & 1 & 1/5 & 1/12 & 1/21 & 1/32 & 1/45 & 1/60 & 1/77 & 1/96 \\ 1/8 & 1/5 & 1 & 1/7 & 1/16 & 1/27 & 1/40 & 1/55 & 1/72 & 1/91 \\ 1/15 & 1/12 & 1/7 & 1 & 1/9 & 1/20 & 1/33 & 1/48 & 1/65 & 1/84 \\ 1/24 & 1/21 & 1/16 & 1/9 & 1 & 1/11 & 1/24 & 1/39 & 1/56 & 1/75 \\ 1/35 & 1/32 & 1/27 & 1/20 & 1/11 & 1 & 1/13 & 1/28 & 1/45 & 1/64 \\ 1/48 & 1/45 & 1/40 & 1/33 & 1/24 & 1/13 & 1 & 1/15 & 1/32 & 1/51 \\ 1/63 & 1/60 & 1/55 & 1/48 & 1/39 & 1/28 & 1/15 & 1 & 1/17 & 1/36 \\ 1/80 & 1/77 & 1/72 & 1/65 & 1/56 & 1/45 & 1/32 & 1/17 & 1 & 1/19 \\ 1/99 & 1/96 & 1/91 & 1/84 & 1/75 & 1/64 & 1/51 & 1/36 & 1/19 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos algunos elementos de la matriz $R \circ S$ utilizando en primer lugar la composición max-min, y luego la max-$\star$:

$$\mu_{R\circ S}(2,3) = \bigvee_y (\mu_R(2,y) \wedge \mu_S(y,3)) = \bigvee (1 \wedge 1/7, 1 \wedge 1/5, 1 \wedge 1, \dots) = 1$$

$$\mu_{R\circ S}(2,3) = \bigvee_y (\mu_R(2,y) \star \mu_S(y,3)) = \bigvee (1 \star 1/7, 1 \star 1/5, 1 \star 1, \dots) = 1$$

Esto significa que existe un y tal que $\mu_R(2,y) = 1 = \mu_R(y,3)$.

$$\begin{aligned} \mu_{R\circ S}(4,1) &= \bigvee_y (\mu_R(4,y) \wedge \mu_S(y,1)) = \\ &= (1/4 \wedge 1) \vee (1/3 \wedge 1/3) \vee (1/2 \wedge 1/8) \vee (1 \wedge 1/15) \vee (1 \wedge 1/24) \vee (1 \wedge 1/35) \vee \\ &\quad \vee (1/2 \wedge 1/48) \vee (1/3 \wedge 1/63) \vee (1/4 \wedge 1/80) \vee (1/5 \wedge 1/99) = 1/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{R\circ^\star S}(4,1) &= \bigvee_y (\mu_R(4,y) \star \mu_S(y,1)) = \\ &= (1/4 \star 1) \vee (1/3 \star 1/3) \vee (1/2 \star 1/8) \vee (1 \star 1/15) \vee (1 \star 1/24) \vee (1 \star 1/35) \vee \\ &\quad \vee (1/2 \star 1/48) \vee (1/3 \star 1/63) \vee (1/4 \star 1/80) \vee (1/5 \star 1/99) < 1 \end{aligned}$$

1.4. Conjuntos L-fuzzy

Hemos trabajado a partir de las definiciones originales de Lofti Zadeh, con el concepto de *conjunto fuzzy* como extensión del concepto *conjunto clásico*. Esta definición puede hacerse aún más general si no restringimos el codominio de la función de pertenencia al intervalo unitario real $[0\,,\,1]$, sino consideramos un conjunto parcialmente ordenado L. Las generalizaciones de las Definiciones de conjunto fuzzy 1.2, y soporte 1.7 son, respectivamente, las siguientes:

Definición 1.14. [Gog67] Dado un conjunto de puntos (objetos) $X \neq \emptyset$, que denominaremos *universo* y un conjunto parcialmente ordenado acotado L con primer y último elemento 0 y 1 respectivamente, un *conjunto L-fuzzy* A de X está caracterizado por una *función de pertenencia* que asocia a cada punto de X un valor en el conjunto parcialmente ordenado L, es decir, $\mu_A : X \to L$. $\mu_A(x)$ es el *grado de pertenencia* de x a A.

Igual que para los conjuntos fuzzy, si $\mu_A(x) = 1$, x es un elemento de A en el sentido clásico y si $\mu_A(x) = 0$, x no pertenece a A. Del mismo modo, cuanto mayor sea $\mu_A(x)$, mayor será el grado de pertenencia de x a A, para cada $x \in X$. Una de las diferencias es que ahora no todos los grados de pertenencia son comparables, dado que L no tiene por qué ser totalmente ordenado.

Observación 1.3. Para definir un conjunto L-fuzzy, sólo es necesario que L sea un conjunto parcialmente ordenado, pero para poder definir las operaciones conjuntistas se requiere que L sea un retículo, preferentemente completo y si fuera distributivo, tanto mejor. De hecho, en [Gog69] trabaja con categorías de L-fuzzy sets, donde L es un conjunto parcialmente ordenado y analiza las propiedades de acuerdo a que L sea un retículo completo o no, distributivo o no.

Ejemplo 1.9. Una empresa fabrica peces-robots con el objeto de mejorar el equilibrio ecológico. Todos los 'peces' tienen chips de reconocimiento para el relevamiento de las distintas zonas. Es posible dotar estos robots con equipo para neutralizar el petróleo en la zona, equipo para limpiar cualquier sustancia contaminante en la zona, y finalmente con equipo para redistribuir las huevas de peces. Todas las variedades posibles de peces-robot son, entonces:

σ: Sólo con chip de reconocimiento.

β: Chip de reconocimiento y equipo para neutralizar petróleo.

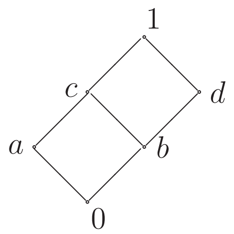
γ: Chip de reconocimiento y equipo para neutralizar cualquier sustancia nociva.

δ: Chip de reconocimiento y equipo para redistribuir huevas.

λ: Chip de reconocimiento y equipo para neutralizar petróleo y redistribuir huevas.

η: Chip de reconocimiento y equipo para neutralizar cualquier sustancia nociva y redistribuir huevas.

Tomando como X el conjunto de todos los peces-robot de la fábrica, y como conjunto parcialmente ordenado L el álgebra de Heyting cuyo diagrama de Hasse es:



definimos, a partir de opiniones de expertos, dos conjuntos L-fuzzy: A: el conjunto de los peces de reconocimiento y B: el conjunto de los peces de aumento de población ictícola, cuyas funciones de pertenencia damos en las tablas a continuación:

x	σ	β	γ	δ	λ	η
$\mu_A(x)$	1	c	a	d	b	0

x	σ	β	γ	δ	λ	η
$\mu_B(x)$	0	b	d	a	c	1

Definición 1.15. Dado un universo X y un conjunto fuzzy A, se define el L-*soporte* de A y se nota $sop_L(A)$ al conjunto (clásico) de los elementos de X que tienen un grado de pertenencia no nula a A. En símbolos: $sop_L(A) = \{x \in X : \mu_A(x) \neq 0\}$

Claramente las Definiciones de igualdad 1.5, orden fuzzy 1.6 y nivel α 1.8 se mantienen. Cuando trabajamos con conjuntos fuzzy finitos el soporte del conjunto es exactamente el nivel α, para el menor grado de pertenencia positivo α. Este hecho no siempre se verifica para conjuntos L-fuzzy.

Ejemplo 1.10. Continuemos con los peces-robot del Ejemplo 1.9.
$sop_L(A) = \{\sigma, \beta, \gamma, \delta, \lambda\}$ y $sop_L(B) = \{\beta, \gamma, \delta, \lambda, \eta\}$.

Es claro que $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$. Consideremos el conjunto C de los peces-robot económicos para la limpieza total. Nuevamente, siguiendo el consejo de expertos en esta materia definimos la función de pertenencia:

x	σ	β	γ	δ	λ	η
$\mu_C(x)$	0	b	1	0	0	1

Vemos que $C \subseteq B$ y $sop_L(C) = \{\beta, \gamma, \eta\}$.

Podemos escribir también los conjuntos clásicos determinados por los niveles α:

$$A_0 = \{\sigma,\, \beta,\, \gamma,\, \delta,\, \lambda,\, \eta\} \qquad B_0 = \{\sigma,\, \beta,\, \gamma,\, \delta,\, \lambda,\, \eta\}$$

$$A_a = \{\sigma,\, \beta,\, \gamma\} \qquad B_a = \{\delta,\, \lambda,\, \eta\}$$

$$A_b = \{\sigma,\, \delta,\, \lambda\} \qquad B_b = \{\beta,\, \gamma,\, \eta\}$$

$$A_c = \{\sigma,\, \beta\} \qquad B_c = \{\lambda,\, \eta\}$$

$$A_d = \{\sigma,\, \delta\} \qquad B_d = \{\gamma,\, \eta\}$$

$$A_1 = \{\sigma\} \qquad B_1 = \{\eta\}$$

Podemos observar que ninguno de estos niveles α coincide con el soporte del conjunto, como sí ocurre en el caso de un conjunto fuzzy finito. Para el conjunto L-fuzzy C se verifica $C_b = sop_L(C)$.

Análogamente se extiende la Definición 1.16 por:

Definición 1.16. [Gog67] Dados dos conjuntos clásicos X e Y, una *relación binaria L-fuzzy* R de X e Y, es un conjunto L-fuzzy de $X \times Y$, e igual que antes puede identificarse por su función de pertenencia. Es decir: $\mu_R : X \times Y \to L$. Cuando $X = Y$, R se dice una *relación binaria L-fuzzy sobre X*.

Para definir modificadores fuzzy, las operaciones conjuntistas y la composición de relaciones necesitaremos dotar al conjunto parcialmente ordenado de ciertas operaciones, lo cual nos conduce a la noción de retículo residual que definiremos en el capítulo siguiente. Veremos que dado un *retículo residual* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1, e\rangle$ podemos definir las operaciones conjuntistas por las funciones de pertenencia del siguiente modo:
Dados μ_A y μ_B:

1. $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \otimes \mu_B(x)$
2. $\mu_{A\cup B}(x) = ((\mu_A(x) \to \mu_B(x)) \to \mu_B(x)) \wedge ((\mu_B(x) \to \mu_A(x)) \to \mu_A(x))$
3. $\mu_{A'}(x) = \mu_A(x) \to 0$

Del mismo modo, se define la composición de relaciones por:

Definición 1.17. [Gog67] Dadas las relaciones fuzzy $R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$, se define como *composición max-*$\otimes$ de estas relaciones a la relación fuzzy $R \circ S \subseteq X \times Z$, definida por: $\mu_{R\circ S}(x, z) = \bigvee_y (\mu_R(x, y) \otimes \mu_R(y, z))$.

Es claro que un conjunto fuzzy, según la definición original de Zadeh, es también un conjunto L-fuzzy, según la definición de Goguen.

Helena Rasiowa y Nguyen Cat Ho, en [RH92] introducen las nociones de conjunto T-fuzzy, y LT-fuzzy, caracterizados respectivamente por una función de pertenencia que asocia a cada punto de X un valor en el conjunto parcialmente ordenado T, es decir, $\mu_A : X \to T$ y por una función de pertenencia que asocia a cada punto de X un valor en el retículo de conjuntos LT, formado por el conjunto vacío y todos los ideales de T. LT no sólo es un retículo completo, sino que se trata de un álgebra de Heyting.

Capítulo 2

Retículos Residuales

Los retículos residuales son estucturas algebraicas fuertemente ligadas a la lógica matemática, si bien fueron considerados por primera vez por M. Ward y R. Dillworth en 1930 investigando la estructura del retículo de ideales de un anillo. Esencialmente se trata de un retículo enriquecido por un par adjunto $(\otimes, \rightarrow)$. En lo que se refiere a la estructura algebraica, $\otimes$ está asociado a un producto y en lo que respecta a la interpretación lógica, $\rightarrow$ se relaciona con la implicación. Durante años se trabajó en esta operación de adjunción sin encontrar la conexión que ella representaba entre el álgebra y la lógica. En este trabajo comenzaremos tomando la definición de retículo residual generalizado que figura en [Tur92], hasta llegar a la de BL álgebra dada por Hájek en [Háj97], manteniendo una misma notación.
En su primer trabajo Ward y Dilworth [DW39] mencionan una residuación y residuación dual, pero trabajan en un retículo que es a la vez monoide conmutativo. Esko Turunen en [Tur92] prueba que la residuación y la residuación dual coinciden cuando el monoide es conmutativo. En ambos casos el retículo considerado es acotado. Entre la literatura reciente, Jipsen y Tsinakis en [JT02] definen un retículo residual o un retículo residual-monoide ordenado a un retículo que es a la vez monoide ordenado, munido de dos operaciones de residuación (a derecha y a izquierda). Es decir, difiere de la definición anterior de Turunen en que no se le exige al retículo que sea acotado. La existencia de una cota inferior en el retículo asegura, según veremos más adelante, la existencia de una cota superior y, si esta cota superior coincide con la unidad del monoide el retículo residual se denomina integral. Dado un retículo residual, el conjunto L^- de elementos menores o iguales que e, el elemento neutro del monoide, con las operaciones heredadas de L constituyen un retículo residual que es claramente, integral y se denomina el *cono negativo* de L [JT02].

2.1. Retículos residuales generalizados

Definición 2.1. [Tur92] Un *retículo residual generalizado* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1, e\rangle$ es un álgebra de tipo (2,2,2,2,2,0,0,0), satisfaciendo los siguientes axiomas, para todo $x, y, z \in L$:

(L1) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(L2) $x \vee y = y \vee x$

(L3) $x \vee x = x$

(L4) $x \vee (x \wedge y) = x$

(L5) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(L6) $x \wedge y = y \wedge x$

(L7) $x \wedge x = x$

(L8) $x \wedge (x \vee y) = x$

(L9) $x \vee 0 = x$

(L10) $x \wedge 0 = 0$

(L11) $x \vee 1 = 1$

(L12) $x \wedge 1 = x$

(M1) $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$

(M2) $x \otimes e = e \otimes x = x$

(M3) si $x \leq y$, entonces $(x \otimes z) \leq (y \otimes z)$

(M4) si $x \leq y$, entonces $(z \otimes x) \leq (z \otimes y)$

(R1) $x \otimes y \leq z$, si y sólo si $x \leq y \rightarrow_d z$

(R2) $x \otimes y \leq z$, si y sólo si $y \leq x \rightarrow_i z$.

Los axiomas (L1) a (L12) afirman que $\mathbf{L}$ es un retículo, con primer elemento 0 y último elemento 1. Los axiomas (M1) a (M4) aseguran que $\langle L, \otimes, e, \leq\rangle$ es un monoide ordenado, donde $\leq$ es la relación de orden inducida por $\wedge$ (o por $\vee$), es decir: $x \leq y$ sii $x \wedge y = x$ sii $x \vee y = y$, con elemento neutro e. Finalmente los axiomas (R1) y (R2) establecen correspondencias de Galois ([Tur92], [Bir67]).

Observación 2.1. En [GJKO01], un álgebra $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1, e\rangle$ de tipo (2,2,2,2,2,0,0,0), que satisface los axiomas (L1) a (L8), (M1) a (M4) y (R1), (R2), se denomina FL álgebra. Las iniciales hacen alusión a *Full Lambeck* álgebra, ya que conforma el equivalente algebraico de la semántica de las lógicas subestructurales. La diferencia entre esta FL álgebra y el retículo residual generalizado de Turunen radica en las constantes, ya que para Turunen el 0 y el 1 representan respectivamente el primero y el último elemento del retículo.

En una primera lectura la denominación *residuo a derecha* o *residuo a iquierda* puede parecer arbitraria y hasta oscura, pero si recordamos los orígenes veremos claramente justificado su uso. Si escribimos $x \otimes y \leq z$ y existe un elemento x^{-1} podemos escribir $x^{-1} \otimes x \otimes y \leq x^{-1} \otimes z$ o, en forma equivalente, $y \leq x^{-1} \otimes z$. Hemos "dividido a izquierda" por x, y escribimos $x \otimes y \leq z$ equivalente a $y \leq x \setminus z$, o, en nuestro caso, $y \leq x \rightarrow_i z$. Si "dividimos a derecha" por y obtenemos $x \otimes y \otimes y^{-1} \leq z \otimes y^{-1}$, lo que se escribe $x \leq z/y$, o, en nuestro caso, $x \leq y \rightarrow_d z$.

De los axiomas se sigue que $0 \leq e \leq 1$: No se puede decir establecer a priori ninguna otra relación entre las operaciones cero-arias, pero en general consideraremos $0 \neq 1$ ya que si fuera válida esta igualdad el retículo se reduciría a un único elemento. Más adelante definiremos una estructura de retículo residual para la que $e = 1$.

Definición 2.2. [Bir67] Un *monoide ordenado* $\mathbf{M} = \langle M, \otimes, e, \leq\rangle$ es tal que el reducto $\langle M, \otimes, e\rangle$ es un monoide y $\langle M, \leq\rangle$ un conjunto ordenado y se verifican las leyes de monotonía: Si $x \leq y$, entonces $x \otimes z \leq y \otimes z$ y $z \otimes x \leq z \otimes y$, cualquiera que sea $z \in M$.

Proposición 2.1. *Propiedades del primer elemento en un retículo residual generalizado:*

1) $0 \otimes x = x \otimes 0 = 0$

2) $0 \rightarrow_d 0 = 0 \rightarrow_i 0 = 1.$

Demostración:

1) $0 \otimes x = x \otimes 0 = 0$, cualquiera sea $x \in L$.
Considerando la desigualdad $0 \leq x \rightarrow_d 0$ que es equivalente, por (R1), a $0 \otimes x \leq 0$, y $0 \leq x \rightarrow_d 0$ que es equivalente, por (R2), a $x \otimes 0 \leq 0$, se comprueba la igualdad.

2) $0 \rightarrow_i 0 = 0 \rightarrow_d 0 = 1$.
Considerando la desigualdad $x \otimes 0 \leq 0$, que equivale, por (R1), a $x \leq 0 \rightarrow_d 0$, y $0 \otimes x \leq 0$, que equivale, por (R2), a $x \leq 0 \rightarrow_i 0$, para todo $x \in L$ resulta la tesis.

□

Lema 2.1. *Sea* $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1, e\rangle$ *tal que* $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un retículo acotado. Si* $\langle L, \otimes, e\rangle$ *es un monoide y se satisfacen, para todo* $x, y, z \in L$*, las condiciones:*

1) $(x \otimes z) \wedge ((x \vee y) \otimes z) = x \otimes z$

2) $(z \otimes x) \wedge (z \otimes (x \vee y)) = z \otimes x$

3) $(x \rightarrow_d y) \vee (x \rightarrow_d z) \vee (x \rightarrow_d (y \vee z)) = x \rightarrow_d (y \vee z)$

4) $(x \rightarrow_i y) \vee (x \rightarrow_i z) \vee (x \rightarrow_i (y \vee z)) = x \rightarrow_i (y \vee z)$

5) $((x \rightarrow_d y) \otimes x) \vee y = y$

6) $(x \otimes (x \rightarrow_i y)) \vee y = y$

7) $x \wedge (y \rightarrow_d (x \otimes y)) = x$

8) $y \wedge (x \rightarrow_i (x \otimes y)) = y$.

entonces $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1, e\rangle$ *es un retículo residual generalizado.*

Demostración: Para comprobar que se trata de un retículo residual debemos verificar las condiciones de la Definición 2.1. (L1) a (L12) se satisfacen porque $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo acotado, y dado que $\langle L, \otimes, e\rangle$ es un monoide se satisfacen (M1) y (M2). Probemos (M3): Supongamos que $x \leq y$, entonces $x \otimes z \leq y \otimes z$. Si $x \leq y$ resulta $x \vee y = y$ y aplicando 1) resulta $(x \otimes z) \wedge (y \otimes z) = x \otimes z$, de donde $x \otimes z \leq y \otimes z$. Análogamente, aplicando 2) obtenemos (M4).
Probemos ahora (R1): Sea $x \otimes y \leq z$. Resulta entonces $(x \otimes y) \vee z = z$, por lo tanto, aplicando 4) obtenemos $y \rightarrow_d z = y \rightarrow_d ((x \otimes y) \vee z) \geq (y \rightarrow_d (x \otimes y) \vee (y \rightarrow_d z)$. Luego, por 7) podemos afirmar que $y \rightarrow_d z \geq y \rightarrow_d (x \otimes y) \geq x$.
Para la recíproca supongamos que $x \leq y \rightarrow_d z$. Por la ley de monotonía (M3) $x \otimes y \leq y \otimes (y \rightarrow_d z) \leq z$, por 5).
Para probar (R2), nuevamente consideramos $z = (x \otimes y) \vee z$, aplicando 3) obtenemos $x \rightarrow_i z = x \rightarrow_i ((x \otimes y) \vee z) \geq (x \rightarrow_i (x \otimes y)) \vee (x \rightarrow_i z) \geq x \rightarrow_i z$. Luego, por 8) podemos afirmar que $x \rightarrow_i z \geq x \rightarrow_i (x \otimes y) \geq y$. Para la recíproca supongamos que $x \leq y \rightarrow_i z$. Por (M4) que probamos $y \otimes x \leq y \otimes (y \rightarrow_i z) \leq z$, por 6). $\square$

Teorema 2.1. *Un álgebra* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1, e\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 2, 2, 2, 0, 0)$ *es un retículo residual generalizado si y sólo si satisface las siguientes ecuaciones:*

(L1) $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$

(L2) $x \vee y \approx y \vee x$

(L3) $x \vee x \approx x$

(L4) $x \vee (x \wedge y) \approx x$

(L5) $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$

(L6) $x \wedge y \approx y \wedge x$

(L7) $x \wedge x \approx x$

(L8) $x \wedge (x \vee y) \approx x$

(L9) $x \vee 0 \approx x$

(L10) $x \wedge 0 \approx 0$

(P1) $x \otimes (y \otimes z) \approx (x \otimes y) \otimes z$

(P2) $x \otimes e \approx e \otimes x \approx x$

(RG1) $(x \otimes z) \wedge ((x \vee y) \otimes z) \approx x \otimes z$

(RG2) $(z \otimes x) \wedge (z \otimes (x \vee y)) \approx z \otimes x$

(RG3) $(x \rightarrow_i y) \vee (x \rightarrow_i z) \vee (x \rightarrow_i (y \vee z)) \approx x \rightarrow_i (y \vee z)$

(RG4) $(x \rightarrow_d y) \vee (x \rightarrow_d z) \vee (x \rightarrow_d (y \vee z)) \approx x \rightarrow_d (y \vee z)$

(RG5) $((x \rightarrow_d y) \otimes x) \vee y \approx y$

(RG6) $(x \otimes (x \rightarrow_i y)) \vee y \approx y$

(RG7) $x \wedge (y \rightarrow_d (x \otimes y)) \approx x$

(RG8) $y \wedge (x \rightarrow_i (x \otimes y)) \approx y$.

Por lo tanto, los retículos residuales generalizados forman una variedad.

Demostración: Un retículo residual generalizado satisface (L1) a (L10), (P1) y (P2). Dado que $x \leq x \vee y$, por (M3) $x \otimes z \leq (x \vee y) \otimes z$ y $(x \otimes z) \wedge ((x \vee y) \otimes z) = x \otimes z$, es decir se verifica (RG1). Análogamente, por (M4) resulta (RG2).
Aplicando (R1) a la desigualdad $x \rightarrow_d y \leq x \rightarrow_d y$ obtenemos $(x \rightarrow_d y) \otimes x \leq y$ y resulta (RG5). Análogamente, aplicando (R2) a $x \rightarrow_i y \leq x \rightarrow_i y$ obtenemos $x \otimes (x \rightarrow_i y) \leq y$ y resulta (RG6).
Para probar (RG7), consideremos $x \otimes y \leq x \otimes y$, y por (R1) obtenemos $x \leq y \rightarrow_d (x \otimes y)$ que es equivalente a (RG7). (RG8) se sigue aplicando (R2) a la misma desigualdad para obtener $y \leq x \rightarrow_i (x \otimes y)$.
Probar (RG3) es equivalente a probar $(x \rightarrow_i y) \vee (x \rightarrow_i z) \leq x \rightarrow_i (y \vee z)$. Dado que $y \leq y \vee z$, por (RG6) podemos afirmar que $(x \rightarrow_i y) \otimes x \leq y \leq y \vee z$, por lo tanto, $(x \rightarrow_i y) \otimes x \leq y \vee z$, aplicando (R2) obtenemos $x \rightarrow_i y \leq x \rightarrow_i (y \vee z)$. Análogamente se ve que $x \rightarrow_i z \leq x \rightarrow_i (y \vee z)$. De ambas desigualdades podemos afirmar que $(x \rightarrow_i y) \vee (x \rightarrow_i z) \leq x \rightarrow_i (y \vee z)$. Probar (RG4) es equivalente a probar

$(x \rightarrow_d y) \vee (x \rightarrow_d z) \leq x \rightarrow_d (y \vee z)$. Dado que $y \leq y \vee z$, por (RG5) podemos afirmar que $(x \rightarrow_d y) \otimes x \leq y \leq y \vee z$, por lo tanto, $(x \rightarrow_d y) \otimes x \leq y \vee z$, aplicando (R1) obtenemos $x \rightarrow_d y \leq x \rightarrow_d (y \vee z)$. Análogamente se ve que $x \rightarrow_d z \leq x \rightarrow_d (y \vee z)$. De ambas desigualdades podemos afirmar que $(x \rightarrow_d y) \vee (x \rightarrow_d z) \leq x \rightarrow_d (y \vee z)$. Para ver la recíproca, (L1) a (L10) afirman que $\langle L, \wedge, \vee, 0\rangle$ es un retículo con primer elemento. (P1) y (P2) afirman que $\langle L, \otimes, e\rangle$ es un monoide. Por el Lema 2.1 el retículo tiene último elemento y el resultado sigue de la Proposición 2.1. □

Observación 2.2. En [Gal03] puede encontrarse otra base ecuacional para esta variedad dada por las identidades de monoide, de retículo y las siguientes, relacionadas con la residuación:

(RG′1) $x \approx x \wedge (y \rightarrow_d ((x \otimes y) \vee z))$

(RG′2) $y \approx y \wedge (x \rightarrow_i ((x \otimes y) \vee z))$

(RG′3) $x \otimes (y \vee z) \approx (x \otimes y) \vee (x \otimes z)$

(RG′4) $(y \vee z) \otimes x \approx (y \otimes x) \vee (z \otimes x)$

(RG′5) $((y \rightarrow_d x) \otimes y) \vee x \approx x$

(RG′6) $(y \otimes (y \rightarrow_i x)) \vee x \approx x$.

Definición 2.3. [DP02] Dados dos conjuntos parcialmente ordenados, $\langle P, \leq\rangle$, $\langle Q, \preceq\rangle$, dos aplicaciones $\phi : P \rightarrow Q$ y $\psi : Q \rightarrow P$, llamadas respectivamente *derecha* e *izquierda*, establecen una *correspondencia de Galois* entre P y Q si $\phi(x) \preceq y$ si y sólo si $x \leq \psi(y)$. ϕ se suele llamar el *adjunto inferior* y ψ el *adjunto superior* haciendo referencia al lado de la desigualdad en que aparecen.

Observación 2.3. Birkhoff [Bir67] define la correspondencia de Galois, dados dos conjuntos parcialmente ordenados, $\langle P, \leq\rangle$, $\langle Q, \preceq\rangle$, como dos aplicaciones $\phi : P \rightarrow Q$ y $\psi : Q \rightarrow P$ que satisfacen las siguiente condiciones para todo $x, x_1, x_2 \in P$, $y, t_1, y_2 \in Q$:

(G1) Si $x_1 \leq x_2$, entonces $\phi(x_2) \preceq \phi(x_1)$

(G2) Si $y_1 \preceq y_2$, entonces $\psi(y_2) \leq \psi(y_1)$

(G3) $x \leq \psi(\phi(x))$, $\quad y \preceq \phi(\psi(y))$.

Veamos la relación entre ambas definiciones:

Lema 2.2. *Dados dos conjuntos parcialmente ordenados, $\langle P, \leq\rangle$, $\langle Q, \preceq\rangle$ y dos aplicaciones $\phi : P \rightarrow Q$ y $\psi : Q \rightarrow P$, si $\phi(x) \preceq y$ si y sólo si $x \leq \psi(y)$, entonces se satisfacen* (G1), (G2) *y* (G3) *de la Observación* 2.3*. Recíprocamente, si ϕ y ψ satisfacen* (G1), (G2) *y* (G3)*, entonces establecen una correspondencia de Galois en el sentido de la Definición* 2.3*.*

Demostración: Probemos en primer lugar (G3): Por la propiedad reflexiva podemos afirmar que $\phi(x) \preceq \phi(x)$ para todo $x \in P$. Aplicando la Definición 2.3 con $y = \phi(x)$ resulta $x \leq \psi(\phi(x))$. Análogamente, $\psi(y) \leq \psi(y)$ para todo $y \in Q$. Aplicando la Definición 2.3 con $x = \psi(y)$ resulta $\phi(\psi(y)) \preceq y$.
Para probar (G2), consideremos $x_1 \leq x_2$, acabamos de ver que $x_2 \leq \psi(\phi(x_2))$, por la propiedad transitiva decimos que $x_1 \leq \psi(\phi(x_2))$ y aplicando la Definición 2.3 resulta $\phi(x_1) \preceq \phi(x_2)$.
Finalmente, para probar (G1), consideremos $y_1 \preceq y_2$, acabamos de ver que $\phi(\psi(y_1)) \preceq y_1$, por la propiedad transitiva decimos que $\phi(\psi(y_1)) \preceq y_2$ y aplicando la Definición 2.3 resulta $\psi(y_1) \leq \psi(y_2)$.

□

Veamos cuáles son las aplicaciones que establecen conexiones de Galois en un retículo residual generalizado:

Proposición 2.2. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1, e\rangle$ un retículo residual generalizado, y consideremos $P = Q = \langle L, \leq\rangle$, el conjunto L ordenado con el mismo orden del retículo. Para cada $y \in L$ definimos:*

$$\phi_y^{(d)} : L \to L \text{ por } \phi_y^{(d)}(x) = x \otimes y \text{ y } \psi_y^{(d)} : L \to L \text{ por } \psi_y^{(d)}(z) = y \rightarrow_d z. \tag{2.1}$$

Estas aplicaciones establecen, para cada $y \in L$ una conexión de Galois, que denominaremos "a derecha".
Análogamente, para cada $x \in L$ definimos:

$$\phi_x^{(i)} : P \to Q \text{ por } \phi_x^{(i)}(y) = x \otimes y \text{ y } \psi_x^{(i)} : Q \to P \text{ por } \psi_x^{(i)}(z) = x \rightarrow_i z. \tag{2.2}$$

Estas aplicaciones establecen, para cada $x \in L$ una conexión de Galois, que denominaremos "a izquierda".

Demostración: Verifiquemos en primer lugar que para cada $y \in L$ las aplicaciones definidas en (2.1) establecen una correspondencia de Galois. Para ello comprobaremos la condición de la Definición 2.3.
Sean $x, z \in L$. Debemos probar que $\phi_y^{(d)}(x) \leq z$ si y sólo si $x \leq \psi_y^{(d)}(z)$.
Por la definición de $\phi_y^{(d)}$ y $\phi_y^{(d)}$ esta afirmación es equivalente a $x \otimes y \leq z$ si y sólo si $x \leq y \rightarrow_d z$, que se verifica por (R1).
Sea $x \in L$, veamos que las aplicaciones definidas en (2.2) establecen una correspondencia de Galois:
Sean $y, z \in L$. Debemos probar que $\phi_x^{(i)}(y) \leq z$ si y sólo si $y \leq \psi_x^{(i)}(z)$.
Por la definición de $\phi_x^{(i)}$ y $\phi_x^{(i)}$ esta afirmación es equivalente a $x \otimes y \leq z$ si y sólo si $y \leq x \rightarrow_i z$, que se verifica por (R2).

□

Observación 2.4. En la Proposición 2.2 hemos establecido correspondencias de Galois para cada residuación. Birkhoff establece una correspondencia de Galois para las funciones $\phi(x) = x \to 0$ y $\psi(y) = y \to 0$, que hemos generalizado en la siguiente proposición:

Proposición 2.3. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to_i, \to_d, 0, 1, e\rangle$ un retículo residual generalizado. Si $\phi : L \to L$ definida por $\phi(x) = x \to_i z$ y $\psi : L \to L$ por $\psi(x) = x \to_d z$, para cualquier $z \in L$, entonces ϕ y ψ establecen una correspondencia de Galois en L.*

Demostración: Sea $x \leq y$, entonces $x \otimes (y \to_i z) \leq y \otimes (y \to_i z)$, por (M3). Por (RG6) $y \otimes (y \to_i z) \leq z$ y aplicando (R2) a la desigualdad $x \otimes (y \to_i 0) \leq z$ resulta $y \to_i z \leq x \to_i z$, o lo que es lo mismo, $\phi(y) \leq \phi(x)$. En forma análoga se prueba que $\psi(y) \leq \psi(x)$.
La expresión $x \leq \psi(\phi(x))$ es equivalente a $x \leq (x \to_i z) \to_d z$, que por (R1) es equivalente a $x \otimes (x \to_i z) \leq z$, que se verifica por (RG6). Del modo similar se puede ver que $y \leq \phi(\psi(y))$. □

Lema 2.3. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to_i, \to_d, 0, 1, e\rangle$ un retículo residual generalizado, entonces se satisfacen:*

1) $y \to_d z = \text{máx}\{t : t \otimes y \leq z\}$.

2) $y \to_i z = \text{máx}\{t : y \otimes t \leq z\}$.

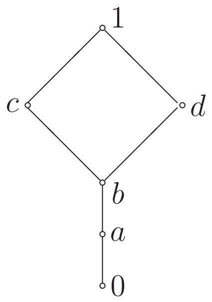
Demostración:

1) $x \otimes y \leq z$ es equivalente a $x \leq y \to_d z$, entonces, $y \to_d z$ debe ser mayor que cualquier t que satisfaga $t \otimes y \leq z$. En símbolos: $y \to_d z \geq \text{máx}\{t : t \otimes y \leq z\}$. Por (M3) si $x \leq y \to_d z$ resulta que $x \otimes y \leq (y \to_d z) \otimes y \leq z$, por el Lema 2.1.5) y resulta que $y \to_d z \in \{t : t \otimes y \leq z\}$, de donde $y \to_d z = \text{máx}\{t : t \otimes y \leq z\}$.

2) $x \otimes y \leq z$ es equivalente a $y \leq x \to_i z$, entonces, $x \to_i z$ debe ser mayor que cualquier t que satisfaga $x \otimes t \leq z$. En símbolos: $x \to_i z \geq \text{máx}\{t : x \otimes t \leq z\}$. Por (M4) si $y \leq x \to_i z$ resulta que $x \otimes y \leq x \otimes (x \to_i z)y \leq z$, por el Lema 2.1.6) y resulta que $x \to_i z \in \{t : x \otimes t \leq z\}$, de donde $x \to_i z = \text{máx}\{t : x \otimes t \leq z\}$.

□

Ejemplo 2.1. Consideremos en el retículo **L** indicado por la figura, con la operación $\otimes$ definida por:



$\otimes$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a	a
b	0	a	a	a	a	b
c	0	a	a	a	b	c
d	0	a	a	a	b	d
1	0	a	b	c	d	1

Se ve fácilmente que $\otimes$ es asociativa, ya que el 0 es elemento absorbente y el 1, neutro, mientras que para $x, y \notin \{0, 1\}$ resulta $x \otimes y = a$ salvo para $c \otimes d = d \otimes d = b$, que operado a derecha o izquierda por cualquier otro elemento da a. La tabla refleja también que la operación $\otimes$ es isótona en ambas variables y no conmutativa.
Definimos $\rightarrow_i$ y $\rightarrow_d$ del siguiente modo:

$\rightarrow_d$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1	1
b	0	1	1	1	1	1
c	0	1	1	1	1	1
d	0	b	1	1	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\rightarrow_i$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1	1
b	0	1	1	1	1	1
c	0	c	1	1	1	1
d	0	c	1	1	1	1
1	0	a	b	c	d	1

Entonces, para cualquier $x, y, z \in L$ se verifican $x \otimes y \leq z$ si y sólo si $x \leq y \rightarrow_i z$ y $x \otimes y \leq z$ si y sólo si $y \leq x \rightarrow_d z$. Es decir, $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1, 1\rangle$ es un retículo residual generalizado.

Proposición 2.4. [JT02] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1, e\rangle$ un retículo residual generalizado. Entonces para cualquier $x, y, z \in L$ se verifica: $y \rightarrow_d (x \rightarrow_i z) = x \rightarrow_i (y \rightarrow_d z)$.*

Demostración: Sean $x, y, z \in L$.
De (R1), cualquiera sea s se verifica que $y \rightarrow_d s \leq y \rightarrow_d s$, y entonces resulta que

$$(y \rightarrow_d s) \otimes y \leq s. \tag{2.3}$$

De (R2), ya que cualquiera que sea t se cumple $x \rightarrow_i t \leq x \rightarrow_i t$, resulta

$$x \otimes (x \rightarrow_i t) \leq t. \tag{2.4}$$

Por (2.4) y (2.3), tomando $t = y \rightarrow_d z$ y $s = z$:
$x \otimes (x \rightarrow_i (y \rightarrow_d z)) \otimes y \leq (y \rightarrow_d z) \otimes y \leq z$

y aplicando nuevamente (R2) y (R1) resulta:

$$x \to_i (y \to_d z) \leq y \to_d (x \to_i z).$$

Por (2.3) y (2.4), tomando $s = x \to_i z$ y $t = z$:

$$x \otimes (y \to_d (x \to_i z)) \otimes y \leq x \otimes (x \to_i z) \leq z,$$

y de (R1) y (R2) resulta:

$$y \to_d (x \to_i z) \leq x \to_i (y \to_d z).$$

□

Lema 2.4. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ un retículo completo, $\otimes$ una operación binaria tal que $\langle L, \otimes, e\rangle$ es monoide ordenado que satisface para todo $x \in L$ y toda familia $\{t_j\}_{j\in J} \subseteq L$,*

$$x \otimes (\bigvee_{j\in J} t_j) = \bigvee_{j\in J}(x \otimes t_j) \quad y \quad (\bigvee_{j\in J} t_j) \otimes x = \bigvee_{j\in J}(t_j \otimes x). \tag{2.5}$$

Entonces es posible definir:

$$x \to_i y = \bigvee\{t : t \otimes x \leq y\} \quad y \quad x \to_d y = \bigvee\{t : x \otimes t \leq y\}. \tag{2.6}$$

satisfaciendo las condiciones

$$x \otimes y \leq z \quad \textit{si y sólo si} \quad x \leq y \to_d z \quad \textit{si y sólo si} \quad y \leq x \to_i z, \tag{2.7}$$

y de manera única.

Demostración: Dado que el retículo es completo, todo conjunto no vacío tiene supremo. Podemos definir entonces $x \to_i y = \bigvee\{t : t \otimes x \leq y\}$, y $x \to_d y = \bigvee\{t : x \otimes t \leq y\}$. Veamos que se satisface (2.7).
Sea $x \otimes y \leq z$. Entonces, $x \in \{t : t \otimes y \leq z\}$, de donde $x \leq \bigvee\{t : t \otimes y \leq z\} = y \to_i z$. Recíprocamente, si $x \leq y \to_i z$ resulta $x \leq \bigvee\{t : t \otimes y \leq z\}$, en consecuencia, por (M3), $x \otimes y \leq t \otimes y \leq z$, es decir, $x \otimes y \leq z$.
Por otra parte, si $x \otimes y \leq z$, entonces $y \in \{t : x \otimes t \leq z\}$, de donde $y \leq \bigvee\{t : x \otimes t \leq z\} = x \to_d z$. Supongamos, recíprocamente, que $y \leq x \to_d z$, es decir, $y \leq \bigvee\{t : x \otimes t \leq z\}$, en consecuencia $y \leq t$ para todo t tal que $x \otimes t \leq z$ y por (M4) $x \otimes y \leq x \otimes t \leq z$, esto es, $x \otimes y \leq z$.
Hemos definido los operadores $\to_i$ y $\to_d$ y probamos que se satisface (2.7). Para ver la unicidad supongamos que existen $\Rightarrow_i$, $\Rightarrow_d$ satisfaciendo:

$$x \otimes y \leq z \quad \text{si y sólo si} \quad x \leq y \Rightarrow_d z \quad \text{si y sólo si} \quad y \leq x \Rightarrow_i z, \tag{2.8}$$

y probemos que $x \Rightarrow_i y = x \to_i y$ y $x \Rightarrow_d y = x \to_d y$ para todo $x, y \in L$.
Dado que $x \Rightarrow_d y \leq x \Rightarrow_d y$, por (2.8) afirmamos que $(x \Rightarrow_d y) \otimes x \leq y$, aplicando (2.7) resulta $x \Rightarrow_d y \leq x \to_d y$. Recíprocamente, consideramos $x \to_d y \leq x \to_d y$, que por (2.7) resulta $(x \to_d y) \otimes x \leq y$ y por (2.8) $x \to_d y \leq x \Rightarrow_d y$ y resulta la igualdad.
Dado que $x \Rightarrow_i y \leq x \Rightarrow_i y$, por (2.8) afirmamos que $x \otimes (x \Rightarrow_i y) \leq y$, aplicando (2.7) resulta $x \Rightarrow_i y \leq x \to_i y$. Recíprocamente, consideramos $x \to_i y \leq x \to_i y$, que por (2.7) resulta $x \otimes (x \to_i y) \leq y$ y por (2.8) $x \to_i y \leq x \Rightarrow_i y$ y resulta la igualdad.

□

Corolario 2.1. *En las condiciones del Lema 2.4, $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1, e\rangle$ resulta un retículo residual generalizado.*

Lema 2.5. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ un retículo completo, $\rightarrow_d, \rightarrow_i$ dos operaciones binarias que satisfacen, para todo $x, y, z, \in L$:*

i) *Si $x \leq y$, entonces* $z \rightarrow_d x \leq z \rightarrow_d y$ *e* $y \rightarrow_d z \leq x \rightarrow_d z$,
$z \rightarrow_i x \leq z \rightarrow_i y$ *e* $y \rightarrow_i z \leq x \rightarrow_i z$,

ii) *cualquiera sea la familia* $\{t_j\}_{j\in J}$

$$x \rightarrow_d (\bigwedge_{j\in J} t_j) = \bigwedge_{j\in J}(x \rightarrow_d t_j), \qquad x \rightarrow_i (\bigwedge_{j\in J} t_j) = \bigwedge_{j\in J}(x \rightarrow_i t_j), \tag{2.9}$$

iii) *y*

$$x \leq y \rightarrow_d z \text{ si y sólo si } y \leq x \rightarrow_i z \tag{2.10}$$

entonces es posible definir:

$$x \otimes y = \bigwedge\{t : x \leq y \rightarrow_i t\} = \bigwedge\{t : y \leq x \rightarrow_d t\}, \tag{2.11}$$

satisfaciendo la condición de par adjunto, y de manera única.

Demostración: Basta probar que se satisface la condición de par adjunto y la unicidad, ya que el retículo completo asegura la existencia del ínfimo para cualquier subconjunto no vacío. Recordemos que, por definición, $\bigwedge\emptyset = 1$.
Observemos en primer lugar que $\{t : x \leq y \rightarrow_i t\} = \{t : y \leq x \rightarrow_d t\}$. Veamos que se satisface (R2) y por la condición (2.10) queda probado (R1):
($\Rightarrow$) Sea $x \otimes y \leq z$. Por (2.11), $\bigwedge\{t : x \leq y \rightarrow_i t\} \leq z$, entonces $y \rightarrow_i (\bigwedge_{x\leq y\rightarrow_i t} t) \leq y \rightarrow_i z$.
Por (2.9), $\bigwedge_{x\leq y\rightarrow_i t} (y \rightarrow_i t) = y \rightarrow_i (\bigwedge_{x\leq y\rightarrow_i t} t)$ y resulta $x \leq y \rightarrow_i z$.
($\Leftarrow$) Sea $x \leq y \rightarrow_i z$. Entonces $z \in \{t : x \leq y \rightarrow_i t\}$ y por lo tanto $x \otimes y \leq z$.

Probemos la unicidad: sean $\otimes_1, \otimes_2$ satisfaciendo (R1) (o (R2)): Dado que $x \otimes_1 y \leq x \otimes_1 y$ resulta $x \leq y \rightarrow_d (x \otimes_1 y)$ que es equivalente a $x \otimes_2 y \leq x \otimes_1 y$. Análogamente se prueba que $x \otimes_1 y \leq x \otimes_2 y$ y resulta la igualdad.

□

Lema 2.6. *En las condiciones del Lema 2.5, si, además,*

$$x = 1 \rightarrow_d x = 1 \rightarrow_i x, \text{ para todo } x \in L, \tag{2.12}$$

entonces, para todo $x, y, z \in L$:

1) $1 = x \to_d x = x \to_i x$

2) $x \leq y$ *es equivalente a* $x \to_i y = 1$

3) $x \leq y$ *es equivalente a* $x \to_d y = 1$

4) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

5) $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x.$

Demostración:

1) Por la condición (2.12) afirmamos que $x = 1 \to_d x$, y por (2.10) $x \leq 1 \to_d x$ es equivalente a $1 \leq x \to_i x$, de donde $x \to_i x = 1$. Análogamente se ve que $x \to_d x = 1$.

2) $x \leq y = 1 \to_d y$, por (2.12) y por (2.10) $x \leq 1 \to_d y$ es equivalente a $1 \leq x \to_i y$, que es equivalente a $x \to_i y = 1$.

3) $x \leq y = 1 \to_i y$, por (2.12) y por (2.10) $x \leq 1 \to_i y$ es equivalente a $1 \leq x \to_d y$, que es equivalente a $x \to_d y = 1$.

4) $(x \otimes y) \otimes z \leq (x \otimes y) \otimes z$ es equivalente, por (R1) a $x \otimes y \leq z \to_d ((x \otimes y) \otimes z)$, y por (R2) $y \leq x \to_i (z \to_d ((x \otimes y) \otimes z))$. Por la Proposición 2.4, esto es equivalente a $y \leq z \to_d (x \to_i ((x \otimes y) \otimes z))$, por (R2) es equivalente a $y \otimes z \leq x \to_i ((x \otimes y) \otimes z)$, y finalmente por (R2) equivale a $x \otimes (y \otimes z) \leq (x \otimes y) \otimes z$. Por un procedimiento análogo vemos que $(x \otimes y) \otimes z \leq x \otimes (y \otimes z)$, y resulta la igualdad.

5) Por (2.12) $x \leq 1 \to_d x$, que es equivalente, por (R1) a $x \otimes 1 \leq x$. Consideremos ahora $x \otimes 1 \leq x \otimes 1$, que por (R2) equivale a $1 \leq x \to_i (x \otimes 1)$, y por la condición (2.10) equivale a $x \leq 1 \to_d (x \otimes 1) = x \otimes 1$, por (2.12). De ambas desigualdades, por la propiedad antisimétrica resulta la igualdad.
Análogamente se prueba $1 \otimes x = x$.

$\square$

Teorema 2.2. *En las condiciones del Lema 2.6,* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to_d, \to_i, 0, 1, e \rangle$ *es un retículo residual generalizado.*

Demostración: Por el Lema 2.5 sabemos que se satisfacen (L1) a (L12), y (R1) y (R2). Tomando $e = 1$ hemos probado (M1) y (M2) en el Lema 2.6. Para ver (M3), notemos que $x \otimes z = \bigwedge \{t : x \leq z \to_i t\} = \bigwedge T$ e $y \otimes z = \bigwedge \{s : y \leq z \to_i s\} = \bigwedge S$. Si $x \leq y$ y $s \in S$, entonces $x \leq y \leq z \to_d s$ y resulta que $s \in T$, es decir, si $x \leq y$ resulta $S \subseteq T$ y, en consecuencia $\bigwedge T \leq \bigwedge S$, es decir, $x \otimes z \leq y \otimes z$. La demostración de (M4) es análoga. $\square$

Proposición 2.5. [Tur92] *Sea* $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to_i, \to_d, 0, 1, e\rangle$ *un retículo residual generalizado. Entonces si* $\otimes$ *es conmutativa,* $\to_i = \to_d$.

Demostración: Sean $y, z \in \mathbf{L}$. Dado que $y \to_i z \leq y \to_i z$, por (R1) y la conmutatividad resulta $y \otimes (y \to_i z) \leq z$, y por (R2) $y \to_i z \leq y \to_d z$. Análogamente se puede ver que $y \to_d z \leq y \to_i z$, de donde resulta la igualdad. □

Bajo estas condiciones, podemos afirmar, entonces

$$x \otimes y \leq z \quad sii \quad x \leq y \to z \tag{2.13}$$

donde $\to = \to_i = \to_d$ y se denomina el *residuo*, con respecto a la operación binaria $\otimes$ denominada *producto*.

Definición 2.4. [Tur92] El par $(\otimes, \to)$ satisfaciendo (2.13) se dice un *par adjunto*.

Definición 2.5. Algunos autores ([HRT01], [JT02]) definen un *producto residuado* $\otimes$ si existe una operación $\to$ que satisfaga:

$$x \otimes y \leq z \quad sii \quad x \leq y \to z \quad sii \quad y \leq x \to z$$

y llaman *retículo residual* a $\langle L, \wedge, \vee, \otimes \to, e\rangle$, donde $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo (no necesariamente acotado), $\langle L, \otimes, e\rangle$ un monoide ordenado y $\to$ un residuo para $\otimes$.

Observación 2.5. Al definir retículo residual generalizado probamos en la Proposición 2.2 que se establece una conexión de Galois a derecha y otra a izquierda para cada elemento de L. Si $\otimes$ es conmutativa el residuo es único y para cada $x \in L$ definiendo:

$$\psi_x : P \to Q \text{ por } \psi_x(y) = x \otimes y \text{ y } \phi_x : Q \to P \text{ por } \phi_x(y) = x \to y. \tag{2.14}$$

vemos que ψ, ϕ establecen una correspondencia de Galois.
En la Proposición 2.3 se establece una conexión de Galois simétrica que pierde sentido al ser $\to_i = \to_d$.

Proposición 2.6. *Sea* $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee\rangle$ *un retículo y* $(\otimes, \to)$ *un par adjunto para* $\boldsymbol{L}$. *Entonces, si* $\boldsymbol{L}$ *tiene primer elemento, necesariamente tiene último elemento.*

Demostración: Sea 0 el primer elemento de $\mathbf{L}$, por la Proposición 2.1, $0 = x \otimes 0 \leq 0$, lo que es equivalente a decir que $x \leq 0 \to 0$, cualquiera que sea $x \in L$. Es decir, $0 \to 0$ es el último elemento del retículo. □

Observación 2.6. Podría pensarse dualmente que la existencia de una cota superior garantiza la presencia de un primer elemento. Esto no es cierto como lo veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2. Consideremos el conjunto $C = \{2^{-k}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$, con el orden natural. Entonces $\mathbf{C} = \langle C, \wedge, \vee, 1\rangle$ es un retículo con último elemento. El producto habitual y $\rightarrow$ definida por

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y/x & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

conforman par adjunto, ya que, tratándose de números reales positivos $x.y \leq z$ si y sólo si $x \leq z/y$, es decir, $x \leq y \rightarrow z$, siempre que $y \not\leq z$. Si $y \leq z$ se verifica trivialmente, ya que $x.y \leq y$ y $x \leq 1$ cualquiera que sea $x \in C$.

Proposición 2.7. [Höh95] *Dada el álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1, e\rangle$, tal que $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo con primer y último elemento y $\langle L, \otimes, e, \leq\rangle$ un monoide conmutativo ordenado, si existe una operación binaria $\rightarrow$ tal que $(\otimes, \rightarrow)$ sea un par adjunto, entonces el residuo $\rightarrow$ está unívocamente determinado por:*

$$x \rightarrow y = \bigvee \{z : x \otimes z \leq y\}. \tag{2.15}$$

Demostración: Sea $Z = \{z : x \otimes z \leq y\}$. Dado que $x \rightarrow y \leq x \rightarrow y$, por (2.13) $x \otimes (x \rightarrow y) \leq y$, luego $x \rightarrow y \in Z$ y también por (2.13) $z \leq x \rightarrow y$, cualquiera que sea $z \in Z$, de donde $x \rightarrow y = \bigvee\{z : z \otimes x \leq y\}$.
La unicidad de la definición ya está probada en la Proposición 2.5. $\square$

Observación 2.7. El residuo $x \rightarrow y$ se define por $\bigvee \{z : x \otimes z \leq y\}$ pero hemos visto que $x \rightarrow y \in \{z : x \otimes z \leq y\}$, entonces es el último elemento del conjunto [Bir67].

Definición 2.6. Un *retículo residual* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, e\rangle$ es un álgebra de tipo (2,2,2,2,0,0) que satisface los axiomas:

(L1) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(L2) $x \vee y = y \vee x$

(L3) $x \vee x = x$

(L4) $x \vee (x \wedge y) = x$

(L5) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(L6) $x \wedge y = y \wedge x$

(L7) $x \wedge x = x$

(L8) $x \wedge (x \vee y) = x$

(L9) $x \vee 0 = x$

(L10) $x \wedge 0 = 0$

(M1) $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$

(M2) $x \otimes e = x$

(M3) si $x \leq y$, entonces $(x \otimes z) \leq (y \otimes z)$

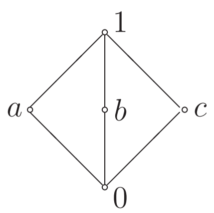
(M5) $x \otimes y = y \otimes x$

(R) $x \otimes y \leq z$, si y sólo si $x \leq y \to z$.

Observación 2.8. Dado que en las condiciones de la definición, la Proposición 2.6 garantiza la existencia del último elemento 1, se infiere de ésta que un retículo residual es un retículo residual generalizado conmutativo, donde $\to_d = \to_i = \to$.

A partir de la Proposición 2.7 se podría deducir que si $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ es un retículo completo, para cualquier $\otimes$ tal que $\langle L, \otimes, e, \leq \rangle$ es un monoide ordenado abeliano, puede definirse una operación $\to$ satisfaciendo la condición de par adjunto (2.13) que haga a $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1, e \rangle$ un retículo residual. Esto, en general, no es cierto como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.3. Sea el retículo dado por el diagrama de Hasse y la operación $\otimes$ por la tabla:



$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
b	0	0	0	0	b
c	0	0	0	c	c
1	0	a	b	c	1

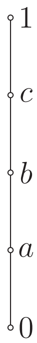
$\otimes$ es asociativa, isótona y conmutativa.
Dado que L es finito, es completo, y por lo tanto existe $\bigvee\{t : y \otimes t \leq z\}$, cualesquiera sean $y, z \in L$. Entonces, si se define $x \to y = \bigvee\{t : x \otimes t \leq y\}$, la operación residuo está dada según la siguiente tabla:

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1
1	0	a	b	c	1

Pero no es cierto que $(\otimes, \to)$ sea un par adjunto ya que $c \leq c \to b$ y $c \otimes c = c \nleq b$.
Luego, no es posible definir una estructura de retículo residual en la que el producto coincida con el dado en la tabla.

Observamos que en el retículo anterior el producto definido no distribuye con respecto al supremo. En efecto: $c \otimes (a \vee b) \neq (a \otimes c) \vee (b \otimes c)$.
Más adelante veremos que la distributividad del producto respecto al supremo es suficiente para que el par adjunto dote al monoide de una estructura residuada.
Veamos un ejemplo donde la ecuación $x \otimes (y \vee z) = (x \otimes y) \vee (x \otimes z)$ es válida para todo $x, y, z \in L$.

Ejemplo 2.4. Sea el retículo $\mathcal{C}$, con la operación $\otimes$ definida por la tabla:



$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
b	0	0	0	a	b
c	0	0	a	b	c
1	0	a	b	c	1

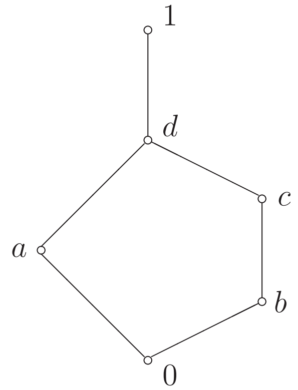
$\otimes$ es asociativa, isótona, conmutativa y distribuye con respecto al supremo.
L es finito y por lo tanto es completo, entonces, existe $\bigvee\{t : y \otimes t \leq z\}$, cualesquiera que sean $y, z \in L$. Definiendo $x \to y = \bigvee\{t : y \otimes t \leq z\}$ obtenemos la siguiente tabla:

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1
b	b	c	1	1	1
c	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	1

En este caso podemos verificar que $(\otimes, \to)$ satisface la condición de par adjunto (2.13), y en consecuencia, $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, e\rangle$ resulta un retículo residual.

De los ejemplos anteriores podríamos inferir que la relación de orden debe ser total o, al menos, el retículo distributivo. Ninguna de estas dos condiciones son necesarias, como vemos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.5. El siguiente es un retículo residual conmutativo, no distributivo:



$\otimes$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	a
b	0	0	0	0	0	b
c	0	0	0	0	0	c
d	0	0	0	0	0	d
1	0	a	b	c	d	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	d	1	1
b	d	d	1	1	1	1
c	d	d	d	1	1	1
d	d	d	d	d	1	1
1	0	a	b	c	d	1

Lema 2.7. [Pav79] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ un retículo completo, $\otimes$ una operación binaria tal que $\langle L, \otimes, e\rangle$ es monoide ordenado conmutativo que satisface para todo $x, y \in L$ y $\{t_i\}_{i\in I} \subseteq L$,*

$$x \otimes (\bigvee_{i\in I} t_i) = \bigvee_{i\in I}(x \otimes t_i). \tag{2.16}$$

Entonces es posible definir:

$$x \rightarrow y = \bigvee\{t : x \otimes t \leq y\}. \tag{2.17}$$

satisfaciendo la condición de par adjunto (2.13), y de manera única.

Demostración: Dado que el retículo es completo, para cualquier conjunto no vacío $\{t : x \otimes t \leq y\}$ existe $\bigvee\{t : x \otimes t \leq y\}$. Si $\{t : x \otimes t \leq y\} = \emptyset$ consideramos $\bigvee \emptyset = 0$. Por otra parte hemos probado en la Proposición 2.7 que en caso de existir el residuo (para un producto dado), está unívocamente determinado por (2.15). Por lo tanto sólo debemos probar que se satisface la condición de par adjunto, es decir:

$$x \otimes y \leq z \qquad \text{si y sólo si} \qquad x \leq y \rightarrow z.$$

($\Rightarrow$)Sea $x \otimes y \leq z$. Entonces $x \in \{t : y \otimes t \leq z\}$, y resulta $x \leq y \rightarrow z$.
($\Leftarrow$) Sea $x \leq y \rightarrow z$. Entonces, por (2.16) y (2.17), $x \otimes y \leq (\bigvee_{y\otimes t\leq z} t) \otimes y = \bigvee_{y\otimes t \leq z}(t \otimes y) = z$.
Es decir, $x \otimes y \leq z$. $\square$

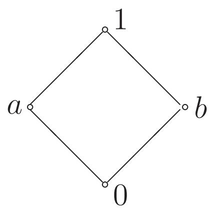
Corolario 2.2. *En las condiciones del lema 2.7, $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, e\rangle$ resulta un retículo residual.*

Ejemplo 2.6. Consideremos $[0, 1]$ con el orden natural y $x \otimes y = x \cdot y$. Es claro que $\langle [0, 1], \cdot, 1, \leq\rangle$ es un monoide ordenado, y se verifica (2.16). Estamos en las condiciones del Lema 2.7, y podemos definir de manera única $x \rightarrow y$ de acuerdo a (2.17).

$$x \rightarrow y = \bigvee\{t : x \cdot t \leq y\} = \begin{cases} y/x & \text{si } x \neq 0; \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 2.9. Si no se satisfacen las condiciones pedidas en el lema, el residuo obtenido puede no ser único, o bien no formar par adjunto con el producto. Veamos para ello dos ejemplos:

Ejemplo 2.7. Veamos un caso finito. Consideremos el retículo L definido por el diagrama de Hasse, con el producto $\otimes$ dado por la tabla:



$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	0	b
1	0	a	b	1

Con esta operación $\langle L, \otimes, 1, \leq\rangle$ es un monoide ordenado, pero no satisface (2.16). Si definimos el residuo según (2.17), obtenemos la siguiente tabla:

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	1	1	1	1
b	1	1	1	1
1	0	a	b	1

pero $(\otimes, \rightarrow)$ no conforman un par adjunto, ya que $1 \otimes a \neq\leq 0$ y $1 \leq a \rightarrow 0$.

Dualmente al Lema 2.7 enunciamos el siguiente:

Lema 2.8. [Pav79] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ un retículo completo, $\rightarrow$ una operación binaria que satisface, para todo $x, y, z, \in L$:*

i) *Si $x \leq y$, entonces* $\quad z \rightarrow x \leq z \rightarrow y \quad$ *e* $\quad y \rightarrow z \leq x \rightarrow z,$

ii) *y cualquiera sea la familia* $\{t_i\}_{i\in I} \subseteq L$

$$x \to (\bigwedge_{i\in I} t_i) = \bigwedge_{i\in I}(x \to t_i), \tag{2.18}$$

entonces es posible definir:

$$x \otimes y = \bigwedge\{t : x \leq y \to t\}, \tag{2.19}$$

satisfaciendo la condición de par adjunto, y de manera única.

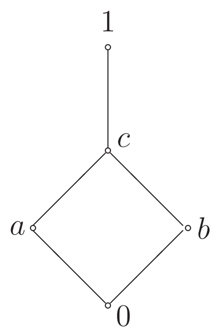
Demostración: Basta probar que se satisface la condición de par adjunto y la unicidad, ya que el retículo completo asegura la existencia del ínfimo para cualquier $\{t : x \leq y \to t\}$ no vacío y, si $\{t : x \leq y \to t\} = \emptyset$ consideramos $\bigwedge \emptyset = 1$.
Probemos en primer lugar: $x \otimes y \leq z$ si y sólo si $x \leq y \to z$.

($\Rightarrow$) Sea $x \otimes y \leq z$. Por (2.19), $\bigwedge\{t : x \leq y \to t\} \leq z$, entonces $y \to (\bigwedge_{x\leq y\to t} t) \leq y \to z$.
Por (2.18), $\bigwedge_{x\leq y\to t}(y \to t) = y \to (\bigwedge_{x\leq y\to t} t)$ y resulta $x \leq y \to z$.

($\Leftarrow$) Sea $x \leq y \to z$. Entonces $z \in \{t : x \leq y \to t\}$ y por lo tanto $x \otimes y \leq z$.

Veamos ahora la unicidad: Sea $T = \{t : x \leq y \to t\}$.
Dado que $x \otimes y \leq x \otimes y$ resulta por la condición (2.13) que $x \leq y \to (x \otimes y)$, entonces $x \otimes y \in T$.
Por (2.13), $x \otimes y \leq t$, cualquiera que sea $t \in T$ y resulta $x \otimes y = \bigwedge\{t : x \leq y \to t\}$. $\square$

Ejemplo 2.8. Ejemplo de construcción del producto a partir del residuo: Consideremos en el retículo representado por el diagrama de Hasse una operación binaria definida por la tabla.



$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1
1	0	a	b	c	1

Esta operación, que consideramos un residuo, satisface las condiciones del Lema 2.8. Entonces se puede definir el producto según (2.19):

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
b	0	0	0	0	b
c	0	0	0	0	c
1	0	0	0	0	1

Así definido $(\otimes, \rightarrow)$ cumple la condición de par adjunto, es decir, satisface (2.13).

Observación 2.10. En general $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, e\rangle$, en las condiciones del Lema 2.8, no es necesariamente un retículo residual, ya que no necesariamente $\langle L, \otimes, e\rangle$ resulta un monoide.
En el Ejemplo 2.8, el producto es asociativo e isótono en ambas variables, pero no existe elemento neutro para la operación $\otimes$. La operación tampoco es conmutativa, pero este hecho no es de relevancia, ya que, simplemente podría generar un nuevo residuo que completara la estructura de retículo residual generalizado.

Ejemplo 2.9. Consideremos la cadena $\mathbf{L} = 0 < a < b < 1$, con la operación $\rightarrow$ definida por:

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	1	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

Esta operación satisface las condiciones del Lema 2.8, lo que nos permite definir $x \otimes y = \bigwedge\{t : x \leq y \rightarrow t\}$, de este modo obtenemos la tabla:

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

$\langle L, \otimes, 1\rangle$ es un monoide no conmutativo. Este hecho hace que se puedan definir dos residuos: $x \rightarrow_d y = \bigvee\{t : x \otimes t \leq y\}$ y $x \rightarrow_i y = \bigvee\{t : t \otimes x \leq y\}$, cuyas tablas son:

$\to_i$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	1	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

$\to_d$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	1	1
a	a	a	1	1
1	0	a	b	1

y $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to_d, \to_i, 0, 1, b\rangle$ resulta un retículo residual generalizado.

Ejemplo 2.10. Consideremos ahora la misma cadena $\mathbf{L} = 0 < a < b < 1$, con el residuo definido por:

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	1	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

Según el Lema 2.8 $x \otimes y = \bigwedge\{t : x \leq y \to t\}$ y $y \otimes x = \bigwedge\{t : y \leq x \to t\}$. Dado que el residuo definido en la tabla satisface $x \leq y \to z$ si y sólo si $y \leq x \to z$, garantiza la conmutatividad de $\otimes$ que resulta:

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

y, por lo tanto, $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, b\rangle$ es un retículo residual.

Ejemplo 2.11. En el intervalo unitario real definimos el residuo por

$$x \to_i y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ y & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

satisface las condiciones del lema. Definamos el producto según (2.19):

$$x \otimes y = \bigwedge\{t : x \leq y \to t\} = x \wedge y.$$

En efecto: $[0,1]$ con el orden habitual es un conjunto totalmente ordenado, entonces las posibilidades son dos:

caso 1): $x \leq y$: $y \rightarrow_i x = x$ y es el menor t que cumple $x \leq y \rightarrow t$. Además, $x \wedge y = x$.

caso 2): $x > y$. $x \leq y \rightarrow y$, e y es el menor t que lo satisface. Además $x \wedge y = y$.

En ambos casos $x \otimes y = x \wedge y$. Este par adjunto se llama par de Gödel, [Tur92].

Observación 2.11. Si bien los retículos residuales son de amplia aplicación en el campo de la lógica algebraica no debemos olvidar que tienen sus raíces en teoría de ideales. En uno de sus trabajos al respecto M. Ward y R. P. Dillworth [DW39] anuncian que las operaciones de multiplicación y residuación que definirán tienen propiedades semejantes a las denominadas de igual forma en teoría de ideales y notan $x \otimes y$ con $x.y$ y $x \rightarrow y$ con $y : x$, de este modo la condición de par adjunto se escribe: $x.y \leq z$ si y sólo si $x \leq z : y$. Entonces, si leemos la fórmula anterior con igualdades, decimos: z es el producto de x e y si y sólo si z dividido y es x.

Los siguientes resultados se han recopilado de [Tur92] y [Höh95].

Lema 2.9. *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, e\rangle$ *un retículo residual. Para todo* $x, y, z \in L$*, con* $1 = 0 \rightarrow 0$*, se verifican:*

1) i) $x \rightarrow 1 = 1$
   ii) $x \otimes 0 = 0$
   iii) $0 \rightarrow x = 1$
   iv) $e \leq x \rightarrow x$
   v) $e \rightarrow x = x$

2) i) $x \otimes (x \rightarrow y) \leq y$
   ii) $y \leq x \rightarrow (x \otimes y)$

3) *Si* $x \leq y$ *entonces* $x \otimes z \leq y \otimes z$

4) *Si* $x \leq y$ *entonces:*

   i) $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$
   ii) $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$

5) $(x \rightarrow y) \otimes (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z$

6) $x \otimes (y \vee z) = (x \otimes y) \vee (x \otimes z)$

7) $x \otimes (y \wedge z) \leq (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$

8) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$

9) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$

10) $(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z)$

11) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$

12) $(x \to z) \vee (y \to z) \leq (x \wedge y) \to z$

13) $(x \to y) \vee (x \to z) \leq x \to (y \vee z)$

14) $x \otimes (x \to y) = y$ *sii* *existe* $z \in L$ *tal que* $x \otimes z = y$

15) $x \to (x \otimes y) = y$ *sii* *existe* $z \in L$ *tal que* $x \to z = y$

16) $x \to y \leq (x \otimes z) \to (y \otimes z)$

17) $(x \to y) \otimes (z \to t) \leq (x \otimes z) \to (y \otimes t)$

18) $(x \to y) \otimes (y \to x) \leq ((x \otimes z) \to (y \otimes z)) \otimes ((y \otimes z) \to (x \otimes z))$

19) $x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z)$

20) $x \to y \leq (z \to x) \to (z \to y)$

21) $y \leq x \to (x \otimes y)$

22) $(x \to y) \otimes z \leq x \to (y \otimes z)$

23) $x \otimes (x \to x) = x$

24) $(x \to x) \otimes (x \to x) = x \to x$

25) $(x \vee y) \otimes (x \wedge y) \leq x \otimes y$

26) $x \leq (x \to y) \to y$

27) $((y \to x) \to x) \to x = y \to x$.

Demostración:

1-i) Dado que $x \to 1 \leq 1$, considerando $1 \otimes x \leq 1$ y (2.13) resulta la igualdad.

1-ii) Por (2.13) $x \otimes 0 \leq 0$ sii $0 \leq x \to 0$, lo que se verifica por definición.

1-iii) Dado que $1 \otimes 0 = 0$, resulta $1 \otimes 0 \leq x$ y por (2.13) $1 \leq 0 \to x$.

1-iv) $e \otimes x = x \leq x$, y por (2.13) $e \leq x \to x$.

1-v) Ya que $x \otimes e = x$, resulta por la condición de par adjunto que $x \leq e \to x$. Como $e \to x = e \to x$, por la misma condición afirmamos $e \otimes (e \to x) \leq x$, y considerando que $e \to x = e \otimes (e \to x)$ resulta $x = e \to x$.

2-i) Resulta de $x \to y \leq x \to y$, la condición (2.13) y la conmutatividad de $\otimes$.

2-ii) Resulta de $x \otimes y \leq x \otimes y$, la condición (2.13) y la conmutatividad de $\otimes$.

3) Sea $x \leq y$. De 2-ii) $y \leq z \to (y \otimes z)$ y resulta $x \leq z \to (y \otimes z)$. Por (2.13), $x \otimes z \leq y \otimes z$.

4-i) Sea $x \leq y$. Por 2-i) $z \otimes (z \to x) \leq x$, entonces $z \otimes (z \to x) \leq y$, por (2.13). Resulta $z \to x \leq z \to y$.

4-ii) Sea $x \leq y$. Por 3) $x \otimes (y \to z) \leq y \otimes (y \to z)$. Por 2-i) $y \otimes (y \to z) \leq z$. Resulta entonces $x \otimes (y \to z) \leq z$ y por (2.13) $y \to z \leq x \to z$.

5) Considerando $x \otimes (x \to y) \otimes (y \to z) \leq y \otimes (y \to z) \leq z$, por 2-ii), y por la condición de par adjunto (2.13) resulta $(x \to y) \otimes (y \to z) \leq x \to z$.

6) Por 2-ii), $y \leq x \to (x \otimes y)$ y $z \leq x \to (x \otimes z)$. Por 4-i) $x \to (x \otimes y) \leq$
$\leq x \to ((x \otimes y) \vee (x \otimes z))$ y $x \to (x \otimes z) \leq x \to ((x \otimes y) \vee (x \otimes z))$, de donde
$y \vee z \leq x \to ((x \otimes y) \vee (x \otimes z))$ y por (2.13), $x \otimes (y \vee z) \leq (x \otimes y) \vee (x \otimes z)$.
Por 3), $x \otimes y \leq x \otimes (y \vee z)$ y $x \otimes z \leq x \otimes (y \vee z)$, de donde $(x \otimes y) \vee (x \otimes z) \leq x \otimes (y \vee z)$ y resulta la igualdad.

7) Por 3), $x \otimes (y \wedge z) \leq x \otimes y$ y $x \otimes (y \wedge z) \leq x \otimes z$. Resulta entonces $x \otimes (y \wedge z) \leq$
$\leq (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$.

8) Dado que $y \wedge z \leq z$ y $y \wedge z \leq y$, por 4-i) resulta $x \to (y \wedge z) \leq x \to z$ y $x \to (y \wedge z) \leq x \to y$, en consecuencia $x \to (y \wedge z) \leq (x \to y) \wedge (x \to z)$.
Por otro lado $(x \to y) \wedge (x \to z) \leq x \to y$ y $(x \to y) \wedge (x \to z) \leq x \to z$. Luego, por 3), $x \otimes ((x \to y) \wedge (x \to z)) \leq x \otimes (x \to y)$ y $x \otimes ((x \to y) \wedge (x \to z)) \leq x \otimes (x \to z)$.
Por 2-i) $x \otimes (x \to y) \leq y$ y $x \otimes (x \to y) \leq z$. Resulta $x \otimes ((x \to y) \wedge (x \to z)) \leq y$ y $x \otimes ((x \to y) \wedge (x \to z)) \leq z$.
Por (2.13), $(x \to y) \wedge (x \to z) \leq x \to y$ y $(x \to y) \wedge (x \to z) \leq x \to z$ de donde sigue la igualdad.

9) Dado que $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$, por 4-ii), $(x \vee y) \to z \leq x \to z$ y $(x \vee y) \to z \leq y \to z$, y, en consecuencia $(x \vee y) \to z \leq (x \to z) \wedge (y \to z)$.
En virtud de 6), resulta:
$((x \to z) \wedge (y \to z)) \otimes (x \vee y) = (((x \to z) \wedge (y \to z)) \otimes x) \vee (((x \to z) \wedge (y \to z)) \otimes y)$
Considerando las desigualdades $x \otimes ((x \to z) \wedge (y \to z)) \leq x \otimes (x \to z)$ e

$y \otimes ((x \to z) \wedge (y \to z)) \leq y \otimes (y \to z)$ y que por el inciso 2-i) $x \otimes (x \to z) \leq z$ e $y \otimes (y \to z) \leq z$, resulta entonces, $((x \to z) \wedge (y \to z)) \otimes (x \vee y) \leq z$.
Por (2.13), $((x \to z) \wedge (y \to z)) \leq (x \vee y) \to z$ y resulta la igualdad.

10) $(x \otimes y) \otimes (x \to (y \to z)) = y \otimes (x \otimes (x \to (y \to z))) \leq y \otimes (y \to z) \leq z$ por 2-i).
Luego, por (2.13), $x \to (y \to z) \leq (x \otimes y) \to z$.
Para la otra desigualdad consideremos $(x \otimes y) \otimes ((x \otimes y) \to z) \leq z$ por 2-i). Por (2.13), $x \otimes ((x \otimes y) \to z) \leq y \to z$ y $(x \otimes y) \to z \leq x \to (y \to z)$, de donde resulta la igualdad.

11) Resulta de la Proposición 2.4.

12) Por 4-ii), podemos escribir: $x \to z \leq (x \wedge y) \to z$ e $y \to z \leq (x \wedge y) \to z$, de donde resulta $(x \to z) \vee (y \to z) \leq (x \wedge y) \to z$.

13) Por 4-i), podemos escribir: $x \to y \leq x \to (y \vee z)$ y $x \to z \leq x \to (y \vee z)$, de donde resulta $(x \to y) \vee (x \to z) \leq x \to (y \vee z)$.

14) Por 2-i), $x \otimes (x \to y) \leq y$. Sea z tal que $x \otimes z = y$. Por (2.13) resulta que $z \leq x \to y$, y por 3), $x \otimes z \leq x \otimes (x \to y)$, en consecuencia $y \leq x \otimes (x \to y)$, de donde resulta la igualdad.
La otra implicación es trivial.

15) Por 2-ii) $y \leq x \to (x \otimes y)$. Sea z tal que $x \to z = y$, entonces por (2.13) resulta $x \otimes y \leq z$ y por por 4-i), $x \to (x \otimes y) \leq x \to z = y$. Considerando $x \otimes y \leq x \otimes y$ y nuevamente la condición (2.13), obtenemos: $x \to (x \otimes y) \geq y$, de donde resulta la igualdad.
La otra implicación es trivial.

16) Por la condición de par adjunto, probar que $x \to y \leq (x \otimes z) \to (y \otimes z)$ es equivalente a probar $(x \to y) \otimes (x \otimes z) \leq y \otimes z$, que se verifica por 2-i) y 3).

17) Para probar $(x \to y) \otimes (z \to t) \leq (x \otimes z) \to (y \otimes t)$ usaremos la condición de par adjunto (2.13) y probaremos $(x \to y) \otimes (z \to t) \otimes (x \otimes z) \leq (y \otimes t)$. $(x \to y) \otimes (z \to t) \otimes (x \otimes z) = (x \otimes (x \to y)) \otimes (z \otimes (z \to t))$, luego aplicando 2-i), obtenemos la desigualdad.

18) Por 16) afirmamos $x \to y \leq (x \otimes z) \to (y \otimes z)$ e $y \to x \leq (y \otimes z) \to (x \otimes z)$, aplicando la ley de monotonía que probamos en 3) resulta, $(x \to y) \otimes (y \to x) \leq ((x \otimes z) \to (y \otimes z)) \otimes ((y \otimes z) \to (x \otimes z))$.

19) Aplicando la condición (2.13) a la propiedad 5), resulta la proposición.

20) $(z \to x) \otimes (x \to y) \leq (z \to y)$ por el inciso 5), la conmutatividad de $\otimes$, y la condición de par adjunto (2.13), resulta la proposición.

21) Dado que $y \otimes x \leq x \otimes y$, aplicando la condición (2.13) resulta $y \leq x \to (x \otimes y)$.

22) Por el inciso anterior, $y \leq z \to (y \otimes z)$; por 4-i), $x \to y \leq x \to (z \to (y \otimes z))$; aplicando el inciso 11), vemos que $x \to (z \to (y \otimes z)) = z \to (x \to (y \otimes z))$ y resulta $x \to y \leq z \to (x \to (y \otimes z))$, y por la condición (2.13), $(x \to y) \otimes z \leq x \to (y \otimes z)$.

23) $x \otimes (x \to x) \leq x$ por 2-i). Por 1-iv) y 3), $x \otimes (x \to x) \geq x \otimes e = x$, en consecuencia $x \otimes (x \to x) = x$.

24) $(x \to x) \otimes (x \to x) \leq x \to x$ en virtud de 5).
Por 1-iv),$(x \to x) \otimes (x \to x) \geq e \otimes (x \to x) = x \to x$ de donde resulta la igualdad.

25) $(x \vee y) \otimes (x \wedge y) = (x \otimes (x \wedge y)) \vee (y \otimes (x \wedge y))$, por la propiedad 6). Además, $(x \otimes (x \wedge y)) \vee (y \otimes (x \wedge y)) \leq (x \otimes y) \vee (y \otimes x)$ y dada la conmutatividad del monoide resulta la propiedad.

26) Por el inciso 2-i) afirmamos que $x \otimes (x \to y) \leq y$, que por la condición de par adjunto (2.13) resulta $x \leq (x \to y) \to y$.

27) $s = r \to x$, entonces $s \to x = (r \to x) \to x$. Buscamos probar $(r \to x) \to x = r$
Por 2-i) $r \otimes (r \to x) \leq x$ y, en consecuencia $r \leq (r \to x) \to x$.
$y \otimes r = y \otimes (y \to x) \leq x$ por 2-i), es decir, $y \otimes r \leq x$, lo que equivale por la condición (2.13) a $y \leq r \to x$, y aplicando 4-ii) resulta $(r \to x) \to x \leq y \to x = r$.

□

Lema 2.10. [Höh95] *Sea* $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, e\rangle$ *un retículo residual. Se verifican:*

1) $(x \otimes z) \wedge ((x \vee y) \otimes z) = x \otimes z$

2) $x \wedge (y \to (x \otimes y)) = x$

3) $((x \to y) \otimes x) \vee y = y$

4) $(z \to x) \wedge (z \to (x \vee y)) = z \to x.$

Demostración: Son formas equivalentes de enunciar, respectivamente, las propiedades 3), 2-i), 2-ii) y 4-i) del Lema 2.9.

1) $(x \otimes z) \wedge ((x \vee y) \otimes z) = x \otimes z$ es equivalente a $x \otimes z \leq (x \vee y) \otimes z$, que se verifica aplicando 3) a la desigualdad $x \leq x \vee y$.

2) $x \wedge (y \to (x \otimes y)) = x$ equivale a decir $x \leq y \to (x \otimes y)$, que es la desigualdad 2-ii).

3) $((x \to y) \otimes x) \vee y = y$ equivale a $(x \to y) \otimes x \leq y$ que está enunciado en 2-i).

4) $(z \to x) \wedge (z \to (x \vee y)) = z \to x$ resulta de 4-i) aplicado a la desigualdad $x \leq x \vee y$.

□

Lema 2.11. [Höh95]*Sea* $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1, e\rangle$ *tal que* $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un retículo acotado. Si* $\langle L, \otimes, e\rangle$ *es un monoide conmutativo y se satisfacen, para todo* $x, y, z \in L$, *las condiciones:*

1) $((x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)) \vee (x \rightarrow (y \vee z)) = x \rightarrow (y \vee z)$

2) $(x \otimes (x \rightarrow y)) \vee y = y$

3) $x \wedge (y \rightarrow (x \otimes y)) = x$

4) $(x \otimes z) \wedge ((x \vee y) \otimes z) = x \otimes z$.

entonces $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1, e\rangle$ *es un retículo residual.*

Demostración: Para comprobar que se trata de un retículo residual debemos verificar las condiciones de la Definición 2.6. (L1) a (L10) se satisfacen porque $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo acotado, dado que $\langle L, \otimes, e\rangle$ es monoide conmutativo se satisfacen (M1), (M2) y (M5). Probemos (M3): Supongamos que $x \leq y$, entonces $x \otimes z \leq y \otimes z$. Si $x \leq y$ resulta $x \vee y = y$ y aplicando 4) resulta $(x \otimes z) \wedge (y \otimes z) = x \otimes z$, de donde $x \otimes z \leq y \otimes z$.
Probemos ahora (R), la condición de par adjunto: Sea $x \otimes y \leq z$. Entonces $(x \otimes y) \vee z = z$, por lo tanto $y \rightarrow z = y \rightarrow ((x \otimes y) \vee z) \geq (y \rightarrow (x \otimes y) \vee (y \otimes z)$, por 1). Resulta entonces $y \rightarrow z \geq y \rightarrow (x \otimes y) \geq x$, por 3). Para la recíproca supongamos que $x \leq y \rightarrow z$. Por la ley de monotonía que probamos $y \otimes x \leq y \otimes (y \rightarrow z) \leq z$ por 2).
Entonces, queda probado que $(\otimes, \rightarrow)$ es un par adjunto, □

Teorema 2.3. *Un álgebra* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1, e\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$ *es un retículo residual si y sólo si satisface las siguientes ecuaciones:*

(L1) $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$

(L2) $x \vee y \approx y \vee x$

(L3) $x \vee x \approx x$

(L4) $x \vee (x \wedge y) \approx x$

(L5) $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$

(L6) $x \wedge y \approx y \wedge x$

(L7) $x \wedge x \approx x$

(L8) $x \wedge (x \vee y) \approx x$

(L9) $x \vee 0 \approx x$

(L10) $x \wedge 0 \approx 0$

(L11) $x \vee 1 \approx 1$

(L12) $x \wedge 1 \approx x$

(P1) $x \otimes (y \otimes z) \approx (x \otimes y) \otimes z$

(P2) $x \otimes y \approx y \otimes x$

(P3) $x \otimes e \approx x$

(P4) $(x \otimes z) \wedge ((x \vee y) \otimes z) \approx x \otimes z$

(RR1) $((x \to y) \vee (x \to z)) \vee (x \to (y \vee z)) \approx x \to (y \vee z)$

(RR2) $(x \otimes (x \to y)) \vee y \approx y$

(RR3) $x \wedge (y \to (x \otimes y)) \approx x$.

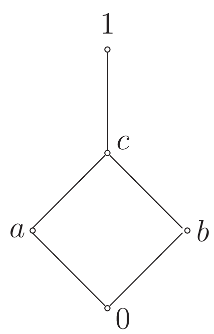
Por lo tanto, los retículos residuales integrales forman una variedad.

Demostración: Un retículo residual satisface (L1) a (L12) y (P1) a (P4) por Definición 2.6. Del Lema 2.9 por el inciso 13) resulta (RR1), por el 2.i) (RR2) y de 2.ii) resulta (RR3). La recíproca sigue del Lema 2.11. □

2.2. Retículos residuales integrales

Muchas lógicas admiten la tesis $x \to x$, esto significa que en el retículo $x \to x = 1$, o dicho de otro modo, $x \to x$ es el último elemento del retículo, cualquiera que sea x. Con las condiciones impuestas hasta el momento no es cierto que se verifique en general.

Ejemplo 2.12. Consideremos el retículo residual $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$:



Con las operaciones:

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	c	1
b	0	b	1	1	1
c	0	c	1	1	1
1	0	1	1	1	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	a	b	c	1
b	0	0	a	a	1
c	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1

Observación 2.12. En virtud del Lema 2.9.4-ii) si $x \rightarrow x = 1$, cualquiera que sea x en el retículo, $y \rightarrow x = 1$ cualquiera que sea $y \leq x$. Aún más, son válidas las siguientes equivalencias:

Lema 2.12. [Höh95] *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, e\rangle$ *un retículo residual, entonces son equivalentes:*

1) $e = 1$*;*

2) $1 = x \rightarrow y$ *si y sólo si* $x \leq y$*;*

3) $x = 1 \rightarrow x$*, cualquiera que sea* $x \in L$*;*

4) $1 = x \rightarrow x$*, cualquiera que sea* $x \in L$*.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2): Sea $1 = e$. Por (2.13) $e \leq x \rightarrow y$ si y sólo si $e \otimes x \leq y$. Reemplazando e por 1, y utilizando el axioma (M2), obtenemos $1 \leq x \rightarrow y$ si y sólo si $x \leq y$.

2) $\Rightarrow$ 3): Por 2), $x \leq 1 \rightarrow x$ es equivalente a $1 \leq x \rightarrow (1 \rightarrow x)$. Por el Lema 2.9.11) $x \rightarrow (1 \rightarrow x)$ =1 $\rightarrow (x \rightarrow x)$, en consecuencia, $x \leq 1 \rightarrow x$ resulta equivalente a $1 \leq 1 \rightarrow (x \rightarrow x)$. Por 2) $1 \leq 1 \rightarrow (x \rightarrow x)$ es equivalente a $1 \leq x \rightarrow x$, y $1 \leq x \rightarrow x$ es equivalente a $x \leq x$, lo cual se verifica trivialmente.
Por 2) $1 \rightarrow x \leq x$ es equivalente a $1 \leq (1 \rightarrow x) \rightarrow x$, que por la condición de par adjunto (2.13) es equivalente a $1 \otimes (1 \rightarrow x) \leq x$ lo que se verifica por el Lema 2.9.2-i). De ambos razonamientos resulta la igualdad.

3) $\Rightarrow$ 4): Dado que 1 es el último elemento, sabemos que $x \rightarrow x \leq 1$, resta ver que $1 \leq x \rightarrow x$. Por (2.13)$1 \leq x \rightarrow x$ es equivalente a $1 \otimes x \leq x$, dado que $x = 1 \rightarrow x$ resulta $1 \otimes x = 1 \otimes (1 \rightarrow x) \leq x$, por el Lema 2.9.2-i)

4) $\Rightarrow$ 1): Por el Lema 2.9.3), resulta $x = x \otimes e \leq x \otimes 1$. Dado que $x \rightarrow x = 1$, resulta 1 el último elemento del conjunto $\{t : x \otimes t \leq x\}$, por la Proposición 2.7 y, por lo tanto, satisface la condición $x \otimes 1 \leq x$, es decir, resulta $x \otimes 1 = x$ y, en consecuencia, $e = 1$.

$\square$

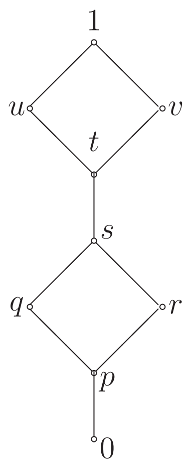
Definición 2.7. [Höh95] Un retículo residual $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, e\rangle$ se dice *integral* si e, es decir, la unidad del monoide, es el último elemento del retículo.

Definición 2.8. [JT02] Dado un retículo residual $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, e\rangle$ se define el *cono negativo* a $\langle L^-, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow^-, 0, e\rangle$, donde $L^- = \{x \in L : x \leq e\}$ y $x \rightarrow^- y = (x \rightarrow y) \wedge e$.

Lema 2.13. *Si $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1, e\rangle$ es un retículo residual, $\langle L^-, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow^-, 0, e\rangle$, el cono negativo de L es un retículo residual integral.*

Demostración: Para verificar que se trata de un retículo residual sólo se debe comprobar (R), ya que (L1) a (M5) se satisfacen trivialmente.
Sean $x, y, z \in L^-$. Si $x \otimes y \leq z$ entonces $x \leq y \rightarrow z$. Dado que $x = x \wedge e$ resulta $x \leq (y \rightarrow z) \wedge e = y \rightarrow^- z$. Si $x \leq y \rightarrow^- z$, pero $y \rightarrow^- z = (y \rightarrow z) \wedge e \leq y \rightarrow z$, de donde $x \otimes y \leq z$ y se verifica (R). La integralidad del retículo residual está asegurada por la propia definición del conjunto L^-. □

Ejemplo 2.13. Ejemplo de retículo residual integral.
Sea el álgebra $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ dada por el diagrama de Hasse y las tablas siguientes:



$\otimes$	0	p	q	r	s	t	u	v	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p	0	0	0	0	0	p	p	p	p
q	0	0	0	0	0	q	q	q	q
r	0	0	0	0	0	r	r	r	r
s	0	0	0	0	0	s	s	s	s
t	0	p	q	r	s	t	t	t	t
u	0	p	q	r	s	t	u	t	u
v	0	p	q	r	s	t	t	v	v
1	0	p	q	r	s	t	u	v	1

$\rightarrow$	0	p	q	r	s	t	u	v	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p	s	1	1	1	1	1	1	1	1
q	s	s	1	s	1	1	1	1	1
r	s	s	s	1	1	1	1	1	1
s	s	s	s	s	1	1	1	1	1
t	0	p	q	r	s	1	1	1	1
u	0	p	q	r	s	v	1	v	1
v	0	p	q	r	s	u	u	1	1
1	0	p	q	r	s	t	u	v	1

.

Ejemplo 2.14. Sea $\langle R, \wedge, \vee, 0, u\rangle$ un retículo acotado. $1 \notin R$, consideremos $R + \{1\}$ el retículo determinado por la relación de orden $x \leq y$ si y sólo si $y = 1$ ó $x \leq_R y$. Si se definen las operaciones binarias $\otimes$ y $\rightarrow$ por:

$$x \otimes y = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 1 \neq y, \\ x \wedge y \text{ en otro caso;} \end{cases} \qquad x \rightarrow y = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq y, \\ y \text{ si } x = 1, \\ u \text{ en otro caso ;} \end{cases}$$

entonces $(\otimes, \rightarrow)$ es un par adjunto.
En efecto: Si $x \otimes y \leq z$ pueden ocurrir tres casos:
caso 1): $x \neq 1 \neq y$. Se verifica $x \otimes y \leq z$ cualquiera sea $z \in L$ e $y \rightarrow z \geq u$, ya que $y \rightarrow z < u$ únicamente si $y = 1$. Entonces $x \leq y \rightarrow z$.
caso 2): $x = 1$; $x \otimes y \leq z$ es equivalente a $y \leq z$ y resulta $y \rightarrow z = 1$ entonces $x \leq y \rightarrow z$.
caso 3): $y = 1$; $x \otimes y \leq z$ es equivalente a $x \leq z$. Además, resulta $y \rightarrow z = 1 \rightarrow z = z$ entonces $x \leq y \rightarrow z$.
Supongamos ahora que $x \leq y \rightarrow z$.
caso 1): $y \leq z$, entonces $y \rightarrow z = 1$ y la desigualdad $x \leq y \rightarrow z$ es válida para todo $x \in L$, y se verifica, aplicando la propiedad transitiva que, $x \otimes y \leq x \wedge y \leq y \leq z$. Es decir, $x \otimes y \leq z$.
caso 2): $y = 1$; $x \leq y \rightarrow z$ es equivalente a $x \leq z$ y como $x \otimes y = x \otimes 1 = x$, resulta $x \otimes y \leq z$.
caso 3): $y \rightarrow z = u$, entonces $y \neq 1$, entonces $y \in R$. Como $x \leq y \rightarrow z$ resulta $x \leq u$ y $x, y \in R$, de donde $x \otimes y = 0$ y se verifica $x \otimes y \leq z$.

Veamos ahora que $\langle R + \{1\}, \otimes, 1, \leq\rangle$ es un monoide conmutativo ordenado:
Probemos en primer lugar la propiedad asociativa. $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$. Nuevamente procederemos por casos:
caso 1): $x = 1$; $1 \otimes (y \otimes z) = y \otimes z = (1 \otimes y) \otimes z$.
caso 2): $y = 1$; $x \otimes (1 \otimes z) = 1 \otimes y = (x \otimes 1) \otimes z$.
caso 3): $z = 1$; $x \otimes (y \otimes 1) = x \otimes y = (x \otimes y) \otimes 1$.
caso 4): $x, y, z \neq 1$; $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes 0 = 0 = 0 \otimes z = (x \otimes y) \otimes z$.

Se ve fácilmente que $x \otimes y = y \otimes x$ para todo $x, y \in R + \{1\}$ y además $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$, por lo tanto $\langle R + \{1\}, \otimes, 1\rangle$ es un monoide conmutativo. Resta ver que es ordenado.
Sea $x \leq y$ en $R + \{1\}$:
caso 1): $x = 1$. Entonces $y = 1$ y cualquiera que sea $z \in R + \{1\}$ verifica $x \otimes z \leq y \otimes z$.
caso 2): $y = 1$. Entonces $y \otimes z = z$ y $x \otimes z$ puede ser 0 ó z. De ambas posibilidades surge $x \otimes z \leq y \otimes z$.
caso 3): $x \neq 1 \neq y$. Entonces $x \otimes z = 0$ e $y \otimes z = 0$, de donde $x \otimes z \leq y \otimes z$.
En cualquier caso Si $x \leq y$, entonces $x \otimes z \leq y \otimes z$ y $\langle R + \{1\}, \otimes, 1, \leq\rangle$ es un monoide conmutativo ordenado.
Resulta, finalmente, que $\langle R + \{1\}, \wedge, \vee, \otimes \rightarrow, 0\rangle$ es un retículo residual integral.

Ejemplo 2.15. Consideremos el conjunto $L = \{x = 1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ con el orden habitual, definimos:

$$x \otimes y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \neq y; \\ x \wedge y & \text{en otro caso ;} \end{cases} \qquad x \to y = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq y, \\ y \text{ si } x = 1, \\ \frac{1}{2} \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que este ejemplo es una instancia del Ejemplo 2.14

Teorema 2.4. *Para que un retículo residual $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, e\rangle$ sea integral es condición necesaria y suficiente que $x \leq y$ si y sólo si $x \to y = 1$.*

Demostración: Inmediata a partir del Lema 2.12. □

Proposición 2.8. *Sea $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1, e\rangle$ un retículo residual. Si existe $z \in L$ tal que $1 \otimes z = e$ entonces $1 = e$.*

Demostración: Sea $1 \otimes z = e$. Por el Lema 2.9.14). $1 \otimes (1 \to e) = e$, pero como $1 = e \otimes 1$, reemplazando se obtiene $1 = (1 \otimes (1 \to e)) \otimes 1$ y por conmutatividad y asociatividad resulta $1 = (1 \otimes 1) \otimes (1 \to e)$. De la desigualdad $e \leq 1$, por el Lema 2.9. 3), $1 \otimes e \leq 1 \otimes 1$ y resulta $1 \leq 1 \otimes 1$, y como 1 es el último elemento $1 = 1 \otimes 1$. Reemplazando en $1 = (1 \otimes 1) \otimes (1 \to e)$ resulta $1 = 1 \otimes (1 \to e) = e$. □

Lema 2.14. *Sea $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0\rangle$ un retículo residual integral. Se verifica:*

1) $0 \to x = 1$

2) $x \otimes y \leq y$

3) $x \leq y \to x$

4) $x \otimes (x \to y) \leq x \wedge y$

5) $((x \wedge y) \to z) \otimes (x \to y) \leq x \to z$

6) $x \to (x \otimes z) \leq x \to z$

7) *Si $x \wedge y = 0$, entonces $x \to y = x \to 0$.*

8) $x \to y = (x \vee y) \to y$

9) *Si $x = y \to x$ e $y \otimes z \leq x$, entonces $z \leq x$.*

10) *Si $x \vee y = 1$, entonces*

i) $x \otimes y = x \wedge y$

ii) $x \vee z = x \vee (y \otimes z)$

iii) $x \vee z = y \rightarrow (x \vee z)$

11) *Si* $x \rightarrow y = x \rightarrow z$ *para todo* $x \in L$*, entonces* $y = z$.
Análogamente, si $z \rightarrow x = y \rightarrow x$ *para todo* $x \in L$*, entonces* $y = z$.

12) $x \vee y \leq ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$.

13) $x \rightarrow (x \vee y) = 1$.

14) $(x \wedge y) \rightarrow x = 1$.

15) $x \leq ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$.

Demostración:

1) Considerando $1 \otimes 0 \leq x$ y la condición de par adjunto (2.13) obtenemos $1 \leq 0 \rightarrow x$.

2) $x \leq 1 = y \rightarrow y$ y por la condición de par adjunto (2.13) resulta $x \otimes y \leq y$.

3) Trivial a partir de 2) y la condición de par adjunto (2.13).

4) Por el Lema 2.9.2-i) resulta $x \otimes (x \rightarrow y) \leq y$; por 2), $x \otimes (x \rightarrow y) \leq x \wedge (x \rightarrow y) \leq x$, y resulta entonces que $x \otimes (x \rightarrow y) \leq (x \wedge y)$.

5) Aplicando a 4) el Lema 2.9.4-ii) resulta $(x \wedge y) \rightarrow z \leq (x \otimes (x \rightarrow y)) \rightarrow z$, pero $(x \otimes (x \rightarrow y)) \rightarrow z = x \rightarrow ((x \rightarrow y)) \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$ y por la condición de par adjunto (2.13) resulta $((x \wedge y) \rightarrow z) \otimes (x \rightarrow y) \leq x \rightarrow z$.

6) $x \rightarrow (x \otimes z) \leq x \rightarrow z$, por la condición (2.13) es equivalente a $x \otimes (x \rightarrow (x \otimes z)) \leq z$ lo que se verifica por el Lema 2.9.2-i) y 2.14.2).

7) $0 \leq y$, luego, por el Lema 2.9.4-i) resulta $x \rightarrow 0 \leq x \rightarrow y$. Considerando $x \rightarrow 0 = \bigvee\{t : x \otimes t \leq 0\}$, y $x \otimes (x \rightarrow y) \leq x \wedge y = 0$, resulta $x \rightarrow y \in \{t : x \otimes t \leq 0\}$ y, en consecuencia $x \rightarrow y \leq x \rightarrow 0$.

8) Por el Lema 2.9.9), $(x \vee y) \rightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow y)$ y, aplicando el Lema 2.12.4), resulta la propiedad.

9) Por los Lemas 2.9.10) y 2.12.2) $z \rightarrow x = z \rightarrow (y \rightarrow x) = (z \otimes y) \rightarrow x = 1$ y nuevamente por el lema 2.12.2) resulta $z \leq x$.

10) i) Por el Lema 2.9.25) $(x \vee y) \otimes (x \wedge y) \leq x \otimes y$. Como $x \vee y = 1$ resulta $x \wedge y \leq x \otimes y$. Por el inciso 2) resulta la otra desigualdad.

10) ii) $z = z \otimes 1 = z \otimes (x \vee y)$. Aplicando el Lema 2.9.6) resulta $z = (z \otimes x) \vee (z \otimes y)$, de donde $x \vee z = x \vee (x \otimes z) \vee (y \otimes z) = x \vee (y \otimes z)$.

10) iii) $x \vee z = 1 \to (x \vee z) = (x \vee y) \to (x \vee z)$. Por el Lema 2.9.9) $(x \vee y) \to (x \vee z) = (x \to (x \vee z)) \wedge (y \to (x \vee z) = y \to (x \vee z))$, aplicando el Lema 2.12.2).

11) Sea $x \to y = x \to z$ para todo $x \in L$. Tomando $x = z$ resulta $z \to y = z \to z = 1$ por Lema 2.12.4) y por Lema 2.12.2) podemos afirmar que $z \leq y$. Tomando $x = y$ resulta $1 = y \to y = y \to z$ e $y \leq z$. Por la propiedad antisimétrica resulta la igualdad.
Sea $y \to x = z \to x$ para todo $x \in L$. Tomando $x = z$ resulta $y \to z = z \to z = 1$ por Lema 2.12.4) y por Lema 2.12.2) podemos afirmar que $y \leq z$. Tomando $x = y$ resulta $1 = y \to y = z \to y$ y $z \leq y$. Por la propiedad antisimétrica resulta la igualdad.

12) Por Lema 2.14.3) $y \leq (x \to y) \to y$ y por Lema 2.9.2-i) y la condición de par adjunto (2.13) $y \leq (y \to x) \to x$. Entonces $y \leq ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$. Análogamente $x \leq ((y \to x) \to x) \wedge ((x \to y) \to y)$, y resulta la propiedad.

13) Por los Lemas 2.12. 4) y 2.9. 8), y la ley de absorción podemos afirmar que: $1 = x \to x = x \to (x \wedge (x \vee y)) = (x \to x) \wedge (x \to (x \vee y)) = 1 \wedge (x \to (x \vee y)) = x \to (x \vee y)$.

14) Por los Lemas 2.12. 4) y 2.9. 8), y la ley de absorción podemos afirmar que: $1 = x \to x = ((x \vee (x \wedge y) \to x) = (x \to x) \wedge ((x \wedge y) \to x) = 1 \wedge ((x \wedge y) \to x) = (x \wedge y) \to x$.

15) $x \leq x \vee y \leq ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x) \leq (x \to y) \to y)$.

□

Observación 2.13. A partir de 2) del lema anterior y la conmutatividad de $\otimes$ se infiere naturalmente que $x \otimes y \leq x \wedge y$. En efecto: $x \otimes y = y \otimes x \leq x$, y también, $x \otimes y \leq y$. Entonces $x \otimes y \leq x \wedge y$.

Lema 2.15. *Sea $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ tal que $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo acotado. Si $\langle L, \otimes, 1\rangle$ es un monoide conmutativo y se satisfacen, para todo $x, y, z \in L$, las condiciones:*

1) $((x \to y) \vee (x \to z)) \vee (x \to (y \vee z)) = x \to (y \vee z)$

2) $(x \otimes (x \to y)) \vee y = y$

3) $x \wedge (y \to (x \otimes y)) = x$

4) $(x \otimes z) \wedge ((x \vee y) \otimes z) = x \otimes z$.

entonces $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *es un retículo residual integral.*

Demostración: Se satisfacen las condiciones del Lema 2.11, por lo tanto podemos afirmar que $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es un retículo residual y dado que el último elemento del retículo es la unidad del monoide resulta integral. $\square$

Teorema 2.5. *Un álgebra* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ *es un retículo residual integral si y sólo si satisface las ecuaciones del Teorema 2.11 y:*

(P5) $x \otimes 1 \approx 1 \otimes x \approx x$

Por lo tanto, los retículos residuales integrales forman una subvariedad de los retículos residuales.

Demostración: Inmediata a partir del Lema 2.11 y el Lema 2.12. $\square$

2.3. Retículos residuales lineales

Lema 2.16. [Höh95] *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, e\rangle$ *un retículo residual integral. Entonces son equivalentes:*

1) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$;

2) $x \rightarrow (y \vee z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$;

3) $(x \wedge y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$.

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2): $x \rightarrow (y \vee z) \geq (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$, por el Lema 2.9.13).
Veamos $x \rightarrow (y \vee z) \leq (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$. Por 1) afirmamos que $(y \rightarrow z) \vee (z \rightarrow y) = 1$, y, en consecuencia, $(x \rightarrow (y \vee z)) \otimes 1 = ((x \rightarrow (y \vee z)) \otimes (y \rightarrow z)) \vee ((x \rightarrow (y \vee z)) \otimes (z \rightarrow y))$. Veamos que $(x \rightarrow (y \vee z)) \otimes (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z$ y $(x \rightarrow (y \vee z)) \otimes (z \rightarrow y) \leq x \rightarrow y$. $x \otimes ((x \rightarrow (y \vee z)) \otimes (y \rightarrow z)) = (x \otimes (x \rightarrow (y \vee z))) \otimes (y \rightarrow z) \leq (y \vee z) \otimes (y \rightarrow z)$ por el Lema 2.9.2-i), aplicando el inciso 6) del mismo lema, resulta que $(y \vee z) \otimes (y \rightarrow z) = (y \otimes (y \rightarrow z)) \vee (z \otimes (y \rightarrow z)) \leq z \vee (z \otimes (y \rightarrow z)) = z$ y por la equivalencia de par adjunto (2.13), y la conmutatividad de $\otimes$, podemos afirmar que $(x \rightarrow (y \vee z)) \otimes (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z$.

2) $\Rightarrow$ 1): Por el Lema 2.9.4-ii) $(x \vee y) \rightarrow x \leq y \rightarrow x$ y $(x \vee y) \rightarrow y \leq x \rightarrow y$, además, por el lema 2.12.4): $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) \geq ((x \vee y) \rightarrow x) \vee ((x \vee y) \rightarrow y) = (x \vee y) \rightarrow (x \vee y) = 1$.

1) $\Rightarrow$ 3): Por 1) tenemos que $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$, entonces $(x \wedge y) \rightarrow z = ((x \wedge y) \rightarrow z) \otimes 1 = ((x \wedge y) \rightarrow z) \otimes ((x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x))$. Por el Lema 2.14.5) y 2) afirmamos que $((x \wedge y) \rightarrow z) \otimes (x \rightarrow y) \leq x \rightarrow z$ y $((x \wedge y) \rightarrow z) \otimes (y \rightarrow z) \leq y \rightarrow z$.

Entonces $(x \wedge y) \to z \leq (x \to z) \vee (y \to z)$ y considerando el Lema 2.9. 12) resulta la igualdad.

3) $\Rightarrow$ 1): Por el Lema 2.9.4-i) y el Lema 2.12.4) afirmamos que $(x \to y) \vee (y \to x) \geq (x \to (x \wedge y)) \vee (y \to (x \wedge y)) = (x \wedge y) \to (x \wedge y) = 1$. □

Observación 2.14. U. Höhle [Höh95] denomina a la condición $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$ *ley fuerte de De Morgan*. Esta denominación puede ser fácilmente justificada observando el siguiente hecho: si en un retículo residual integral que satisface esta condición se define la operación $\neg$ por:

$$\neg x = x \to 0, \tag{2.20}$$

se tienen las leyes de De Morgan.

1. $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$,
2. $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

En efecto:

1. Por la Definición 2.20 y el Lema 2.16, $\neg(x \wedge y) = (x \wedge y) \to 0 = (x \to 0) \vee (y \to 0) = \neg x \vee \neg y$.
2. Por la Definición 2.20, y el Lema 2.9.9) $\neg(x \vee y) = (x \vee y) \to 0 = (x \to 0) \wedge (y \to 0) = \neg x \wedge \neg y$.

Definición 2.9. Llamaremos a los retículos residuales integrales que satisfacen esta condición *retículos residuales lineales*, siguiendo la notación de A. Monteiro, [Mon95]. Hájek, [Háj97] los denomina prelineales.

Lema 2.17. *Si $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es una cadena, entonces satisface la condición de linealidad.*

Demostración: Sea $x, y \in L$, dado que es una cadena se debe cumplir $x \leq y$ ó $y \leq x$. Por el Lema 2.12.2) resulta $x \to y = 1$ ó $y \to x = 1$, en cualquier caso $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$. □

Definición 2.10. Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es un retículo residual, $i \in L$ es *irreducible* si $i = a \vee b$ implica que $i = a$ ó $i = b$.

Lema 2.18. *Si $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es un retículo residual lineal finito, no totalmente ordenado, entonces* 1 *no es un elemento irreducible.*

Demostración: Supongamos por el absurdo que 1 es irreducible, entonces cubre a un único elemento z_0, si z_0 es irreducible cubre a un único z_1, iterando el procedimiento construímos una cadena $z_0 > z_1 > z_2 \cdots$ que tiene primer elemento c, que cubre a a y b incomparables, dado que L es finito y no es totalmente ordenado. En virtud del Lema 2.14.3) podemos afirmar que $b \leq a \to b$ en consecuencia, $a \to b = z_b$ donde $z_b \in \{b\} \cup \{x : x \in L,\ c \leq x < 1\}$, por el Lema 2.12.2).
Análogamente $b \to a = z_a$, donde $z_a \in \{a\} \cup \{x : x \in L,\ c \leq x < 1\}$ y se deduce $(a \to b) \vee (b \to a) \in \{x : x \in L,\ c \leq x < 1\}$, es decir $(a \to b) \vee (b \to a) < 1$, lo que contradice la linealidad de $\mathbf{L}$. □

Proposición 2.9. *Si $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es un retículo residual lineal, entonces se verifica:*

$$(x \wedge y) \to (x \wedge z) = (x \wedge y) \to z.$$

Demostración: Aplicando los Lemas 2.9.8) y 2.16.3) resulta $(x \wedge y) \to (x \wedge z) = ((x \to x) \vee (y \to x)) \wedge ((x \wedge y) \to z)$, y por el Lema 2.12.4) afirmamos $(x \wedge y) \to (x \wedge z) = (x \wedge y) \to z$. □

Proposición 2.10. *Si $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es un retículo residual lineal, entonces se verifica:*

$$x \vee y = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x).$$

Demostración: Por el Lema 2.14.12), tenemos $x \vee y \leq ((y \to x) \to x) \wedge ((x \to y) \to y)$. Además, $((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x) \leq ((y \to x) \to (x \vee y)) \wedge ((x \to y) \to (x \vee y)) =$ $= ((y \to x) \vee (x \to y)) \to (x \vee y))$, por el Lema 2.9.4), entonces podemos afirmar que $((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x) \leq 1 \to (x \vee y) = x \vee y$ y resulta la igualdad. □

Proposición 2.11. *Si $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es un retículo residual lineal, entonces se verifica:*

$$((x \to y) \to z) \to (((y \to x) \to z) \to z) = 1.$$

Demostración: Sabemos que $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$, entonces podemos afirmar $((x \to y) \vee (y \to x)) \to z = 1 \to z = z$, por el Lema 2.12.3), por el inciso 2) del mismo lema resulta $((x \to y) \to z) \otimes ((y \to x) \to z) \leq ((x \to y) \to z) \wedge ((y \to x) \to z)$, por la condición de par adjunto resulta $((x \to y) \to z) \leq (((y \to x) \to z) \to z)$, finalmente, aplicando el Lema 2.12.2) resulta $((x \to y) \to z) \to (((y \to x) \to z) \to z) = 1$. □

Lema 2.19. *Sea $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo residual lineal. Entonces, para todo $x, y, z \in L$ se verifican:*

1) i) $x \otimes y \leq (x \otimes x) \vee (y \otimes y)$
   ii) $(x \otimes x) \wedge (y \otimes y) \leq x \otimes y$

2) $x \otimes (y \wedge z) = (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$

3) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

4) $(x \vee y) \otimes (x \vee y) = (x \otimes x) \vee (y \otimes y)$

5) $(x \wedge y) \otimes (x \wedge y) = (x \otimes x) \wedge (y \otimes y)$.

Demostración:

1) -i) Considerando la linealidad $x \otimes y = (x \otimes y) \otimes 1 = (x \otimes y) \otimes ((x \to y) \vee (y \to x)) = ((x \otimes y) \otimes (x \to y)) \vee ((x \otimes y) \otimes (y \to x))$. Por el Lema 2.9.2-i) afirmamos que $(x \otimes y) \otimes (x \to y) \leq (y \otimes y)$ y $(x \otimes y) \otimes (y \to x) \leq (x \otimes x)$, entonces $x \otimes y \leq (x \otimes x) \vee (y \otimes y)$.

1) -ii) Escribimos $(x \otimes x) \wedge (y \otimes y) = ((x \otimes x) \wedge (y \otimes y)) \otimes ((x \to y) \vee (y \to x)) =$ $= (((x \otimes x) \wedge (y \otimes y)) \otimes (x \to y)) \vee (((x \otimes x) \wedge (y \otimes y)) \otimes (y \to x))$. Por el Lema 2.9.6), y por 2-i),$((x \otimes x) \wedge (y \otimes y)) \otimes (x \to y) \leq ((x \otimes x) \otimes (x \to y) \leq x \otimes y$. Análogamente resulta $((x \otimes x) \wedge (y \otimes y)) \otimes (y \to x) \leq y \otimes x$ y la conmutatividad de $\otimes$ garantiza la tesis.

2) La desigualdad $x \otimes (y \wedge z) \leq (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$ está probada en el Lema 2.9.6). Consideremos entonces $(x \otimes y) \wedge (x \otimes z) = ((x \otimes y) \wedge (x \otimes z)) \otimes ((y \to z) \vee (z \to y))$. Por el Lema 2.14.4) $(x \otimes y) \otimes (y \to z) \leq x \otimes (y \wedge z)$ y $(x \otimes y) \otimes (z \to y) \leq x \otimes (z \wedge y)$, de donde $(x \otimes y) \wedge (x \otimes z) \leq x \otimes (y \wedge z)$, y resulta la igualdad.

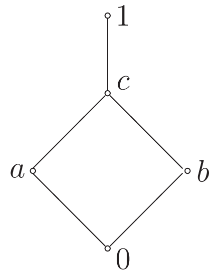
3) Ya que en todo retículo $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$, sólo debemos probar $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \geq x \wedge (y \vee z)$. Por el Lema 2.16.2), $(x \wedge (y \vee z)) \to ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) = ((x \wedge (y \vee z)) \to (x \wedge y)) \vee ((x \wedge (y \vee z)) \to (x \wedge z))$.
En virtud de la Proposición 2.9 y el Lema 2.9.4-ii) $(x \wedge (y \vee z)) \to (x \wedge y) = (x \wedge (y \vee z)) \to y \geq (y \vee z) \to y$.
Análogamente $(x \wedge (y \vee z)) \to (x \wedge z) = (x \wedge (y \vee z)) \to z \geq (y \vee z) \to z$. Resulta nuevamente de la Proposición 2.16.2) $(x \wedge (y \vee z)) \to ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \geq ((y \vee z) \to y) \vee ((y \vee z) \to z) = (y \vee z) \to (y \vee z) = 1$.

4) Aplicando el Lema 2.9, inciso 6) y el inciso 1-iii), afirmamos que: $(x \vee y) \otimes (x \vee y) = (x \otimes x) \vee (x \otimes y) \vee (y \otimes x) \vee (y \otimes y) = (x \otimes x) \vee (y \otimes y)$.

5) Por los incisos 2) y 1-ii), $(x \wedge y) \otimes (x \wedge y) = (x \otimes x) \wedge (x \otimes y) \wedge (y \otimes x) \wedge (y \otimes y) = (x \otimes x) \wedge (y \otimes y)$.

$\square$

Observación 2.15. Según el lema anterior, un retículo residual lineal es necesariamente distributivo. La recíproca no es cierta. En efecto: consideremos el retículo representado en el diagrama de Hasse, con el producto $\otimes$ y el residuo $\to$ definidos en las tablas:



$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	a
b	0	0	b	b	b
c	0	a	b	c	c
1	0	a	b	c	1

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Este retículo es claramente distributivo pero no satisface la condición de linealidad. Por ejemplo: $(a \to b) \vee (b \to a) = c \neq 1$.

Lema 2.20. *Sea $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ tal que $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo acotado. Si $\langle L, \otimes, 1\rangle$ es un monoide conmutativo y se satisfacen, para todo $x, y, z \in L$, las condiciones:*

1) $((x \to y) \vee (x \to z)) \vee (x \to (y \vee z)) = x \to (y \vee z)$

2) $(x \otimes (x \to y)) \vee y = y$

3) $x \wedge (y \to (x \otimes y)) = x$

4) $(x \otimes z) \wedge ((x \vee y) \otimes z) = x \otimes z.$

5) $(x \to y) \vee (y \to z) = 1,$

entonces $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es un retículo residual lineal.

Demostración: Por el Lema 2.15, considerando 1) a 6) podemos afirmar que se trata de un retículo integral. La condición de linealidad está dada por 5). $\square$

Teorema 2.6. *Un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ es un retículo residual lineal si y sólo si es un retículo residual integral que satisface:*

(LIN) $(x \to y) \vee (y \to z) \approx 1$.

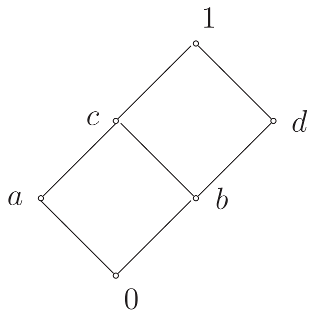
Por lo tanto, los retículos residuales lineales forman una sub-variedad de los integrales.

Demostración: Es inmediata, a partir del Teorema 2.5 y la Definición 2.9. □

2.4. Retículos residuales divisibles

Definición 2.11. Un retículo residual $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, e\rangle$ se dice *divisible* si y sólo si para cada par $(x, y) \in L \times L$ con $y \leq x$ existe $z \in L$ tal que $y = x \otimes z$.

Ejemplo 2.16. Veamos un ejemplo de retículo residual divisible: Consideremos el retículo definido por el diagrama de Hasse y el producto $\otimes$ y el residuo $\to$ por las siguientes tablas:



$\otimes$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	b	b	b	b
c	0	a	b	c	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1
b	a	a	1	1	1	1
c	0	a	d	1	d	1
d	a	a	c	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

Este retículo residual, dado que el producto coincide con el ínfimo, es, en particular, un álgebra de Heyting.

Observación 2.16. Dados $x, y \in L$, con $y \leq x$, puede existir más de un $z \in L$ que verifique $y = x \otimes z$.
En efecto: Consideremos el retículo del Ejemplo 2.16, donde $c \leq c$ y $c = c \otimes c = c \otimes 1$.

Ejemplo 2.17. Consideremos en el intervalo unitario real, con el orden habitual, las siguientes operaciones:

$$x \otimes y = x \cdot y, \quad x \to y = \begin{cases} y/x & \text{si } x \not\leq y; \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $\langle [0,1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es un retículo residual divisible. Sabemos, por el Ejemplo 2.6 que se trata de un retículo residual, y si $x \leq y$, entonces $x = y \cdot (x/y) = y \otimes (y \rightarrow x)$ y se ve que el retículo residual es divisible.

Proposición 2.12. *Todo retículo residual divisible es integral.*

Demostración: $e \leq 1$, entonces existe z tal que $e = 1 \otimes z$, y por el por Teorema 2.12.3) resulta $e = 1$. □

Observación 2.17. La recíproca no es cierta. Consideremos el retículo del Ejemplo 2.13, donde $a \leq d$, pero no existe x en L tal que $a = x \otimes d$.

Lema 2.21. [Höh95] *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *un retículo residual integral. Entonces son equivalentes:*

1) $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *es divisible;*

2) $x \wedge y = x \otimes (x \rightarrow y)$*;*

3) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \otimes ((x \wedge y) \rightarrow z)$*.*

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2): Ya que $x \wedge y \leq x$, existe z tal que $x \otimes z = x \wedge y$, por el Lema 2.9.14) $x \otimes (x \rightarrow (x \wedge y)) = x \wedge y$, pero por el Lema 2.9.8) podemos afirmar que $x \rightarrow (x \wedge y) = (x \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow y) = x \rightarrow y$. Entonces $x \otimes (x \rightarrow y) = x \wedge y$.

2) $\Rightarrow$ 3): $(x \rightarrow y) \otimes ((x \wedge y) \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \otimes ((x \otimes (x \rightarrow y)) \rightarrow z)$. Aplicando el Lema 2.9, incisos 10) y 11), resulta que: $(x \rightarrow y) \otimes ((x \otimes (x \rightarrow y)) \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \otimes (x \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow z)) = (x \rightarrow y) \otimes ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$.
Además $(x \rightarrow y) \otimes ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$, y por el Lema afirmamos que 2.9.8) $(x \rightarrow y) \otimes ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = x \rightarrow (y \wedge z)$. En consecuencia $(x \rightarrow y) \otimes ((x \wedge y) \rightarrow z) = x \rightarrow (y \wedge z)$.

3) $\Rightarrow$ 1): Consideremos $y \leq x$ y $(1 \rightarrow x) \otimes ((1 \wedge x) \rightarrow y) = 1 \rightarrow (x \wedge y)$. Por el Lema 2.12.3) resulta $x \otimes (x \rightarrow y) = 1 \rightarrow (x \wedge y) = 1 \rightarrow y = y$.

□

Observación 2.18. Hemos visto que la condición $x \wedge y = x \otimes (x \rightarrow y)$ es equivalente a la divisibilidad. Podría pensarse que todo retículo residual totalmente ordenado es divisible, ya que dados x, y en el retículo resulta $x \leq y$ o bien $y \leq x$.
Supongamos, por ejemplo, que $x \leq y$, entonces $x \wedge y = x = x \otimes 1 = x \otimes (x \rightarrow y)$, pero para cumplir la condición de divisibilidad debería verificarse también $y \wedge x = y \otimes (y \rightarrow x)$, lo que no siempre ocurre, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.18. Consideremos la cadena $0 < a < b < 1$, con el producto $\otimes$ y el residuo $\to$ definidos por:

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	0	b
1	0	a	b	1

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	b	1	1
b	b	b	1	1
1	0	a	b	1

Aquí $a \otimes (a \to b) = a \wedge b$, pero $b \otimes (b \to a) \neq b \wedge a$.

Teorema 2.7. *Un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ es un retículo residual divisible si y sólo si es un retículo residual integral que satisface:*

(DIV) $x \wedge y \approx x \otimes (x \to y)$.

Por lo tanto, los retículos residuales divisibles forman una sub-variedad de los retículos integrales.

Demostración: Sigue inmediatamente del Lema 2.21 y el Teorema 2.5. □

Definición 2.12. Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, e\rangle$ un retículo residual. Un elemento $x \in L$ se dice *idempotente* si cumple $x \otimes x = x$.

Lema 2.22. [Joh82] *Sea $\mathbf{A} = \langle A, \circ, 1\rangle$ un monoide conmutativo en el que todo elemento es idempotente. Entonces, existe una única relación de orden $\leq$ sobre A satisfaciendo $x \wedge y = x \circ y$ y $x \leq 1$.*

Demostración: Definamos $\leq$ por $x \leq y$ si y sólo si $x \circ y = x$. Dado que todos, los elementos de A son idempotentes, $x \circ x = x$ y resulta la propiedad reflexiva. La antisimetría resulta de la conmutatividad de $\mathbf{A}$: si $x \leq y$ e $y \leq x$ resulta $x = x \circ y = y \circ x = y$. Finalmente de la asociatividad obtenemos la propiedad transitiva. En efecto: si $x \leq y$ e $y \leq z$ resulta $x = x \circ y$, e $y = y \circ z$, entonces $x \circ z = (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x \circ y = x$. De lo anterior deducimos que $\leq$ es una relación de orden y dado que 1 es el neutro del monoide resulta $x = x \circ 1$ y $x \leq 1$. Resta ver que $x \circ y = x \wedge y$. Usando la propiedad asociativa y la idempotencia de los elementos de A resulta $x \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ y = x \circ y$, entonces $x \circ y \leq x$. Análogamente se ve que $x \circ y \leq y$. Si $z \leq x$ y $z \leq y$, entonces $z \circ x = z \circ y = z$. Usando la propiedad asociativa obtenemos que $z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y = z \circ y = z$ y resulta $z \leq x \circ y$, de donde $x \circ y = x \wedge y$. □

Lema 2.23. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo residual divisible, entonces:*

1) *Si x es idempotente $x \wedge y = x \otimes y$, cualquiera que sea $y \in L$*

2) *Si x es idempotente e $y \leq x \leq z$, entonces $y = y \otimes z$*

3) $x \otimes (y \wedge z) = (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$

4) $x \otimes y \leq (x \otimes x) \vee (y \otimes y)$

5) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Demostración:

1) Basta ver que $x \wedge y \leq x \otimes y$. Por el Lema 2.21.2), $x \wedge y = x \otimes (x \to y) = (x \otimes x) \otimes (x \to y)$ y por el Lema 2.9.2-i), $x \otimes (x \otimes (x \to y)) \leq x \otimes y$.

2) Por el Lema 2.14.2), sabemos que $y \otimes z \leq y$.
Para la otra desigualdad consideremos: $y = y \wedge x = y \otimes x \leq y \otimes z$.

3) Basta ver que $(x \otimes y) \wedge (x \otimes z) \leq x \otimes (y \wedge z)$, ya que por el Lema 2.9.7), se verifica $x \otimes (y \wedge z) \leq (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$. Por los lemas 2.21.2), 2.9.10) y 2.9.2-i), se tiene $(x \otimes y) \wedge (x \otimes z) = (x \otimes y) \otimes ((x \otimes y) \to (x \otimes z)) = x \otimes (y \otimes (y \to (x \to (x \otimes z)))) =$ $= x \otimes ((x \to (x \otimes z)) \wedge y) = x \otimes ((x \to (x \otimes z)) \otimes ((x \to (x \otimes z)) \to y))$. Dado que, por la condición (2.13) resulta $x \leq z \to (x \otimes z)$, por el Lema 2.9.4-ii) afirmamos que $(x \to (x \otimes z)) \to y \leq z \to y$. Reemplazando en la expresión anterior resulta, $x \otimes ((x \to (x \otimes z)) \otimes ((x \to (x \otimes z)) \to y)) \leq (x \otimes z) \otimes (z \to y) = x \otimes (y \wedge z)$, por el lema 2.21.2).

4) Dado que $\mathbf{L}$ es divisible existen z y t tales que $x = z \otimes (x \vee y)$ y $y = t \otimes (x \vee y)$. Entonces $x \vee y = (z \otimes (x \vee y)) \vee (t \otimes (x \vee y))$. Por el Lema 2.9.6), afirmamos $(z \otimes (x \vee y)) \vee (t \otimes (x \vee y)) = (z \vee t) \otimes (x \vee y)$, resulta entonces $x \vee y = (z \vee t) \otimes (x \vee y)$. Reemplazando ahora x e y en el producto, $x \otimes y = (z \otimes (x \vee y)) \otimes (t \otimes (x \vee y))$ resulta, por el Lema 2.9.6) $x \otimes y = ((z \otimes t \otimes z) \vee (z \otimes t \otimes t)) \otimes (x \vee y) \otimes (x \vee y) =$ $(z \otimes (x \vee y) \otimes (z \otimes (x \vee y))) \vee (t \otimes (x \vee y) \otimes (t \otimes (x \vee y)))$ y resulta $x \otimes y \leq (x \otimes x) \vee (y \otimes y)$.

5) Basta probar $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Por el Lema 2.21.2) afirmamos que $x \wedge (y \vee z) = (y \vee z) \otimes ((y \vee z) \to x)$. Aplicando el Lema 2.9, incisos 6) y 2-i) resulta $x \wedge (y \vee z) = (y \otimes ((y \vee z) \to x))) \vee (z \otimes ((y \vee z) \to x)) \leq$ $(y \otimes (y \to x)) \vee (z \otimes (z \to x))$, por el Lema 2.9.4-ii). Finalmente, por el Lema 2.21.2) $(y \otimes (y \to x)) \vee (z \otimes (z \to x)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ y resulta la desigualdad buscada.

$\square$

Teorema 2.8. *Si $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1 \rangle$ es un retículo residual divisible y lineal entonces $\mathcal{H}_M$, el conjunto de los elementos idempotentes con respecto al producto, forman un álgebra de Heyting y la implicación en $\mathcal{H}_M$ coincide con el residuo del retículo.*

Demostración:
Recordemos que un álgebra de Heyting es un álgebra $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \to, 0, 1 \rangle$ donde $\wedge$ y $\vee$ son el ínfimo y el supremo del retículo , verificándose $x \wedge y \leq z$ si y sólo si $x \leq y \to z$

([Mon95]).
Como **L** es divisible afirmamos, en virtud del Lema 2.23.5), que se trata de un retículo distributivo.
Sabemos que $\otimes$ es una operación binaria asociativa, conmutativa, isótona e idempotente en $\mathcal{H}_M$, además satisface $x \leq 1$, ya que $x \otimes 1 = x$, por lo tanto, en virtud del Lema 2.22 $\otimes = \wedge$. Es claro, entonces, que $x \wedge y \leq z$ si y sólo si $x \leq y \to z$ en virtud de la condición de par adjunto (2.13).
Sólo resta ver que el conjunto de los idempotentes es cerrado con respecto a las operaciones. Es decir, debemos verificar que si $x, y, \in \mathcal{H}_M$, entonces:

1) $(x \wedge y) \otimes (x \wedge y) = x \wedge y$,

2) $(x \vee y) \otimes (x \vee y) = x \vee y$,

3) $(x \to y) \otimes (x \to y) = x \to y$,

4) $(\neg x) \otimes (\neg x) = \neg x$.

En efecto:

1) Aplicando los Lemas 2.23.2) y 2.14.2), podemos afirmar que $(x \wedge y) \otimes (x \wedge y) = (x \otimes x) \wedge (x \otimes y) \wedge (y \otimes x) \wedge (y \otimes y) = x \wedge (x \otimes y) \wedge y = x \wedge y$.

2) Aplicando los Lemas 2.9.6) y 2.14.2), podemos afirmar que $(x \vee y) \otimes (x \vee y) = (x \otimes x) \vee (x \otimes y) \vee (y \otimes x) \vee (y \otimes y) = x \vee (x \otimes y) \vee y = x \vee y$.

3) Considerando, por los Lemas 2.23.1) y 2.9.2-i) que $x \otimes y = x \wedge y$ y $x \wedge (x \to y) \leq y$, y por los lemas 2.16.3) y 2.9.2-ii), $(x \to y) \vee ((x \to y) \to y) = (x \wedge (x \to y)) \to y = 1$. Entonces, aplicando el Lema 2.9, inciso 6) podemos afirmar que $(x \to y) = ((x \to y) \otimes (x \to y)) \vee ((x \to y) \otimes ((x \to y) \to y))$. Por los lemas 2.21.2) y 2.23.1), $(x \to y) \otimes ((x \to y) \to y) = (x \to y) \wedge y = (x \to y) \otimes y$, entonces por el Lema 2.12.2) $(x \to y) \otimes ((x \to y) \to y) \leq (x \to y) \otimes (x \to y)$, por el Lema2.14.3) y resulta $x \to y = (x \to y) \otimes (x \to y)$.

4) Inmediato a partir de 3).

□

Corolario 2.3. *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ *un retículo residual divisible. Si* $x \otimes y = x \wedge y$ *para todo* $x, y \in L$*, entonces* **L** *es un álgebra de Heyting.*

Demostración: Inmediato a partir del teorema anterior, ya que el ínfimo es idempotente.

□

En 1975 Büchi y Owens introdujeron la noción de hoop, que hoy en día se conoce en la siguiente forma:

Definición 2.13. [GJKO01] Un álgebra $\langle A, \otimes, \to, 1\rangle$ de tipo (2,2,0) se dice un *hoop* si $\langle A, \otimes, 1\rangle$ es un monoide conmutativo y se verifican las siguientes identidades:

(H1) $x \to x \approx 1$

(H2) $x \otimes (x \to y) \approx y \otimes (y \to x)$

(H3) $(x \otimes y) \to z \approx x \to (y \to z)$

Lema 2.24. *Sea $\langle A, \otimes, \to, 1\rangle$ un hoop. Si definimos $a \leq b$ si y sólo si $a \to b = 1$, entonces se verifican las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in A$:*

1) $x \otimes y \leq z$ *si y sólo si* $x \leq y \to z$*,*

2) $x \otimes (x \to y) \leq y$*,*

3) $x \leq x$*,*

4) *Si* $x \leq y$ *e* $y \leq x$*, entonces* $x = y$*,*

5) *Si* $x \leq y$ *e* $y \leq z$*, entonces* $x \leq z$*,*

6) $x \to 1 = 1$*,*

7) $x \otimes y \leq y$*,*

8) *Si* $x \leq y$*, entonces* $x \otimes z \leq y \otimes z$*.*

9) *Si* $x \leq y$*, entonces* $z \to x \leq z \to y$*.*

10) *Si* $x \leq y$*, existe* $z \in A$ *tal que* $x = y \otimes z$*.*

11) $x \wedge y = x \otimes (x \to y)$*.*

Demostración:

1) $x \otimes y \leq z$ si y sólo si $(x \otimes y) \to z = 1$ si y sólo si $x \to (y \to z) = 1$ $x \leq y \to z$.

2) Dado que $x \to y \leq x \to y$, aplicando 1) y la conmutatividad del monoide obtenemos que $x \otimes (x \to y) \leq y$.

3) Por (H1) $x \to x = 1$, en consecuencia, $x \leq x$.

4) Si $x \leq y$ e $y \leq x$, resulta $x \to y = y \to x = 1$, entonces usando (H2) escribimos: $x = x \otimes 1 = x \otimes (x \to y) = y \otimes (y \to x) = y \otimes 1 = y$.

5) Si $x \leq y$ e $y \leq z$, tenemos que $y \to z = y \to z = 1$. Aplicando iterativamente 2) vemos que $x \otimes (x \to y) \otimes (y \to z) \leq y \otimes (y \to z) \leq z$, resulta entonces $x \otimes 1 \otimes 1 \leq z$, es decir, $x \leq z$.

   $1 \to x \leq x$ es equivalente a $(1 \to x) \to x = 1$, pero $1 \leq (1 \to x) \to x$ si y sólo si $1 \otimes (1 \to x) \leq x$, que se verifica por 2).

6) $x \to 1 = 1$, $x \to 1 \leq 1$ es equivalente a $x \to 1 \leq x \to x$, que es equivalente a $x \otimes (x \to 1) \leq x$, pero por (H2) esto es lo mismo que $1 \otimes (1 \to x) \leq x$, que se verifica por 2). $1 \leq x \to 1$ dado que $1 \otimes x = 1$ y 1).

7) Dado que $x \to 1 = 1$, resulta que $x \leq 1$ y, por (H1) $x \leq y \to y$, que en virtud de 1) es equivalente a $x \otimes y \leq y$.

8) Si $x \leq y$, entonces $x \to y = 1$ y, en consecuencia, $x = x \otimes (x \to y)$. Por (H2) afirmamos que $x = y \otimes (y \to x)$. A partir de esta igualdad podemos escribir: $x \otimes z = y \otimes (y \to x) \otimes z \leq y \otimes z$.

9) Si $x \leq y$, por 2) $z \otimes (z \to x) \leq x \leq y$, de donde $z \otimes (z \to x) \leq y$ y por 1) resulta que $z \to x \leq z \to y$.

10) Sea $x \leq y$, entonces $x \to y = 1$ y resulta $x = x \otimes 1 = x \otimes (x \to y) = y \otimes (y \to x)$. Es decir, si $x \leq y$ existe $z \in A$ tal que $x = y \otimes z$.

11) En virtud de 8) y 9), es válida la demostración del Lema 2.21.2).

□

Observación 2.19. 3), 4) y 5) indican que la relación definida es una relación de orden y, según 6) la unidad del monoide es el último elemento del conjunto ordenado. Si se cumple $x \vee y = (x \to y) \to y$, se denomina *hoop de Wajsberg*. Esta denominación se justifica plenamente al notar que un hoop de Wajsberg es el reducto sin 0 ni supremo de una MV álgebra (o álgebra de Wajsberg).

2.5. Retículos residuales de Girard

En la Observación 2.14 definimos el operador 1-ario $\neg$. Listemos algunas propiedades de este operador en un retículo residual integral.

Lema 2.25. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral y $\neg x = x \to 0$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1) $x \otimes \neg x = 0$

2) $\neg 0 = 1, \ \ \neg 1 = 0$

3) $x \leq \neg\neg x$

4) $\neg\neg\neg x = \neg x$

5) *Si* $x \leq y$, *entonces* $\neg y \leq \neg x$

6) $x \otimes \neg(x \otimes y) \leq \neg y$

7) $\neg\neg x \otimes \neg\neg y \leq \neg\neg(x \otimes y)$

8) $\neg x \leq x \to y$, $x \leq \neg x \to y$

9) $x \to y \leq \neg y \to \neg x$

10) $x \to \neg y = y \to \neg x$

11) $\neg\neg x \to \neg\neg y = \neg y \to \neg x$

12) $x \to \neg\neg y = \neg y \to \neg x$

13) $\neg\neg x \to \neg\neg y = x \to \neg\neg y$

14) $\neg\neg(x \to y) \leq \neg\neg x \to \neg\neg y$

15) $\neg(x \otimes y) = x \to \neg y = y \to \neg x$

16) $\neg x \otimes \neg y \leq \neg(x \otimes y)$

17) $\neg(x \to y) \leq \neg x \to \neg y$

18) *Si* $\neg x = 1$, *entonces* $x = 0$.

Demostración:

1) $x \otimes (x \to 0) \leq 0$ por el Lema 2.9.2-i).

2) $\neg 0 = 1$ por el Lema 2.12.4), $\neg 1 = 0$ por el Lema 2.12.3).

3) Por el Lema 2.9.2-i), $x \otimes (x \to 0) \leq 0$ y aplicando (2.13), $x \leq (x \to 0) \to 0 = \neg\neg x$.

4) Por el inciso anterior $\neg x \leq \neg\neg\neg x$.
Por el Lema 2.9.3) y 2-i), $x \otimes \neg\neg\neg x \leq \neg\neg x \otimes \neg\neg\neg x = \neg\neg x \otimes (\neg\neg x \to 0) \leq 0$.
Aplicando la condición (2.13), resulta $\neg\neg\neg x = \neg x$.

5) Resulta inmediato del Lema 2.9.4-ii) con $z = 0$.

6) Por el Lema 2.9.10) y 2-i), $x \otimes \neg(x \otimes y) = x \otimes ((x \otimes y) \to 0) = x \otimes (x \to (y \to 0)) \leq y \to 0 = \neg y$.

7) Por el inciso 1), $(x \otimes y) \otimes \neg(x \otimes y) = 0$. Aplicando iterativamente la condición (2.13) y el inciso 4) obtenemos: $y \otimes \neg(x \otimes y) \leq x \to 0 = \neg x = \neg\neg\neg x = \neg\neg x \to 0$. Luego, $\neg\neg x \otimes y \otimes \neg(x \otimes y) \leq 0$, $\neg\neg x \otimes \neg(x \otimes y) \leq y \to 0 = \neg y = \neg\neg\neg y = \neg\neg y \to 0$. $\neg\neg x \otimes \neg\neg y \otimes \neg(x \otimes y) \leq 0$ y, en consecuencia, $\neg\neg x \otimes \neg\neg y \leq \neg(x \otimes y) \to 0 = \neg\neg(x \otimes y)$.

8) Resulta inmediato del Lema 2.9.4-i) con $z = 0$ y $x \leq \neg x \to y$ resulta de esta propiedad y del Lema 2.9.11), usando el Lema 2.12.2).

9) Por el Lema 2.9.5) $(x \to y) \otimes \neg y \leq x \to 0 = \neg x$ y por la condición (2.13), resulta $x \to y \leq \neg y \to \neg x$.

10) Por los incisos 9) y 3) y el Lema 2.9.4-ii): $x \to \neg y \leq \neg\neg y \to \neg x \leq y \to \neg x$. Análogamente se ve $y \to \neg x \leq x \to \neg y$.

11) Por los incisos 10) y 4) resulta: $\neg\neg x \to \neg\neg y = \neg y \to \neg\neg\neg x = \neg y \to \neg x$.

12) Resulta inmediato del inciso 10).

13) Resulta de los incisos 11) y 12).

14) Por el Lema 2.9.2-i) y el inciso 1), $x \otimes (x \to y) \otimes \neg y \leq y \otimes \neg y = 0$. Aplicando la condición (2.13) y el inciso 4) resulta: $x \otimes \neg y \leq \neg(x \to y) = \neg\neg\neg(x \to y)$, de donde, nuevamente por la condición (2.13): $x \otimes \neg y \otimes \neg\neg(x \to y) \leq 0$ y $\neg y \otimes \neg\neg(x \to y) \leq \neg x$, o, lo que es lo mismo, $\neg\neg(x \to y) \leq \neg y \to \neg x = \neg\neg x \to \neg\neg y$, por el inciso 11).

15) Aplicando el Lema 2.9.10) y el inciso 10) de este lema, afirmamos: $\neg(x \otimes y) = (x \otimes y) \to 0 = x \to (y \to 0) = x \to \neg y = y \to \neg x$.

16) $\neg x \otimes \neg y \leq \neg x$, por el Lema 2.14.2). Además, $\neg x \leq \neg x \vee \neg y = (x \to 0) \vee (y \to 0) \leq (x \wedge y) \to 0$, por el Lema 2.9.12). En virtud de la Observación 2.13 sabemos que $x \otimes y \leq x \wedge y$ y por 5), $\neg(x \wedge y) \leq \neg(x \otimes y)$. Resulta entonces $\neg x \otimes \neg y \leq \neg(x \otimes y)$.

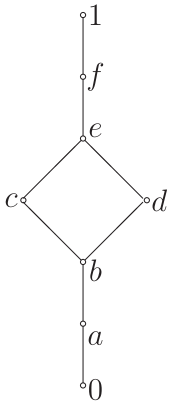
17) Por el Lema 2.14.3), $y \leq x \to y$, y por 5) $\neg(x \to y) \leq \neg y$. Nuevamente aplicando el Lema 2.14.3) $\neg y \leq \neg x \to \neg y$, y por la transitividad de la relación de orden resulta $\neg(x \to y) \leq \neg x \to \neg y$.

18) Si $\neg x = 1$, entonces $x = 0$. Dado que $\neg x = 1$ resulta $\neg\neg x = \neg 1 = 0$, por 2) $x \leq \neg\neg x$, de donde resulta $x = 0$.

□

Observación 2.20. Veamos ejemplos donde no es válida la igualdad para los incisos 3), 6), 7), 14) 16) y 17).

Ejemplo 2.19. Para ello consideraremos el retículo definido por el diagrama de Hasse, con las operaciones dadas en las tablas:



$\otimes$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	a	a
b	0	0	b	b	b	b	b	b
c	0	0	b	c	b	c	c	c
d	0	0	b	b	d	d	d	d
e	0	0	b	c	d	e	e	e
f	0	a	b	c	d	e	f	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	1	1	1	1	1	1
b	a	a	1	1	1	1	1	1
c	a	a	d	1	d	1	1	1
d	a	a	c	c	1	1	1	1
e	a	a	b	c	d	1	1	1
f	0	a	b	c	d	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	1

3) : $b < \neg\neg b = e$.

6) : $c \otimes \neg(c \otimes d) = c \otimes \neg b = c \otimes a = 0 < a = \neg d$.

7) : $\neg\neg f \otimes \neg\neg e = 1 \otimes e = e < 0 = \neg\neg f = \neg\neg(f \otimes e)$.

14) : $\neg\neg d \rightarrow \neg\neg b = e \rightarrow e = 1 > e = \neg\neg b = \neg\neg(d \rightarrow b)$.

16) : $\neg b \otimes \neg c = a \otimes a = 0 < a = \neg b = \neg(b \otimes c)$.

17) :$\neg(d \rightarrow c) = \neg 1 = 0 < 1 = a \rightarrow a = \neg d \rightarrow \neg c$.

Definición 2.14. *Un retículo residual integral* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ se dice *integral de Girard* si verifica, para todo $x \in L$:

$$(x \rightarrow 0) \rightarrow 0 = x. \tag{2.21}$$

Observación 2.21. Un retículo residual integral es de Girard si y sólo si la negación es una involución, ya que (2.21) es equivalente a decir:

$$\neg(\neg x) = x. \tag{2.22}$$

Teorema 2.9. *Un álgebra* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ *es un retículo residual de Girard si y sólo si es un retículo residual integral que satisface:*

(NEG) $(x \rightarrow 0) \rightarrow 0 \approx x$.

Por lo tanto, los retículos residuales de Girard forman una sub-variedad de los retículos residuales integrales.

Demostración: Sigue inmediatamente de la Definición 2.14 y el Teorema 2.5. $\square$

No todo retículo residual integral es de Girard, como se ve en el Ejemplo 2.16, donde se verifica: $(c \to 0) \to 0 = 1$.

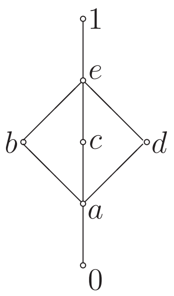
Ejemplo 2.20. Veamos un ejemplo de retículo de Girard no divisible: Consideremos la cadena $L : 0 < a < b < 1$, con el producto $\otimes$ y el residuo $\to$ definidos por las tablas:

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	1	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

En este retículo residual se satisface la condición $x = (x \to 0) \to 0$, es decir, es un retículo de Girard, pero no la condición de divisibilidad, $x \wedge y = x \otimes (x \to y)$, para todo $x, y \in L$.
En efecto: $b \wedge a = a \neq 0 = b \otimes a = b \otimes (b \to a)$.

Ejemplo 2.21. El ejemplo anterior es totalmente ordenado y, en consecuencia lineal y distributivo. Un retículo de Girard tampoco debe ser necesariamente lineal ni distributivo.



$\otimes$	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	a
b	0	0	a	a	0	a	b
c	0	0	a	0	a	a	c
d	0	0	0	a	a	a	d
e	0	0	a	a	a	a	e
1	0	a	b	c	d	e	1

$\to$	0	a	b	c	d	e	1
0	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	1	1	1	1	1
b	d	e	1	e	e	1	1
c	c	e	e	1	e	1	1
d	b	e	e	e	1	1	1
e	a	e	e	e	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	1

No es distributivo: $d \wedge (b \vee c) = d \wedge e = d \neq a = a \vee a = (d \wedge b) \vee (d \wedge c)$.

No satisface la condición de linealidad: $(c \to d) \vee (d \to c) = e \vee e \neq 1$.

Lema 2.26. *Sea* $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1 \rangle$ *un retículo integral de Girard. Entonces:*

1) $x \to y = (x \otimes (y \to 0)) \to 0$

2) $(x \wedge y) \to 0 = (x \to 0) \vee (y \to 0)$

3) $(x \vee y) \to 0 = (x \to 0) \wedge (y \to 0)$

4) $(x \to 0) \to (y \to 0) = y \to x.$

Demostración:

1) Por el Lema 2.9.10), $(x \otimes (y \to 0)) \to 0 = x \to ((y \to 0) \to 0) = x \to y$.

2) Por el Lema 2.9.9), $((x \to 0) \vee (y \to 0)) \to 0 = ((x \to 0) \to 0) \wedge ((y \to 0) \to 0) = x \wedge y$.

3) Por (2.22) $x \vee y = \neg(\neg x) \vee \neg(\neg y) = \neg(\neg x \wedge \neg y)$ por el inciso anterior. Entonces $\neg(x \vee y) = \neg\neg(\neg x \wedge \neg y)$, y nuevamente por (2.22)resulta $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

4) Por el Lema 2.9.11), $(x \to 0) \to (y \to 0) = y \to ((x \to 0) \to 0) = y \to x$.

$\square$

Lema 2.27. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo integral de Girard. Entonces son equivalentes:*

1) $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$;

2) $x \otimes (y \wedge z) = (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$.

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2): Ya probado en Lema 2.19.

2) $\Rightarrow$ 1): Considerando que, por el Lema 2.9.9) $(y \vee z) \to 0 = (y \to 0) \wedge (z \to 0)$ y por el Lema 2.26.1), $x \to (y \vee z) = (x \otimes ((y \vee z) \to 0)) \to 0$, resulta $x \to (y \vee z) = (x \otimes ((y \to 0) \wedge (z \to 0))) \to 0 = ((x \otimes (y \to 0)) \wedge (x \otimes (z \to 0))) \to 0 = ((x \otimes (y \to 0)) \to 0) \vee ((x \otimes (z \to 0)) \to 0) = (x \to y) \vee (x \to z)$. Es decir que $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$, que es equivalente a $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$, según vimos en el Lema 2.16.

$\square$

Lema 2.28. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo residual lineal, $x, y \in L$ tales que $x = x \to 0$, e $y = y \to 0$ entonces $x = y$.*
Es decir, la negación tiene a lo sumo un punto fijo.

Demostración: $x \to y = x \to (y \to 0) = y \to (x \to 0) = y \to x$, por el Lema 2.9.11). Como $1 = (x \to y) \vee (y \to x) = x \to y = y \to x$, por el teorema 2.12.2-ii) $x = y$. $\square$

Los retículos residuales de Girard son la interpretación algebraica de la lógica lineal, [Gir87]. Al igual que la lógica intuicionista la lógica lineal no modifica los conectivos lógicos de la lógica clásica, sino que agrega nuevos. Su objetivo es representar la causalidad de la implicación. Si de A se produce B, no necesariamente continúa siendo válida A.

2.6. BL álgebras

Definición 2.15. Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual conmutativo integral. Si $\mathbf{L}$ es lineal y divisible, se dice una *BL-álgebra*.

Teorema 2.10. *Un álgebra* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ *es una BL álgebra si y sólo si es un retículo residual integral que satisface las siguientes ecuaciones:*

(DIV) $x \wedge y \approx x \otimes (x \rightarrow y)$

(LIN) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) \approx 1.$

En consecuencia, las BL-álgebras forman una sub-variedad de los retículos residuales lineales y de los retículos residuales divisibles. Es claro que también de los retículos residuales integrales.

Demostración: Inmediata a partir del Teorema 2.6 y el Lema 2.21, o bien a partir del Teorema 2.7 y la Definición 2.9. □

Ejemplo 2.22. Consideremos nuevamente el intervalo unitario real, con el orden habitual, definimos ahora $x \otimes y = \text{máx}\{0, (x + y - 1)\}$, $x \rightarrow y = \text{mín}\{(1 - x + y), 1\}$. Es claro que ambas son operaciones en [0,1]. Veamos en primer lugar que $(\otimes, \rightarrow)$ conforman un par adjunto y luego que $\mathbf{L} = \langle [0, 1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es un retículo residual lineal, divisible, de Girard.
Son equivalentes: $x \otimes y \leq z$, $\text{máx}\{0, (x+y-1)\} \leq z$, $x \leq \text{mín}\{(1-y+z), 1\}, x \leq y \rightarrow z$.
Si $x \leq y$, resulta $y \rightarrow x = 1 - y + x$, por lo tanto $y \otimes (y \rightarrow z) = y + (1 - y + x) - 1 = y$, es decir: $x = y \otimes (y \rightarrow x)$ y $\mathbf{L}$ es un retículo divisible.
$x \rightarrow 0 = \text{mín}\{(1 - x + 0), 1\} = 1 - x$, por lo tanto $(x \rightarrow 0) \rightarrow 0 = 1 - (1 - x) = x$ y $\mathbf{L}$ es un retículo de Girard.
Dado que es un retículo Girard, satisface la condición de linealidad. Por lo tanto, se trata de una BL álgebra ya que es lineal y divisible.

Definición 2.16. [Háj97] Una BL álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ se llama *álgebra producto* o Π-*álgebra* si satisface:

(Π_1) $\neg\neg z \leq ((x \otimes z) \rightarrow (y \otimes z)) \rightarrow (x \rightarrow y)$,

(Π_2) $x \wedge (\neg x) = 0$.

Donde $\neg x = x \rightarrow 0$.

En [CT97] encontramos la definición de PL álgebra $\langle A, \odot, \rightarrow, \perp\rangle$ como un álgebra de tipo $(2, 2, 0)$ tal que definiendo:

$\top := \perp \rightarrow \perp$,

$\neg x := x \to \perp,$

$x \wedge y := x \odot (x \to y),$

$x \vee y := ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x),$

resulta una Π-álgebra.

Lema 2.29. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ una Π-álgebra. Son válidas las siguientes propiedades:*

1) *Si $x > 0$, entonces $\neg x = 0$.*

2) *Si $z > 0$, entonces $x \otimes z = y \otimes z$ implica $x = y$.*

3) *Si $z > 0$, entonces $x \otimes z < y \otimes z$ implica $x < y$.*

Demostración:

1) Supongamos que $x > 0$, $\neg x = \sup\{t \in L : x \otimes t = 0\}$. Probar que $\neg x = 0$ es equivalente a probar que para que $x \otimes t = 0$, es condición necesaria que $t = 0$. Supongamos, entonces, que $x \otimes t = 0$.
Por (Π_1) podemos afirmar que $\neg\neg t \leq ((x \otimes t) \to (y \otimes t)) \to (x \to y)$. Dado que $x \otimes t = 0$ resulta $\neg\neg t \leq (0 \to (y \otimes t)) \to (x \to y) = 1 \to (x \to y) = x \to y$, cualesquiera que sean $x, y \in L$. Tomemos $x = t, y = 0$, la desigualdad se escribe ahora: $\neg\neg t \leq \neg t$, y entonces $t \wedge \neg\neg t \leq t \wedge \neg t = 0$, en virtud de (Π_2). Por el Lema 2.26.3) sabemos que $t \wedge \neg\neg t = t$ y concluímos que $t = 0$.

2) Si $z > 0$, podemos afirmar que $\neg z = 0$ y $\neg\neg z = 1$, usando este hecho y el Lema 2.12. 2) (Π_1) se escribe: $(x \otimes z) \to (y \otimes z) \leq x \to y$. Nuevamente aplicando el Lema 2.12.2) si $x \otimes z \leq y \otimes z$ resulta $x \leq y$. Intercambiando x e y obtenemos la igualdad.

3) Sea $x \otimes z < y \otimes z$, por 2) afirmamos que $x \leq y$. Si fuera $x = y$ sería $x \otimes z = y \otimes z$, en consecuencia $x < y$.

$\square$

Ejemplo 2.23. Consideremos nuevamente el retículo residual del Ejemplo 2.6. Sabemos que $\mathbf{L} = \langle [0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es un retículo residual. Sea $x < y$, debe ser entonces $y \neq 0$ y resulta $x = y \cdot (x/y)$, por lo tanto $x = y \otimes (y \to x)$ y $\mathbf{L}$ es un retículo divisible. Como $[0,1]$ con el orden habitual es una cadena, en virtud del Lema 2.17, satisface la condición de linealidad. Por lo tanto, se trata de una BL álgebra ya que es lineal y divisible.
Resta ver que satisface las condiciones de Π-álgebra. Si $z = 0$ resulta $\neg\neg 0 = 0$ y (Π_1) se cumple trivialmente. Si $x = 0, z \neq 0$, la desigualdad se verifica en virtud del Lema 2.9.(4.i). Supongamos, finalmente que $x \neq 0, z \neq 0$ y reemplacemos $\otimes$ y $\to$ por las

definiciones del producto $\cdot$ y su residuo adjunto. Tenemos entonces:

$$((x \otimes z) \rightarrow (y \otimes z)) \rightarrow (x \rightarrow y) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right) \wedge 1}{\left(\frac{y \cdot z}{x \cdot z}\right) \wedge 1} = 1,$$

y la desigualdad se verifica trivialmente.
Para probar (Π_2), si $x = 0$ es trivial, si $x \neq 0$ utilizaremos el hecho de ser un retículo divisible: $x \wedge \neg x = x \otimes (x \rightarrow \neg x) = x \cdot (\neg x / x) \wedge 1 = x \cdot 0 = 0$.

Definición 2.17. Un álgebra producto que con el orden asociado a $\wedge$ es una cadena se dice un *álgebra producto linealmente ordenada* o $\Pi-$*álgebra linealmente ordenada*.

Definición 2.18. Un álgebra $\langle S, \cdot \rangle$ se dice un *semigrupo* si:

(S1) $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$

se dice un *semigrupo abeliano* (o *conmutativo*) si satisface la identidad:

(S2) $x \cdot y \approx y \cdot x$

Una estructura $\langle S, \cdot, \leq \rangle$ se dice un *semigrupo abeliano linealmente ordenado* si $\langle S, \cdot \rangle$ es un semigrupo abeliano, $\langle S, \leq \rangle$ es un conjunto linealmente ordenado, y para todo $x, y, z \in S$ satisface:

(S3) *Si* $x \leq y$, *entonces* $x \cdot z \leq y \cdot z$

Definición 2.19. Un álgebra $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ se dice un *grupo* si satisface las siguientes identidades:

(G1) $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$

(G2) $x \cdot 1 \approx 1 \cdot x \approx x$

(G3) $x \cdot x^{-1} \approx x^{-1} \cdot x \approx 1$

Definición 2.20. Un grupo $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ se dice un *grupo abeliano* (o *conmutativo*) si satisface la identidad:

(G4) $x \cdot y \approx y \cdot x$

Definición 2.21. Una estructura $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1, \leq \rangle$ se dice un *grupo abeliano linealmente ordenado* o *o-grupo* si $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ es un grupo abeliano, $\langle G, \leq \rangle$ es un conjunto linealmente ordenado, y para todo $x, y, z \in G$ satisface:

(G5) *Si* $x \leq y$, *entonces* $x \cdot z \leq y \cdot z$

Definición 2.22. Dado un o-grupo $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1, \leq\rangle$ el conjunto $Pos\,G = \{x \in G : x \geq 0\}$ con las restricciones de las operaciones definidas en G se dice el *cono positivo*. Análogamente, $Neg\,G = \{x \in G : x \leq 0\}$, con las restricciones de las operaciones definidas en G se dice el *cono negativo*.

Lema 2.30. *Un semigrupo abeliano linealmente ordenado $\langle S, \cdot\rangle$ es el cono positivo (negativo) de un o-grupo $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ si y sólo si satisface:*

1) *para cada $x \leq y$ existe un único z tal que $x \cdot z = y$*

2) *$x \leq x \cdot y$ para todo $x, y \in S$*

Teorema 2.11. [Háj97] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un álgebra producto. Entonces existe un grupo abeliano* **G**$= \langle G, +_G, -_G, 0_G, \leq_G\rangle$ *tal que el cono negativo de G es el conjunto $L \setminus \{0\} = Neg\,G = \{g \in G : g \leq_G 0_G\}$, y, para todo $g, h \in L \setminus \{0\}$ se cumple:*

1) $0_G = 1$

2) $g +_G h = g \otimes h$

3) *$g \leq_G h$ si y sólo si $g \leq h$.*

Más aún, para $h \leq_G g$, se verifica $g \rightarrow h = h -_G g$.

Demostración:
Dado que $\langle L, \otimes, 1\rangle$ es un monoide conmutativo, por las definiciones de 0_G y $+_G$ resulta $\langle L \setminus \{0\}, +_G, 0_G\rangle$ un monoide conmutativo. Por el Lema 2.9.14) y la divisibilidad de L para cada $x \leq y \in L$, ecuación $x \otimes z = y$ tiene solución $z = x \rightarrow y$, y dicha solución es única por el Lema 2.29. Resulta entonces, que $\langle L \setminus \{0\}, +_G, -_G, 0_G\rangle$ es la parte no positiva de un único grupo abeliano G, salvo isomorfismos.

□

2.7. MV álgebras

Definición 2.23. Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral. Si L satisface la condición:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow y = x \vee y \tag{2.23}$$

se dice una *MV álgebra*.

Ejemplo 2.24. Consideremos el retículo definido en el Ejemplo 2.22. Como $[0, 1]$ es una cadena podemos considerar los siguientes casos:
caso 1): $x \leq y$: $x \vee y = y$ y $(x \rightarrow y) \rightarrow y = 1 \rightarrow y = y$,
caso 2): $x > y$: $x \vee y = x$ y $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (1-x+y) \rightarrow y = \text{mín}\{1, 1-(1-x+y)+y\} = x$.
En cualquier caso $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$ y el retículo resulta una MV álgebra.

Ejemplo 2.25. Sea a un elemento tal que $0 = a^n < a^{n-1} < \cdots < a^2 < a < a^0 = 1$. Si $C_n = \{1 = a^0, a, a^2, a^3, \cdots, a^n = 0\}$, la operación $a^s \otimes a^r = a^{s+r}$ hace a $\langle C_n, \otimes, 1, \leq\rangle$ un monoide conmutativo ordenado. Dado que es finito es completo y satisface (2.16), entonces definimos el residuo por (2.17), según el Lema 2.7. Este residuo, dadas las características de C_n resulta:

$$a^s \to a^r = \bigvee\{t : a^s \otimes t \leq a^r\} = a^{\bigwedge\{q : a^s \otimes a^q \leq a^r\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq r; \\ a^{r-s}, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El par $(\otimes, \to)$ es claramente un par adjunto y $\mathcal{C}_n = \langle C_n, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es un retículo residual integral.

$$(a^s \to a^r) \to a^r = \begin{cases} 1 \to a^r = a^r & \text{si } s \geq r, \text{ es decir, si } a^s \leq a^r; \\ a^{r-(r-s)} = a^s, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

es decir, $(a^s \to a^r) \to a^r = a^s \vee a^r$, y en consecuencia $\mathcal{C}$ es una MV álgebra.

Observación 2.22. Dada la condición $x \vee y = (x \to y) \to y$ es claro que toda MV álgebra es un retículo de Girard.
Por otra parte, $x \wedge y = y \wedge x = \neg(\neg(y \wedge x))$, por ser retículo de Girard, y por la Definición 2.23 resulta igual a $\neg((\neg y \to \neg x) \to \neg x)$. Aplicando el Lema 2.26 .1) y .4), y usando la propiedad involutiva de la negación, obtenemos: $\neg((\neg y \to \neg x) \to \neg x) = \neg\neg((\neg y \to \neg x) \otimes \neg\neg x) = (\neg y \to \neg x) \otimes x = (x \to y) \otimes x$ y finalmente aplicando la conmutatividad del producto llegamos a que $x \wedge y = x \otimes (x \to y)$ y resulta que toda MV álgebra es un retículo integral divisible. Veamos que estas dos condiciones son suficientes para que un retículo residual integral sea una MV álgebra.

Teorema 2.12. [Höh95] *Para que un retículo residual integral $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ sea MV álgebra es condición necesaria y suficiente que sea de Girard y divisible.*

Demostración:
Hemos visto que una MV álgebra es un retículo residual divisible de Girard. Veamos que esta condición es suficiente. Para ello basta probar que se satisface $x \vee y = (x \to y) \to y$. Por el Lema 2.26.3) y el Lema 2.21.2), $x \vee y = y \vee x = \neg\neg(y \vee x) = \neg(\neg y \wedge \neg x) = \neg(\neg y \otimes (\neg y \to \neg x))$. Aplicando el Lema 2.26.4) resulta $\neg(\neg y \otimes (x \to y))$ que por el Lema 2.9.10) es: $(\neg y \otimes (x \to y)) \to 0 = \neg y \to ((x \to y) \to 0) = \neg y \to \neg(x \to y) = (x \to y) \to y$.

□

Chang [Cha58], buscando un modelo algebraico para la lógica multivaluada, define originalmente una MV álgebra del siguiente modo:
Un álgebra $\langle A, \oplus, \odot, ', 0, 1\rangle$ de tipo (2,2,1,0,0) es una MV álgebra si satisface las siguien-

tes ecuaciones:

MV1: $x \oplus (y \oplus z) \approx (x \oplus y) \oplus z$

MV2: $x \oplus y \approx y \oplus x$

MV3: $x \oplus x' \approx 1$

MV4: $x \oplus 1 \approx 1$

MV5: $x \oplus 0 \approx x$

MV6: $(x \oplus y)' \approx x' \odot y'$

MV7: $x'' \approx x$

MV8: $0' \approx 1$

MV1′: $x \odot (y \odot z) \approx (x \odot y) \odot z$

MV2′: $x \odot y \approx y \odot x$

MV3′: $x \odot x' \approx 0$

MV4′: $x \odot 1 \approx x$

MV5′: $x \odot 0 \approx 0$

MV6′: $(x \odot y)' \approx x' \oplus y'$

Definiendo:

$$x \vee_c y := (x \odot y') \oplus y \tag{2.24}$$
$$x \wedge_c y := (x \oplus y') \odot y \tag{2.25}$$

MV9: $x \vee_c y \approx y \vee_c x$

MV10: $(x \vee_c y) \vee_c z \approx x \vee_c (y \vee_c z)$

MV11: $x \oplus (y \wedge_c z) \approx (x \oplus y) \wedge_c (x \oplus z)$

MV9′: $x \wedge_c y \approx y \wedge_c x$

MV10′: $(x \wedge_c y) \wedge_c z \approx x \wedge_c (y \wedge_c z)$

MV11′: $x \odot (y \vee_c z) \approx (x \odot y) \vee_c (x \odot z)$

Teorema 2.13. *La Definición 2.23 es equivalente a la definición original de Chang.*

Demostración: Veamos en primer lugar que en un retículo residual integral que satisface: $x \vee y = (x \to y) \to y$, si definimos:

$$x \oplus y = (x \to 0) \to y, \tag{2.26}$$

$$x \odot y = x \otimes y, \tag{2.27}$$

$$x' = x \to 0, \tag{2.28}$$

se verifican las ecuaciones dadas por Chang.

MV1′ a MV5′ se verifican trivialmente. Demostremos las restantes:

MV2 $x \oplus y = (x \to 0) \to y = (x \to 0) \to ((y \to 0) \to 0)) = (y \to 0) \to ((x \to 0) \to 0) = (y \to 0) \to x = y \oplus x$.

MV1 $x \oplus (y \oplus z) = (x \to 0) \to ((y \to 0) \to z) = (y \to 0) \to ((x \to 0) \to ((z \to 0) \to 0)) = (y \to 0) \to ((z \to 0) \to ((x \to 0) \to 0)) = (z \to 0) \to ((y \to 0) \to x) = z \oplus (y \oplus x) = (x \oplus y) \oplus z$.

MV3 $x \oplus x' = (x \to 0) \to (x \to 0) = 1$.

MV4 $x \oplus 1 = (x \to 0) \to 1 = 1$.

MV5 $x \oplus 0 = (x \to 0) \to 0 = x$.

MV7 $x'' = (x \to 0) \to 0 = x \oplus 0 = x$, por MV5.

MV6′ $(x \odot y)' = (x \otimes y) \to 0 = x \to (y \to 0) = x'' \to y' = (x' \to 0) \to y' = x' \oplus y'$.

MV6 $(x \oplus y)' = (x'' \oplus y'')' = (x' \odot y')'' = x' \odot y'$.

MV8 $0' = 0 \to 0 = 1$.

Para ver que se satisfacen MV9, MV10, MV9′ y MV10′, es suficiente probar que:

$x \vee_c y = ((x \otimes (y \to 0)) \to 0) \to y = (x \to ((y \to 0) \to 0) \to y = (x \to y) \to y = x \vee y$.

A partir de (2.24) y (2.25) y usando las propiedades que acabamos de probar resulta $x \wedge_c y = (x \oplus y') \odot y = (x' \odot y)' \odot y'' = ((x' \odot y'') \oplus y')' = (x' \vee_c y')'$. Según acabamos de ver $(x' \vee_c y')' = ((x \to 0) \vee (y \to 0)) \to 0 = 0$, por el Teorema 2.12.

MV11 $x \oplus (y \wedge_c z) = (x \to 0) \to (y \wedge z) = ((x \to 0) \to y) \wedge ((x \to 0) \to z) = (x \oplus y) \wedge_c (x \oplus z)$.

MV11′ $x \odot (y \vee_c z) = x \otimes (y \vee z) = (x \otimes y) \vee (x \otimes z) = (x \odot y) \vee_c (x \odot z)$.

Sea ahora un álgebra $\langle A, \oplus, \odot, ', 0, 1\rangle$ satisfaciendo MV1 a MV11′. Si definimos:

$$x \to y = x' \oplus y \tag{2.29}$$

$$x \otimes y = x \odot y \tag{2.30}$$

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x' \oplus y = 1, \tag{2.31}$$

entonces $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es una MV álgebra.

Veamos en primer lugar que $\leq$ es una relación de orden: Por MV3 es válida la propiedad reflexiva. Para demostrar la propiedad antisimétrica utilizamos MV4′, MV9′, (2.31) y (2.25) del siguiente modo: Sean $x \leq y$, $y \leq x$ entonces $x = x \odot 1 = x \odot (x' \oplus y) = x \wedge_c y = y \wedge_c x = y \odot (y' \oplus x) = y$.
Para probar la transitividad consideremos $x \leq y$, $y \leq z$, es decir, por (2.31) y (2.25), $x' \oplus y = 1$ y $z = (z \odot y') \oplus y$. Entonces: $x' \oplus z = x' \oplus ((z \odot y') \oplus y) = (x' \oplus y) \oplus (z \odot y') =$

$1 \oplus (z \odot y') = 1$, por MV4, y resulta $x \leq z$, por (2.31).
Por MV4, $x' \oplus 1 = 1$ para todo $x \in L$ y, en consecuencia 1 es el último elemento para la relación de orden determinada por (2.31). Por MV8, $0' \oplus x = 1 \oplus x = x \oplus 1 = 1$ y resulta 0 el primer elemento de L.
Dado que $\leq$ es una relación de orden en L, podemos definir $x \vee y$ el supremo de x e y determinado por $\leq$ y $x \wedge y$, el ínfimo de x e y por $\leq$. Probemos ahora que $x \vee y = x \vee_c y$ y $x \wedge y = x \wedge_c y$.
Usando MV1 a MV3, MV6 y MV7 vemos que $x' \oplus ((x \odot y') \oplus y) = (x' \oplus y) \oplus (x \odot y') = 1$, es decir, $x \leq x \vee_c y$ según (2.24) y (2.31). Entonces, $y \leq y \vee_c x = x \vee_c y$, por MV9.
Sea ahora z tal que $x \leq z$, $y \leq z$, veamos $z \leq x \vee_c y$, es decir $((x \odot y') \oplus y)' \oplus z = 1$. Por MV6', (2.25) y MV11: $((x \odot y') \oplus y)' \oplus z = ((x \odot y')' \odot y') \oplus z = ((x' \oplus y'') \odot y') \oplus z = (x' \wedge_c y') \oplus z = (x' \oplus z) \wedge_c (y' \oplus z) = 1 \wedge_c 1 = (1 \oplus 0) \odot 1 = 1$. Esto completa la demostración de $x \vee y = x \vee_c y$.
Por (2.31), MV6' y MV3 escribimos: $((x \oplus y') \odot y)' \oplus x = (x \oplus y')' \oplus y' \oplus x = (x \oplus y')' \oplus (x \oplus y') = 1$ y de (2.25) resulta que $x \wedge_c y \leq x$. Entonces, por MV9', $x \wedge_c y = y \wedge_c x \leq y$.
Supongamos ahora que $z \leq x$ y $z \leq y$, debemos probar que $z \leq x \wedge_c y$, o lo que es equivalente, $z' \oplus (x \wedge_c y) = 1$. Aplicando MV11, $z' \oplus (x \wedge_c y) = (z' \oplus x) \wedge_c (z' \oplus y) = 1 \wedge_c 1 = 1$. Así probamos que $x \wedge y = x \wedge_c y$.
En virtud de MV$1'$, $2'$, y $4'$ se satisfacen los axiomas de monoide conmutativo, veamos que esta operación respeta el orden, es decir que $(x \otimes z) \leq (y \otimes z)$, cada vez que $x \leq y$. Sean, entonces, $x \leq y$, entonces $y = x \vee y = x \vee_c y$. Por MV$11'$ escribimos $z \odot y = z \odot (x \vee_c y) = (z \odot x) \vee_c (z \odot y)$, o lo que es lo mismo: $z \otimes y = (z \otimes x) \vee (z \otimes y)$, es decir, $z \otimes x \leq z \otimes y$, que por la conmutatividad del monoide equivale a $x \otimes z \leq y \otimes z$.
Sólo resta ver que se satisface la condición de par adjunto: $x \otimes y \leq z$ sii $(x \odot y)' \oplus z = 1$ sii $x' \oplus y' \oplus z = 1$ sii $x' \oplus (y' \oplus z) = 1$ sii $x \leq y \to z$.

□

Observación 2.23. Aplicando las definiciones (2.25), (2.30) y (2.29), obtenemos $x \wedge y = x \wedge_c y = (x \oplus y') \odot y = (x \to y) \otimes y$, y resulta por el Lema 2.21.2) que toda MV álgebra, según la definición de Chang, es un retículo integral divisible.

Previamente a la publicación de Chang en 1958, Wajsberg [Waj35] había enunciado un sistema basado en implicaciones que es una variante equivalente a las MV álgebras.

Definición 2.24. [Tur92] [CDM98]Un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \to, 0 \rangle$ de tipo $(2, 0)$ es un *álgebra de Wajsberg*, si definiendo

$$\neg x = x \to 0 \qquad \text{y} \qquad 1 = 0 \to 0, \tag{2.32}$$

se verifican las siguientes identidades:

(W1) $1 \to y \approx y$

(W2) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \approx 1$

(W3) $((x \to y) \to y) \approx ((y \to x) \to x)$

(W4) $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) \approx 1$.

Rodriguez, en su tesis doctoral [Rod80], presenta las álgebras de Wajsberg como álgebras de Sales satisfaciendo una ley de negación lógica, ya que (W1), (W2) y (W3) constituyen una axiomática para las álgebras de Sales, siendo (W3) la llamada *Ley de Sales*. Las álgebras de Sales fueron estudiadas por primera vez en la Tesis Doctoral de Antoni Torrens [Tor80].

Lema 2.31. *Sea $\boldsymbol{A} = \langle A, \to, 0\rangle$ un álgebra de Wajsberg. Si definimos*

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x \to y = 1, \tag{2.33}$$

entonces $\leq$ es un orden parcial en A.

Demostración: Por (W1), afirmamos que para todo $x \in A$, $x \to x = 1 \to (x \to x) = (1 \to 1) \to ((1 \to x) \to (1 \to x))$, que por (W2) es 1. Por lo tanto, en virtud de (2.33), $x \leq x$.
Supongamos $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x \to y = y \to x = 1$, aplicando (W1) escribimos: $x = 1 \to x = (y \to x) \to x$. Por (W3) $(y \to x) \to x = (x \to y) \to y = 1 \to y$, nuevamente aplicando (W1) obtenemos $x = y$.
Para verificar la propiedad transitiva supongamos $x \leq y$ e $y \leq z$, es decir: $x \to y = 1$ e $y \to z = 1$. Por (W2) y (W1) escribimos: $1 = (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1 \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1 \to (x \to z) = x \to z$, es decir, $x \leq z$. $\square$

Lema 2.32. *Sea $\boldsymbol{A} = \langle A, \to, 0\rangle$ un álgebra de Wajsberg,entonces se satisfacen, para todo $x, y, z \in A$, las siguientes propiedades:*

1) $x \to x = 1$

2) $\neg 1 = 0$

3) $x = \neg\neg x$

4) $x \to 1 = 1$

5) $x \to (y \to x) = 1$

6) $0 \to x = 1$

7) $\neg y \to \neg x = x \to y$

8) $x \leq y \to x$

9) *Si $x \leq y$, entonces $y \to z \leq x \to z$. Si $z = 0$ resulta $\neg y \leq \neg x$.*

10) *Si* $x \leq y$, *entonces* $z \to x \leq z \to y$.

11) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.

Demostración:

1) $x \to x = 1$ es equivalente, por (2.33) a $x \leq x$, y se verifica por el Lema 2.31.

2) $\neg 1 = 1 \to 0 = 0$, por (W1).

3) $\neg\neg x = \neg x \to 0 = \neg x \to \neg 1 \leq 1 \to x = x$, por 2), (W4) y (W1), respectivamente.

4) Por 1) y (W1) escribimos $x \to 1 = x \to (x \to x) = (1 \to x) \to ((1 \to x) \to x)$, aplicando (W3), $(1 \to x) \to ((1 \to x) \to x) = (1 \to x) \to ((x \to 1) \to 1)$ y por (W1) y (W2), $(1 \to x) \to ((x \to 1) \to 1) = (1 \to x) \to ((x \to 1) \to (1 \to 1)) = 1$.

5) Aplicando (W1) podemos escribir, $x \to (y \to x) = 1 \to (x \to (y \to x)) = (y \to 1) \to ((1 \to x) \to (y \to x)) = 1$, por 4) y por (W2).

6) Por 3), $0 \to x = 0 \to ((x \to 0) \to 0) = 1$, por 5).

7) Por (W4) $(\neg y \to \neg x) \to (x \to y) = 1$ que por (2.33) es equivalente a $(\neg y \to \neg x) \leq (x \to y)$.
Usando esta misma propiedad escribimos $(\neg\neg x \to \neg\neg y) \leq (\neg y \to \neg x)$, que por 3) resulta: $x \to y \leq \neg y \to \neg x$ y se comprueba la igualdad.

8) $x \to (y \to x) = 1$, por 5), y por (2.33) resulta $x \leq y \to x$.

9) Si $x \leq y$, por (2.33) $x \to y = 1$, por las ecuaciones (W2) y (W1) escribimos $1 = (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1 \to ((y \to z) \to (x \to z)) = (y \to z) \to (x \to z)$ y aplicando nuevamente (2.33) resulta $y \to z \leq x \to z$.

10) Si $x \leq y$, por (2.32) y aplicando el inciso anterior, $\neg y \leq \neg x$, aplicando nuevamente el inciso anterior, $\neg x \to \neg z \leq \neg y \to \neg z$ y, por el inciso 7) resulta $z \to x \leq z \to y$.

11) Por (W2) podemos escribir $(x \to (y \to z)) \to (((y \to z) \to z) \to (x \to z)) = 1$, que por (2.33) resulta $x \to (y \to z) \leq ((y \to z) \to z) \to (x \to z)$. Por (W3) $(y \to z) \to z = (z \to y) \to y$. Entonces por el inciso 5) $y \to ((y \to z) \to z) = y \to ((z \to y) \to y) = 1$, y por (2.33) $y \leq (y \to z) \to z$. Aplicando el inciso 10) a esta desigualdad $((y \to z) \to z) \to (x \to z) \leq y \to (x \to z)$ y resulta $x \to (y \to z) \leq y \to (x \to z)$.
Análogamente se ve que $y \to (x \to z) \leq x \to (y \to z)$ y resulta la igualdad.

$\square$

Lema 2.33. *Sea $\boldsymbol{A} = \langle A, \to, 0\rangle$ un álgebra de Wajsberg. Si se define:*

$$x \otimes y = \neg(x \to \neg y), \tag{2.34}$$

entonces $(\otimes, \to)$ es un par adjunto.

Demostración: Por (2.34), debemos verificar $\neg(x \to \neg y) \leq z$ si y sólo si $x \leq y \to z$. Supongamos en primer lugar que $\neg(x \to \neg y) \leq z$, o lo que es lo mismo por (2.33), $\neg(x \to \neg y) \to z = 1$. Por (W1) podemos escribir $y \to z = 1 \to (y \to z) = (\neg(x \to \neg y) \to z) \to (y \to z)$. Por (W2) y (2.33), $(\neg(x \to \neg y) \to z) \to (y \to z) \geq y \to \neg(x \to \neg y) = (x \to \neg y) \to \neg y$, por el Lema 2.32.7). Por (W4) $(x \to \neg y) \to \neg y = (\neg y \to x) \to x \geq x$, por el Lema 2.32.8). Por lo tanto, $x \leq y \to z$.
Supongamos ahora que $x \leq y \to z$, por el Lema 2.32, inciso 9) decimos que $x \to \neg y \geq (y \to z) \to \neg y = (\neg z \to \neg y) \to \neg y = (\neg y \to \neg z) \to \neg z \geq \neg z$, por el Lema 2.32.8). Aplicando el mismo lema, inciso 9), resulta $\neg(x \to \neg y) \leq \neg\neg z$ y por (2.34)y el Lema 2.32.3) podemos escribir $x \otimes y \leq z$. □

Lema 2.34. *Sea $\boldsymbol{A} = \langle A, \to, 0\rangle$ un álgebra de Wajsberg, si definimos el producto por* (2.34) *y 1 por* (2.32), *entonces:*

1) $x \otimes y = y \otimes x$

2) $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$

3) $x \otimes 1 = x$

4) *Si $x \leq y$, entonces $x \otimes z \leq y \otimes z$.*

Demostración:

1) Por el Lema 2.32.3) y 7) podemos escribir $x \otimes y = \neg(x \to \neg y) = \neg(\neg\neg x \to \neg y) = \neg(y \to \neg x) = y \otimes x$.

2) Aplicando (2.34) escribimos $x \otimes (y \otimes z) = \neg(x \to \neg(y \otimes z)) = \neg(x \to \neg(\neg(y \to \neg z))$, por el Lema 2.32.3) y 7) resulta $\neg(x \to \neg(\neg(y \to \neg z)) = \neg(x \to (z \to \neg y))$ y aplicando inciso 11) obtenemos $\neg(z \to (x \to \neg y)) = \neg(z \to \neg(\neg(x \to y))) = z \otimes (x \otimes y) = (x \otimes y) \otimes z$, por el inciso anterior de este lema.

3) Por el Lema 2.32.2) escribimos $x \otimes 1 = \neg(x \to \neg 1) = \neg(x \to 0) = \neg\neg x = x$, por el mismo lema, inciso 3).

4) Si $x \leq y$, aplicando el Lema 2.32.9) dos veces resulta $y \to \neg z \leq x \to \neg z$ y $\neg(x \to \neg z) \leq \neg(y \to \neg z)$, que es equivalente por (2.34) a $x \otimes z \leq y \otimes z$.

□

Corolario 2.4. *En las condiciones del lema anterior,* $\langle A, \otimes, 1 \leq \rangle$ *es un monoide conmutativo ordenado.*

Lema 2.35. *Sea* $\boldsymbol{A} = \langle A, \rightarrow, 0 \rangle$ *un álgebra de Wajsberg, si definimos la relación de orden* (2.33)*, y el producto por* (2.34)*, entonces:*

1) $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$

2) $x \wedge y = x \otimes (x \rightarrow y)$

3) $x \leq 1$

4) $0 \leq x$.

Demostración:

1) Por el Lema 2.32.8) $y \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$, por el mismo lema y (W3), $x \leq (y \rightarrow x) \rightarrow x = (x \rightarrow y) \rightarrow y$. Supongamos ahora que $x \leq t$ e $y \leq t$, entonces, aplicando dos veces el Lema 2.32.9) resulta $x \rightarrow y \geq t \rightarrow y$, $(x \rightarrow y) \rightarrow y \leq (t \rightarrow y) \rightarrow y$. Por (W3), (2.33) y (W1) podemos decir que $(t \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow t) \rightarrow t = 1 \rightarrow t = t$. Por propiedad transitiva resulta $(x \rightarrow y) \rightarrow y \leq t$.

2) Por (2.34), $x \otimes (x \rightarrow y) = \neg(x \rightarrow \neg(x \rightarrow y))$, aplicando el Lema 2.32.7) y 3) obtenemos $\neg((x \rightarrow y) \rightarrow \neg x) = \neg((\neg y \rightarrow \neg x) \rightarrow \neg x) = \neg(\neg y \vee \neg x) = \neg(\neg x \vee \neg y)$, por el inciso anterior. $\neg x \leq \neg x \vee \neg y$, por el Lema 2.32.3) y 9), $x = \neg\neg x \geq \neg(\neg x \vee \neg y)$. Análogamente $y \geq \neg(\neg x \vee \neg y)$. Supongamos ahora que $t \leq x$ y $t \leq y$, nuevamente por el Lema 2.32.9) $\neg t \geq \neg x$ y $\neg t \geq \neg y$ y, en consecuencia $\neg t \geq \neg x \vee \neg y$, de donde $t \leq \neg(\neg x \vee \neg y)$. Resulta entonces que $x \wedge y = x \otimes (x \rightarrow y)$.

3) $x \leq 1$, por el Lema 2.32.4) y (2.34).

4) $0 \leq x$, por el Lema 2.32.6) y (2.34).

□

Corolario 2.5. *En las condiciones del lema anterior,* $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ *es un retículo distributivo acotado.*

Demostración: El hecho de ser retículo acotado sigue inmediatamente del lema anterior, y resulta distributivo por la definición del ínfimo y los lemas 2.21 y 2.23. □

Teorema 2.14. *Dada un álgebra de Wajsberg* $\langle A, \rightarrow, 0 \rangle$*, si se define el producto* $x \otimes y = (x \rightarrow (y \rightarrow 0)) \rightarrow 0$ *entonces* $\langle A, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ *es una MV álgebra según la Definición 2.23.*

Demostración: Es inmediata a partir del Corolario 2.4 y Corolario 2.5. □

Observación 2.24. Font, Rodriguez y Torrens ([FRT84]) prueban que toda MV álgebra según la definición de Chang, es un álgebra de Wajsberg y viceversa. Cignoli, Mundici y Ottaviano dan otra demostración de este hecho en [CDM98].

Lema 2.36. *En toda MV álgebra se verifica:*

$$x \to (x \otimes y) = (x \to 0) \vee y. \tag{2.35}$$

Demostración: $(x \to 0) \vee y = y \vee (x \to 0) = (y \to (x \to 0)) \to (x \to 0)$. Aplicando el Lema 2.26.4) $(y \to (x \to 0)) \to (x \to 0) = x \to ((y \to (x \to 0)) \to 0)$2.9.10) y 11) resulta: $(x \to 0) \vee y = x \to ((x \otimes y) \to 0) \to 0 = x \to (x \otimes y)$. □

Corolario 2.6. *Toda MV álgebra es lineal.*

Demostración:
Es claro, en virtud del Teorema 2.12 que toda MV álgebra es un retículo de Girard divisible. Por el Lema 2.21 afirmamos que L satisface:

$$x \otimes (y \wedge z) = (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$$

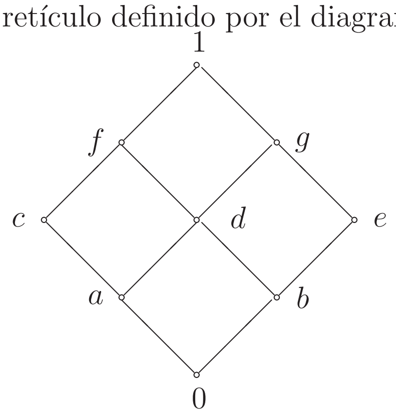
y finalmente, el lema 2.26 asegura que esta propiedad en un retículo de Girard es equivalente a satisfacer la ley fuerte de De Morgan. □

Corolario 2.7. *Toda MV álgebra es BL álgebra.*

Demostración: El Teorema 2.12 afirma que toda MV álgebra es un retículo residual divisible, el Corolario 2.6 que satisface la condición de linealidad, por lo tanto, según la Definición 2.15 es una BL álgebra. □

Observación 2.25. Al igual que Chang introduce las MV álgebras como representación algebraica de la lógica multivaluada, Hájek [Háj97] introduce las BL álgebras, basado en un conjunto de axiomas que constituyen lo que denomina la *Lógica Básica-Basic Logic*. En virtud del corolario 2.7, toda MV álgebra es BL álgebra, pero la recíproca no es cierta como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.26. Consideremos el retículo definido por el diagrama de Hasse y las operaciones dadas por las tablas:



$\otimes$	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	0	0	a	0	a
b	0	0	b	0	b	b	b	b	b
c	0	a	0	c	a	0	c	a	c
d	0	0	b	a	b	b	d	b	d
e	0	0	b	0	b	e	b	e	e
f	0	a	b	c	d	b	f	d	f
g	0	0	b	a	b	e	d	e	g
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

$\to$	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	g	1	g	1	1	g	1	1	1
b	c	c	1	c	1	1	1	1	1
c	e	g	e	1	g	e	1	g	1
d	a	c	g	c	1	g	1	1	1
e	c	c	f	c	f	1	f	1	1
f	0	a	e	c	g	e	1	g	1
g	a	c	d	c	f	g	f	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

Puede verificarse que este retículo residual es integral, divisible y lineal, sin embargo no satisface la condición $x \vee y = (x \to y) \to y$. En efecto: $(d \to a) \to a = c \to a = g \neq d = d \vee a$.

Teorema 2.15. *Si $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es una MV álgebra, entonces $\mathcal{B}_M$, el conjunto de los elementos idempotentes con respecto al producto, forman un álgebra de Boole y la implicación en $\mathcal{B}_M$ coincide con el residuo del retículo.*

Demostración: Es consecuencia del Teorema 2.8, y la involución de la negación. □

Corolario 2.8. *Sea $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ una MV álgebra, si $x \otimes y = x \wedge y$ para todo $x, y \in L$, entonces* **L** *es un álgebra de Boole.*

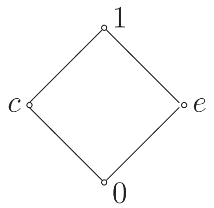
Demostración: Inmediato a partir del teorema anterior y el corolario del teorema de Glivenko, en [Mon95], considerando que $x \wedge x = x$ para todo $x \in L$. □

Ejemplo 2.27. Consideremos el retículo definido por el mismo diagrama de Hasse del Ejemplo 2.26, pero las operaciones dadas por las siguientes tablas:

$\otimes$	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	0	0	a	0	a
b	0	0	0	0	0	b	0	b	b
c	0	a	0	c	a	0	c	a	c
d	0	0	0	a	0	b	a	b	d
e	0	0	b	0	b	e	b	e	e
f	0	a	0	c	a	b	c	d	f
g	0	0	b	a	b	e	d	e	g
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	g	1	g	1	1	g	1	g	1
b	f	f	1	f	1	1	1	1	1
c	e	g	e	1	g	e	1	g	1
d	d	f	g	f	1	g	1	1	1
e	c	c	f	c	f	1	f	1	1
f	b	d	e	f	g	e	1	g	1
g	a	c	d	c	f	g	f	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

En las tablas se comprueba que es un retículo integral de Girard, divisible, es decir, una MV álgebra. Los elementos idempotentes $(0, c, e, 1)$ conforman $\mathbb{B}_2$.



$\otimes$	0	c	e	1
0	0	0	0	0
c	0	c	0	c
e	0	0	e	e
1	0	c	e	1

$\rightarrow$	0	c	e	1
0	1	1	1	1
c	e	1	e	1
e	c	c	1	1
1	0	c	e	1

2.8. Resumen

Las estructuras residuadas han sido estudiadas con muy diversas motivaciones. En este trabajo hemos pretendido realizar el camino desde la primera definición de monoide ordenado reticulado con residuo a izquierda y a derecha, hasta el álgebra de Boole. En cada caso, los axiomas independientes se han combinado de formas diversas, y así surgen diferentes estructuras.
En esta sección hemos intentado resumir las denominaciones más frecuentes interrelacionándolas y resaltando en la clasificación las que hemos mencionado en el presente trabajo.

- **FL** Full-Lambeck álgebra: [GJKO01]
  $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1\rangle$, tal que: $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo, $\langle L, \otimes, 1, \leq\rangle$ es un monoide ordenado y se satisface

  $$x \otimes y \leq z \text{ si y sólo si } x \leq y \rightarrow_d z \text{ si y sólo si } y \leq x \rightarrow_i z$$

- **FL**$_\omega$ Retículo residual acotado: [Ono]
  FL álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1\rangle$, tal que: $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo acotado.

- **RRG** Retículo residual generalizado: [Tur92]
  $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1, e\rangle$, tal que: $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo acotado, $\langle L, \otimes, e, \leq\rangle$ es un monoide ordenado y se satisface

  $$x \otimes y \leq z \text{ si y sólo si } x \leq y \rightarrow_d z \text{ si y sólo si } y \leq x \rightarrow_i z$$

- **RLM** Residuated lattice ordered monoid: [Gal04]
  $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, e\rangle$, tal que: $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo, $\langle L, \otimes, e\rangle$ es un monoide y se satisface

  $$x \otimes y \leq z \text{ si y sólo si } x \leq y \rightarrow_d z \text{ si y sólo si } y \leq x \rightarrow_i z$$

- **FL**$_e$ Retículo residual conmutativo no acotado: [Ono]
  FL álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1\rangle$, tal que: $\langle L, \otimes, 1, \leq\rangle$ es un monoide ordenado conmutativo.

- **DFL** FL álgebras distributivas:
  FL álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow_i, \rightarrow_d, 0, 1\rangle$, tal que: $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo distributivo.

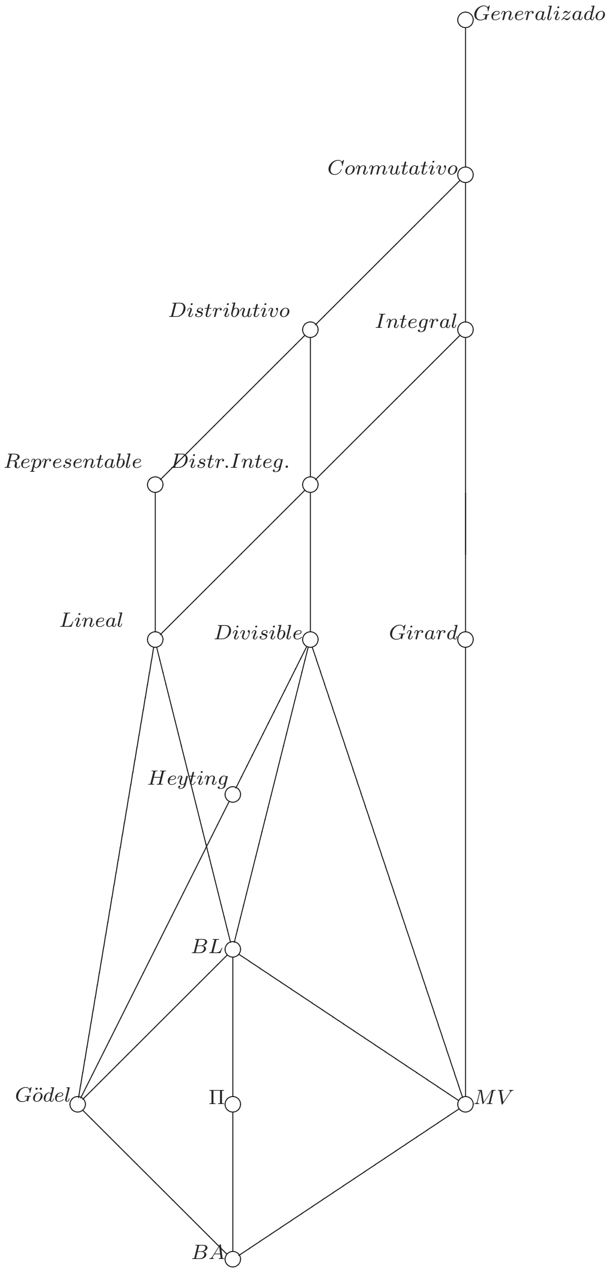
- **RFL** FL álgebras representables:
  Productos subdirectos de FL cadenas ó bien FL álgebras tal que satisfacen:

  $$1 \leq [u \rightarrow_i ((x \vee y) \rightarrow_i x) \otimes u] \vee [v \otimes ((x \vee y) \rightarrow_i y) \rightarrow_d v]$$

- **psMTL**: pseudo Monoidal t-norm logic: [FGI01]
  FL_ω tal que $(x \to_i y) \vee (y \to_i x) = 1$, $(x \to_d y) \vee (y \to_d x) = 1$
- **psBL-GBL** pseudo Basic logic, BL generalizada,: [FGI01], [NGI02],[JT02]
  FL_ω, tal que $x \wedge y = x \otimes (x \to_d y) = (x \to_i y) \otimes x$. Son retículos residuales generalizados divisibles.
- **psMV-GMV** pseudo Multi Valuada ó MV generalizada: [JT02], [Gal03], [GI01]
  psBL donde $x \vee y = (y \to_i x) \to_d x = (y \to_d x) \to_i x$
- **GL** Monoide-retículo de Girard: [Höh95]
  Retículo residual $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, \neg, 0, 1\rangle$ tal que $\neg\neg x = x$.
- **CanRL** RL cancelativos: [BCG+03]
  RL satisfacen: $x = (x \to_d y) \otimes y$, $y = y \otimes (x \to_i x)$
- **LG** Grupos ordenados retículos, l-grupos: [AF88], [Ge89]
  RL que satisfacen $1 = x \otimes (1 \to_i x)$.
- **LG$^-$** Cono negativo: [JT02]
  BL cancelativas, integrales, generalizadas.
- **FL$_{e\omega}$-CRL** Retículo residual comutativo: [KO01], [HRT02]
  FL_e y FL_ω.
- **IRL** Retículo residual integral: [Höh95]
  CRL donde $e = 1$.
- **MTL-RL^C**Monoidal t-norm logic: [BT01]
  $FL_{e\omega}$ tal que $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$, es decir, retículo residual con ley fuerte de De Morgan [Höh95] o lineal.
- **BL** BL álgebras:[Háj97]
  ML divisibles o psBL conmutativas, lineales.
- **HA-Br** pseudo álgebras de Heyting o álgebras de Brouwer: [Mon95]
  FL donde $x \wedge y = x \otimes y$. Si FL_ω es álgebra de Heyting.
- **RBr** Álgebras de Brouwer prelineales o hoops básicos idempotentes:
- **GBA** Álgebras de Boole generalizadas:
  Álgebras de Brouwer donde $x \vee y = (x \to y) \to y$ o hoops de Wajsberg idempotes-ntes, es decir, $x \otimes x = x$.
- **GA** álgebras de Gödel o Heyting lineales: [Háj97], [Mon95]
  BL, con $x \otimes x = x$ ó Heyting con prelinealidad.

- **Π** álgebras producto: [Háj97], [Cin01]
  BL donde $\neg\neg x \leq (x \to (x \otimes y)) \to (y \otimes \neg\neg y)$

- **BA** álgebras de Boole: [Höh95], [DP02]
  Heyting donde $\neg\neg x = x$ ó MV donde $x \otimes x = x$



Algunas subvariedades de retículos residuales, ordenadas por inclusión.

Capítulo 3

Homomorfismos, Subálgebras y Productos

3.1. Teoría de Homomorfismos

3.1.1. Homomorfismos

La definición de homomorfismo en álgebra universal, según podemos encontrarla en S. Burris y H.P. Sankappanavar es la siguiente:

Definición 3.1. [BS81] Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$, una aplicación $\alpha : A \to B$ es un *homomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ si $\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \cdots, a_n) = f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \cdots, \alpha a_n)$, para cada f n-aria en $\mathcal{F}$, y cada n-upla $(a_1, \cdots, a_n) \in A^n$. Si además α es epiyectiva, entonces $\mathbf{B}$ es una *imagen homomorfa* de $\mathbf{A}$.

La instancia de esta definición para la variedad de los retículos residuales resulta:

Definición 3.2. Sean dos retículos residuales: $\mathbf{L}_1 = \langle L_1, \wedge_1, \vee_1, \otimes_1, \to_1, 0_1, 1_1, e_1 \rangle$ y $\mathbf{L}_2 = \langle L_2, \wedge_2, \vee_2, \otimes_2, \to_2, 0_2, 1_2, e_2 \rangle$. Una función $h : L_1 \to L_2$ es un *homomorfismo* de L_1 en L_2 si se verifican:

$h_1)$ $h(x \wedge_1 y) = h(x) \wedge_2 h(y)$

$h_2)$ $h(x \vee_1 y) = h(x) \vee_2 h(y)$

$h_3)$ $h(x \otimes_1 y) = h(x) \otimes_2 h(y)$

$h_4)$ $h(x \to_1 y) = h(x) \to_2 h(y)$

$h_5)$ $h(0_1) = 0_2$

$h_6)$ $h(1_1) = 1_2$

$h_7)$ $h(e_1) = e_2$.

Si h es sobreyectiva se denomina *epimorfismo* y $\mathbf{L}_2$ es una *imagen homomorfa* de $\mathbf{L}_1$. Si es inyectiva *monomorfismo* y si es biyectiva, *isomorfismo*.

Notación 3.1. Si existe un isomorfismo entre $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$, diremos que $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ son *isomorfos* y lo notaremos $\mathbf{L}_1 \cong \mathbf{L}_2$.

Observación 3.1. A fin de simplificar la escritura, pondremos $\mathbf{L}$ para representar $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1, e\rangle$ y $\mathbf{L_i}$ para representar $\langle L_i, \wedge_i, \vee_i, \otimes_i, \to_i, 0_i, 1_i, e_i\rangle$

Observación 3.2. Emulando la línea de trabajo seguida en [Mon95] analizaremos la interdependencia de las condiciones:

- h_7 no es consecuencia de $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$:

Sean L_1 el álgebra de Boole con un átomo, L_2 el retículo residual del Ejemplo 2.12 y $h : L_1 \to L_2$ definida por $h(0) = 0,\ h(1) = 1$. h satisface h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 y h_6, pero $h(e_1) \neq e_2$

- h_5 no es consecuencia de h_1, h_2, h_3, h_4, h_6 y h_7:

Sean L_1 y L_2 dos retículos residuales, L_2 con más de un elemento (es decir, $0_2 \neq 1_2$). $h : L_1 \to L_2$ definida por $h(x) = 1_2$, para todo $x \in L_1$. h satisface h_1, h_2, h_3, h_4 y h_6, pero $h(0_1) \neq 0_2$

- h_4 no es consecuencia de h_1, h_2, h_3, h_5, h_6 y h_7:

Sean L_1 y L_2 dos retículos residuales, L_2 con más de un elemento (es decir, $0_2 \neq 1_2$). $h : L_1 \to L_2$ definida por $h(x) = 0_2$, para todo $x \in L_1$, $x \neq 1_1$, $h(1_1) = 1_2$. h satisface h_1, h_2, h_3, h_5 y h_6, pero no h_4.

- Si L_1 y L_2 son retículos residuales integrales, y se verifica h_4, entonces se verifica h_6.

En efecto:
Por el Lema 2.12.4), $h(1) = h(x \to_1 x)$. Por h_4, $h(x \to_1 x) = h(x) \to_2 h(x) = 1$.

- h_3, h_4 no son consecuencia de h_1, h_2, h_5, h_6 y h_7:

Sea L_1 la cadena $0_1 \leq a \leq 1_1$ y L_2 la cadena $0_2 \leq b \leq 1_2$
con las operaciones definidas por las siguientes tablas:

$\otimes_1$	0_1	a	1_1
0_1	0_1	0_1	0_1
a	0_1	0_1	a
1_1	0_1	a	1_1

$\to_1$	0_1	a	1_1
0_1	1_1	1_1	1_1
a	a	1_1	1_1
1_1	0_1	a	1_1

$\otimes_2$	0_2	b	1_2
0_2	0_2	0_2	0_2
b	0_2	b	b
1_2	0_2	b	1_2

$\to_2$	0_2	b	1_2
0_2	1_2	1_2	1_2
b	0_2	1_2	1_2
1_2	0_2	b	1_2

y h definida por la siguiente tabla:

x	0_1	a	1_1
$h(x)$	0_2	b	1_2

Se verifican h_1, h_2, h_5, h_6 pero:
$h(a) \otimes_2 h(a) = b \otimes_2 b = b \neq 0_2 = h(a \otimes_1 a)$
$h(a) \to_2 h(0_1) = b \to_2 0_2 = 0_2 \neq b = h(a) = h(a \to_1 0_1)$

Veamos ahora las condiciones que debe verificar una función $h : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ para ser un homomorfismo de retículos residuales, según la clase a la que pertenezcan $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$. En cualquier caso, si se verifican h_4 y h_5, entonces es claro que $h(\neg_1 x) = \neg_2 h(x)$.

- Si son retículos integrales basta verificar h_1, h_2, h_3, h_4 y h_5.

h_6 es consecuencia directa de h_4 y el lema 2.12.4).

- Si son retículos lineales basta verificar h_1, h_3, h_4 y h_5 (ó h_2, h_3, h_4 y h_5).

Dado que son retículos lineales, se trata de retículos integrales y por ello se verifica h_6, como valen las leyes de De Morgan, según la Observación 2.14, se verifica h_2. En efecto: $h(x \vee_1 y) = h(\neg_1(\neg_1 x \wedge_1 \neg_1 y)) = \neg_2(h(\neg_1 x) \wedge_2 h(\neg_1 y)) = \neg_2(\neg_2 h(x) \wedge_2 \neg_2 h(y)) = h(x) \vee_2 h(y)$.

- Si son retículos de Girard basta verificar h_1, h_3, h_4, h_5.

Ya que son retículos de Girard, son retículos integrales y vale h_6. Por el Lema 2.26.2) y 3) se verifican las leyes de De Morgan y se verifica h_2 razonando igual que en el caso anterior.

- Si son retículos divisibles basta verificar h_2, h_3, h_4, h_5.

Nuevamente se trata de retículos integrales y se verifica h_6, por ser divisible (según la Observación 2.12) y por el Lema 2.21.2), de h_3 y h_4 resulta h_1.

- Si son BL álgebras basta verificar h_3, h_4, h_5.

Resulta del hecho de ser retículos lineales y divisibles.

- Si son MV álgebras basta verificar h_1, h_3, h_4, h_5.

h_6 es consecuencia de la integralidad, mientras que h_2 resulta de la definición de MV álgebra y h_4.

Ejemplo 3.1. Consideremos las cadenas L_1: $0 < p < 1$ con las operaciones definidas por:

$\otimes_1$	0	p	1
0	0	0	1
p	0	p	p
1	0	p	1

$\rightarrow_1$	0	p	1
0	1	1	1
p	0	1	1
1	0	p	1

y la cadena L_2: $0 < a < b < c < 1$, con las operaciones:

$\otimes_2$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
b	0	0	b	c	b
c	0	0	c	c	c
1	0	a	b	c	1

$\rightarrow_2$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1
b	a	a	1	1	1
c	a	a	a	1	1
1	0	a	b	c	1

Sea h la función definida por la siguiente tabla:

x	0	p	1
$h(x)$	0	b	1

Entonces h es un monomorfismo de retículos residuales.

3.1.2. Filtros en retículos residuales integrales

Definición 3.3. [Pav79][Höh95] Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral, $F \subset L$ es un *filtro de retículo residual integral* si satisface las siguientes condiciones:

(F0) $1 \in F$

(F1) Si $x \leq y$, $x \in F$, entonces $y \in F$

(F2) Si $x, y \in F$, entonces $x \otimes y \in F$

Observación 3.3. En esta tesis trabajaremos sobre filtros de retículos residuales integrales, y los llamaremos simplemente filtros. En caso de posibles confusiones hablaremos de filtros de retículos y filtros de retículos residuales.

Observación 3.4. Llamamos *filtro propio* a un filtro propiamente contenido en el retículo. Salvo que se haga alguna aclaración en especial, a lo largo de este capítulo cada vez que se mencione un filtro nos referiremos siempre a un filtro propio. Es claro que F es un filtro propio si y sólo si $0 \notin F$.

Lema 3.1. *Sea F un filtro. F es propio si y sólo si no existe $x \in L$ tal que x y $x \to 0$ pertenezcan a F simultáneamente.*

Demostración: Supongamos que $x, x \to 0 \in F$, entonces, por (F2) y el Lema 2.9.2-i) podemos escribir: $0 = x \otimes (x \to 0) \in F$.
Si F no es propio, $0 \in F$ y $0 \to 0 = 1 \in F$. □

Lema 3.2. *Si $x, y \in F$ entonces:*

1) $x \wedge y \in F$

2) $x \to y \in F$

Demostración:

1) Resulta de (F2), (F1) y el Lema 2.14.2): $x \otimes y \leq x \wedge y$.

2) Resulta de (F1) y el Lema 2.14.3): $y \leq x \to y$.

□

Si bien la imagen homomorfa de un filtro, no es necesariamente un filtro en la variedad de los retículos, un homomorfismo de retículos residuados preserva esta estructura, como se verifica en el siguiente lema.

Lema 3.3. *Sean $\langle L_1, \wedge_1, \vee_1, \otimes_1, \to_1, 0_1, 1_1 \rangle$, $\langle L_2, \wedge_2, \vee_2, \otimes_2, \to_2, 0_2, 1_2 \rangle$ dos retículos residuales integrales, $h : L_1 \to L_2$ un epimorfismo de retículos residuales. Si F es un filtro de L_1, entonces $h(F)$ es un filtro de L_2.*

Demostración: Dado que h es homomorfismo $h(1_1) = 1_2$ y se verifica (F0). Para probar (F1) supongamos que $h(x) \in h(F)$ y $z \in L_2$ tal que $h(x) \leq z$. Como h es un epimorfismo, existe $y \in L$ tal que $h(y) = z$ y $z = h(y) = h(x) \vee_2 h(y) = h(x \vee_1 y)$, por h_2. Como $x \in F$ y $x \vee_1 y \geq x$ resulta $x \vee_1 y \in F$ y $z \in h(F)$. (F2) resulta sencillamente por h_3. □

Observación 3.5. Del Lema 3.2.1) se sigue que todo filtro de retículo residual es filtro de retículo, pero la recíproca en general no es válida.
En efecto: Si consideramos en el Ejemplo 2.13 el filtro de retículo principal generado por p, es decir,

$$F(p) = \{p, q, r, s, t, u, v, 1\}$$

vemos que $p \otimes p = 0 \notin F$.

Lema 3.4. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$, un retículo residual $F(a)$ el filtro de retículo generado por a es filtro de retículo residual si y sólo si a es idempotente.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que a es idempotente. (F0) y (F1) se verifican trivialmente, debemos probar (F2). Sean $x, y \in F(a)$, entonces $a \leq x,\ a \leq y$. En virtud del Lema 2.9.3) escribimos $a = a \otimes a \leq x \otimes y$ y, en consecuencia $x \otimes y \in F(a)$.

Para ver la recíproca supongamos que $F(a)$ es filtro y, sabiendo que $a \in F(a)$, por (F2) necesariamente $a \otimes a \in F(a)$ y, por lo tanto, $a \leq a \otimes a$. Aplicando ahora el Lema 2.14.2) resulta la igualdad. □

Corolario 3.1. *Los filtros de un retículo residual integral finito, son los filtros de retículo principales generados por los elementos idempotentes.*

Demostración: Si L es retículo residual finito, sus filtros de retículo serán los filtros principales, pero para que sea filtro de retículo residual, según la proposición anterior, debe ser generado por un elemento idempotente. □

Lema 3.5. *Si $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$, es un retículo residual lineal no totalmente ordenado, entonces tiene al menos un filtro principal no trivial.*

Demostración: En virtud del Lema 2.18 $L\backslash\{1\}$ posee al menos dos elementos maximales distintos, sean a y b, en especial, $1 = a \vee b$. Sea $F_a = \{x \in L : x \vee b = 1\}$, veamos que F_a es un filtro. (F0) y (F1) se verifican trivialmente. Comprobemos (F2). Sean x, y tales que $x \vee b = y \vee b = 1$, veamos que $(x \otimes y) \vee b = 1$. Dado que $x \vee b = y \vee b = 1$, bastará con probar que $1 = (x \vee b) \otimes (y \vee b) \leq (x \otimes y) \vee b$. Por la Condición (2.13) $(x \vee b) \otimes (y \vee b) \leq (x \otimes y) \vee b$ es equivalente a $x \vee b \leq (y \vee b) \rightarrow ((x \otimes y) \vee b)$ y esto se verifica si $x \leq (y \vee b) \rightarrow ((x \otimes y) \vee b)$ y $b \leq (y \vee b) \rightarrow ((x \otimes y) \vee b)$. Por el Lema 2.12.2) $x \leq (y \vee b) \rightarrow ((x \otimes y) \vee b)$ es equivalente a $x \rightarrow ((y \vee b) \rightarrow ((x \otimes y) \vee b)) = 1$, que por el Lema 2.9.10) puede escribirse $(x \otimes (y \vee b)) \rightarrow ((x \otimes y) \vee b) = 1$ y nuevamente aplicando el Lema 2.12.2) vemos que es equivalente a $x \otimes (y \vee b) \leq (x \otimes y) \vee b$, pero por el Lema 2.9.6) $x \otimes (y \vee b) = (x \otimes y) \vee (x \otimes b)$, y resulta que debemos probar que $(x \otimes y) \vee (x \otimes b) \leq (x \otimes y) \vee b$. Esto se verifica ya que: $x \otimes y \leq x \otimes y$ y $x \otimes b \leq b$ y aplicando supremo a ambos desigualdades obtenemos el resultado deseado.
Para ver que $b \leq (x \otimes y) \vee b \leq (y \vee b) \rightarrow ((x \otimes y) \vee b)$ basta aplicar el Lema 2.14.3).
Hemos probado que F_a es un filtro. Vemos que es un filtro propio ya que $0 \vee b \neq 1$. Dado que es finito, existe $a_0 = \bigwedge\{x : x \in F_a\}$, de este modo $F_a = F(a_0)$, un filtro principal. □

Corolario 3.2. *Si* **L** *es un retículo lineal no totalmente ordenado, entonces tiene al menos un elemento idempotente.*

Demostración: Inmediata, a partir del Lema 3.4 y el Lema 3.5. □

Lema 3.6. *La intersección de filtros es un filtro.*

Demostración: Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de filtros y $F = \bigcap_{i\in I} F_i$.
Dado que $1 \in F_i$ para todo $i \in I$ resulta que $1 \in F$ y se verifica (F0).
Para verificar (F1) observemos que si $x \leq y,\ x \in F$, entonces $x \in F_i$ para todo $i \in I$ y, en consecuencia, por (F1), $y \in F_i$, para todo $i \in I$, es decir, $y \in F$.
Con un argumento similar, si x e y son elementos de F, entonces x e y son elementos de F_i para todo $i \in I$, y aplicando (F2) $x \otimes y \in F_i$ para todo $i \in I$ y, en consecuencia $x \otimes y \in F$. □

Lema 3.7. *Sea F un filtro. $x, y \in F$ si y sólo si $x \wedge y \in F$.*

Demostración: Si $x, y \in F$ por el Lema 3.2 resulta $x \wedge y \in F$. Para la implicación contraria basta aplicar (F1). □

Definición 3.4. Si S es un subconjunto no vacío de L, el *filtro generado por S* es la intersección de todos los filtros que contienen a S. Afirmamos que se trata de un filtro en virtud del Lema 3.6.
Notaremos con $\langle S\rangle$ al filtro generado por S.

Observación 3.6. En el conjunto $\mathcal{F}(L)$ de todos los filtros F de $\mathbf{L}$ consideramos la relación de orden parcial determinada por la inclusión de conjuntos. Según esta relación de orden, el filtro generado por S es el menor filtro que contiene a S. Es decir, se verifica el siguiente lema:

Lema 3.8. *Si $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es un retículo residual integral y $S \subseteq L$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $F = \langle S\rangle$

2) *F satisface las siguientes condiciones:*

(FG1) *$S \subseteq F$,*

(FG2) *F es un filtro,*

(FG3) *Si G es un filtro tal que $S \subseteq G$, entonces $F \subseteq G$.*

Demostración: 1)⇒ 2) Por la definición de intersección se cumple (FG1) y por la propia definición de filtro generado (Definición 3.4) se cumple (FG2). Supongamos entonces que G es un filtro que contiene a S, por la definición de $\langle S\rangle$ resulta $F \subseteq G$.

2)⇒ 1) Supongamos ahora que F satisface (FG1),(FG2) y (FG3). Por (FG1), (FG2) y la definición de $\langle S\rangle$ resulta $\langle S\rangle \subseteq F$. Ahora bien, $\langle S\rangle$ es un filtro que contiene a S, entonces aplicando (FG3) resulta $F \subseteq \langle S\rangle$ y obtenemos la igualdad. □

Lema 3.9. [Tur99] *Si S es un subconjunto no vacío de un retículo residual integral L, entonces*

$$S_f = \{x \in L : \text{ existen } s_1, \cdots, s_n \in S \text{ satisfaciendo } s_1 \otimes \cdots \otimes s_n \leq x\}$$

es un filtro que contiene a S.

Demostración: $S \subseteq S_f$ es trivial. Veamos que S_f es un filtro.
(F0) se satisface ya que $s \leq 1$ para todo $s \in S$, (F1) se satisface por la propiedad transitiva de $\leq$ y, finalmente (F2) por la monotonía del operador $\otimes$. □

Teorema 3.1. *Si S es un subconjunto no vacío de un retículo residual integral L, entonces $S_f = \langle S \rangle$, el filtro generado por S.*

Demostración: Por el Lema 3.1 S_f es un filtro que contiene a S. Para ver que es el menor, consideremos un filtro G tal que $S \subseteq G$ y un elemento x tal que $s_1 \otimes \cdots \otimes s_n \leq x$, para algunos $s_1, \cdots, s_n \in S$, dado que $S \subseteq G$ aplicando (F1) y (F2) se concluye que $x \in G$, es decir, $S_f \subseteq G$ y $S_f = \langle S \rangle$. □

Siguiendo la construcción de filtro generado para álgebras de Heyting dada en [Mon95], enunciamos el siguiente lema:

Lema 3.10. *Sea F un filtro de un retículo residual integral L, $x \in L$ tal que $x \otimes x = x$. Notemos $\langle F, x \rangle$ al filtro generado por $F \cup \{x\}$. Entonces $\langle F, x \rangle = \{y : x \to y \in F\}$.*

Demostración: Sea $F_{(x)} = \{y : x \to y \in F\}$, por el Lema 3.8 probaremos que $F_{(x)}$ satisface (FG1), (FG2) y (FG3).

(FG1): Debemos probar que $F \cup \{x\} \subseteq F_{(x)}$. Sea $y \in F$, por el Lema 2.9.1-i), $y \leq x \to y$ y resulta $x \to y \in F$, por (F1). Resulta entonces que $y \in F_{(x)}$. Además $x \to x = 1 \in F$ por (F0), y se satisface lo que queremos probar.

(FG2): Veamos ahora que $F_{(x)}$ es un filtro: (F0) se verifica por el Lema 2.9.1). Para ver (F1) sea $y_1 \leq y_2$, $y_1 \in F_{(x)}$, por el Lema 2.9.2-i) resulta $x \to y_1 \leq x \to y_2$. Como $y_1 \in F_{(x)}$ resulta $x \to y_1 \in F$, y aplicando (F1) para F resulta $x \to y_2 \in F$ y, en consecuencia, $y_2 \in F_{(x)}$. Es decir, $F_{(x)}$ satisface (F1). Finalmente, sean $y, z \in F_{(x)}$, entonces $x \to y$, $x \to z \in F$. Por (F2) para F resulta que $(x \to y) \otimes (x \to z) \in F$. Por el Lema 2.9.18), y considerando que $x \otimes x = x$ podemos escribir $x \to (y \otimes z) = (x \otimes x) \to (y \otimes z) \geq (x \to y) \otimes (x \to z) \in F$, por (F1) para F resulta que $x \to (y \otimes z) \in F$ e $y \otimes z \in F_{(x)}$.

(FG3): Sea G un filtro tal que $F \cup \{x\} \subseteq G$. Si $y \in F_{(x)}$ resulta $x \to y \in F \subseteq G$. Entonces $x, x \to y \in G$ y por (F2) para G resulta $x \otimes (x \to y) \in G$. Además, por el Lema 2.9.2-i) resulta $x \otimes (x \to y) \leq y$ y aplicando (F2) a G resulta $y \in G$. Hemos probado, entonces, que $F_{(x)} \subseteq G$. □

Observación 3.7. Si $x \in F$ resulta $\langle F, x\rangle = F$. En efecto: sean x, $x \to y \in F$. Por el Lema 2.9.2-i) $x \otimes (x \to y) \leq y$; por (F2) $x \otimes (x \to y) \in F$ y por (F1), $y \in F$.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.2. Consideremos el retículo residual del Ejemplo 2.26. $F = \{f, 1\}$ es un filtro. b es un elemento idempotente. $\langle F, b\rangle = \{y : b \to y \in \{f, 1\}\} = \{b, d, e, f, g, 1\}$ y puede verificarse en las tablas que satisface (F0), (F1) y (F2). a no es un elemento idempotente. $\{y : a \to y \in \{f, 1\}\} = \{a, c, d, f, g, 1\}$ es filtro de retículo, pero no satisface (F2).

En el Lema 3.10, para caracterizar al filtro generado por un filtro y un elemento x, hemos necesitado la idempotencia de x para probar que se satisface (F2). Para obtener un resultado aplicable a un elemento x cualquiera, introduzcamos las potencias n-ésimas de x:

Definición 3.5. Definimos por recurrencia la n-ésima potencia de x, x^n, del siguiente modo:

$$x^0 = 1,$$

$$x^{n+1} = x^n \otimes x, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Consideremos el conjunto $F^{(x)} = \{y : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n \to y \in F\}$. Las demostraciones de (FG1) y (FG3) del Lema 3.10 siguen siendo válidas. Para (FG2) las demostraciones de (F0) y (F1) son las mismas. Veamos cómo demostrar (F2).
Consideremos $y, z \in F^{(x)}$, entonces Existen n y m tales que $x^n \to y$, $x^m \to z \in F$. por (F2) para F resulta que $(x^n \to y) \otimes (x^m \to z) \in F$. Por el Lema 2.9.18), escribimos $x^{n+m} \to (y \otimes z) \geq (x^n \to y) \otimes (x^m \to z) \in F$, y por (F1) de F resulta que $x^{n+m} \to (y \otimes z) \in F$, de donde $y \otimes z \in F^{(x)}$.

Este razonamiento demuestra el siguiente lema:

Lema 3.11. *Sea F un filtro de un retículo residual integral L, $x \in L$. Notemos $\langle F, x\rangle$ al filtro generado por $F \cup \{x\}$. Entonces $\langle F, x\rangle = \{y : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n \to y \in F\}$.*

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.3. Volvamos al Ejemplo 2.26. $F = \{f, 1\}$ es un filtro. Los elementos a y g no son idempotentes.
$\langle F, a\rangle = \{y : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^n \to y \in \{f, 1\}\} = L$, ya que $a \otimes a = 0$.

$\langle F, g\rangle = \{y : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } g^n \to y \in \{f, 1\}\} = \{b, d, e, f, g, 1\} \subset L$.

Observación 3.8. Si x es un elemento idempotente, $x^n = x$ y por lo tanto el Lema 3.10 es un caso particular del Lema 3.11.
Dado que $1 \in F$ para todo filtro F, podemos considerar el filtro generado por un elemento $a \in L$, que notamos $\langle a \rangle$, como el filtro generado por $\{1\} \cup \{a\}$. Es decir: $\langle a \rangle = \langle \{1\}, a \rangle$, resulta entonces que, $\langle a \rangle = \{x : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^n \to x = 1\}$ y dado que $\mathbf{L}$ es un retículo residual integral tenemos que: $\langle a \rangle = \{x : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^n \leq x\}$.

3.1.3. Sistemas deductivos en retículos residuales integrales

Definición 3.6. [Tur99] Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1 \rangle$ un retículo residual. $\emptyset \subset D \subseteq L$ es un *sistema deductivo* si satisface:

(D1) $1 \in D$,

(D2) Si $x,\ x \to y \in D$ entonces $y \in D$.

Observación 3.9. En [CT97] los autores llaman *filtro implicativo* a un subconjunto de un retículo residual que satisfaga (D1) y (D2).

Observación 3.10. Si $0 \in D$, entonces $D = L$. Por (D1) sabemos que $1 \in D$, además por el Lema 2.12.2) $0 \to y = 1$, para todo $y \in L$. Es decir, $0 \in D$ y $0 \to y \in D$, para todo $y \in L$, en consecuencia, aplicando (D2), resulta $y \in D$, para todo $y \in L$.

Lema 3.12. *Sea D un sistema deductivo. D es propio si y sólo si no existe $x \in L$ tal que x y $x \to 0$ pertenezcan a D simultáneamente.*

Demostración: Supongamos que $x, x \to 0 \in D$, entonces, por (D2) $0 \in D$ y $D = L$.
Si D no es propio, $0 \in D$ y $0 \to 0 = 1 \in D$. □

Observación 3.11. (D2) es equivalente a:

(D$'$) $x \in D,\ y \notin D$, entonces $x \to y \notin D$.

En efecto: Supongamos que $x \in D,\ y \notin D$ y (D2). Si $x \to y \in D$, entonces $y \in D$, lo que contradice la hipótesis, en consecuencia $x \to y \notin D$.
Recíprocamente, si $x, x \to y \in D$ y (D$'$), entonces si fuera $y \notin D$ resultaría $x \to y \notin D$, lo que contradice la hipótesis.

Observación 3.12. Si D es un sistema deductivo, entonces se verifican:

1) Si $x \in D,\ y \notin D$, entonces $x \to y \notin D$,

2) Si $x \in D,\ y \in D$, entonces $x \to y \in D$,

3) Si $x \notin D,\ y \in D$, entonces $x \to y \in D$.

1) sigue de la Observación 3.11, supongamos ahora que $y \in D$. Por el Lema 2.14.3) $y \leq x \to y$ y por el Lema 2.12.2) $y \to (x \to y) = 1$ y $1 \in D$ por (D1). Entonces $y \in D$, $y \to (x \to y) \in D$, por (D2) resulta $x \to y \in D$ ya sea que $x \in D$ ó $x \notin D$, lo que prueba 2) y 3).
En cambio, si $x \notin D$, $y \notin D$, no se puede afirmar nada, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4. En el ejemplo 2.26 $F(f) = \{f, 1\}$ es un sistema deductivo $a \notin F(f)$, $c \notin F(f)$, además, $a \to c = 1 \in F(f)$ y $c \to a = g \notin F(f)$.

Más adelante retomaremos esta idea.

Lema 3.13. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo residual y $\emptyset \subset D \subseteq L$. D es sistema deductivo si y sólo si D es filtro de retículo residual.*

Demostración: Supongamos que D es un sistema deductivo. (F0) se verifica trivialmente por (D1), para verificar (F1) observemos que si $x \leq y$ y $x \in D$ resulta, por el Lema 2.12.2) $x \to y = 1 \in D$ y por (D2) $y \in D$.
Sean $x, y \in D$, aplicando el Lema 2.12.2) y el Lema 2.9.10) podemos escribir: $1 = (x \otimes y) \to (x \otimes y) = x \to (y \to (x \otimes y))$. Aplicando iterativamente (D2), como x y $1 \in D$, resulta $x \otimes y \in D$.

Supongamos ahora que D es un filtro. Igual que en la implicación anterior (D1) se verifica trivialmente de (F0).
Sean x, $x \to y \in D$. Por el Lema 2.9.2-i) $x \otimes (x \to y) \leq y$; por (F2) $x \otimes (x \to y) \in D$ y por (F1), $y \in D$. □

Corolario 3.3. *La intersección de sistemas deductivos es un sistema deductivo.*

Demostración: Por este lema, una familia de sistemas deductivos es una familia de filtros. Por el Lema 3.6 la intersección de filtros es un filtro y nuevamente por este lema, este filtro es un sistema deductivo. □

Definición 3.7. Si S es un subconjunto no vacío de L, el *sistema deductivo generado por S* es la intersección de todos los sistemas deductivos que contienen a S.
Notaremos con $\langle\langle S\rangle\rangle$ al sistema deductivo generado por S.

Observación 3.13. En el conjunto $\mathcal{SD}(L)$ de todos los sistemas deductivos D de $\mathbf{L}$ consideramos la relación de orden parcial determinada por la inclusión de conjuntos. Según esta relación de orden, el sistema deductivo generado por S es el menor sistema deductivo que contiene a S. Es decir, se verifica el siguiente lema:

Lema 3.14. *Si $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es un retículo residual integral y $S \subseteq L$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $D = \langle\langle S \rangle\rangle$

2) *D satisface las siguientes condiciones:*

(SDG1) *$S \subseteq D$,*

(SDG2) *D es un sistema deductivo,*

(SDG3) *Si G es un sistema deductivo tal que $S \subseteq G$, entonces $D \subseteq G$.*

Demostración: Trivial. □

Lema 3.15. *Si S es un subconjunto no vacío de un retículo residual integral L, entonces*

$$S_d = \{x \in L : \text{ existen } s_1, \cdots, s_n \in S, \text{ tales que } s_1 \to (s_2 \to (\cdots (s_n \to x) \cdots)) = 1\}$$

es un sistema deductivo de L que contiene a S.

Demostración: Sean $x \in L$, $s_1, \cdots, s_n \in S$. La condición

$$s_1 \to (s_2 \to (\cdots (s_n \to x) \cdots)) = 1$$

es equivalente a $s_1 \otimes \cdots \otimes s_n \leq x$, por los Lemas 2.9.10) y 2.12.2) . Es decir, $S_d = \langle S \rangle$. Finalmente, por el Lema 3.13 es sistema deductivo. □

Teorema 3.2. *Sea S un subconjunto no vacío de un retículo residual integral L, entonces $S_d = \langle\langle S \rangle\rangle$, el sistema deductivo generado por S.*

Demostración: Inmediata del Teorema 3.1 y el Lema 3.15. □

Observación 3.14. Claramente $\{1\}$ y L son sistemas deductivos. Si D es sistema deductivo, entonces para cada $x \in L$ se tiene que $x \in D$ si y sólo si $x^n \in D$ cualquiera que sea n número natural.
En efecto, dado que un sistema deductivo es filtro, en virtud de (F2), si $x \in D$ necesariamente $x^n \in D$. Para ver la recíproca basta aplicar (F1).

Lema 3.16. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1 \rangle$ un retículo residual lineal, $a, b \in L$ tal que $a \vee b = 1$, entonces $a^2 \vee b^2 = 1$.*

Demostración: Dado que $a \vee b = 1$, resulta $(a \vee b) \otimes 1 = (a \vee b) \otimes (a \vee b) = a^2 \vee b^2 \vee (a \otimes b)$, por el Lema 2.9.6). Veamos que $a \otimes b \leq a^2 \vee b^2$. Por el Lema 2.12.2) probaremos la igualdad: $(a \otimes b) \to (a^2 \vee b^2) = 1$. Por el Lema 2.9.10) afirmamos que $(a \otimes b) \to (a^2 \vee b^2) = (a \to (b \to (a^2 \vee b^2)))$, que por el Lema 2.16.2) resulta $(a \to (b \to a^2)) \vee (a \to (b \to b^2))$. Aplicando ahora el Lema 2.9.11) obtenemos $(b \to (a \to a^2)) \vee (a \to (b \to b^2))$.
Dado que $x \otimes x = x^2$, cualquiera que sea $x \in L$, por la condición de par adjunto resulta $a \leq a \to a^2$ y por el Lema 2.9.4-i) $b \to a \leq b \to (a \to a^2)$. Análogamente $a \to b \leq a \to (b \to b^2)$. Por la linealidad de L afirmamos $1 = (a \to b) \vee (b \to a) \leq (a \to (b \to b^2)) \vee (b \to (a \to a^2))$.
Concluímos, entonces, que $a^2 \vee b^2 \vee (a \otimes b) = a^2 \vee b^2$ y, en consecuencia, $a^2 \vee b^2 = 1$ □

Corolario 3.4. *En las condiciones del Lema, $a^n \vee b^n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Sabemos que $a^2 \vee b^2 = 1$, es inmediato ver que $a^{2^k} \vee b^{2^k} = 1$, cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. dado que $n \leq 2^n$ resulta $a^{2^n} \leq a^n$. Del mismo modo $b^{2^n} \leq b^n$. En consecuencia $1 = a^{2^n} \vee b^{2^n} \leq a^n \vee b^n$. Es decir, $a^n \vee b^n = 1$. □

Observación 3.15. $a^0 \vee b^0 = 1 \vee 1 = 1$, para todo $a, b \in L$.

Lema 3.17. *Sea **L** un retículo residual integral y F un filtro de **L**, entonces para todo $x, y \in L$ se verifican:*

1) $(x \vee y)^n = \bigvee_{k=0}^{n} (x^{n-k} \otimes y^k)$

2) *Si existen $n_x, n_y \in \mathbb{N}, z_x, z_y \in L$ tales que $x^{n_x} \otimes z_x \leq t$ y $y^{n_y} \otimes z_y \leq t$, entonces*

$$(x \vee y)^{n_x+n_y} \otimes z_x \otimes z_y \leq t.$$

Demostración: 1) Se verifica trivialmente para $n = 1$. Supongamos válido para n y probémoslo para $n + 1$.
Por la Definición 3.5 $(x \vee y)^{n+1} = (x \vee y)^n \otimes (x \vee y)$. Además, $(x \vee y)^n \otimes (x \vee y) = \bigvee_{k=0}^{n} (x^{n-k} \otimes y^k) \otimes (x \vee y) = \left(\bigvee_{k=0}^{n} (x^{n-k} \otimes y^k) \otimes x\right) \vee \left(\bigvee_{k=0}^{n} (x^{n-k} \otimes y^k)\right) \otimes y = \bigvee_{k=0}^{n} (x^{n+1-k} \otimes y^k) \vee \bigvee_{k=0}^{n} (x^{n-k} \otimes y^{k+1}) = \bigvee_{k=0}^{n} (x^{n+1-k} \otimes y^k) \vee \bigvee_{k^o=1}^{n+1} (x^{n+1-k^o} \otimes y^{k^o}) = \bigvee_{k=0}^{n+1} (x^{(n+1)-k} \otimes y^k)$.

2)Por el inciso anterior, $(x \vee y)^{n_x+n_y} \otimes z_x \otimes z_y = \left(\bigvee_{k=0}^{n_x+n_y} (x^{n_x+(n_y-k)} \otimes y^k)\right) \otimes z_x \otimes z_y$ y será $(x \vee y)^{n_x+n_y} \otimes z_x \otimes z_y \leq t$ si y sólo si todos los términos lo son. Consideremos uno cualquiera de ellos: $x^{n_x+(n_y-k)} \otimes y^k \otimes z_x \otimes z_y$. Si $k \leq n_y$ resulta $x^{n_x+(n_y-k)} \otimes y^k \otimes z_x \otimes z_y = (x^{n_x} \otimes z_x) \otimes x^{(n_y-k)} \otimes y^k \otimes z_y \leq t \otimes x^{(n_y-k)} \otimes y^k \otimes z_y \leq t$.
Si $k > n_y$ resulta $y^k \leq y^{n_y}$ y $x^{n_x+(n_y-k)} \otimes y^k \otimes z_x \otimes z_y = x^{n_x+n_y-k} \otimes z_x \otimes (y^k \otimes z_y) \leq x^{n_x+n_y-k} \otimes z_x \otimes (y^{n_y} \otimes z_y) \leq x^{n_x+n_y-k} \otimes z_x \otimes t \leq t$.
□

Corolario 3.5. *Si $x^{n_x} \otimes z_x = 0$ e $y^{n_y} \otimes z_y = 0$, entonces $(x \vee y)^{n_x+n_y} \otimes z_x \otimes z_y = 0$.*

Demostración: Basta tomar $t = 0$ en el enunciado anterior. □

3.1.4. Congruencias y cocientes

Recordemos la definición de congruencia del álgebra universal, tal como la encontramos en el libro de S. Burris y H.P. Sankappanavar:

Definición 3.8. [BS81] Sea A un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y θ una relación de equivalencia en A. Entonces θ es una *congruencia* en A si para cada $f \in \mathcal{F}$ y cada elemento $a_i, b_i \in A$, si se verifica $a_i \theta b_i$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $f^A(a_1, a_2, \cdots, a_n)\theta f^A(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ se verifica.

Para la variedad de los retículos residuales resulta:

Definición 3.9. Sea $\mathbf{L} = \langle L, , \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral y θ una relación de equivalencia en L. Entonces θ es una *congruencia* en $\mathbf{L}$ si para cada x, x', y $y' \in L$ tal que $x\theta y$ y $x'\theta y'$ se verifican:

(C1) $(x \wedge x')\, \theta\, (y \wedge y')$,

(C2) $(x \vee x')\, \theta\, (y \vee y')$,

(C3) $(x \otimes x')\, \theta\, (y \otimes y')$,

(C4) $(x \rightarrow x')\, \theta\, (y \rightarrow y')$.

Lema 3.18. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral, F un filtro propio de L. Entonces la relación $\equiv_F$ definida por:*

$$x \equiv_F y \text{ si y sólo si } (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \in F \tag{3.1}$$

es una congruencia no trivial en L.

Demostración: En efecto:

i) $\equiv_F$ es una relación de equivalencia en L.

La propiedad reflexiva es consecuencia del Lema 2.12.4), la simetría está dada por la propia definición. Probemos la propiedad transitiva. Sean $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \in F$ y $(y \rightarrow z) \wedge (z \rightarrow y) \in F$. Por (F1) $x \rightarrow y, y \rightarrow z \in F$, aplicando (F2) resulta $(x \rightarrow y) \otimes (y \rightarrow z) \in F$ y por el Lema 2.9.5) y (F1), $x \rightarrow z \in F$. Análogamente se ve que $z \rightarrow x \in F$ y por el Lema 3.7 resulta $(x \rightarrow z) \wedge (z \rightarrow x) \in F$.

ii) Si $x \equiv_F x'$ y $y \equiv_F y'$, entonces $(x \wedge y) \equiv_F (x' \wedge y')$.

Si $x \equiv_F x'$ e $y \equiv_F y'$, entonces $x \rightarrow x' \in F$ e $y \rightarrow y' \in F$. Por el Lema 2.9.8) $(x \wedge y) \rightarrow (x' \wedge y') = ((x \wedge y) \rightarrow x') \wedge ((x \wedge y) \rightarrow y')$. Además, por el Lema 2.9.12) $(x \wedge y) \rightarrow x' \geq (x \rightarrow x') \vee (y \rightarrow x') \geq x \rightarrow x'$ y $((x \wedge y) \rightarrow y') = (x \rightarrow y') \vee (y \rightarrow y') \geq y \rightarrow y'$. De la misma manera resulta $(x' \wedge y') \rightarrow (x \wedge y) \in F$. Entonces por el Lema 3.7 y (F1) resulta $(x \wedge y) \equiv_F (x' \wedge y')$.

iii) Si $x \equiv_F x'$ y $y \equiv_F y'$, entonces $(x \vee y) \equiv_F (x' \vee y')$.

Si $x \equiv_F x'$ e $y \equiv_F y'$, entonces $x \to x' \in F$ e $y \to y' \in F$. Por el Lema 2.9.9) se tiene: $(x \vee y) \to (x' \vee y') = (x \to (x' \vee y')) \wedge (y \to (x' \vee y'))$. Además considerando el Lema 2.9.13) resulta $x \to (x' \vee y')) \geq (x \to x') \vee (x \to y') \geq x \to x'$ y también $y \to (x' \vee y') = (y \to x') \vee (y \to y') \geq y \to y'$. Entonces por el Lema 3.7 y (F1) resulta $(x \vee y) \equiv_F (x' \vee y')$.

iv) Si $x \equiv_F x'$ e $y \equiv_F y'$, entonces $(x \otimes y) \equiv_F (x' \otimes y')$.

Si $x \equiv_F x'$ e $y \equiv_F y'$, entonces $x \to x' \in F$ e $y \to y' \in F$. Aplicando la condición de par adjunto (2.13) y el Lema 2.9.2-i) y 3) se tiene: $x \otimes (x \to x') \otimes y \otimes (y \to y') \leq x' \otimes y'$, esto es, $(x \otimes y) \otimes (x \to x') \otimes (y \to y') \leq x' \otimes y'$. Además $(x \to x') \otimes (y \to y') \leq (x \otimes y) \to (x' \otimes y')$. Entonces por el Lema 3.7 y (F2), resulta $(x \otimes y) \equiv_F (x' \otimes y')$.

v) Si $x \equiv_F x'$ e $y \equiv_F y'$, entonces $(x \to y) \equiv_F (x' \to y')$.

Probaremos que si $x \equiv_F x'$, entonces $(x \to z) \equiv_F (x' \to z)$ y $(z \to x) \equiv_F (z \to x')$, para todo $z \in L$. Luego, aplicando la propiedad transitiva de la congruencia, resulta lo que queremos demostrar.
Como $x \equiv_F x'$, entonces $x' \to x \in F$ y $x \to x' \in F$.
Por el Lema 2.9.4-i) $x' \to x \leq x' \to ((x \to z) \to z)$, que por el Lema 2.9.11) resulta $x' \to x \leq (x \to z) \to (x' \to z)$. Por (F1) para F resulta $(x \to z) \to (x' \to z) \in F$. Análogamente se obtiene $((x' \to z) \to (x \to z) \in F$. Entonces, por el Lema 3.7, $(x \to z) \equiv_F (x' \to yz)$.
Por el Lema 2.9.20) $x' \to x \leq (z \to x') \to (z \to x)$, aplicando (F1) para F resulta $(z \to x') \to (z \to x) \in F$. Análogamente $(z \to x) \to (z \to x') \in F$. Entonces, por el Lema 3.7, $(z \to x) \equiv_F (z \to x')$.

vi) $0 \not\equiv_F 1$.

$0 \not\equiv_F 1$ ya que $(0 \to 1) \wedge (1 \to 0) = 0 \notin F$. □

En álgebra universal, dado un homomorfismo $h : A \to B$ se define la congruencia no trivial $ker(h)$ del siguiente modo:

Definición 3.10. Dado un homomorfismo $h : A \to B$ se denomina *núcleo - o kernel de h* y se nota $ker(h)$ a la relación binaria:

$$ker(h) = \{(a, b) \in A^2 : h(a) = h(b)\}.$$

Veremos que $ker(h)$ es una congruencia que coincide con la dada en la Definición 3.18 para el filtro núcleo.

Definición 3.11. Dado un homomorfismo $h : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ se denomina *filtro núcleo - o filtro kernel de* h y se nota $Ker(h)$ a la imagen completa inversa de 1_2, es decir:

$$Ker(h) = h^{-1}[\{1_2\}] \subseteq L_1$$

Observemos en primer lugar que dado un homomorfismo h, el filtro núcleo $Ker(h)$ es un filtro (o un sistema deductivo):

Lema 3.19. *$Ker(h)$ tiene las siguientes propiedades:*

1) $1_1 \in Ker(h)$.

2) *Si* $x \leq_1 y$ *y* $x \in Ker(h)$, *entonces* $y \in Ker(h)$.

3) *Si* $x, y \in Ker(h)$ *entonces* $x \otimes_1 y \in Ker(h)$.

4) *Si* $x, x \to_1 y \in Ker(h)$, *entonces* $y \in Ker(h)$.

Demostración:

1) $h(1_1) = 1_2$.

2) Si $x \leq_1 y$, entonces $h(x) \leq_2 h(y)$, y como $x \in Ker(h)$, entonces $h(x) = 1_2$. En consecuencia $h(y) = 1_2$ y resulta $y \in Ker(h)$.

3) Si $x, y \in Ker(h)$, entonces $h(x) = h(y) = 1_2$, de donde $h(x \otimes_1 y) = h(x) \otimes_2 h(y) = 1_2 \otimes_2 1_2 = 1_2$ y resulta $x \otimes_1 y \in Ker(h)$.

4) Si $x, x \to_1 y \in Ker(h)$, entonces $h(x) = h(x \to_1 y) = 1_2$, luego, $1_2 = h(x) \otimes_2 h(x \to_1 y) = h(x \otimes_1 (x \to_1 y)) \leq h(y)$, por el Lema 2.9.2-i), de donde $h(y) = 1_2$ y, por lo tanto, $y \in Ker(h)$.

□

Lema 3.20. *Sea* $h : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ *un epimorfismo.* h *es isomorfismo si y sólo si* $Ker(h) = \{1_1\}$.

Demostración:
Supongamos que $x_1 \in Ker(h)$, entonces $h(x_1) = 1_2 = h(1_1)$, entonces h inyectiva implica $x_1 = 1_1$ y, en consecuencia, $Ker(h) = \{1_1\}$.
Para ver la recíproca, sea $h(x_1) = h(y_1)$. Entonces: $1_2 = h(x_1) \to_2 h(y_1) = h(x_1 \to_1 y_1)$, por lo tanto $x_1 \to_1 y_1 \in Ker(h)$, pero $Ker(h) = \{1_1\}$ y resulta $x_1 \to_1 y_1 = 1_1$, es decir $x_1 \leq_1 y_1$. Análogamente $y_1 \leq_1 x_1$ y de allí la igualdad. □

Lema 3.21. *Sean* $\mathbf{L}_1 = \langle L_1, \wedge_1, \vee_1, \otimes_1, \to_1, 0_1, 1_1 \rangle$, $\mathbf{L}_2 = \langle L_2, \wedge_2, \vee_2, \otimes_2, \to_2, 0_2, 1_2 \rangle$ *dos retículos residuales y* $h : L_1 \to L_2$ *un homomorfismo de retículos residuales. entonces son equivalentes:*

1) $h(x) = h(y)$

2) $x \rightarrow_1 y,\ y \rightarrow_1 x \in Ker(h)$

3) $(x \rightarrow_1 y) \wedge_1 (y \rightarrow_1 x) \in Ker(h)$.

Demostración:
1) $\Rightarrow$ 2): Si $h(x) = h(y)$, por h_4 y h_6 resulta $1_2 = h(x) \rightarrow_2 h(y) = h(x \rightarrow_1 y)$, es decir $x \rightarrow_1 y \in Ker(h)$. Análogamente, $y \rightarrow_1 x \in Ker(h)$.

2) $\Rightarrow$ 3): Supongamos que $x \rightarrow_1 y, y \rightarrow_1 x \in Ker(h)$, entonces por el Lema 3.19.3) $(x \rightarrow_1 y) \otimes_1 (y \rightarrow_1 x) \in Ker(h)$. Por los lemas 2.12.1) y 3.19.2), $(x \rightarrow_1 y) \otimes_1 (y \rightarrow_1 x) \leq_1 (x \rightarrow_1 y) \wedge_1 (y \rightarrow_1 x) \in Ker(h)$.

3) $\Rightarrow$ 1): Si $(x \rightarrow_1 y) \wedge_1 (y \rightarrow_1 x) \in Ker(h)$, entonces $1_2 = h((x \rightarrow_1 y) \wedge_1 (y \rightarrow_1 x)) = h(x \rightarrow_1 y) \wedge_2 h(y \rightarrow_1 x) = (h(x) \rightarrow_2 h(y)) \wedge_2 (h(y) \rightarrow_2 h(x))$. Entonces $h(x) \rightarrow_2 h(y) = h(y) \rightarrow_2 h(x) = 1_2$ y por el Lema 2.12.2) resulta $h(x) = h(y)$. □

Corolario 3.6. *Si L_1, L_2 son divisibles, cualquiera de los enunciados anteriores es equivalente a:*

4) *Existen $z, t \in Ker(h)$ tal que $x \otimes_1 z = y \otimes_1 t$.*

Demostración:
Veamos 2) $\Rightarrow$ 4): Supongamos que $x \rightarrow_1 y, y \rightarrow_1 x \in Ker(h)$, por el Lema 2.21.2) $x \otimes_1 (x \rightarrow_1 y) = x \wedge_1 y$. Análogamente $y \otimes_1 (y \rightarrow_1 x) = y \wedge_1 x$. Es decir, tomando $z = x \rightarrow_1 y, t = y \rightarrow_1 x$ se verifica la proposición.

4) $\Rightarrow$ 1): Sea $x \otimes_1 z = y \otimes_1 t$, con $z, t \in Ker(h)$. Entonces $h(x) = h(x) \otimes_2 1_2 = h(x \otimes_1 z) = h(y \otimes_1 t) = h(y) \otimes_2 1_2 = h(y)$. □

Teorema 3.3. *Sean $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$ dos retículos residuales, $h : \mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$ un homomorfismo, entonces $(x, y) \in ker(h)$ si y sólo si $x \equiv_{Ker(h)} y$.*

Demostración:
Sigue directamente de la Definición 3.18 y el Lema 3.21. □

Observación 3.16. Esta caracterización de la congruencia $ker(h)$ mediante un filtro, no es posible en cualquier variedad, como se puede ver en el siguiente ejemplo de retículos: Consideremos $\mathbf{L}$ la cadena $\{0, p, 1\}$. Definimos $h_1, h_2 : L \rightarrow L$ por las siguientes tablas:

x	0	p	1
$h_1(x)$	0	p	1

x	0	p	1
$h_2(x)$	0	0	1

$Ker(h_1) = Ker(h_2) = \{1\}$ pero $ker(h_1)$ es la identidad, mientras que $(0, p) \in ker(h_2)$.

Notación 3.2. En lo que sigue, dado que no lleva a ningún tipo de confusión y con el sólo fin de simplificar la notación escribiremos L/F por $L/\equiv_F$.

Observación 3.17. Entonces, si F es un filtro en L, en virtud del Lema 3.18 resulta que L/F puede ser provisto de la estructura de retículo residual integral inducida por el paso a cociente, siendo $\langle L/F, \wedge_F, \vee_F, \otimes_F, \rightarrow_F, [0]_F, [1]_F\rangle$ tal que la aplicación $q_F : L \rightarrow L/F$ es un homomorfismo sobreyectivo. Más aún, es válido el siguiente corolario:

Corolario 3.7. [Höh95] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral no trivial. Entonces existe una aplicación biyectiva entre el conjunto $\mathcal{F}(L)$ de los filtros en L y el conjunto $\mathcal{Q}(L)$ de todos los cocientes del retículo residual.*

Demostración:
Sean $\mathcal{Q}(L)$ y $\mathcal{F}(L)$ respectivamente el conjunto de los cocientes y los filtros de L y las aplicaciones $\Psi : \mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{Q}(L)$ definida por $\Psi(F) = L/F$ y $\Phi : \mathcal{Q}(L) \rightarrow \mathcal{F}(L)$ por $\Phi(L/\theta) = Ker(q_\theta)$, donde q_θ es el epimorfismo canónico asociado a θ. Probaremos que $(\Phi \circ \Psi) = Id_{\mathcal{F}(L)}$ y $(\Psi \circ \Phi) = Id_{\mathcal{Q}(L)}$.
En primer lugar veamos que $(\Phi \circ \Psi) = Id_{\mathcal{F}(L)}$: $(\Phi \circ \Psi)(F) = \Phi(L/F) = Ker(q_F) = F$. En efecto: $Ker(q_F) = \{x : (x \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow x) \in F\} = \{x : 1 \wedge x \in F\} = \{x : x \in F\} = F$.
Calculemos ahora $(\Psi \circ \Phi)(L/\theta) = \Psi(Ker(q_\theta)) = L/Ker(q_\theta) \ = \ L/\theta$. En efecto: Por el Teorema 3.3 $a \equiv_{Ker(q_\theta)} b$ es equivalente a $(a, b) \in ker(q_\theta)$. Además, $(a, b) \in ker(q_\theta) \Leftrightarrow [a]_\theta = [b]_\theta \Leftrightarrow (a, b) \in \theta$. Es decir, $Ker(q_\theta) = \theta$ y resulta lo que queríamos probar. □

Lema 3.22. [Höh95] *Sean L, L_1, L_2 tres retículos residuales. $h^{(1)} : L \rightarrow L_1, h^{(2)} : L \rightarrow L_2$ dos epimorfismos tales que $Ker(h^{(1)}) = Ker(h^{(2)})$, entonces L_1 es isomorfo a L_2.*

Demostración:
Sean $Ker(h) = Ker(h^{(1)}) = Ker(h^{(2)})$ y q_K el epimorfismo canónico. Resulta entonces que $\mathbf{L}/Ker(h)$ es isomorfo a $\mathbf{L}_1$ y a $\mathbf{L}_2$, de donde $\mathbf{L}_1$ es isomorfo a $\mathbf{L}_2$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L}_1 & \mathbf{L} \arrow[l, "h^{(1)}"'] \arrow[r, "h^{(2)}"] \arrow[d, "q_K"'] & \mathbf{L}_2 \\
& \mathbf{L}/Ker(h) \arrow[ul, "h_1"] \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Observación 3.18. Petr Hájek en [Háj97] define la relación de equivalencia:

$$x \approx_F y \text{ si y sólo si } (x \rightarrow y) \text{ y } (y \rightarrow x) \in F. \tag{3.2}$$

Por el Lema 3.7, esta definición coincide con la que hemos visto.
Esko Turunen en [Tur99] define la relación de equivalencia:

$$x \approx_F y \text{ si y sólo si } (x \to y) \otimes (y \to x) \in F. \tag{3.3}$$

Veamos que esta relación es exactamente la misma que definida en el Lema 3.18.
En efecto: Si $x \approx_F y$ resulta $(x \to y) \wedge (y \to x) \geq (x \to y) \otimes (y \to x) \in F$ y aplicando (F1), $x \equiv_F y$.
Si $x \equiv_F y$ por el Lema 3.7 $(x \to y)$, $(y \to x) \in F$ y aplicando (F2), resulta $x \approx_F y$.

Ejemplo 3.5. Hallemos todas las imágenes homomorfas del retículo residual del Ejemplo 2.26. Como es finito todos los filtros de retículo son principales, pero $F(a)$, $F(d)$ y $F(g)$ no son filtros de retículo residual. Analicemos qué ocurre con cada cociente:

- $F(b) = \langle b \rangle = \{b, d, e, f, g, 1\}$,

  $L/\langle b \rangle$ es el álgebra de Boole con un átomo, donde $[0] = \{0, a, c\}$ y $[1] = \langle b \rangle$.

- $F(c) = \langle c \rangle = \{c, f, 1\}$,

  $L/\langle c \rangle$, es la MV-álgebra $[0] < [a] < [1]$, donde $[0] = \{0, b, e\}, [a] = \{a, d, g\}, [1] = \langle c \rangle$.

- $F(e) = \langle e \rangle = \{e, g, 1\}$,

  $L/\langle e \rangle$ es el álgebra de Heyting $[0] < [b] < [1]$, donde $[0] = \{0, a, c\}, [b] = \{b, d, f\}, [1] = \langle e \rangle$.

- $F(f) = \langle f \rangle = \{f, 1\}$,

  $L/\langle f \rangle$, donde $[0] = \{0\}, [a] = \{a\}, [b] = \{b, e\}, [c] = \{c\}, [d] = \{d, g\}, [1] = \langle f \rangle$.

Además $L/\langle c \rangle$ y $L/\langle e \rangle$, son dos imágenes homomorfas con la misma cantidad de elementos, pero no isomorfas. En efecto, si existiera un isomorfismo $h : L/\langle c \rangle \to L/\langle e \rangle$, entonces $h([a]) = [b]$ pero $h(a) \otimes h(a) = b \otimes b = b$ y $h(a \otimes a) = h(0) = 0$.

Observación 3.19. La estructura de retículo residual integral, lineal, o divisible se preserva por cocientes, en particular el cociente de una BL álgebra es una BL álgebra, como era de esperar, dado que conforman variedades.

3.2. Subretículos residuales

La definición de subálgebra en álgebra universal, según se puede encontrar en el libro de S. Burris y H.P. Sankappanavar es la siguiente:

Definición 3.12. [BS81] Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras del mismo tipo. $\mathbf{B}$ es una *subálgebra* de $\mathbf{A}$ si $B \subseteq A$ y toda operación fundamental en $\mathbf{B}$ es la restricción de la correspondiente operación de $\mathbf{A}$, es decir para cada f, $f^{\mathbf{B}}$ es la restricción de $f^{\mathbf{A}}$ a B. Un *subuniverso* de $\mathbf{A}$ es un subconjunto $B \subseteq A$ cerrado respecto bajo las operaciones fundamentales de $\mathbf{A}$.

La instancia de esta definición para la variedad de los retículos residuales resulta:

Definición 3.13. Sean $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle A, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ dos retículos residuales. $\mathbf{B}$ es un *subretículo residual* de $\mathbf{A}$ si $B \subseteq A$. y se satisfacen las siguientes condiciones:

(SR1) Si $x, y \in B$, entonces $x \wedge y \in B$

(SR2) Si $x, y \in B$, entonces $x \vee y \in B$

(SR3) Si $x, y \in B$, entonces $x \otimes y \in B$

(SR4) Si $x, y \in B$, entonces $x \rightarrow y \in B$

A partir de la signatura se comprueba que se satisfacen las siguientes condiciones:

(SR5) $0 \in B$

(SR6) $1 \in B$.

Ejemplo 3.6. Si consideramos el retículo residual del Ejemplo 2.4 todos los subuniversos son: $\{0, 1\}$, $\{0, b, 1\}$, $\{0, a, b, c, 1\}$.
Para el Ejemplo 2.13, algunos son: $\{0, 1\}$, $\{0, p, s, 1\}$, $\{0, q, s, 1\}$, $\{0, r, s, 1\}$, $\{0, p, q, r, s, 1\}$.

Observación 3.20. De la definición surge claramente que todo subretículo residual es un subretículo acotado. La recíproca no es cierta. Consideremos nuevamente el Ejemplo 2.4. $\{0, a, 1\}$ es subálgebra para la estructura de retículo, pero no para la de retículo residual, ya que no es cerrado con respecto a la operación $\rightarrow$. En efecto, $a, 0 \in \{0, a, 1\}$, pero $a \rightarrow 0 = c \notin \{0, a, 1\}$.

Lema 3.23. *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *un retículo residual integral. Para verificar que* $S \subseteq L$ *es un subuniverso es suficiente verificar:*

1) *Si* $\mathbf{L}$ *es integral:* SR1*,* SR2*,* SR3*,* SR4 *y* SR5*.*

2) *Si* $\mathbf{L}$ *es lineal:* SR3*,* SR4 *y* SR5*.*

3) *Si* $\mathbf{L}$ *es divisible:* SR2*,* SR3*,* SR4 *y* SR5*.*

4) *Si* $\mathbf{L}$ *es de Girard:* SR1*,* SR3*,* SR4 *y* SR5 *ó* SR2*,* SR3*,* SR4 *y* SR5*.*

5) *Si* $\mathbf{L}$ *es BL álgebra:* SR3*,* SR4 *y* SR5*.*

6) *Si* $\mathbf{L}$ *es MV álgebra:* SR4 *y* SR5.

Demostración:

1) Si $\mathbf{L}$ es integral, por el Lema 2.12.4) $1 = 0 \to 0$, entonces de SR5 sigue SR6.

2) Si $\mathbf{L}$ es lineal, entonces es integral y ya vimos que de SR5 sigue SR6. Considerando la Proposición 2.10 y SR4, vemos que S es cerrado con respecto al supremo. Por la Observación 2.14, son válidas las Leyes de De Morgan poniendo $\neg x = x \to 0$. Por SR4 y SR5 S es cerrado con respecto a la negación y como acabamos de ver que es cerrado con respecto al supremo, es también cerrado con respecto al ínfimo.

3) Si $\mathbf{L}$ es divisible, entonces es integral por el Lema 2.12 y de SR5 se sigue SR6. Además, de acuerdo al Lema 2.21.2) $x \wedge y = x \otimes (x \to y)$ y SR1 se satisface por SR3 y SR4.

4) Si $\mathbf{L}$ es de Girard, entonces es integral y de SR5 se sigue SR6. Además el Lema 2.26.2) y 3) asegura que se verifican las Leyes de De Morgan, nuevamente por SR4 y SR5 S es cerrado con respecto a la negación y concluímos que alcanza con probar SR1 ó SR2.

5) Si $\mathbf{L}$ es BL álgebra, entonces es lineal y divisible, por la linealidad basta probar SR1, SR3, SR4 y SR5, pero SR1 se verifica gracias a SR4 y SR5 por ser divisible.

6) Si $\mathbf{L}$ es MV álgebra, hemos probado que se satisfacen las siguientes igualdades: $x \wedge y = x \otimes (x \to y), x \vee y = (x \to y) \to y), x \otimes y = (x \to (y \to 0) \to 0, 1 = x \to x$. En consecuencia si se verifican SR4 y SR5, S es subálgebra.

$\square$

Definición 3.14. Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, e\rangle$ un retículo residual y $\emptyset \subset X \subseteq L$. El *subretículo* S *generado por* X es la intersección de todos los subretículos que lo contienen. Si $|X| < \infty$, entonces S es *finitamente generado.*

Lema 3.24. *Dado un homomorfismo* $h : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$*,* $h(\mathbf{L}_1)$*, la imagen homomorfa de* $\mathbf{L}_1$*, es subálgebra (o subretículo residual) de* $\mathbf{L}_2$*.*

Demostración: 0_1, $1_1 \in \mathbf{L}_1$, por h_5 resulta $h(0_1) = 0_2$ y por h_6, $h(1_1) = 1_2$, de donde 0_2, $1_2 \in \mathbf{L}_2$. Sean $h(x), h(y) \in h(\mathbf{L}_1)$. Por h_1) sabemos que $h(x) \wedge_2 h(y) = h(x \wedge_1 y)$; por h_2) que $h(x) \vee_2 h(y) = h(x \vee_1 y)$; por h_3) que $h(x) \otimes_2 h(y) = h(x \otimes_1 y)$ y finalmente por h_4) que $h(x) \to_2 h(y) = h(x \to_1 y)$. $\square$

Corolario 3.8. *Dado un homomorfismo* $h : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$*,* $h(\mathbf{L}_1)$*,*

1) *Si* $\mathbf{L}_1$ *es lineal, la imagen homomorfa de* $\mathbf{L}_1$ *es lineal.*

2) *Si* $\mathbf{L}_1$ *es divisible, la imagen homomorfa de* $\mathbf{L}_1$ *es divisible.*

3) *Si* $\mathbf{L}_1$ *es Girard, la imagen homomorfa de* $\mathbf{L}_1$ *es Girard.*

4) *Si* $\mathbf{L}_1$ *es BL álgebra, la imagen homomorfa de* $\mathbf{L}_1$ *es BL álgebra.*

5) *Si* $\mathbf{L}_1$ *es MV álgebra, la imagen homomorfa de* $\mathbf{L}_1$ *es MV álgebra.*

Demostración: Es inmediata a partir de la definición. □

Definición 3.15. Dado un homomorfismo $h : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ si h es inyectivo, o monomorfismo, la imagen homomorfa de $\mathbf{L}_1$ es una subálgebra de $\mathbf{L}_2$ isomorfa a $\mathbf{L}_1$ y se dice que hay una *inmersión* de $\mathbf{L}_1$ en $\mathbf{L}_2$.

3.3. Producto directo de retículos residuales

Definición 3.16. [BS81] Dadas dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$, $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ se define $\mathbf{A}$ el *producto directo* de $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ y se nota $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ al álgebra, cuyo universo es el producto cartesiano de A_1 y A_2, y tal que para $f \in \mathcal{F}_n$ y $a_i \in A_1$, $a_i' \in A_2$, $1 \leq i \leq n$,

$$f^{A_1 \times A_2}((a_1, a_1'), \cdots, (a_n, a_n')) = (f^{A_1}(a_1, \cdots, a_n), f^{A_2}(a_1', \cdots, a_n')).$$

La Definición 3.16, para la variedad de retículos residuales, resulta en la siguiente definición:

Definición 3.17. Dados dos retículos residuales $\mathbf{L}_1 = \langle L_1, \wedge_1, \vee_1, \otimes_1, \to_1, 0_1, 1_1, e_1 \rangle$ y $\mathbf{L}_2 = \langle L_2, \wedge_2, \vee_2, \otimes_2, \to_2, 0_2, 1_2, e_2 \rangle$ se define $\mathbf{L}$ el *producto directo* de $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ y se nota $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2$ al retículo residual $\mathbf{L} = \langle L_1 \times L_2, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1, e \rangle$, cuyo universo es el producto cartesiano de L_1 y L_2, con las operaciones definidas por:

1) $x \wedge y = (x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (x_1 \wedge_1 y_1, x_2 \wedge_2 y_2)$,

2) $x \vee y = (x_1, x_2) \vee (y_1, y_2) = (x_1 \vee_1 y_1, x_2 \vee_2 y_2)$,

3) $x \otimes y = (x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1 \otimes_1 y_1, x_2 \otimes_2 y_2)$,

4) $x \to y = (x_1, x_2) \to (y_1, y_2) = (x_1 \to_1 y_1, x_2 \to_2 y_2)$,

5) $0 = (0_1, 0_2)$,

6) $1 = (1_1, 1_2)$,

7) $e = (e_1, e_2)$.

Dado que los retículos residuales conforman una variedad, es claro que el producto de retículos residuales es un retículo residual.

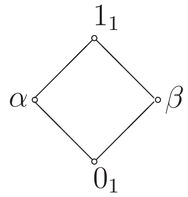
Ejemplo 3.7. Realicemos un producto: sean los retículos residuales dados por:

$\mathbf{L_1}$:

$\otimes_2$	0	γ	1
0	0	0	0
γ	0	0	γ
1	0	γ	1

$\rightarrow_2$	0	γ	1
0	1	1	1
γ	γ	1	1
1	0	γ	1

$\mathbf{L_2}$:



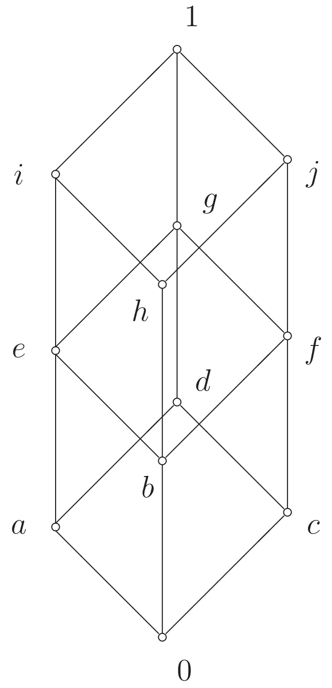
$\otimes_1$	0	α	β	1
0	0	0	0	0
α	0	α	0	α
β	0	0	β	β
1	0	α	β	1

$\rightarrow_1$	0	α	β	1
0	1	1	1	1
α	β	1	β	1
β	α	α	1	1
1	0	α	β	1

Construyamos ahora el retículo $L_1 \times L_2$.
Para facilitar las tablas usaremos la siguiente notación: $0 = (0_1, 0_2), a = (0_1, \alpha), b = (\gamma, 0_2), c = (0_1, \beta), d = (0_1, 1_2), e = (\gamma, \alpha),\ f = (\gamma, \beta), g = (\gamma, 1_2), h = (1_1, 0_2), i = (1_1, \alpha), j = (1_1, \beta), 1 = (1_1, 1_2)$.

Realicemos un cálculo a modo de muestra:

$$e \otimes f = (\gamma, \alpha) \otimes (\gamma, \beta) = (\gamma \otimes_1 \gamma, \alpha \otimes_2 \beta) = (0_2, 0_1) = 0.$$



$\otimes$	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	a	a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	0	0	0	0	0	0	b	b	b	b
c	0	0	0	c	c	0	c	c	0	0	c	c
d	0	a	0	c	d	a	c	d	0	a	c	d
e	0	a	0	0	a	a	0	a	b	e	b	e
f	0	0	0	c	c	0	c	c	b	b	f	f
g	0	a	0	c	d	a	c	d	b	e	f	g
h	0	0	b	0	0	b	b	b	h	h	h	h
i	0	a	b	0	a	e	b	e	h	i	h	i
j	0	0	b	c	c	b	f	f	h	h	j	j
1	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	1

Del mismo modo procedemos con el residuo:

$$e \to f = (\gamma, \alpha) \to (\gamma, \beta) = (\gamma \to_1 \gamma, \alpha \to_2 \beta) = (1_1, \beta) = j.$$

$\to$	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	j	1	j	j	1	1	j	1	j	1	j	1
b	g	g	1	g	g	1	1	1	1	1	1	1
c	i	i	i	1	1	i	1	1	i	i	1	1
d	h	i	h	j	1	i	j	1	h	i	j	1
e	f	g	j	f	g	1	j	1	j	1	j	1
f	e	e	i	g	g	i	1	1	i	i	1	1
g	b	e	h	f	g	i	j	1	h	i	j	1
h	d	d	g	d	d	g	g	g	1	1	1	1
i	c	d	f	c	d	g	f	g	j	1	j	1
j	a	a	e	d	d	e	g	g	i	i	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	1

Según hemos visto, los retículos residuales integrales, lineales, divisible, de Girard, BL álgebras y MV álgebras forman variedades, por lo tanto, es inmediato ver que se conservan por producto directo.

Observación 3.21. Hemos definido el producto directo $\mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{L}_2$. Dado que este producto es asociativo ([BS81]), resulta natural extenderlo al producto de una familia indexada de retículos residuales.

Definición 3.18. Dada $\{\mathbf{L}_i\}_{i\in I}$, una familia indexada de retículos residuales tales que para cada $i \in I$, $\mathbf{L}_i = \langle L_i, \wedge_i, \vee_i, \otimes_i, \rightarrow_i, 0_i, e_i, 1_i\rangle$, se define $\mathbf{L}$ el *producto directo* de $\mathbf{L}_i$, $i \in I$ y se nota $\mathbf{L} = \prod_{i\in I} \mathbf{L}_i$ al retículo residual $\mathbf{L} = \langle \prod_{i\in I} L_i, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, e, \rangle$, cuyo universo es el producto cartesiano de L_i para cada $i \in I$, con las operaciones definidas por:

1) $(x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i y_i)_{i\in I}$,

2) $(x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I} = (x_i \vee_i y_i)_{i\in I}$,

3) $(x_i)_{i\in I} \otimes (y_i)_{i\in I} = (x_i \otimes_i y_i)_{i\in I}$,

4) $(x_i)_{i\in I} \rightarrow (y_i)_{i\in I} = (x_i \rightarrow_i y_i)_{i\in I}$,

5) $0 = (0_i)_{i\in I}$,

6) $1 = (1_i)_{i\in I}$,

7) $e = (e_i)_{i\in I}$.

Definición 3.19. La aplicación $\pi_j : \prod\limits_{i\in I} \mathbf{L}_i \rightarrow \mathbf{L}_j$, $j \in I$, definida por $\pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$, es la *$j$-ésima proyección* de $\prod\limits_{i\in I} \mathbf{L}_i$.

Lema 3.25. *La aplicación $\pi_j : \prod\limits_{i\in I} \mathbf{L}_i \rightarrow \mathbf{L}_j$, $j \in I$, es un epimorfismo.*

Definición 3.20. Un subretículo residual $\mathbf{L}$ de $\prod\limits_{i\in I} \mathbf{L}_i$ es un *producto subdirecto* si la proyección $\pi_j : \prod\limits_{i\in I} \mathbf{L}_i \rightarrow \mathbf{L}_j$ es un epimorfismo para todo $j \in I$. Es decir, $\pi_j(L) = L_j$, para todo $j \in I$.

3.4. Ultrafiltros y sistemas deductivos categóricos

Definición 3.21. Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral. En el conjunto $\mathcal{F}(L)$ de todos los filtros propios F de $\mathbf{L}$, ordenado por inclusión de conjuntos, un elemento maximal se dice un *ultrafiltro de retículo residual.*

Definición 3.22. En el conjunto $\mathcal{SD}(L)$ de todos los sistemas deductivos propios D de $\mathbf{L}$, ordenado por inclusión de conjuntos, un elemento maximal se dice un *sistema deductivo categórico de retículo residual.*

Si retomamos la idea de la Observación 3.12 en el Ejemplo 2.5 vemos que el único sistema deductivo que es maximal es $\{1\}$. Por ejemplo, a y c no pertenecen a $\{1\}$ y tampoco $a \to c$ ni $c \to a$, pero sí $(a \otimes a) \to c$ y $(c \otimes c) \to a$. Consideremos, además, el Lema 2.9.10), según el cual $(x \otimes x) \to y = x \to (x \to y)$. Estos hechos motivan la siguiente definición:

Definición 3.23. Definimos $x \xrightarrow{n} y$ por recurrencia del siguiente modo:

$$x \xrightarrow{0} y = y$$

$$x \xrightarrow{n+1} y = x \to (x \xrightarrow{n} y), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0$$

Lema 3.26. $x \xrightarrow{n} y = x^n \to y$.

Demostración: Demostraremos el resultado por inducción. Si $n = 0$, entonces $x^n = 1$ y por el Lema 2.21.3) resulta $y = 1 \to y = x^n \to y$. Supongamos que se verifica $x \xrightarrow{k} y = x^k \to y$ y veamos que es válido para $n = k + 1$. $x \xrightarrow{k+1} y = x \to (x \xrightarrow{k} y) = x \to (x^k \to y) = x^{k+1} \to y$, por el Lema 2.9.10). □

Lema 3.27. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo residual y $\emptyset \subset U \subseteq L$. U es sistema deductivo categórico si y sólo si dados $x \notin U, y \notin U$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \xrightarrow{n} y \in U$.*

Demostración: Sea U un sistema deductivo categórico y x, y tales que $x \notin U$, $y \notin U$. Como U es maximal $\langle\langle U, x\rangle\rangle = \langle U, x\rangle = L$, entonces cualquiera que sea $z \in L$ resulta $z \in \langle U, x\rangle$, es decir, en virtud del Lema 3.11, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \to z \in U$, cualquiera que sea $z \in L$, en particular se verifica $x^n \to y \in U$, es decir $x \xrightarrow{n} y \in U$.

Para ver la recíproca consideremos a U satisfaciendo que dados $x \notin U, y \notin U$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \xrightarrow{n} y \in U$. Sabemos, por el Lema 3.13 que U es filtro. $U \subseteq \langle U, x\rangle \subseteq L$. $x \in \langle U, x\rangle$ y $x \notin U$, dado que $0 \notin U$ resulta, por hipótesis, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \xrightarrow{n} 0 \in U$, es decir $x^n \to 0 \in U$, en consecuencia, aplicando el Lema 3.11, $0 \in \langle U, x\rangle$, es decir, $\langle U, x\rangle = L$ y U resulta sistema deductivo categórico. □

Lema 3.28. *Si U es un ultrafiltro y $x \notin U$, para cada $y \notin U$ existen $n \in \mathbb{N}, z \in U$ tales que $y^n \otimes z \leq x$.*

Demostración: Como U es ultrafiltro e $y \notin U$, resulta $x \in \langle U, y\rangle = L$, y en consecuencia, por el Lema 3.9, existen $u_1, \cdots, u_r \in U \cup \{y\}$ tal que $u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \in U$. Suponiendo que $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = y$, y considerando que $u_{n+1} \otimes \cdots \otimes u_r = z \in U$, resulta que existen $n \in \mathbb{N}, z \in U$ tales que $y^n \otimes z \leq x$. □

Corolario 3.9. *Si U es un ultrafiltro de L, para cada $y \notin U$ existen $n \in \mathbb{N}, z \in U$ tales que $y^n \otimes z = 0$.*

Demostración: Inmediata, a partir del teorema con $x = 0$. □

Definición 3.24. Un filtro (sistema deductivo) propio P se dice *primo* si satisface la propiedad adicional:

(F4) Si $x \vee y \in P$, entonces $x \in P$ ó $y \in P$.

Lema 3.29. *Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1\rangle$ un retículo residual lineal y $F \subseteq L$ un filtro (sistema deductivo) propio. F es primo si y sólo si para todo par de filtros F_1, F_2 tal que $F = F_1 \cap F_2$ se tiene $F = F_1$ ó $F = F_2$.*

Demostración: Sean F un filtro primo y F_1, F_2 dos filtros tales que $F = F_1 \cap F_2$. Supongamos, por el absurdo, que $F \neq F_1$ y $F \neq F_2$, es decir, existen $x, y \in F$ tales que $x \in F_1 \setminus F$ e $y \in F_2 \setminus F$. Como $x \leq x \vee y$, por(F1) es claro que $x \vee y \in F_1$ análogamente $x \vee y \in F_2$ y, en consecuencia $x \vee y \in F_1 \cap F_2 = F$. Como F es primo debe ser necesariamente $x \in F$ ó $y \in F$. Lo cual es un absurdo ya que supusimos que $x \notin F$ e $y \notin F$.
Recíprocamente, supongamos que $F = F_1 \cap F_2$ implica $F = F_1$ ó $F = F_2$ y sea $x \vee y \in F$. Consideremos $F_1 = \langle F, x\rangle$ y $F_2 = \langle F, y\rangle$ y veamos en primer lugar que $F = F_1 \cap F_2$. Es claro que $F \subseteq F_1 \cap F_2$; sea $z \in F_1 \cap F_2$, como $z \in F_1$, en virtud del Lema 3.11 existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x^{n_x} \to z \in F$, análogamente existe $n_y \in \mathbb{N}$ tal que $y^{n_y} \to z \in F$. Sea $n = n_x \vee n_y$, como $x^n \leq x^{n_x}$, en virtud del Lema 2.9.4.ii) se cumple $x^{n_x} \to z \leq x^n \to z$ y aplicando (F1) resulta que $x^n \to z \in F$. Análogamente $y^n \to z \in F$. Como F es cerrado con respecto al ínfimo, resulta $(x^n \vee y^n) \to z = (x^n \to z) \wedge (y^n \to z) \in F$. Por otra parte $(x \vee y)^n \geq x^n \vee y^n$ y por el Lema 2.9.4.i) resulta que $(x^n \vee y^n) \to z \leq (x \vee y)^n \to z$, y aplicando nuevamente (F1) tenemos que $(x \vee y)^n \to z \in F$. Como $x \vee y \in F$, resulta $(x \vee y)^n \in F$ y dado que F es un sistema deductivo, $z \in F$. Hemos probado entonces que $F = F_1 \cap F_2$, por hipótesis resulta $F = F_1$ o $F = F_2$ de lo que resulta $x \in F$ ó $y \in F$. □

Lema 3.30. *Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1\rangle$ un retículo residual lineal y $F \subseteq L$ un filtro (sistema deductivo) propio. F es primo si y sólo si para todo $x, y \in L$ se tiene $x \to y \in F$ ó $y \to x \in F$.*

Demostración: Dado que L es lineal, se cumple, $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$ para todo $x, y \in L$. Por (F0) $1 \in F$, es decir $(x \to y) \vee (y \to x) \in F$. En consecuencia, si F es primo necesariamente será $x \to y \in F$ ó $y \to x \in F$. Para ver la recíproca supongamos que $x \to y \in F$, por la Proposición 2.10 $x \vee y \leq (x \to y) \to y$ y por (F1), $(x \to y) \to y \in F$ y aplicando (D2) concluímos que $y \in F$. □

Lema 3.31. *Sea $\mathbf{L}$ un retículo residual lineal. Si P es un filtro primo de L, entonces L/P es una cadena.*

Demostración: Sean $[x], [y] \in L/P$. Como L satisface la condición de linealidad sabemos que $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$: Además, dado que $x \equiv_P y$ es una congruencia, afirmamos que $([x] \to [y]) \vee ([y] \to [x]) = [1]$, es decir, $(x \to y) \vee (y \to x) \in P$. Considerando que P es un filtro primo debe ser $x \to y \in P$ ó $y \to x \in P$. Si $x \to y \in P$, entonces $[x] \to [y] = [1]$ y, en consecuencia $[x] \leq [y]$. Análogamente, si $y \to x \in P$, entonces $[y] \leq [x]$. Es decir, L/P es una cadena. □

Lema 3.32. *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ *un retículo residual lineal,* P *un filtro (sistema deductivo) primo de* L *y* F *un filtro (sistema deductivo) propio tal que* $P \subseteq F$*, entonces* F *es primo.*

Demostración: Sea $x \vee y \in F$. Dado que L es lineal, se cumple $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$ y, en consecuencia $(x \to y) \vee (y \to x) \in P$, como P es primo $x \to y \in P \subseteq F$ ó $y \to x \in P \subseteq F$. Aplicando el Lema 3.30 resulta que F es primo. □

Lema 3.33. *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ *un retículo residual. Entonces, si* L *satisface la condición de linealidad, entonces la familia de todos los filtros que contienen a un filtro primo está totalmente ordenada por la relación* $\subseteq$*.*

Demostración: Sea P un filtro primo y $\mathcal{F}(P)$ la familia de todos los filtros que contienen a P. Dado que el propio $P \in \mathcal{F}(P)$ afirmamos $\mathcal{F}(P) \neq \emptyset$. Sean, entonces F_1, $F_2 \in \mathcal{F}(P)$ tales que $F_1 \not\subseteq F_2$ ni $F_2 \not\subseteq F_1$. Luego existen $x \in F_1 \setminus F_2$ e $y \in F_2 \setminus F_1$. Además por la condición de linealidad $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$ y dado que P es primo debe ser $x \to y \in P$ ó $y \to x \in P$. Supongamos que $x \to y \in P \subseteq F_1$. Por el Lema 3.13 y (D2) resulta $y \in F_1$, lo cual es un absurdo. Análogamente suponiendo $y \to x \in P$ concluímos que $x \in F_2$. En consecuencia, no existen dos filtros incomparables y $\mathcal{F}(P)$ resulta una cadena.

□

Observación 3.22. En [Mon96] Antonio Monteiro prueba que un álgebra de Heyting satisface la condición de linealidad si y sólo si la familia de todos los filtros que contienen a un filtro primo está totalmente ordenada por inclusión. Recordemos que un retículo residual divisible para el que $\otimes$ es idempotente constituye un álgebra de Heyting. Para el caso de retículos residuales integrales en general, acabamos de probar que la condición de linealidad es suficiente para afirmar que la familia de todos los filtros que contienen a un filtro primo está totalmente ordenada por inclusión, pero no es necesaria. Si Analizamos el Ejemplo 2.5 el único filtro propio es $P = \{1\}$, que es filtro primo y, $\mathcal{F}(P)$, la familia de todos los filtros que lo contienen es exactamente $\{P\}$ y está totalmente ordenada por inclusión, pero el retículo no satisface la condición de linealidad ya que, por ejemplo, $(a \to c) \vee (c \to a) = d \neq 1$. Otro modo de ver este hecho es que el retículo ni siquiera es distributivo, y sabemos por el Lema 2.19.3) que si es lineal debe ser distributivo. Si analizamos el Ejemplo 2.13, vemos que todos los filtros propios que posee son: $\{1\}$, $P_1 =$

$\{1, u\}$, $P_2 = \{1, v\}$, $P_3 = \{1, u, v, t\}$. P_1, P_2 y P_3 son los filtros primos y se ve claramente que $\langle \mathcal{F}(P_1), \subseteq \rangle$, $\langle \mathcal{F}(P_2), \subseteq \rangle$ y $\langle \mathcal{F}(P_3), \subseteq \rangle$ están bien ordenadas, pero el retículo no satisface la condición de linealidad, ya que $(q \to r) \vee (r \to q) = s \vee s = s \neq 1$. Este retículo sí es distributivo, pero no es divisible.

Lema 3.34. *Todo filtro (sistema deductivo) está contenido en un ultrafiltro (sistema deductivo categórico).*

Demostración: Sea F un filtro y consideremos $\mathcal{F}(F)$ la familia de todos los filtros propios que lo contienen. Sea $\langle \mathcal{C}(F), \subseteq \rangle$ una cadena en $\langle \mathcal{F}(F), \subseteq \rangle$ y $C = \bigcup\limits_{S \in \mathcal{C}(F)} S$.

C es un filtro. En efecto:
(F0) se verifica ya que $1 \in F$, para todo $F \in \mathcal{C}(F)$.
Sea $x \leq y$, $x \in C$, entonces existe algún $F_x \in \mathcal{C}(F)$ tal que $x \in F_x$. Aplicando (F1) resulta $y \in F_x$ y, en consecuencia $y \in C$.
Sean ahora $x, y \in C$ entonces existen $F_x, F_y \in \mathcal{C}(F)$ tales que $x \in F_x$, $y \in F_y$. Dado que $\mathcal{C}(F)$ es una cadena necesariamente debe ser $F_x \subseteq F_y$ ó $F_y \subseteq F_x$. Supongamos que $F_x \subseteq F_y$, entonces $x, y \in F_y$ y aplicando (F2) resulta $x \otimes y \in F_y \subseteq C$, es decir, $x \otimes y \in C$. Es claro que cualquier filtro en $\mathcal{C}(F)$ estará contenido en C y, por lo tanto C es cota superior de la cadena. Para ver que es propio notemos que si $0 \in C$, entonces existe algún $S \in \mathcal{C}(F)$ tal que $0 \in S$, lo cual es imposible dado que los S son filtros propios.
Hemos visto que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}(F)$ tiene cota superior. Entonces, aplicando el Lema de Zorn concluímos que existen elementos maximales en $\mathcal{F}(F)$. Es claro que un elemento maximal U_F en $\mathcal{F}(F)$ es maximal en $\mathcal{F}(L)$, ya que si U es un filtro tal que $U_F \subseteq U$, resulta $U \in \mathcal{F}(F)$ y $U = U_F$. Es decir existe un ultrafiltro U_F tal que $F \subseteq U$. □

Lema 3.35. *Todo ultrafiltro (sistema deductivo categórico) es primo.*

Demostración: Sea U un ultrafiltro y consideremos $x \vee y \in U$. Supongamos, por el absurdo, que $x \notin U$, $y \notin U$. Por el Corolario 3.9 existen $n_x, n_y \in \mathbb{N}$, $z_x, z_y \in U$ tales que $x^{n_x} \otimes z_x = 0$ y $y^{n_y} \otimes z_y = 0$. Aplicando finalmente el Corolario 3.5 resulta $(x \vee y)^{n_x + n_y} \otimes (z_x \otimes z_y) = 0$ y, en consecuencia, por la Observación 3.4 $x \vee y \notin U$. □

Observación 3.23. La recíproca no es cierta. Es decir, existen filtros primos que no son maximales. En efecto: en el Ejemplo 2.19 $\langle e \rangle = \{c, e, f, 1\}$ es filtro primo, no ultrafiltro ya que está contenido en $\langle b \rangle = \{b, c, d, e, f, 1\}$.

Corolario 3.10. *Todo filtro (sistema deductivo) está contenido en un filtro (sistema deductivo) primo.*

Demostración: Sigue inmediatamente de los Lemas 3.34 y 3.35. □

Corolario 3.11. *Todo retículo residual integral contiene al menos un filtro (sistema deductivo) primo.*

Demostración: Es claro que $\{1\}$ es filtro (sistema deductivo) propio de L, y aplicando el corolario 3.10 resulta la proposición. □

Definición 3.25. Un retículo residual $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$, es *simple* si $\{1\}$ es el único filtro propio.

Ejemplo 3.8. Los retículos residuales de los Ejemplos 2.14 y 2.15 son simples. En ambos casos si $x \neq 1$ resulta $x \otimes x = 0$ y, en consecuencia, si $1 \neq x \in F$, entonces $0 \in F$ y F no es propio.

Lema 3.36. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral. Para que L sea simple es condición necesaria y suficiente que las únicas congruencias sean las triviales.*

Demostración: Resulta evidente en virtud del Corolario 3.7. □

Observación 3.24. El lema anterior da la equivalencia entre la Definición 3.25 y la que se encuentra en [BS81]: un álgebra es *simple* si las únicas congruencias que admite son las triviales.

Lema 3.37. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual divisible finito. Son equivalentes:*

1) $L/F \cong \{0, 1\}$;

2) *F es un ultrafiltro generado por un átomo idempotente.*

Demostración: Si **L** es divisible, por el Lema 2.19.5) resulta distributivo y dado que es finito todos sus filtros son principales. Por la Propiedad 3.4 sabemos que están generados por un elemento idempotente. Sea $F = F_a$, con $a \otimes a = a$.
Por otra parte, $L/F \cong \{0, 1\}$ significa que para todo $x \in L$ resulta $x \equiv_F 1$ ó $x \equiv_F 0$, es decir: $(x \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow x) = 1 \wedge x = x \in F$ ó $(x \rightarrow 0) \wedge (0 \rightarrow x) = (x \rightarrow 0) \wedge 1 = x \rightarrow 0 \in F$, que es equivalente a $x \in F$ ó $x \rightarrow 0 \in F$.

1) $\Rightarrow$ 2): Sólo resta probar que a es un átomo. Sea $0 \leq b < a$, entonces $b \notin F$, por ii) $b \rightarrow 0 \in F$, es decir, $a \leq b \rightarrow 0$ y por la condición de par adjunto (2.13) resulta $a \otimes b = 0$. Aplicando el Lema 2.19.1) afirmamos que $a \otimes b = a \wedge b = 0$, pero $a \wedge b = b$, de donde $b = 0$ y a es un átomo.

2) $\Rightarrow$ 1): Sea a un átomo idempotente, sabemos que $F_a = F$ es filtro por ser a idempotente, y como a es átomo es ultrafiltro. Sea $x \in L$, y supongamos que $x \notin F$, si probamos que $x \rightarrow 0 \in F$ queda demostrada la proposición. Dado que a es átomo $x \wedge a = 0$ ó $x \wedge a = a$. Como $x \notin F$ resulta $a \not\leq x$ y, en consecuencia $x \wedge a = 0$. Por la observación 2.13 $x \otimes a \leq x \wedge a = 0$, de donde $x \otimes a = 0$ y por la condición de par adjunto $a \leq x \rightarrow 0$, es decir $x \rightarrow 0 \in F$.

□

Definición 3.26. Siguiendo la terminología introducida por Chang [Cha58] diremos que un retículo residual integral $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es *localmente finito* si todo elemento distinto de la unidad en el retículo es nilpotente, es decir, si para cada elemento $x \in L$, satisfaciendo $x \neq 1$ existe algún número natural n tal que $x^n = 0$.

Observación 3.25. En álgebra universal [BS81] un álgebra se dice localmente finita si todas sus subálgebras finitamente generadas son finitas. Esta definición y la considerada por Chang no son equivalentes, ya que un retículo residual que sea álgebra de Heyting finita cumple, obviamente la condición de ser finitas todas sus subálgebras finitamente generadas, pero como todos sus elementos son idempotentes no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$ para ningún x del álgebra, salvo $x = 0$. Puede verse en el Ejemplo 2.16.

Lema 3.38. *Si $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual es localmente finito, entonces es simple.*

Demostración: Dado que L es localmente finito, para cada $x \in L$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$. Consideremos un filtro tal que $\{1\} \subset F$ y un elemento $x \in F$ tal que $x \neq 1$. Aplicando (F2) resulta que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0 \in F$ y el filtro no es propio.$\square$

Teorema 3.4. [Tur99] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral, F un filtro en L. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1) *F es un ultrafiltro*

2) *$\langle L/F, \wedge_F, \vee_F, \otimes_F, \rightarrow_F, [0]_F, [1]_F\rangle$ es localmente finito*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que F es un ultrafiltro. Vamos a probar que $\langle L/F, \wedge_F, \vee_F, \otimes_F, \rightarrow_F, [0]_F, [1]_F\rangle$ es localmente finito. Consideremos $[x] \neq [1]$, es decir, $x \notin F$. (Ya que $[x] = [1]$ si y sólo si $(x \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow x) \in F$ aplicando los Lemas 2.9.1) y 2.12.3) vemos que $(x \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow x) = x$). Dado que F es maximal, por el corolario del Lema 3.28 existen $y \in F, n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \otimes y = 0$. Por la condición de par adjunto 2.13 afirmamos $y \leq x^n \rightarrow 0$ y por (F1) $x^n \rightarrow 0 \in F$, de donde $[x^n] = [x]^n = [0]$.

2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos ahora que $\langle L/F, \wedge_F, \vee_F, \otimes_F, \rightarrow_F, [0]_F, [1]_F\rangle$ es localmente finito y sea G un filtro tal que $F \subset G$. Sea $x \in G \setminus F$. $x \neq 1$, ya que $1 \in F$, por lo tanto, como L/F es localmente finito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $[x]^n = [0]$, o lo que es lo mismo, $[x^n] = [0]$. Es decir $(x^n \rightarrow 0) \wedge (0 \rightarrow x^n) = x^n \rightarrow 0 \in F \subset G$, de donde $x^n \rightarrow 0 \in G$. Además de $x \in G$ resulta $x^n \in G$ y aplicando el Lema 2.9.2-i) afirmamos $x^n \otimes (x^n \rightarrow 0) \leq 0$ y por (F1) y(F2), $0 \in G$, lo que ratifica la maximalidad de F. $\square$

Lema 3.39. [Höh95] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral, entonces para cada elemento $x \in L, x \neq 1$ existe un filtro primo P tal que $x \notin P$.*

Demostración: Sea $x \in L$, $x \neq 1$ y consideremos $\mathcal{F}(x)$, el conjunto de todos los filtros de L que no contengan a x. Dado que $\{1\}$ es filtro y como $x \neq 1$ resulta $\{1\} \in \mathcal{F}(x)$, entonces $\mathcal{F}(x) \neq \emptyset$. Sea $\langle \mathcal{C}(x), \subseteq \rangle$ una cadena en $\langle \mathcal{F}(x), \subseteq \rangle$ y $C = \bigcup_{F \in \mathcal{C}(x)} F$.
Por un razonamiento análogo al empleado en el Lema 3.34 se prueba que C es un filtro y que cualquier filtro en $\mathcal{C}(x)$ está contenido en C. Es decir, C es cota superior de la cadena. Como todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}(x)$ tiene cota superior, aplicando el Lema de Zorn, tiene elementos maximales. Sea P uno de ellos. Veamos que P es un filtro primo. Sea $y \vee z \in P, y \notin P, z \notin P$. Por el Lema 3.28 existen $n_y, n_z \in \mathbb{N}$ y $t_y, t_z \in P$ tales que $y^{n_y} \otimes t_y \leq x$ y $z^{n_z} \otimes t_z \leq x$, aplicando el Lema 3.10 resulta $(y \vee z)^{n_y + n_z} \otimes t_y \otimes t_z \leq x$, es decir, en virtud de (F1) y (F2), $x \in P$, lo que contradice el hecho de que $P \in \mathcal{F}(x)$. □

Lema 3.40. [Tur99] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ un retículo residual integral, $x \in L$, $x \neq 1$. Son equivalentes:*

1) *Existe un ultrafiltro U tal que $x \notin U$.*

2) *Existe un número natural n tal que $(x^n \rightarrow 0)^m \neq 0$ para todo número natural m.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2): Sea U un ultrafiltro tal que $x \notin U$. Entonces por el corolario del Lema 3.28 existen $n \in \mathbb{N}, y \in U$ tales que $x^n \otimes y = 0$. Luego por la condición de par adjunto, $y \leq x^n \rightarrow 0$, que, considerando (F1) hace $x^n \rightarrow 0 \in U$ y por (F2) $(x^n \rightarrow 0)^m \in U$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia $(x^n \rightarrow 0)^m \neq 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos ahora $(x^n \rightarrow 0)^m \neq 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$ y sea F el conjunto de todos los elementos y del retículo L tales que existe $m \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $(x^n \rightarrow 0)^m \leq y$. F es un filtro.
En efecto: (F0) y (F1) se verifican trivialmente. Para verificar (F2) basta observar que $(x^n \rightarrow 0)^{m_y + m_z} = (x^n \rightarrow 0)^{m_y} \otimes (x^n \rightarrow 0)^{m_z} \leq y \otimes z$ por el Lema 2.9.3).
Por el Lema 3.34 existe un filtro maximal U tal que $F \subseteq U$ y, como $x^n \rightarrow 0 \in F$ resulta $x^n \rightarrow 0 \in U$ y $x \notin U$, ya que si $x \in U$, $x^n \otimes (x^n \rightarrow 0) \in U$ y, en consecuencia, $0 \in U$, es decir, U no sería filtro propio. □

Corolario 3.12. [Höh95] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ una BL álgebra (es decir, un retículo residual lineal, divisible), $x \in L$, $x \neq 1$. Son equivalentes:*

1) *Existe un ultrafiltro U tal que $x \notin U$.*

2) *Existe un número natural n tal que $(x^n \rightarrow 0) \rightarrow x \neq 1$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x^n \rightarrow 0) \rightarrow x \neq 1$, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ resulta $(x^n \rightarrow 0) \rightarrow x = 1$, y por el Lema 2.12.2) $x^n \rightarrow 0 \leq x$. En virtud de los Lemas 2.9.10) y 2.21.2) podemos escribir las siguientes igualdades:

$x \otimes (x^{n+1} \to 0) = x \otimes (x \to (x^n \to 0)) = x \wedge (x^n \to 0) = x^n \to 0$. Resulta que $x \otimes (x^{n+1} \to 0) = x^n \to 0$ y, $(x^n \to 0)^{n+1} = (x \otimes (x^{n+1} \to 0))^{n+1} = x^{n+1} \otimes (x^{n+1} \to 0)^{n+1} = (x^{n+1} \otimes (x^{n+1} \to 0)) \otimes (x^{n+1} \to 0)^n = (x^{n+1} \wedge 0) \otimes (x^{n+1} \to 0)^n = 0 \otimes (x^{n+1} \to 0)^n = 0$, y por el Lema 3.40 afirmamos que no existe un ultrafiltro U tal que $x \in U$.

2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos ahora que existe un número natural n tal que $(x^n \to 0) \to x \neq 1$. Por la condición de linealidad afirmamos que $((x^n \to 0) \to x) \vee (x \to (x^n \to 0)) = 1$, y por el Lema 2.9.10) $((x^n \to 0) \to x) \vee (x^{n+1} \to 0) = 1$.
Aplicando el corolario del Lema 3.16 afirmamos $((x^n \to 0) \to x)^m \vee (x^{n+1} \to 0)^m = 1$, y dado que $(x^n \to 0) \to x \neq 1$ y, en consecuencia $((x^n \to 0) \to x)^m \neq 1$ debe ser $(x^{n+1} \to 0)^m \neq 0$, cualquiera que sea $m \in \mathbb{N}$. Aplicando, finalmente, el Lema 3.40 resulta lo que queríamos probar. □

Lema 3.41. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral, $\mathcal{P}$ el conjunto de los filtros primos de L, y $\prod_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{L/P} = \langle \prod_{P \in \mathcal{P}} L/P, \wedge, \vee, \otimes, \to, ([0]_P)_{P \in \mathcal{P}}, ([1]_P)_{P \in \mathcal{P}}\rangle$, entonces la aplicación*

$$\phi : L \to \prod_{P \in \mathcal{P}} L/P,$$

que a cada $x \in L$ le asigna $([x]_P)_{P \in \mathcal{P}}$ es un monomorfismo de retículos residuales.

Demostración: En primer lugar recordemos que, dado que trabajamos con retículos residuales integrales y hemos probado que conforman una variedad, $\mathbf{L/P}$ y $\prod_{P \in \mathcal{P}} L/P$ son retículos residuales integrales. Por la Observación 3.2 no es necesario que verifiquemos h_6. Veamos que se satisfacen las restantes:

h_1) $\phi(x \wedge y) = ([x \wedge y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = ([x]_P \wedge_P [y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = ([x]_P)_{P \in \mathcal{P}} \wedge ([y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = \phi(x) \wedge \phi(y)$.

h_2) $\phi(x \vee y) = ([x \vee y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = ([x]_P \vee_P [y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = ([x]_P)_{P \in \mathcal{P}} \vee ([y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = \phi(x) \vee \phi(y)$.

h_3) $\phi(x \wedge y) = ([x \otimes y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = ([x]_P \otimes_P [y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = ([x]_P)_{P \in \mathcal{P}} \otimes ([y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = \phi(x) \otimes \phi(y)$.

h_4) $\phi(x \to y) = ([x \to y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = ([x]_P \to_P [y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = ([x]_P)_{P \in \mathcal{P}} \to ([y]_P)_{P \in \mathcal{P}} = \phi(x) \to \phi(y)$.

h_5) $\phi(0) = ([0]_P)_{P \in \mathcal{P}}$.

Veamos que es inyectivo: supongamos que $([x]_P)_{P \in \mathcal{P}} = ([x']_P)_{P \in \mathcal{P}}$, entonces resulta $(x \to x') \wedge (x' \to x) \in P$ para todo $P \in \mathcal{P}$, en especial para la intersección de todos ellos, que, según el Lema 3.39, es $\{1\}$ y en virtud del Lema 2.12.2) afirmamos $x = x'$ y, en consecuencia, la aplicación resulta un monomorfismo. □

Observación 3.26. Hemos visto en el Lema 3.41 que hay una inmersión de $\mathbf{L}$, en $\prod\limits_{P\in\mathcal{P}} L/P$. Además $\mathbf{L}'$, la imagen homomorfa de $\mathbf{L}$, es tal que sus proyecciones son epimorfismos en todas las coordenadas, por lo tanto podemos afirmar que $\mathbf{L}$ es producto subdirecto de retículos residuales, en el sentido de la Definición 3.20.

Teorema 3.5. [Tur99] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral. Son equivalentes:*

1) *L es lineal.*

2) *L es un subretículo residual de un producto de retículos residuales integrales linealmente ordenados.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2): Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los filtros primos de L. Por el Lema 3.31 afirmamos que L/P es un retículo residual totalmente ordenado, para todo $P \in \mathcal{P}$. La aplicación que a cada $x \in L$ le asigna $([x]_P)_{P\in\mathcal{P}}$ es un monomorfismo de retículos residuales, en virtud del Lema 3.41 y, por el Lema 3.24 su imagen es una subálgebra.

2) $\Rightarrow$ 1): En virtud del Lema 2.12.2) todo retículo residual totalmente ordenado es lineal y tanto el producto como los subretículos residuales de retículos residuales lineales son también lineales. $\square$

Observación 3.27. Siguiendo el razonamiento de la Obsevación 3.26, podemos afirmar que para que $\mathbf{L}$ sea lineal es condición necesaria y suficiente que sea producto subdirecto de retículos residuales linealmente ordenados.

Definición 3.27. [Höh95] Un retículo residual integral $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es *semi-simple* si la intersección de todos los filtros maximales es el filtro trivial, es decir:

$$\bigcap\{U : U \text{ es ultrafiltro en } L\} = \{1\}.$$

En [BS81] se denomina álgebra semisimple a un álgebra isomorfa a un producto subdirecto de álgebras simples. Considerando que según demostramos en el Lema 3.38 todo retículo residual localmente finito es simple, probaremos la equivalencia entre ambas proposiciones a partir del Teorema 3.4:

Lema 3.42. [Tur99] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral. Son equivalentes:*

1) *L es semi-simple;*

2) *L es subretículo de un producto de retículos residuales integrales localmente finitos.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2): Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todos los ultrafiltros de L. Por el Teorema 3.4 afirmamos que L/U es localmente finito, para todo $U \in \mathcal{U}$, veamos que la aplicación que a cada $x \in L$ le asigna $([x]_U)_{U\in\mathcal{U}}$ es un monomorfismo de retículos residuales.
Supongamos que$([x]_U)_{U\in\mathcal{U}} = ([x']_U)_{U\in\mathcal{U}}$, entonces resulta $(x \to x') \wedge (x' \to x) \in U$ para todo $U \in \mathcal{U}$, propio, de donde $(x \to x') \wedge (x' \to x) = 1$ y, en consecuencia, la aplicación resulta un monomorfismo.
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que L es subretículo residual de un producto directo de retículos localmente finitos. Sean, entonces $\{L_i\}_{i\in I}$ una familia de retículos localmente finitos tal que L es subretículo de $\prod_{i\in I} L_i$. Sea $U = L \cap (\prod_{i\neq j} L_i \times \{1_j\})$. Claramente satisface (F0)(F1) y (F2), es decir, se trata de un filtro (o sistema deductivo). Sean $x, y \notin U$. Buscamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \xrightarrow{n} y \in U$. La única condición que debe satisfacer es que $\pi_j(x \xrightarrow{n} y) = 1$. En efecto: Como $x \notin U, \pi_j(x) \neq 1$ y dado que Lj es localmente finito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_j(x)^n = 0$. Además, $\pi_j(x \xrightarrow{n} y) = \pi_j(x^n \to y) = \pi_j(x^n) \to \pi_j(y) = (\pi_j(x))^n \to \pi_j(y) = 0 \to \pi_j(y) = 1$. Por el Lema 3.27 afirmamos que U es un sistema deductivo categórico, o, lo que es lo mismo, un ultrafiltro y $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \{1\}$. $\square$

Lema 3.43. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo residual divisible. Si L es localmente finito, entonces es MV álgebra.*

Demostración: Dado que L es retículo residual divisible, para probar que es MV álgebra, en virtud del Teorema 2.12 sólo resta ver que es de Girard, es decir que para cada $x \in L$ se verifica $\neg\neg x = x$.
Por el Lema 2.25.3) y 4) resulta $x \leq \neg\neg x$ y $\neg\neg\neg x = \neg x$. Dado que L es divisible, debe existir $z \in L$ tal que $z \otimes \neg\neg x = \neg x$, y, en consecuencia $\neg(z \otimes \neg\neg x) = \neg x$. Por el Lema 2.9.10) $z \to (\neg\neg\neg x) = z \to \neg x = \neg x$. Supongamos que para $k \in \mathbb{N}$ se verifica $\neg x = z^k \to \neg x$, entonces, aplicando nuevamente el Lema 2.9.10) resulta $z^{k+1} \to \neg x = z \to (z^k \to \neg x) = z \to \neg x = \neg x$. Es decir, $z^n \to \neg x = \neg x$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Si $z \neq 1$, por ser localmente finito existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z^{n_0} = 0$ y, en consecuencia, $\neg x = 0 \to \neg x = 1$, para todo $x \in L$. Resulta entonces que $z = 1$ y $\neg\neg x = x$. $\square$

Teorema 3.6. [Tur99] *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral semi-simple. Entonces son equivalentes:*

1) $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1\rangle$ *es divisible;*

2) $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1\rangle$ *es MV álgebra.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) : Si L es semi-simple y divisible, entonces, por los Lemas 3.42 y 3.43 resulta una MV álgebra.
2) $\Rightarrow$ 1): Trivial, a partir del teorema 2.12. $\square$

Lema 3.44. *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *una MV álgebra. Entonces son equivalentes:*

1) $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *es semi-simple:*

2) *Para todo* $x \in L$*, si* $x \neq 1$*, existe un número natural* n *tal que* $(x \rightarrow 0) \rightarrow x^n \neq 1$.

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2): Dado que L es MV álgebra, por el corolario 2.6 resulta lineal. Dado que es semi-simple, para cada $x \in L$, $x \neq 1$, existe un ultrafiltro que no lo contiene y, por el Corolario 3.12 es equivalente a decir que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x^n \rightarrow 0) \rightarrow x \neq 1$.
Por el Lema 2.25.11) y usando que la negación es una involución escribimos:
$\neg\neg((x^n \rightarrow 0) \rightarrow x) = (x^n \rightarrow 0) \rightarrow x = \neg\neg(x^n \rightarrow 0) \rightarrow \neg\neg x = \neg x \rightarrow \neg(x^n \rightarrow 0) = \neg x \rightarrow x^n$. Es decir, si $x \neq 1$, $(x \rightarrow 0) \rightarrow x^n \neq 1$.
2) $\Rightarrow$ 1): Nuevamente usando el Corolario 3.12, resulta la semi-simplicidad. □

Recordemos que a partir del Teorema 2.8, podemos caracterizar las álgebras de Heyting como retículos residuales divisibles, lineales, cuyo producto es idempotente. En este caso podemos referirnos al álgebra quitando el símbolo $\otimes$ de la signatura. Escribimos, entonces, el siguientes corolario:

Corolario 3.13. *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Heyting. Son equivalentes:*

1) $\langle L, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *es semi-simple;*

2) $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de Boole.*

Demostración: Sabemos que toda álgebra de Boole es semi-simple y, por supuesto, de Heyting, sólo hay que probar que un álgebra de Heyting semi-simple es BL álgebra.
En efecto: Por el Lema 3.6 resulta una MV álgebra, que por ser Heyting tiene todos sus elementos idempotentes, es decir, es un álgebra de Boole. □

Lema 3.45. [Háj97] *Toda BL álgebra es producto subdirecto de BL álgebras linealmente ordenadas.*

Demostración:
Sea $\mathcal{P}$ el sistema de todos los filtros primos de L.
Para $F \in \mathcal{P}$ sea $L_F = L/F$ y $L^\star = \Pi_{F\in\mathcal{P}} L_F$.
$L^\star$ es producto directo de retículos residuales linealmente ordenados L_F para todo F filtro primo de L. Para $x \in L$, sea $i(x)$ el elemento $([x]_F)_{F\in\mathcal{U}}$ de $L^\star$. Claramente esta inmersión preserva las operaciones, resta probar que es inyectiva. Si $x, y \in F$ y $x \neq y$, entonces $x \not\leq y$ o $y \not\leq x$. Supongamos (porque es lo mismo) que $x \not\leq y$, en consecuencia, $x \rightarrow y \neq 1$ en L, en virtud del Lema 3.39, sea F un filtro primo en L que no contiene a $x \rightarrow y$, entonces en L/F $[x]_F \not\leq [y]_F$, de donde $[x]_F \neq [y]_F$ y, en consecuencia $i(x) \neq i(y)$. □

Capítulo 4

Elementos Especiales

En este capítulo, salvo que hagamos una mención especial al respecto, nos referiremos siempre a retículos residuales integrales. Hemos distinguido los elementos regulares, densos y booleanos de un retículo residual, siguiendo a Antonio Monteiro [Mon95]. También distinguimos los elementos idempotentes y analizamos las relaciones entre ellos.

4.1. Elementos regulares

Definición 4.1. Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral, un elemento $x \in L$ es un *elemento regular* si $x = (x \rightarrow 0) \rightarrow 0$. Notamos con $R(L)$ al conjunto de todos los elementos regulares del retículo.

Lema 4.1. *$x \in R(L)$ si y sólo si $x = y \rightarrow 0$, para algún $y \in L$.*

Demostración: Si x es regular, la condición se satisface con $y = x \rightarrow 0$. Supongamos que $x = y \rightarrow 0$ para algún $y \in L$ y veamos que necesariamente $x = (x \rightarrow 0) \rightarrow 0$.
Por el Lema 2.25.4) escribimos: $(x \rightarrow 0) \rightarrow 0 = ((y \rightarrow 0) \rightarrow 0) \rightarrow 0 = y \rightarrow 0 = x$ □

Observación 4.1. $R(L) \neq \emptyset$. Por el Lema 2.25.2) se ve que $\{0, 1\} \subseteq R(L)$. Podría pensarse que $\{0, 1\} \subset R(L)$, pero es factible la igualdad, como se ve en el Ejemplo 2.12.

Ejemplo 4.1. Consideremos el retículo de la Observación 2.15. Los elementos regulares son: $0, a, b, 1$, vemos que $\otimes$ y $\rightarrow$ son operaciones en $R(L)$, no así $\vee$ ya que $a, b, \in R(L)$, pero $a \vee b = c$ no es un elemento regular.
En el Ejemplo 2.26 los elementos regulares son: $0, a, c, e, g, 1$, y es cerrado con respecto a todas las operaciones del retículo residual. Como el retículo original es una BL álgebra, entonces también lo es $R(L)$, que además es un retículo de Girard, y en consecuencia, una MV álgebra.

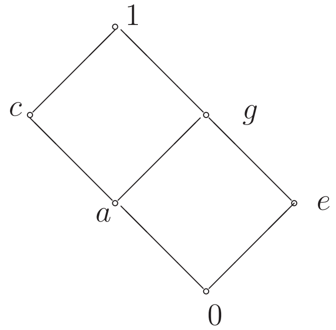
Lema 4.2. *Si $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es lineal, entonces $\mathbf{R(L)}$ es un retículo acotado cerrado con respecto al residuo.*

Demostración: Sabemos ya que $\{0, 1\} \subseteq R(L)$. Sean entonces $x, y \in R(L)$. Por el Lema 4.1 existen $z, t \in L$ tales que $x = z \to 0,\ y = t \to 0$.
$x \wedge y \in R(L)$: Por el Lema 2.9.9) $x \wedge y = (z \to 0) \wedge (t \to 0) = (z \vee t) \to 0$.
$x \vee y \in R(L)$: Por el Lema 2.16.3) $x \vee y = (z \to 0) \vee (t \to 0) = (z \wedge t) \to 0$.
$x \to y \in R(L)$: Por el Lema 2.9.10) $x \to y = (z \to 0) \to (t \to 0) = ((z \to 0) \otimes t) \to 0$.
□

Corolario 4.1. *Si L es un álgebra de Heyting lineal, entonces $R(L)$ es un álgebra de Boole.*

Demostración: A partir del Lema es inmediato que se trata de un subuniverso, resta probar que los elementos son complementados. Dado que toda álgebra de Heyting es divisible, por el Teorema 2.7 escribimos $x \wedge \neg x = x \otimes (x \to \neg x) = x \otimes (x \to (x \to 0)) = (x \otimes (x \otimes x) \to 0) = x \otimes (x \to 0) = x \otimes \neg x = 0$.
$x \vee \neg x = \neg\neg x \vee \neg x = \neg(\neg x \wedge x) = \neg 0 = 1$ □

Observación 4.2. Si consideramos el Ejemplo 2.26, que lo presentamos como una BL álgebra que no es MV álgebra, los elementos regulares son $0, a, c, e, g, 1$, y conforman una MV álgebra.



$\otimes$	0	a	c	e	g	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	a	0	0	a
c	0	a	c	0	a	c
e	0	0	0	e	e	e
g	0	0	a	e	e	g
1	0	a	c	e	g	1

$\to$	0	a	c	e	g	1
0	1	1	1	1	1	1
a	g	1	1	g	1	1
c	e	g	1	e	g	1
e	c	c	c	1	1	1
g	a	c	c	g	1	1
1	0	a	c	e	g	1

Este resultado no es válido en general. Consideremos la cadena $0 < a < b < c < 1$ con las operaciones definidas por:

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
b	0	0	0	0	b
c	0	0	0	a	c
1	0	a	b	c	1

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1
b	c	c	1	1	1
c	b	c	c	1	1
1	0	a	b	c	1

El conjunto de elementos regulares es: $R(L) = \{0, b, c, 1\}$, pero $c \otimes c = a \notin R(L)$. Es decir, no es cerrado por $\otimes$.

Lema 4.3. *Sea $L = \prod_{i \in I} L_i$ un retículo residual. $x = (x_i)_{i \in I}$ es regular en L si y sólo si x_i es regular en L_i para todo $i \in I$.*

Demostración: Sea $x = (x_i)_{i \in I}$. La afirmación resulta inmediatamente de la Definición 3.18, ya que $\neg\neg x = (\neg\neg x_i)_{i \in I}$. □

Lema 4.4. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ un retículo residual totalmente ordenado, tal que $\otimes$ es el producto drástico. Entonces $R(L) = \{0, a, 1\}$ es una MV álgebra, donde $a = x \to 0$, para cualquier x tal que $0 \neq x \neq 1$.*

Demostración: El producto drástico se define:

$$x \otimes y = \begin{cases} x, & \text{si } y = 1; \\ y, & \text{si } x = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea x tal que $0 \neq x \neq 1$ y consideremos: $x \to 0 = \bigvee\{t : x \otimes t = 0\} = \bigvee\{t : t < 1\}$. Vemos entonces que la negación de cualquier elemento distinto de cero y uno, es una constante, notemos $a = x \to 0$. Por el Lema 4.1 $R(L) = \{0, a, 1\}$. Las operaciones están definidas por:

$\otimes$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	0	a
1	0	a	1

$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	a	1	1
1	0	a	1

y se ve en las tablas que $\langle R(L), \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ es una MV álgebra. □

Lema 4.5. *Sea $L = \prod_{i \in I} L_i$ un producto de retículos residuales con producto drástico. Entonces $R(L) = \prod_{i \in I} R(L_i)$ es una MV álgebra.*

Demostración: Inmediata a partir de los Lemas 4.3 y 4.4. $\square$

4.2. Elementos densos

Definición 4.2. [Ras74] Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral. Un elemento $x \in L$ se dice *denso* si $x \rightarrow 0 = 0$. Notamos $D_S(L)$ al conjunto de los elementos densos del retículo.

Lema 4.6. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral. Si x es denso, entonces $x = y \vee \neg y$ para algún elemento $y \in L$.*

Demostración: Si $\neg x = 0$, entonces $x = x \vee 0 = x \vee \neg x$. $\square$

Observación 4.3. La recíproca en general no es cierta. En el ejemplo 2.26 se puede ver que $g = g \vee \neg g,\ g \rightarrow 0 = a \neq 0$.

Ejemplo 4.2. En el Ejemplo 2.12 los elementos densos son $a, b, c, 1$ y se cumple que $x = x \vee \neg x$, en todos los casos, pero no existe $y \neq x$ tal que $x = y \vee \neg y$. La existencia de tal y es imposible si x es irreducible en el retículo, como a, b y 1, pero no es el caso de c. En la Observación 2.15, el diagrama de Hasse coincide, pero los elementos densos son sólo c y 1 y como c no es irreducible podemos escribir $c = a \vee \neg a = b \vee \neg b = c \vee \neg c$. En 2.26 los elementos densos son $f, 1$ y se cumple $f = b \vee \neg b = f \vee \neg f$.

Lema 4.7. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual integral. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *x es denso;*

2) *$\neg\neg x = 1$;*

3) *$x \otimes z \neq 0$ para todo $z \neq 0$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2): Por el Lema 2.25.2) $\neg\neg x = \neg 0 = 1$.

2) $\Rightarrow$ 1): Por el Lema 2.25.4) y 2)$\neg x = \neg\neg\neg x = \neg 1 = 0$.

1) $\Rightarrow$ 3): Por la condición (2.13), $x \otimes z = 0$ si y sólo si $x \leq z \rightarrow 0 = \neg z$, entonces, por el Lema 2.25.5) $\neg\neg z \leq \neg x$.
Por el Lema 2.25.3) $z \leq \neg\neg z \leq \neg x$, y como x es denso, resulta $\neg x = 0$ y, en consecuencia, $z = 0$.

3) $\Rightarrow$ 1): $\neg x = x \rightarrow 0 = \bigvee\{t : x \otimes t = 0\}$. Si $x \otimes z \neq 0$ para todo $z \neq 0$, necesariamente $\neg x = 0$. $\square$

Lema 4.8. *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *un retículo residual integral no trivial y* $D_S(L)$ *el conjunto de los elementos densos de* L*. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1) $0 \notin D_S(L)$

2) $1 \in D_S(L)$

3) *Si* $x \leq y,\ x \in D_S(L)$*, entonces* $y \in D_S(L)$

4) *Si* $x, y \in D_S(L)$*, entonces* $x \otimes y \in D_S(L)$

5) *Si* $x,\ x \rightarrow y \in D_S(L)$*, entonces* $y \in D_S(L)$*.*

Demostración:

1) $0 \notin D_S(L)$: Por el Lema 2.25.2), $\neg 0 = 1 \neq 0$.

2) $1 \in D_S(L)$: Por el Lema 2.25.2), $\neg 1 = 0$.

3) Si $x \leq y,\ x \in D_S(L)$, entonces $y \in D_S(L)$: Por el Lema 2.25.5), $\neg y \leq \neg x = 0$, en consecuencia $\neg y = 0$.

4) Si $x, y \in D_S(L)$, entonces $x \otimes y \in D_S(L)$: Por el Lema 2.9.10), $\neg(x \otimes y) = x \rightarrow (y \rightarrow 0) = x \rightarrow 0 = 0$.

5) Si $x,\ x \rightarrow y \in D_S(L)$, entonces $y \in D_S(L)$: Por el Lema 2.9.2-i) y 10), $y \rightarrow 0 \leq (x \otimes (x \rightarrow y)) \rightarrow 0 = x \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow 0) = x \rightarrow 0 = 0$.

□

Lema 4.9. *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *un retículo residual integral, entonces el conjunto* $D_S(L)$ *de los elementos densos de* L *es cerrado con respecto al producto, el residuo y el supremo.*

Demostración: Sean $x, y \in D_S(L)$. Por el Lema 4.8.4) y 5) podemos afirmar que $x \otimes y \in D_S(L)$ y $x \rightarrow y \in D_S(L)$.
Dado que $x \leq x \vee y$, aplicando el Lema 4.8.3) resulta $x \vee y \in D_S(L)$. □

En general no es cierto que si $x, y \in D_S(L)$ resulte $x \wedge y \in D_S(L)$ como se puede apreciar en el Ejemplo 2.12, donde $a, b \in D_S(L)$, pero $a \wedge b = 0$. Veamos qué condiciones son necesarias par que sea cerrado con respecto al ínfimo.

Lema 4.10. *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *un retículo residual divisible, entonces el conjunto* $D_S(L)$ *de los elementos densos de* L *es cerrado con respecto al producto, el residuo, el supremo y el ínfimo.*

Demostración: Por el Lema 4.9 sólo debemos probar que es cerrado respecto al ínfimo. Sean $x, y \in D_S(L)$. Como **L** es divisible, por el Lema 2.21.2) podemos escribir $x \wedge y = x \otimes (x \to y)$, y como $x, y \in D_S(L)$, por el Lema 4.9 resulta $x \to y$ y $x \otimes (x \to y) \in D_S(L)$, en consecuencia, $x \wedge y \in D_S(L)$. □

Lema 4.11. *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ *un retículo residual lineal, entonces el conjunto* $D_S(L)$ *de los elementos densos de* L *es cerrado con respecto al producto, el residuo, el supremo y el ínfimo.*

Demostración: Por el Lema 4.9 sólo debemos probar que es cerrado respecto al ínfimo. Sea $x, y \in D_S(L)$, como **L** es lineal, por el Lema 2.16.3) podemos escribir $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$, como $x, y \in D_S(L)$, resulta $x \to 0 = y \to 0 = 0$ y $\neg x \vee \neg y = 0$, en consecuencia, $x \wedge y \in D_S(L)$. □

Lema 4.12. *Si* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ *es un retículo de Girard, entonces* $D_S(L) = \{1\}$.

Demostración: $1 \in D_S(L)$, por el Lema 4.8. Si $x \in D_S(L)$, entonces, por el Lema 4.7 $\neg\neg x = 1$ y como se trata de un retículo residual de Girard $x = \neg\neg x = 1$. □

Observación 4.4. La condición $D_S(L) = \{1\}$ es necesaria mas no es suficiente para afirmar que **L** es un retículo residual de Girard. Este hecho se ve en el retículo del Ejemplo 2.18, que no es de Girard y, sin embargo el único elemento denso es el 1.

4.3. Elementos idempotentes

Lema 4.13. *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ *una BL álgebra, y sea* x *un elemento idempotente en* L*. Entonces, cualquiera que sea* y *en* L *se tiene:*

$$(x \to y) \vee ((x \to y) \to y) = 1.$$

Demostración: Por el Lema 2.16.2) podemos escribir $(x \to y) \vee ((x \to y) \to y) = (x \wedge (x \to y)) \to y$. Dado que x es idempotente, y en virtud del Lema 2.23.1), resulta $(x \wedge (x \to y)) \to y = (x \otimes (x \to y)) \to y = (x \wedge y) \to y = 1$, por el Lema 2.21.2). □

Corolario 4.2. *En las condiciones del Lema,* $\neg x \vee \neg\neg x = 1$.

Demostración: Inmediata, con $y = 0$. □

Lema 4.14. *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ *una BL álgebra, y sea* $x \in L$ *un elemento idempotente. Entonces* $\neg x$ *también es idempotente.*

Demostración: Por el lema anterior y el Lema 2.12.1) escribimos $\neg x = \neg x \otimes 1 = \neg x \otimes (\neg x \vee \neg\neg x)$. Aplicando el Lema 2.9.6) y Lema 2.25.1) resulta: $\neg x \otimes (\neg x \vee \neg\neg x) = (\neg x \otimes \neg x) \vee (\neg x \otimes \neg(\neg x)) = (\neg x \otimes \neg x) \vee 0 = \neg x \otimes \neg x$. Es decir $\neg x = \neg x \otimes \neg x$. □

Observación 4.5. Es claro que el conjunto de los elementos idempotentes en un retículo residual integral es no vacío, ya que 0 y 1 son idempotentes.
Sea x_0 un elemento idempotente en L, entonces, en virtud del Lema 4.14, $i = x_0 \to 0$ es también un elemento idempotente.
Además, cualquiera que sea x en L se satisface $x = (x \wedge i) \vee (x \wedge \neg i)$, ya que L es retículo distributivo por ser BL álgebra, e $i \vee \neg i = 1$.

Observación 4.6. Podría esperarse que $(x \to y) \wedge i = (x \wedge i) \to (y \wedge i)$, pero no es cierto como se puede comprobar en el Ejemplo 2.26, donde $(a \to b) \wedge c = g \wedge c = a \neq a \to 0 = (a \wedge c) \to (b \wedge c)$, siendo $c = \neg e$, con $e \otimes e = e$.

Lema 4.15. *Sean* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ *una BL álgebra, i un elemento idempotente,* $[0, i] = \{\lambda \in L : \lambda \leq i\}$ *y las operaciones*

$$x \otimes_i y = (x \otimes y) \wedge i$$

$$x \xrightarrow{i} y = (x \to y) \wedge i.$$

Entonces $[\mathbf{0}, \mathbf{i}] = \langle [0, i], \wedge, \vee, \otimes_i, \xrightarrow{i}, 0, i\rangle$, *es una BL álgebra.*

Demostración:

Si $i = 1$ el resultado es trivial.

Supongamos $0 \neq i \neq 1$ y $x, y \in [0, i]$. Entonces:

$x \otimes_i y = (x \otimes y) \wedge i = x \otimes y$. Ya que $x \otimes y \leq x \wedge y$.

$x \xrightarrow{i} y = (x \to y) \wedge i$.

Veamos que $(\otimes_i, \xrightarrow{i})$ es un par adjunto. Consideremos $x, y, z \in [0, i]$, entonces:
Si $x \otimes_i y \leq z$ entonces $x \otimes y \leq z$ lo que es equivalente a $x \leq y \to z$ y, en consecuencia, $x \wedge i \leq (y \to z) \wedge i$. Además, como $x \in [0, i]$ resulta que $x = x \wedge i \leq (y \to z) \wedge i$ o equivalentemente $x \leq y \xrightarrow{i} z$.
Supongamos ahora que $x \leq y \xrightarrow{i} z$, es decir $x = x \wedge i \leq (y \to z) \wedge i \leq (y \to z)$, y por lo tanto $x \leq (y \to z)$, lo que es equivalente a $x \otimes y \leq z$ y, en consecuencia a $x \otimes_i y \leq z$.
i, el último elemento de $[0, i]$ satisface $x \otimes i = x$, por el Lema 2.23.1). Dado que $\otimes$ coincide con $\otimes_i$ podemos garantizar que $\langle [0, i], \otimes_i, i\rangle$ es monoide ordenado y, en consecuencia, que $\langle [0, i], \wedge, \vee, \otimes_i, \xrightarrow{i}, 0, i\rangle$ es retículo residual integral, por el Corolario 2.2.
Para probar que es BL álgebra resta ver que es divisible y lineal.
Sea $x, y \in [0, i]$, entonces $x \wedge y = (x \wedge y) \wedge i = (x \otimes (x \to y)) \wedge i$. Por el Lema 2.19.2) $(x \otimes (x \to y)) \wedge i = (x \wedge i) \otimes ((x \to y) \wedge i) = x \otimes_i (x \xrightarrow{i} y)$, y se satisface la condición de divisibilidad.

Para ver la condición de linealidad debemos probar que $(x \stackrel{i}{\to} y) \vee (y \stackrel{i}{\to} x) = i$. Aplicando el Lema 2.19.3) resulta $(x \stackrel{i}{\to} y) \vee (y \stackrel{i}{\to} x) = ((x \to y) \wedge i) \vee ((y \to x) \wedge i) = ((x \to y) \vee (y \to x)) \wedge i = 1 \wedge i = i$. Afirmamos entonces que $\langle [0, i], \wedge, \vee, \otimes_i, \stackrel{i}{\to}, 0, i\rangle$ es una BL álgebra. $\square$

Corolario 4.3. *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ *una BL álgebra, i un elemento idempotente. Entonces* $[\mathbf{0}, \neg\mathbf{i}] = \langle [0, \neg i], \wedge, \vee, \otimes_{\neg i}, \stackrel{\neg i}{\to}, 0, \neg i\rangle$ *es una BL álgebra.*

Demostración: Por el Lema 4.14 sabemos que $\neg i$ es un elemento idempotente, e inmediatamente a partir del Lema 4.15 resulta la tesis. $\square$

Teorema 4.1. [BE97] *Toda BL álgebra* $\mathbf{L}$ *puede representarse como un producto de la forma* $[\mathbf{0}, \mathbf{i}] \times [\mathbf{0}, \neg\mathbf{i}]$*, siendo i la negación de un elemento idempotente.*

Demostración:
Por el Lema4.15, el Corolario 4.3 y el Teorema 2.10 afirmamos que $[\mathbf{0}, \mathbf{i}] \times [\mathbf{0}, \neg\mathbf{i}]$ es una BL álgebra.
La aplicación $h : L \to [0, i] \times [0, \neg i]$ definida por $h(x) = (x \wedge i, x \wedge \neg i)$ es naturalmente un homomorfismo, además verifica:

> Si $(y, z) \in [0, i] \times [0, \neg i]$, entonces $h(y \vee z) = (y, z)$, ya que $(y \vee z) \wedge i = (y \wedge i) \vee (z \wedge i) = y \vee 0 = y$, porque de $y \in [0, i]$ resulta $y \leq i$ y $y \wedge i = y$ y de $z \in [0, \neg i]$resulta $z \leq \neg i$ y $z \wedge y \leq \neg i \wedge i = 0$. Análogamente $(y \vee z) \wedge \neg i = z$. Es decir, h es epiyectiva.
>
> Si $h(x) = h(y)$, resulta $(x \wedge i, x \wedge \neg i) = (y \wedge i, y \wedge \neg i)$, es decir, $x \wedge i = y \wedge i$, $x \wedge \neg i = y \wedge \neg i$. Como $i = \neg i'$, con i' idempotente, por el Corolario 4.2 resulta $\neg i' \vee \neg\neg i' = 1$, lo que es equivalente a $i \vee \neg i = 1$. Entonces $x = x \wedge 1 = x \wedge (i \vee \neg i) = (x \wedge i) \vee (x \wedge \neg i) = (y \wedge i) \vee (y \wedge \neg i) = y \wedge (i \vee \neg i) = y \wedge 1 = y$. Es decir, h es inyectiva.

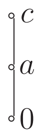
Resulta entonces que $h : L \to [0, i] \times [0, \neg i]$ es un isomorfismo de retículos residuales, y $[\mathbf{0}, \mathbf{i}] \times [\mathbf{0}, \neg\mathbf{i}]$ es una BL álgebra isomorfa a $\mathbf{L}$. $\square$

Observación 4.7. Si 0 y 1 son las únicas negaciones de elementos idempotentes la descomposición indicada resulta trivial. La existencia de elementos idempotentes cuya negación no sea nula garantiza una descomposición no trivial.

Ejemplo 4.3. Consideremos el Ejemplo 2.26. De acuerdo con las operaciones definidas, los elementos que son negaciones de idempotentes son: $0, c, e, 1$ y, en consecuencia las posibles descomposiciones son las siguientes:

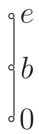
(1) $[0, 0] \times [0, 1]$, que es la descomposición trivial.

(2) $[0, c] \times [0, e]$



$\otimes$	0	a	c
0	0	0	0
a	0	0	a
c	0	a	c

$\rightarrow$	0	a	c
0	c	c	c
a	a	c	c
c	0	a	c



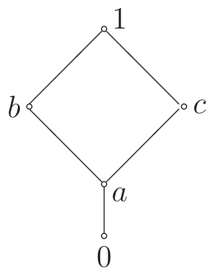
$\otimes$	0	b	e
0	0	0	0
b	0	b	b
e	0	b	e

$\rightarrow$	0	b	e
0	e	e	e
b	0	e	e
e	0	b	e

En estas cadenas observamos que los únicos elementos idempotentes que son negación de idempotentes son el primer y el último elemento de cada una.
La aplicación que realiza el isomorfismo está dada en la siguiente tabla:

x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$h(x)$	$(0,0)$	$(a,0=$	$(0,b)$	$(c,0)$	(a,b)	$(0,e)$	(c,b)	(a,e)	(c,e)

Ejemplo 4.4. Consideremos el álgebra de Heyting **H** determinada por el siguiente diagrama de Hasse, donde el producto coincide con el ínfimo y el residuo está dado por la tabla:



$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	c	1	c	1
c	0	b	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Los únicos elementos negaciones de idempotentes son 0 y 1, por lo cual la descomposición indicada resulta trivial.

Hemos establecido una descomposición para las BL álgebras. Esto generaliza un resultado de Höhle [Höh95]: Dada una MV álgebra L todo elemento idempotente i determina la descomposición de L en producto de MV álgebras. $L = L_i \otimes L_{i\to 0}$, un resultado similar obtuvo J.A. Rodríguez en su tesis doctoral para MV álgebras, [Rod80] y R. Cignoli y A. Torrens para PL-álgebras en [CT97].
Veamos en qué condiciones es posible establecer esta descomposición.

Lema 4.16. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual, x un elemento idempotente de L. Entonces*

$$x \leq x \rightarrow y \text{ si y sólo si } x \leq y.$$

Demostración: Resulta de la condición de par adjunto (2.13). □

Del lema resultan los siguientes corolarios de demostración inmediata:

Corolario 4.4. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual y x un elemento idempotente de L. Entonces $x \leq \neg x$ si y sólo si $x = 0$.*

Corolario 4.5. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual y x un elemento idempotente de L. Entonces $x \not\leq \neg x$ si y sólo si $x \neq 0$.*

Corolario 4.6. *Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual, x un elemento idempotente de L. Si $\mathbf{L}$ es una cadena y $x \neq 0$, entonces $x > \neg x$.*

Observación 4.8. Es claro, entonces, en virtud de los corolarios anteriores que en una cadena que sea un retículo residual divisible (que por ser totalmente ordenado es lineal, según el Lema 2.17), la única negación de un elemento idempotente es el 0. Es decir, son indescomponibles según nuestra propuesta.

4.4. Elementos nilpotentes

Definición 4.3. Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual, $x \neq 0$ es un *elemento nilpotente de orden* n si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

Lema 4.17. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual, $x \in L$, entonces $\neg(\neg\neg x)^n = \neg\, x^n$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Probaremos este lema por inducción. Si $n = 1$ la proposición se verifica, según vimos en el Lema 2.25.4). Supongamos que se verifica $\neg(\neg\neg x)^{n-1} = \neg x^{n-1}$ y probemos $\neg(\neg\neg x)^n = \neg x^n$.
$\neg(\neg\neg x)^n = (T(\neg\neg x, (\neg\neg x)^{n-1})) \rightarrow 0 = \neg\neg x \rightarrow ((\neg\neg x)^{n-1} \rightarrow 0) = \neg\neg x \rightarrow (x^{n-1} \rightarrow 0) = x^{n-1} \rightarrow (\neg\neg x \rightarrow 0) = x^{n-1} \rightarrow \neg x = (T(x^{n-1}, x)) \rightarrow 0 = x^n \rightarrow 0 = \neg x^n$. □

Corolario 4.7. *Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual. Si x es un elemento nilpotente de orden n, entonces $\neg\neg x$ es un elemento nilpotente del mismo orden.*

Demostración: Si $x^n = 0$, entonces $1 = \neg x^n = \neg(\neg\neg x)^n$, de donde $(\neg\neg x)^n = 0$. Es decir $\neg\neg x$ es nilpotente y su orden de nilpotencia es menor o igual que el de x.
Análogamente se obtiene la otra desigualdad. □

4.5. Elementos booleanos

Definición 4.4. Sea $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ un retículo residual, llamaremos *elemento booleano* a x, si existe algún elemento y satisfaciendo:

$$x \wedge y = 0$$
$$x \vee y = 1$$

Lema 4.18. *En una BL álgebra si x es booleano y $\neg x = x \rightarrow 0$,*

1) $x \vee \neg x = 1$*,* $x \wedge \neg x = 0$

2) $\neg\neg x$ *es booleano*

3) $x = \neg\neg x$*.*

Demostración:

1) $x \vee \neg x = 1$, $x \wedge \neg x = 0$: Por ser x booleano existe y tal que $x \wedge y = 0, x \vee y = 1$. Considerando que $\neg x = x \rightarrow 0 = \bigvee\{t : x \otimes t = 0\}$ y que por ser integral se verifica $x \otimes t \leq x \wedge t$ es claro que $y \leq \neg x$ y, en consecuencia, $1 = x \vee y \leq x \vee \neg x$. Es decir $x \vee \neg x = 1$.
Además, por ser **L** un retículo lineal, por el Lema 2.16.3), $\neg(x \wedge \neg x) = \neg x \vee \neg\neg x \geq \neg x \vee x$, de donde $\neg(x \wedge \neg x) = 1$ y, en consecuencia $x \wedge \neg x = 0$. En efecto: $x \wedge \neg x \leq \neg\neg x \wedge \neg x = \neg(\neg x \vee x) = \neg 1 = 0$.

2) Veamos que $\neg\neg x$ es booleano: por el Lema 2.16.2) y 3), podemos escribir $\neg\neg x \vee \neg x = \neg(\neg x \wedge x) = \neg 0 = 1$ y $\neg\neg x \wedge \neg x = \neg(\neg x \vee x) = \neg 1 = 0$.

3) Para probar que $x = \neg\neg x$, recordemos que por el Lema 2.19.3) el retículo es distributivo y por este motivo y usando los incisos anteriores podemos escribir: $x = x \wedge 1 = x \wedge (\neg x \vee \neg\neg x) = (x \wedge \neg x) \vee (x \wedge \neg\neg x) = 0 \vee (x \wedge \neg\neg x) = (\neg x \wedge \neg\neg x) \vee (x \wedge \neg\neg x) = (\neg x \vee x) \wedge \neg\neg x = 1 \wedge \neg\neg x = \neg\neg x$.

□

Observación 4.9. El inciso 3) del Lema 4.18 puede enunciarse diciendo: en una BL álgebra, todo elemento x booleano es regular.

Lema 4.19. *En una BL álgebra todo elemento booleano es idempotente.*

Demostración: Debemos probar que si x es booleano, entonces $x \otimes x = x$. Basta considerar que $x = x \otimes 1$, por el Lema 2.12.1) por el Lema 2.9.6) obtenemos $x = x \otimes 1 = x \otimes (x \vee \neg x) = (x \otimes x) \vee (x \otimes \neg x) = x \otimes x$, ya que $x \otimes \neg x = 0$, por el Lema 2.25.1). □

Corolario 4.8. *En una BL álgebra un elemento x es booleano si y sólo si x es negación de idempotente.*

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que x es booleano. Por el Lema 4.18 escribimos $x = \neg\neg x$. Dado que x es idempotente, $\neg x$ también lo es, por el Lema 4.14, en consecuencia x es negación de un idempotente.
Supongamos ahora que $x = \neg i$ donde $i \otimes i = i$. Por el Lema 4.13, $\neg i \vee \neg\neg i = 1$, es decir, $x \vee \neg\neg i = 1$. Por otra parte $x \wedge \neg\neg i = \neg i \wedge \neg\neg i$. Como i es idempotente, por el Lema 4.14 $\neg i$ es idempotente y por el Lema 2.23.1) $\neg i \wedge \neg\neg i = \neg i \otimes \neg(\neg i) = 0$, por el Lema 2.25.1). Es decir, $x \vee \neg\neg i 1$ y $x \wedge \neg\neg i = 0$, en consecuencia, x es un elemento booleano. □

Observación 4.10. En una MV álgebra, por ser la negación una involución, cualquier elemento idempotente es un elemento booleano. (Es decir, los elementos idempotentes de una MV álgebra conforman un álgebra de Boole, según vimos en el Teorema 2.15), [Cha58].

Teorema 4.2. *Para que una BL álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$, sea descomponible en producto de BL álgebras, es condición necesaria y suficiente que exista un elemento booleano no trivial en* **L**. *En ese caso, si x es el elemento booleano, resulta $L = [0, x] \times [0, \neg x]$.*

Demostración: Inmediata a partir del teorema 4.1 y el corolario 4.8. □

Probaremos ahora que toda BL álgebra finita con más de un átomo es isomorfa a un producto directo de BL álgebras. De este modo resultará que toda BL álgebra con n átomos es el producto de n BL álgebras, no necesariamente cadenas.

Teorema 4.3. [BE97] *Toda BL álgebra finita $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$, con más de un átomo tiene al menos un elemento booleano no trivial.*

Demostración: Por el Corolario 3.2, dado que toda BL álgebra es lineal, existe un elemento idempotente $a_0 \in L$ y por el Corolario 4.8, $\neg a_0 \in L$ es el elemento booleano buscado. □

Corolario 4.9. *Un retículo residual finito lineal es descomponible si y sólo si posee más de un átomo.*

Demostración:
La condición suficiente se deduce del teorema. Por otra parte, para la condición necesaria observemos que si un retículo L es descomponible, entonces existe x en L tal que $L = [0, x] \times [0, \neg x]$. Sean a un átomo de $[0, x]$ y b un átomo de $[0, \neg x]$. Es claro que $(a, 0)$ y $(0, b)$ son átomos de L. □

Capítulo 5

Casos Particulares

5.1. t-normas

La idea principal de la lógica fuzzy es reemplazar el conjunto de posibles valores de verdad $\{0,1\}$ asociado a la lógica clásica por otro que lo contenga, generalizando las operaciones que en él se realizan. En la mayoría de los trabajos sobre lógica fuzzy y sus aplicaciones el conjunto antes mencionado es el intervalo real unitario $[0,1]$ y los operadores que se consideran son las llamadas t-normas para la conjunción y t-conormas para la disyunción. Esta denominación es una abreviatura de *normas triangulares* y proviene de la teoría de espacios métricos probabilísticos. En estos espacios métricos, definidos originalmente por Menger ([Men42]) a cada par de puntos p y q se asocia la función de distribución de probabilidad F_{pq}, donde $F_{pq}(x)$ se interpreta como la probabilidad de que la distancia entre p y q sea menor o igual que x, para cada valor real x. La desigualdad triangular toma la forma: $F_{pq}(x+y) \geq T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$, siendo T una t-norma. En [SS61], se generaliza este concepto y la desigualdad triangular toma la forma: $F_{pr} \geq \tau(F_{pq}, F_{qr})$, donde τ es una operación continua y asociativa en el espacio de funciones de distribución. En este trabajo también se ve que diferentes t-normas llevan a espacios métricos probabilísticos con diferentes geometrías y propiedades topológicas, lo cual implica que un amplio repertorio de t-normas generarán un amplio repertorio de espacios. En [Acz48] J. Aczél enuncia el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *Sea J un intervalo abierto propio de $\mathbb{R}$, entonces la función $A : J \times J \to J$ es asociativa, continua y estrictamente monótona si y sólo si admite la representación $A(x,y) = a^{-1}(a(x) + a(y))$, donde $a : J \to \mathbb{R}$ es continua y estrictamente monótona.*

En [SS63], mediante el teorema de Aczél se construyen familias de t-normas y se deducen propiedades y relaciones entre las t-normas. También se encuentra la relación entre ellas y las llamadas cópulas, que habían sido definidas previamente por Sklar ([Skl96]).
Lofti Zadeh en su trabajo original ([Zad65]) toma el intervalo real unitario como conjunto de posibles valores de verdad, como operador de conjunción la t-norma *mínimo* y su

t-conorma dual, *máximo* como operador de disyunción. Es decir, en el intervalo real unitario, que con el orden natural es un retículo completo, si se define una t-norma resulta que $\langle[0,1], T, 1, \leq\rangle$ es un monoide ordenado y si además satisface $T(x, \bigvee_{i\in I} y_i) = \bigvee_{i\in I} T(x, y_i)$, se puede aplicar el Lema 2.7 para construir un retículo residual.
Es importante notar que el intervalo real unitario no es sólo un retículo acotado completo, sino que es totalmente ordenado, continuo y la suma acotada y el producto son dos operaciones en $[0,1]$.

Definición 5.1. Una operación $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una *norma triangular*, según Drewniak, [Dre89] o *cópula*, según Frank([Fra75]), si es asociativa, conmutativa y no decreciente en ambas variables. T se dice una *t-norma* si y sólo si tiene como identidad el 1, y una *t-conorma* si y sólo si tiene como identidad el 0.

Schweizer y Sklar, [SS61], [SS63] dan la siguiente definición de t-norma:

Definición 5.2. Una *t-norma* es una operación binaria definida sobre el intervalo real $[0,1]$ que satisface:

(T1) $T(x,1) = x, \quad T(0,0) = 0$

(T2) $T(x,y) = T(y,x)$

(T3) Si $x \leq x', y \leq y'$ entonces $T(x,y) \leq T(x',y')$

(T4) $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$

Klement, [Kle97] dice:

Definición 5.3. Una *norma triangular* (*t-norma*) es una operación $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ asociativa, conmutativa y no decreciente en la segunda variable, que tiene a 1 como elemento neutro.

Lema 5.1. *Las Definiciones 5.1, 5.2 y 5.3 son equivalentes.*

Demostración: Las condiciones de asociatividad, conmutatividad y el 1 como elemento neutro figuran en las tres definiciones. Sólo debemos ver que es suficiente que sea no decreciente en la segunda variable para que lo sea en ambas y que esta condición, juntamente con $T(x,1) = x$ bastan para ver que 0 es el elemento absorbente.
Supongamos que T es no decreciente en la segunda variable. Sea $x \leq x'$ e $y \leq y'$, entonces, por la conmutatividad de T escribimos: $T(x,y) \leq T(x,y') = T(y',x) \leq T(y',x') = T(x',y')$. Probemos ahora la existencia del elemento absorbente basándonos en la existencia de unidad y la isotonía: $0 \leq T(x,0) \leq T(1,0) = 0$. □

Observación 5.1. De la Definición 5.1.2) deducimos que una t-norma T satisface $T(x, \bigvee_{i\in I} y_i) = \bigvee_{i\in I} T(x, y_i)$ si y sólo si $T(\bigvee_{i\in I} x_i, y) = \bigvee_{i\in I} T(x_i, y)$. O, equivalentemente $lim_{x\to x_0^-} T(x,y) = T(x_0, y)$ y $lim_{y\to y_0-} T(x,y) = T(x, y_0)$. Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición 5.4. Sea T una t-norma. T se dice *continua a izquierda* si para todo $x, y \in [0,1]$ y cualquier familia $\{y_i\}_{i\in I} \subseteq [0,1]$ satisface:

$$T(x, \bigvee_{i\in I} y_i) = \bigvee_{i\in I} T(x, y_i).$$

Observación 5.2. Si bien Frank llama a las t-normas cópulas, en [SS61] podemos hallar la siguiente definición de cópula:

Definición 5.5. Una *cópula 2-dimensional* es una función $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, continua, que satisface las siguientes condiciones:

(C1) $C(0,0) = 0,\ C(a,1) = C(1,a) = a$,

(C2) si $a \leq c$, $b \leq d$, entonces $C(a,b) \leq C(c,d)$,

(C3) si $a \leq c$, $b \leq d$, entonces $C(a,d) + C(c,b) \leq C(a,b) + C(c,d)$.

Puede observarse que las condiciones (C1) y (C2) pedidas para cópulas coinciden con las 1), 2) y 3) de la Definición 5.2, pero ambos son conceptos diferentes, ya que las cópulas no son necesariamente asociativas y las t-normas no necesariamente continuas.
Un ejemplo de cópula que no es t-norma, dado que no es asociativa es:

$$C(x,y) = x \cdot y + x \cdot y \cdot (1-x) \cdot (1-y).$$

Un ejemplo de t-norma que no es cópula, dado que no es continua, es:

$$T_W(x,y) = \begin{cases} min(x,y) & \text{si x = 1 ó y = 1} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición 5.6. [SS61], [SS63] Una *t-conorma* , es una operación binaria definida sobre el intervalo real $[0,1]$ que satisface:

(S1) $S(x,0) = x, \quad S(1,1) = 1$

(S2) $S(x,y) = S(y,x)$

(S3) Si $x \leq x', y \leq y'$ entonces $S(x,y) \leq S(x',y')$

(S4) $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z)$

Observación 5.3. Las Definiciones 5.1 y 5.6 son equivalentes, en forma dual al Lema 5.1.

Observación 5.4. En [AFS06] dan el nombre de *s-normas* a las t-conormas. Esta denominación tiene sentido dado que ambas son normas triangulares con un elemento neutro. En este trabajo hemos preferido llamarlas t-conormas, dada la relación dual entre las t-normas y las t-conormas.

Definición 5.7. [TAT95] Una *negación fuerte* es una función $n : [0,1] \to [0,1]$, continua, estrictamente decreciente, que satisface:

$$n(0) = 1, \quad n(n(x)) = x. \tag{5.1}$$

En [BBS03] se llega a esta definición por restricciones sucesivas, llamando *negación fuzzy* a una función $c : [0,1] \to [0,1]$, monótona decreciente tal que $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$. Si c es continua y estrictamente decreciente se dice *negación fuzzy estricta* y si además es involutiva se denomina *negación fuzzy fuerte*.

Lema 5.2. *Si $n : [0,1] \to [0,1]$ es una negación fuerte, entonces $n(1) = 0$.*

Demostración: Por la Definición 5.7, $n(0) = 1$, reemplazando el 1 resulta, $n(1) = n(n(0)) = 0$, por la misma razón. □

Ejemplo 5.1. La negación fuerte más utilizada es $n(x) = 1 - x$, y es miembro de la familia de negaciones fuertes $n_\alpha(x) = \sqrt[\alpha]{1 - x^\alpha}$, para $\alpha = 1$.

Lema 5.3. [Kle97] *Si T es una norma, S definida por:*

$$S(x, y) = n(T(n(x), n(y))), \tag{5.2}$$

resulta asociativa, conmutativa, no decreciente en ambas variables y tiene como elemento neutro el 0, es decir, es una conorma.

Demostración: Para probar la asociatividad consideremos $S(x, S(y, z))$, por (5.2) y la definición de negación resulta

$$n(T(n(x), n(S(y, z)))) = n(T(n(x), n(n(T(n(y), n(z)))))) = n(T(n(x), T(n(y), n(z)))),$$

por la asociatividad de T resulta

$$n(T(T(n(x), n(y)), n(z))).$$

Dado que la negación es involutiva podemos escribir

$$n(T(n(n(T(n(x), n(y)))), n(z))),$$

reemplazando nuevamente por (5.2) obtenemos

$$n(T(n(S(x, y)), n(z))) = S(S(x, y), z).$$

$$S(x, y) = n(T(n(x), n(y))) = n(T(n(y), n(x))) = S(y, x).$$

Si $x \leq x'$ e $y \leq y'$ entonces $n(x') \leq n(x)$ y $n(y') \leq n(y)$.

Dado que T es no decreciente en ambas variables afirmamos

$$T(n(x'), n(y')) \leq T(n(x), n(y)),$$

y nuevamente aplicando n resulta

$$n(T(n(x), n(y))) \leq n(T(n(x'), n(y'))),$$

que por (5.2) es $S(x, y) \leq S(x', y')$.

$$S(x, 0) = n(T(n(x), n(0))) = n(T(n(x), 1)) = n(n(x)) = x.$$

□

Dualmente enunciamos el siguiente lema, cuya demostración es análoga:

Lema 5.4. *Si S es una conorma, T definida por:*

$$T(x, y) = n(S(n(x), n(y))) \tag{5.3}$$

resulta asociativa, conmutativa, no decreciente an ambas variables y tiene como elemento neutro el 1, es decir, es una norma.

Este hecho motiva la siguiente definición:

Definición 5.8. [TAT95] Una t-norma T y una t-conorma S son *n-duales* si existe una negación fuerte n tal que $S(x, y) = n(T(n(x), n(y)))$.

Definición 5.9. Si T y S son n duales, la terna (T, S, n) se dice una *terna de De Morgan*

Esta denominación está ampliamente justificada ya que las t-normas se utilizan para definir la intersección de conjuntos fuzzy, las t-conormas para definir la unión y la negación para definir el complemento; y si T y S son n-duales se verifican las leyes de De Morgan.

Definición 5.10. Si T y S son n-duales para la negación fuerte $n : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por $n(x) = 1 - x$, entonces se denominan *normas duales*. La condición de dualidad se escribe entonces: $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$.

Ejemplo 5.2. Los operadores t-norma, y sus correspondientes t-conormas duales, más habituales en la literatura son:

Mínimo (Zadeh - Gödel):

$$T_M(x,y) = min(x,y) \tag{5.4}$$

Producto aritmético (Mandani):

$$T_P(x,y) = x \cdot y \tag{5.5}$$

Producto acotado (Łukasiewicz):

$$T_L(x,y) = (x+y-1) \vee 0 \tag{5.6}$$

Producto drástico (weakest product):

$$T_W(x,y) = \begin{cases} min(x,y) & \text{si } x=1 \text{ ó } y=1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5.7}$$

Máximo:

$$S_M(x,y) = max(x,y) \tag{5.8}$$

Suma probabilística:

$$S_P(x,y) = x + y - x \cdot y \tag{5.9}$$

Suma acotada:

$$S_L(x,y) = (x+y) \wedge 1 \tag{5.10}$$

Conorma drástica (strongest conorm):

$$S_W(x,y) = \begin{cases} max(x,y) & \text{si } x=0 \text{ ó } y=0 \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5.11}$$

Probaremos que mínimo, producto aritmético, produto acotado y producto drástico con t-normas y que máximo, suma acotada, suma probabilística y conorma drástica son sus correspondientes conormas duales usando el Lema 5.3.

Mínimo

1) $min(x,1) = x, \quad min(0,0) = 0$

2) $min(x,y) = min(y,x)$

3) Si $x \leq x', y \leq y'$ entonces $min(x,y) \leq min(x',y')$

4) $min(x, min(y,z)) = min(min(x,y),z)$
En efecto: hay seis casos posibles:

$x \leq y \leq z$:
$min(x, min(y,z)) = min(x,y) = x = min(x,z) = min(min(x,y),z)$

$x \leq z \leq y$:
$min(x, min(y,z)) = min(x,z) = x = min(x,z) = min(min(x,y),z)$

$y \leq x \leq z$:
$min(x, min(y,z)) = min(x,y) = y = min(y,z) = min(min(x,y),z)$

$y \le z \le x$:
$min(x, min(y, z)) = min(x, y) = y = min(y, z) = min(min(x, y), z)$

$z \le x \le y$:
$min(x, min(y, z)) = min(x, z) = z = min(x, z) = min(min(x, y), z)$

$z \le y \le x$:
$min(x, min(y, z)) = min(x, z) = z = min(y, z) = min(min(x, y), z)$

5) $1 - min(1 - x, 1 - y) = max(x, y)$. En efecto: hay dos casos posibles:

$x \le y$:
$1 - min(1 - x, 1 - y) = 1 - (1 - y) = y = max(x, y)$

$y \le x$:
$1 - min(1 - x, 1 - y) = 1 - (1 - x) = x = max(x, y)$

Producto aritmético

(T1) $x \cdot 1 = x, \qquad 0 \cdot 0 = 0$

(T2) $x \cdot y = y \cdot x$

(T3) Si $x \le x', y \le y'$ entonces $x \cdot y \le x' \cdot y'$

(T4) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(T5) $1 - (1 - x) \cdot (1 - y) = 1 - (1 - x - y + x \cdot y) = x + y - x \cdot y$

Producto acotado

(T1) $(x + 1 - 1) \vee 0 = x, \qquad (x + 0 - 1) \vee 0 = 0$

(T2) $(x + y - 1) \vee 0 = (y + x - 1) \vee 0$

(T3) Si $x \le x', y \le y'$ entonces $(x + y - 1) \vee 0 \le (x' + y' - 1) \vee 0$

(T4) Para probar la asociatividad veamos en primer lugar que $T(T(x, y), z) = 0$ si y sólo si $T(x, T(y, z)) = 0$.
Supongamos que $T(T(x, y), z) = 0$. Si $y + z - 1 \le 0$ es claro que $T(x, T(y, z)) = 0$. Si $T(y, z) \ne 0$ resulta $T(x, T(y, z)) = (x+(y+z-1)-1)\vee 0 = ((x+y-1)+z-1)\vee 0$. Si $x+y-1 \le 0$ es claro que $T(x, T(y, z)) = 0$, en caso contrario $T(x, y) = x+y-1$, como $T(T(x, y), z) = 0$ resulta $(x + y - 1) + z - 1 \le 0$ y $T(x, T(y, z)) = 0$.
Debido a la conmutatividad probada en 2) con lo demostrado podemos afirmar la equivalencia.
Supongamos ahora que $T(T(x, y), z) \ne 0$ y $T(x, T(y, z)) \ne 0$, podemos afirmar entonces que $T(T(x, y), z) = (x+y-1)+z-1$ y $T(x, T(y, z)) = x+(y+z-1)-1$, y, en consecuencia, que $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$.

(T5) $1-(((1-x)+(1-y)-1)\vee 0)=(x+y)\wedge 1$
Si $(1-x)+(1-y)-1\leq 0$, es decir, $1\leq x+y$ y se verifica la igualdad.
Si $(1-x)+(1-y)-1\geq 0$, resulta $1-(((1-x)+(1-y)-1)\vee 0)=1-(1-x+1-y-1)=1-1+x-1+y+1=x+y=(x+y)\wedge 1$.

Producto drástico

(T1) $T_W(x,1)=x, \quad T_W(0,0)=0$

(T2) $T_W(x,y)=T_W(y,x)$

(T3) Supongamos que $x\leq x', y\leq y'$ y $T_W(x',y')=0$, entonces pueden ocurrir dos casos
caso 1: $x'=0$ ó $y'=0$, de donde $x=0$ ó $y=0$ y $T_W(x,y)=0$.
caso 2: $x'\neq 1\neq y', x'\neq 0\neq y'$ y $x\neq 1\neq y$, de donde $T_W(x,y)=0$.
Si $T_W(x,y)\neq 0$ pueden ocurrir dos casos:
caso 1: $x=1$, entonces $x'=1$ y $T_W(x,y)=y\leq y'=T_W(x',y')$.
caso 2: $y=1$, implica $y'=1$ y $T_W(x,y)=x\leq x'=T_W(x',y')$
En cualquiera de los cuatro casos $T_W(x,y)\leq T_W(x',y')$.

(T4) $T_W(x,T_W(y,z))=T_W(T_W(x,y),z)$.
En efecto: hay ocho posibilidades:

$$
\begin{aligned}
&x=1,\ y\neq 1,\ z\neq 1, \text{ entonces: } T_W(x,T_W(y,z))=0=T_W(T_W(x,y),z)\\
&x\neq 1,\ y=1,\ z\neq 1, \text{ entonces: } T_W(x,T_W(y,z))=0=T_W(T_W(x,y),z)\\
&x\neq 1,\ y\neq 1,\ z=1, \text{ entonces: } T_W(x,T_W(y,z))=0=T_W(T_W(x,y),z)\\
&x=1,\ y=1,\ z\neq 1, \text{ entonces: } T_W(x,T_W(y,z))=z=T_W(T_W(x,y),z)\\
&x=1,\ y\neq 1,\ z=1, \text{ entonces: } T_W(x,T_W(y,z))=y=T_W(T_W(x,y),z)\\
&x\neq 1,\ y=1,\ z=1, \text{ entonces: } T_W(x,T_W(y,z))=x=T_W(T_W(x,y),z)\\
&x\neq 1,\ y\neq 1,\ z\neq 1, \text{ entonces: } T_W(x,T_W(y,z))=0=T_W(T_W(x,y),z)\\
&x=1,\ y=1,\ z=1, \text{ entonces: } T_W(x,T_W(y,z))=1=T_W(T_W(x,y),z).
\end{aligned}
$$

(T5) $1-T_W(1-x,1-y)=S_W(x,y)$:
Si $x=0$ ó $y=0$ resulta $1-T_W(1-x,1-y)=1-min(1-x,1-y)=max(x,y)=S_W(x,y)$. En cualquier otro caso $T_W(1-x,1-y)=0$ y $S_W(x,y)=1$, lo cual verifica también que $1-T_W(1-x,1-y)=S_W(x,y)$.

Observación 5.5. Hemos afirmado que en $\langle[0,1],T,1\rangle$ se puede definir un residuo si T es una t-norma continua a izquierda. De las t-normas antes mencionadas sólo T_W no es continua. Veamos que no se verifica $T_W(x,\bigvee_{i\in I} t_i)=\bigvee_{i\in I} T_W(x,t_i)$.

Si consideramos $x\neq 1$, $t_i=1-1/i$, $i\in\mathbb{N}$, $T_W(x,t_i)=0$ para todo t_i, pero $T_W(x,\bigvee_{i\in I} t_i)=x$.

El orden natural en el intervalo real $[0,1]$ induce una relación de orden en el conjunto de las t-normas:

Definición 5.11. Dadas dos t-normas T_1 y T_2 se dice $T_1 \leq T_2$ si $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$, para todo $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$. Esta relación se denomina *orden puntual.*

Lema 5.5. $T_L \leq T_P$

Demostración: Si $x = 0$ ó $y = 0$ resulta $T_L(x,y) = T_P(x,y)$. Supongamos $x \neq 0 \neq y$.
Si $T_L(x,y) = max(x+y-1,0) = 0$, se cumple que $T_L(x,y) \leq T_M(x,y)$.
Si $T_L(x,y) = max(x+y-1,0) \neq 0$, dado que $x,y \in [0,1]$ resulta $(x-1)\cdot(1-y) \leq 0$ y en consecuencia $x - x\cdot y + y - 1 \leq 0$, de donde $T_L(x,y) = x + (y-1) \leq x \cdot y = T_P(x,y)$.
En cualquier caso $T_L \leq T_P$. □

Lema 5.6. *Sea $\langle \mathcal{T}, \leq \rangle$ el conjunto de todas las t-normas ordenado por el orden puntual, entonces T_W y T_M son, respectivamente, el primero y el último elemento.*

Demostración: Si $x,y \in (0,1)$, entonces $T_W(x,y) = 0$ y es claro que $0 \leq T(x,y)$, cualquiera que sea la t-norma T. Si $y = 1$ resulta, por la Definición 5.2.1) $T_W(x,1) = x = T(x,1)$ cualquiera que sea la t-norma T. Por la Definición 5.2.2) $T(x,y) = T(y,x)$ y, en consecuencia $T_W(1,y) = T_W(y,1) = y = T(y,1) = T(1,y)$. En consecuencia $T_W \leq T$, para toda $T \in \mathcal{T}$.
Por la Definición 5.2.1) y 3), si $y \leq 1$, entonces $T(x,y) \leq T(x,1) = x$. Si $x \leq 1$, por la misma definición .2) $T(x,y) = T(y,x) \leq T(y,1) = y$. En consecuencia $T(x,y) \leq min(x,y) = T_M(x,y)$, para toda $T \in \mathcal{T}$. □

Corolario 5.1. $T_W \leq T_L \leq T_P \leq T_M$

Demostración: Inmediata a partir del Lema 5.10 y 5.6. □

Corolario 5.2. *Si T es una t-norma, se verifica que $T(x,0) = T(0,y) = 0$, cualesquiera que sean $x,y \in [0,1]$.*

Demostración: $T(x,0) \leq T_M(x,0) = min(x,0) = 0$, y en consecuencia $T(x,0) = 0$. $T(0,y) = 0$ por la conmutatividad de la t-norma. □

Lema 5.7. *Sea T_1, T_2 dos t-normas, S_1, S_2 sus t-conormas n-duales, respectivamente. Si $T_1 \leq T_2$, entonces $S_2 \leq S_1$.*

Demostración: Supongamos que $T_1 \leq T_2$. Entonces $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$, para todo $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, en especial $T_1(n(x),n(y)) \leq T_2(n(x),n(y))$, como n es decreciente resulta $n(T_1(n(x),n(y))) \geq n(T_2(n(x),n(y)))$, es decir $S_2(x,y) \leq S_1(x,y)$, y resulta la tesis. □

Dualmente enunciamos el siguiente resultado:

Lema 5.8. *Sea $\langle \mathcal{S}, \leq \rangle$ el conjunto de todas las t-conormas ordenado por el orden puntual, entonces S_M y S_W son, respectivamente, el primero y el último elemento, más aún,$S_M \leq S_P \leq S_L \leq S_W$.*

Demostración:
Inmediata a partir de los Lemas 5.10 y 5.7 y el Corolario 5.1. □

Definición 5.12. Sea T una t-norma. Si T es continua, se dice una *t-norma continua.*

Observación 5.6. Nuevamente, por la Definición 5.2.2) basta pedir que T sea continua en una de sus variables, para garantizar la continuidad en ambas.

Definición 5.13. [Kle97] Sea T una t-norma. Si para todo $x \in (0, 1]$, $y < z$ implica $T(x, y) < T(x, z)$, entonces T es una *t-norma estrictamente monótona.* Si además es continua se dice *estricta.*

Notación 5.1. Sea T una t-norma. Notamos

$$x^1 = x,$$

$$x^{n+1} = T(x^n, x).$$

Lema 5.9. *Sean T una t-norma, y dos elementos $a, b \in (0, 1)$. Si $a \leq b$, entonces $a^n \leq b^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:
Lo probaremos por inducción. Es claro que la afirmación es válida para $n = 1$, supongamos que vale para $n = k$ y probémoslo para $n = k + 1$.
$a^{k+1} = T(a^k, a) \leq T(b^k, b) = b^{k+1}$. □

Definición 5.14. [Kle97] Sea T una t-norma. x es *nilpotente para T* si $x \neq 0$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

Definición 5.15. [Kle97] Sea T una t-norma continua. T es una *t-norma nilpotente* si para cada $x \in (0, 1)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

Definición 5.16. [Kle97] Sea T una t-norma. T es una *t-norma arquimedeana* si para cada par $(x, y) \in (0, 1)^2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n < y$.

Definición 5.17. [Kle97] Sea T una t-norma. $x \in (0, 1)$ es un *divisor de cero* si existe $y \in (0, 1)$ tal que $T(x, y) = 0$.

Definición 5.18. [Kle97] Sea T una t-norma. T satisface la *ley de cancelación* si cada vez que $T(x, y) = T(x, z)$ y $x > 0$, se tiene $y = z$.

Lema 5.10. [AFS06] *Sea T una t-norma, si T es arquimedeana y continua*

(1) *Si* $x \neq 1$*, entonces* $lim_{n\to\infty} x^n = 0$,

(2) $T(x, y) < min(x, y)$*, para todo*$(x, y) \in (0, 1)^2$.

Demostración:

(1) En virtud del Lema 5.6 podemos afirmar que $T(x, x) \leq x$, e inductivamente verificar que $x^n \leq x^{n-1}$, entonces afirmamos que la sucesión $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona no creciente. Supongamos que $lim_{n\to\infty} x^n = y \neq 0$, entonces $x^n > y$ para todo $n > n_0$, y como la sucesión es no creciente, se tiene que $x^n > y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice la propiedad arquimedeana.

(2) Por el Lema 5.6 podemos afirmar que $T(x, y) \leq min(x, y)$. Supongamos que $x > y$, si fuera $T(x, y) = y$ se verificaría $T(x^n, y) = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podríamos escribir, entonces: $y = lim_{n\to\infty} T(x^n, y) = T(lim_{n\to\infty} x^n, y) = T(0, y) = 0$, lo cual es un absurdo.

□

En [Kol97] se define t-norma arquimedeana continua a una t-norma T, continua que satisface $T(x, x) < x$. Veamos que esta definición es equivalente a la Definición 5.16, continua.

Corolario 5.3. *Para que una t-norma continua* T *sea arquimedeana es condición necesaria y suficiente que* $T(x, x) < x$ *para todo* $x \in (0, 1)$.

Demostración:
En el lema hemos probado que la condición es necesaria.
Supongamos ahora que T es una t-norma continua tal que $T(x, x) < x$ para todo $x \in (0, 1)$ y veamos que para todo par de elementos x, y existe $n \in \mathbb{N}$ tal $x^n < y$. Si $x \leq y$ tomando $n = 2$ se verifica. Supongamos, entonces que $x > y$. Definimos recursivamente la siguiente sucesión: $x_0 = x,\ x_{n+1} = T(x_n, x_n)$. Por hipótesis esta sucesión es estrictamente decreciente y acotada inferiormente, por lo tanto tiene límite. Es claro que el término general de esta sucesión es x^{2^n}, sea $z = lim_{n\in\mathbb{N}}\, x^{2^n}$. $T(z, z) = T(lim_{n\in\mathbb{N}}\, x^{2^n}, lim_{m\in\mathbb{N}}\, x^{2^m}) = lim_{n\in\mathbb{N}}\, (x^{2^n}, lim_{m\in\mathbb{N}}\, x^{2^m}) = lim_{n\in\mathbb{N}}\, (lim_{m\in\mathbb{N}}\, T(x^{2^n}, x^{2^m})) = lim_{n\in\mathbb{N}}\, (lim_{m\in\mathbb{N}}\, x^{2^n+2^m}) = lim_{n\in\mathbb{N}}\, z = z$. Si $z \neq 0$ debe verificarse $T(z, z) < z$, lo que contradice la continuidad de T. Como $lim_{n\in\mathbb{N}}\, x^{2^n} = 0$ e $y > 0$ existe n_0 tal que $x^{2^n} < y$ para todo $n > n_0$ y T resulta arquimedeana en el sentido de la Definición 5.16. □

Lema 5.11. [Kle97] *Sea* T *una t-norma, si* T *es arquimedeana y continua, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(A1) T es nilpotente,

(A2) T tiene al menos un elemento nilpotente, (A3) T tiene al menos un divisor de cero,

(A4) T no es estricta,

(A5) T no satisface la ley de cancelación

Demostración:
(A1) $\Rightarrow$ (A2) es trivial.
(A2) $\Rightarrow$ (A3). Por (A2) existe al menos un elemento nilpotente, sea x, por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$. De acuerdo con la Notación 5.1, $x^n = T(x^{n-1}, x)$, de donde, x (ó x^{n-1}) es un divisor de cero.
(A3) $\Rightarrow$ (A4): T tiene al menos un divisor de cero, sea x, entonces existe y tal que $T(x, y) = 0$. Como T es arquimedeana, existe n tal que $x^n < y$, por la definición de t-norma debe ser $T(x, x^n) \leq T(x, y) = 0$, en consecuencia, $T(x, x^n) = T(x, y)$, con $x^n < y$.
(A4) $\Rightarrow$ (A5): Como T no es estricta, existen x, y, z tales que $x > 0$, $y < z$ y $T(x, y) = T(x, z)$ y es claro que no se satisface la ley de cancelación.
(A5) $\Rightarrow$ (A4): Por ser t-norma se verifica $T(x, y) \leq T(x, z)$ cada vez que $y \leq z$ y dado que T no satisface la ley de cancelación, existen x, y, z tales que $T(x, y) = T(x, z)$, con $y \neq z,\ x > 0$, es decir, no es estrictamente monótona.
(A4) $\Rightarrow$ (A3): Como T no es estricta, existen x, y, z tales que $x > 0$, $y < z$ y $T(x, y) = T(x, z)$. Por la continuidad de T podemos hallar u tal que $y = T(u, z)$. En efecto: dado que $T(0, z) = 0 \leq y < z = T(1, z)$, aplicando el teorema del valor medio, podemos afirmar que existe $u \in [0, 1]$ tal que $y = T(u, z)$.
Utilizando este resultado, la conmutatividad y la asociatividad de T escribimos: $T(x, z) = T(x, y) = T(x, T(u, z)) = T(u, T(x, z))$.
Por el Lema 5.10, si $T(x, z) \neq 0$ podemos afirmar que $T(u, T(x, z)) < T(x, z)$, es decir $T(x, z) < T(x, z)$, lo cual es un absurdo y,en consecuencia $T(x, z) = 0$, con $x > 0, z > 0$.
(A3) $\Rightarrow$ (A2): Sean $x, y > 0$ tal que $T(x, y) = 0$, entonces $T(x, y) = T(x, 0)$, con $y > 0$ y T no es estrictamente monótona.
(A2) $\Rightarrow$ (A1): Supongamos que existe un elemento nilpotente de orden m, sea x. Como T es arquimedeana, dado cualquier $y \in (0, 1)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y^n < x$. En virtud del Lema 5.9 afirmamos que $(y^n)^m \leq x^m = 0$ e y resulta nilpotente, de orden menor o igual a $n \cdot m$. $\square$

Listemos ahora algunas propiedades de las t-normas:

Lema 5.12. [TAT95] *Sea* $T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ *no decreciente y tal que* $T(x, 1) = x$, *entonces* $T(x, x) = x$ *si y sólo si* $T(x, y) = T_M(x, y)$

Demostración: Si $T(x, y) = min(x, y)$ trivialmente se satisface $T(x, x) = x$.
Por la Definición 5.2.3) afirmamos $T(min(x, y), min(x, y)) \leq T(x, y)$ y por el Lema 5.6 sabemos $T(x, y) \leq T_M(x, y)$. En las condiciones de este lema, podemos afirmar:

$T_M(x,y) = min(x,y) = T(min(x,y), min(x,y)) \leq T(x,y) \leq T_M(x,y)$. En consecuencia, $T(x,y) = T_M(x,y)$. $\square$

Lema 5.13. [TAT95] *Sea $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ no decreciente y tal que $T(x,1) = x$, S la conorma dual asociada a T, entonces $T(x,y) \cdot S(x,y) = T_P(x,y)$ si y sólo si $T(x,y) = T_M(x,y)$ (ó $S(x,y) = S_M(x,y)$).*

Demostración: Supongamos, en primer lugar que $T(x,y) = T_M(x,y)$ y, en consecuencia, $S(x,y) = S_M(x,y)$. De donde $T(x,y) \cdot S(x,y) = min(x,y) \cdot max(x,y) = x \cdot y$, por la ley de tricotomía. Resulta entonces $T(x,y) = T_P(x,y)$.
Recíprocamente, consideremos $T(x,y) \cdot S(x,y) = x \cdot y$. Por la Observación 5.10 afirmamos que $S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$. Sea, en primer lugar, $x = y = u$, entonces $u \cdot u = T(u,u) \cdot S(u,u) = T(u,u)(1 - T(1-u, 1-u))$. Consideremos ahora $x = y = 1-u$, resulta entonces $(1-u) \cdot (1-u) = T(1-u, 1-u) \cdot S(1-u, 1-u) = T(1-u, 1-u) \cdot (1 - T(u,u))$. En consecuencia, $u^2 - (1-u)^2 = T(u,u) - T(1-u, 1-u)$, o lo que es lo mismo, $T(1-u, 1-u) = T(u,u) - 2u + 1$. Reemplazando lo obtenido en la primera igualdad, $u^2 = T(u,u) \cdot (1 - T(u,u) + 2u - 1)$ de donde: $(T(u,u))^2 - 2uT(u,u) + u^2 = 0$, es decir, $(T(u,u) - u)^2 = 0$, luego, $T(u,u) = u$, cualquiera que sea $u \in [0,1]$, lo que hace $T(x,y) = T_M(x,y)$ en virtud del Lema 5.12. $\square$

Lema 5.14. [TAT95] *Dados $x, y, z \in [0,1]$, $T(x,y) = T_M(x,y)$ es la única t-norma que satisface cualquiera de las siguientes condiciones:*

1) $T(x+z, y+z) = T(x,y) + z$,

2) $T(x+z, y+z) \geq T(x,y) + z$,

3) $T(x+z, y+z) \leq T(x,y) + z$,

4) $T(x+z, y+z) = T(x,y) + T(z,z)$.

Demostración: Dado que $min(x+z, y+z) = min(x,y) + min(z,z) = min(x,y) = z$, si $T(x,y) = T_M(x,y)$ se verifican las condiciones enunciadas. Veamos que vale la recíproca:

1) Sea $T(x+z, y+z) = T(x,y) + z$ para todo $x, y, z \in [0,1]$, y $x = y = 0$, entonces resulta $T(z,z) = z$, y aplicando el lema 5.12 afirmamos $T(x,y) = min(x,y)$.

2) Si $T(x+z, y+z) \geq T(x,y) + z$ para todo $x, y, z \in [0,1]$ Sea $x = y = 0$, entonces $T(z,z) \geq z$, pero, por la Definición 5.1, $z = T(1,z) \geq T(z,z)$, es decir $z = T(z,z)$. Nuevamente, aplicando el Lema 5.12 sabemos que $T(x,y) = min(x,y)$.

3) Sea $T(x+z, y+z) \leq T(x,y) + z$ para todo $x, y, z \in [0,1]$ y $z = 1-x$. Entonces $y + (1-x) = T(1, y + (1-x)) = T(x + (1-x), y + (1-x)) \leq T(x,y) + (1-x)$, es decir $y + (1-x) \leq T(x,y) + (1-x)$, por lo tanto: $y \leq T(x,y)$. Si $z = 1-y$, por un razonamiento análogo resulta $x \leq T(x,y)$. En consecuencia, $min(x,y) \leq T(x,y)$, es decir, $T_M(x,y) \leq T(x,y)$. Aplicando el Lema 5.6 resulta $T(x,y) = T_M(x,y)$.

4) Sea $T(x+z, y+z) = T(x, y) + T(z, z)$, para todo $x, y, z \in [0, 1]$. Por la monotonía de T, resulta $T(z, z) \leq T(1, z) = z$, de donde $T(x+z, y+z) \leq T(x, y) + z$ y por el inciso anterior, afirmamos que $T(x, y) = T_M(x, y)$.

$\square$

Ecuación de Frank: Entre las ecuaciones que relacionan las operaciones suma, t-norma y t-conorma una de las de mayor utilidad es:

$$T(x, y) + S(x, y) = x + y,$$

donde la t-norma T y la t-conorma S son continuas. Fácilmente puede comprobarse que T_M y S_M satisfacen la ecuación. Frank ([Fra79]) probó que T y S deben de ser normas duales y que las únicas t-normas sin elementos idempotentes en $(0, 1)$ que satisfacen esta igualdad son el producto aritmético T_P, el producto drástico T_W y la familia T_α, para $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ definida por:

$$T_\alpha(x, y) = \frac{1}{log\, \alpha} \cdot log\left(1 + \frac{(\alpha^x - 1) \cdot (\alpha^y - 1)}{\alpha - 1}\right),$$

cuya familia de t-conormas asociadas es:

$$S_\alpha(x, y) = 1 - \frac{1}{log\, \alpha} \cdot log\left(1 + \frac{(\alpha^x - \alpha) \cdot (\alpha^y - \alpha)}{\alpha^x \cdot \alpha^y \cdot (\alpha - 1)}\right).$$

Enunciaremos a continuación un teorema establecido en distintos trabajos por C.H.Ling ([Lin65]) y G.Krause ([Kra81]), que describe completamente las t-normas:

Teorema 5.2. *Toda operación binaria en $[0, 1]$ satisfaciendo 1) a 5) de la definición 5.2, es de uno de los siguientes tipos:*

(1) $T(x, y) = min(x, y)$,

(2) $T(x, y) = t^{-1}(t(x) + t(y))$, *con* $t : [0, 1] \to [0, +\infty)$ *estrictamente decreciente, continua y biyectiva y* $t(1) = 0$ *(caso de* t-normas estrictas*),*

(3) $T(x, y) = t^{-1}(t(x) + t(y))$, *con* $t : [0, 1] \to [0, t(0)]$ *estrictamente decreciente, continua y biyectiva y* $t(0) < +\infty, t(1) = 0, t^{-1}(x) = 0$ *si* $x \geq t(0)$ *(caso de* t-normas arquimedeanas no estrictas*),*

(4) *Existe una colección a lo sumo numerable* $\{T_i\}_{i \in I}$ *de t-normas del tipo (2) ó (3) y una colección de subintervalos disjuntos* $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ *en* $[0, 1]$ *tal que*

$$T(x, y) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i) \cdot T_i\left(\dfrac{x - a_i}{b_i - a_i}, \dfrac{y - a_i}{b_i - a_i}\right), & si\ (x, y) \in [a_i, b_i]^2 \\ min(x, y), & en\ otro\ caso \end{cases}$$

(caso de t-normas sumas ordinales).

Observación 5.7. En las aplicaciones lógicas la t-norma juega el papel de la conjunción y la t-conorma de la disyunción. Si bien en otras aplicaciones el rol de la conorma puede ser de relevancia, en nuestro caso no nos dedicaremos a ella ya que nuestro interés se centrará en el operador de implicación y no existe una relación dual entre la conjunción y la disyunción con respecto a la implicación.

Ya hemos considerado que en el monoide ordenado $\langle [0,1], T, 1, \leq \rangle$, donde $\leq$ es el orden natural de $\mathbb{R}$, si T es continua a izquierda, puede definirse una operación binaria $\rightarrow$ en $[0,1]$ satisfaciendo:

$$T(x,y) \leq z \qquad \text{si y sólo si} \qquad x \leq y \rightarrow z.$$

Es decir, de modo tal que $(T, \rightarrow)$ sea un par adjunto. Algunos autores ([Tur92]) llaman a este residuo *cuasi inversa* de T. Daremos a continuación el enunciado del Lema 2.7, para el retículo completo $[0,1]$ y la t-norma T.

Lema 5.15. *Si T es una t-norma continua a izquierda, es decir, si satisface*

$$T(x\,,\, \bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I} T(x\,,\, y_i). \tag{5.12}$$

entonces en el monoide $\langle [0,1], T, 1 \rangle$ se puede definir la operación

$$x \rightarrow y = \bigvee \{t : T(x,y) \leq y\} \tag{5.13}$$

y $\langle [0,1], \wedge, \vee, T, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ resulta un retículo residual integral.

Demostración: De acuerdo al Lema 2.16, dado que T satisface la igualdad (5.12), si se define la operación $\rightarrow$ según (5.13), el par $(T, \rightarrow)$ satisface la condición (2.13) y $\langle [0,1], \wedge, \vee, T, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ resulta un retículo residual. Por la Definición 5.2 (1) y (2) el elemento neutro para T coincide con el último elemento de $[0,1]$ como retículo y, en consecuencia, se trata de un retículo residual integral, en el sentido de la Definición 2.7. $\square$

Lema 5.16. *Si T es una t-norma continua, entonces $\langle [0,1], \wedge, \vee, T, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ es una BL álgebra.*

Demostración: Según la Definición 2.15 debemos probar que $\langle [0,1], \wedge, \vee, T, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ es un retículo residual, lineal y divisible. Por el Lema 5.15 sabemos que se trata de un retículo residual integral. La condición de linealidad es consecuencia de que $[0,1]$ es una cadena. Resta ver que es divisible, es decir, que dados $x, y \in [0,1]$, si $x \leq y$ existe $z \in [0,1]$ tal que $x = T(y,z)$. Sean, entonces $x, y \in [0,1]$, tales que $x \leq y$. Consideremos la función: $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ definida por $f(z) = T(z,y)$. Por la continuidad T, f es una función continua que satisface $f(0) = 0,\ f(1) = y$. Aplicando el teorema de Bolzano, esta función debe tomar cualquier valor intermedio en algún punto de su definición. Dado que $x \leq y$ debe existir $z \in [0,1]$ tal que $f(z) = x$, dado que $f(z) = T(z,y)$ resulta $x = T(z,y)$ y afirmamos que es un retículo residual divisible, en el sentido de la Definición 2.11. $\square$

Lema 5.17. *Si T es una t-norma estricta, entonces* $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}([0,1]) = (0,1]$.

Demostración: Dado que es estricta, si $z \neq 0$ resulta $0 < z$ y, en consecuencia $0 = T(x,0) < T(x,z)$ cualquiera que sea $x \neq 0$, en virtud del Lema 4.7. 3) resulta que x es un elemento denso. □

Ejemplo 5.3. Los residuos asociados a los operadores de t-norma vistos son, respectivamente:

Implicación de Gödel (asociado al operador de Zadeh):

$$R_M(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ \text{y} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Implicación de Goguen (asociado al operador de Mandani):

$$R_P(x,y) = \frac{y}{x} \wedge 1$$

Implicación de Łukasiewicz (asociado al operador de Łukasiewicz):

$$R_L(x,y) = (1 - x + y) \wedge 1.$$

Observación 5.8. En el Ejemplo 5.2 hemos mencionado T_W, la t-norma drástica, pero no hemos calculado el operador de implicación, dado que T_W no es continua a izquierda y, en consecuencia, no es válido el Lema 2.7.

A partir de la t-norma continua a izquierda T hemos definido un residuo $\rightarrow$ y este residuo nos habilita para definir el operador unario $\neg$ igual que en la Observación 2.14. Si T es una t-norma continua, entonces la función $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$, por $N(x) = x \rightarrow 0$, es decreciente, y satisface todas las propiedades enunciadas en el Lema 2.25. En especial: $N(0) = 1$, $N(N(x)) \geq x$, debido a este hecho algunos autores llaman a esta función *precomplemento* ([Háj97]).

Ejemplo 5.4. Las negaciones asociadas a los operadores de t-norma vistos son, respectivamente:

Negación de Gödel (asociado al operador de Zadeh):

$$N_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Negación de Goguen (asociado al operador de Mandani):

$$N_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Negación de Łukasiewicz (asociado al operador de Łukasiewicz):

$$N_L(x) = 1 - x.$$

5.1.1. Otras implicaciones a partir de las t-normas:

El objetivo, siempre, es buscar una estructura lógica que generalice la lógica clásica. En la lógica booleana *si A entonces B* es equivalente a *no A ó B*, de este modo $\neg x = x \to 0 = 1 - x$, entonces otra posibilidad de extensión para la implicación fuzzy $[0,1]$-valuada es definir el operador I_T por:

$$I_T(x, y) = S(1 - x, y) = 1 - T(x, 1 - y).$$

Para este operador siempre es válida la *ley de contraposición*, tomando $\neg A = 1 - A$. En efecto:

$$I_T(1-y, 1-x) = 1-T(1-y, 1-(1-x)) = 1-T(1-y, x) = 1-T(x, 1-y) = I_T(x, y),$$

y las implicaciones asociadas resultantes son:

implicación de Zadeh (asociado al mínimo u operador de Zadeh):

$$I_{T_M}(x, y) = max(1 - x, y),$$

implicación de Mandani (asociado producto aritmético u operador de Mandani):

$$I_{T_P}(x, y) = 1 - x + x.y,$$

implicación de Łukasiewicz (asociado producto acotado u operador de Łukasiewicz):

$$I_{T_L}(x, y) = (1 - x + y) \wedge 1,$$

implicación drástica (asociado producto drástico):

$$I_{T_W}(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } y = 1 \\ y, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En general, y aunque ambas implicaciones sean extensiones de la implicación clásica, no coincide el operador I_T con el operador R_T. En los ejemplos vistos notamos que I_T está definida para la norma drástica (que no es continua y en consecuencia no admite definición de R_T) y que sólo coincide para T_L que es una T-norma nilpotente.

5.2. Álgebra de De Morgan y de Kleene

La noción de conjunto fuzzy fue introducida por Zadeh en 1965, pero diez años antes de este hecho, ya estaban elaboradas las técnicas y establecidos los resultados adecuados para el estudio de estos *conjuntos graduados*, según la denominación que les asignara Moisil, [Moi72]. La nueva lógica de Zadeh requería de un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$, donde $0, 1 \in A$, $\wedge, \vee$ son operaciones binarias definidas sobre A y $\neg$ es una operación unaria definida en A. El problema fundamental era determinar un conjunto finito de igualdades válidas en toda álgebra de este tipo, a partir de las cuales debía ser posible demostrar todas las demás igualdades válidas en todas las álgebras del mismo tipo, es decir, una *base ecuacional* para estas álgebras. Un segundo problema era encontrar un procedimiento para definir con un número finito de cálculos si una igualdad dada era o no válida en todas las álgebras de este tipo, es decir, establecer la *decidibilidad* de la lógica. En los primeros trabajos se supuso que un álgebra de De Morgan bastaba responder al primer problema fundamental, pero ambos problemas fueron resueltos por J. Kalman en su Tesis Doctoral, realizada en Harvard, en 1955, utilizando una estructura de álgebra de Kleene.

Definición 5.19. [Moi35] Un *retículo de De Morgan* es un sistema $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg\rangle$ tal que $\langle A, \wedge, \vee, \rangle$ es un retículo distributivo munido de una operación unaria $\neg$ tal que se satisfacen las leyes de De Morgan 2.14.

Definición 5.20. [Mon78] Un *álgebra de De Morgan* es un sistema $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \neg, 1)$ tal que $\langle A, \wedge, \vee, \neg\rangle$ es un retículo de De Morgan y 1 es el último elemento. Es decir, se verifica $x \vee 1 = 1$, para todo $x \in A$.

Las álgebras de DeMorgan fueron estudiadas por Bialynicky-Birula y Rasiowa bajo la denominación de álgebras *quasi Boole*, [BBR57].

Lema 5.18. *Sea un álgebra de De Morgan* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$*. Existe* $0 \in A$ *que satisface* $x \wedge 0 = 0$*, para todo* $x \in A$.

Demostración:
Sea $0 = \neg 1$, entonces $x \wedge 0 = \neg\neg x \wedge \neg 1 = \neg(\neg x \vee 1) = \neg(\neg 1) = 0$. □

Un ejemplo frecuente de álgebra de De Morgan es el intervalo $[0, 1]$ con las operaciones definidas clásicamente. Es decir

$$a \wedge b = min(a, b)$$

$$a \vee b = max(a, b)$$

$$\neg a = 1 - a$$

Bialjnicki-Birula, en 1957 ([BB57]) demostró que toda álgebra de De Morgan con más de un elemento es isomorfa a una subálgebra de un producto cartesiano de álgebras $M_4 = \langle \mathbb{P}(\{a,b\}), \cap, \cup, ', \{a,b\}\rangle$, donde $\cap$, $\cup$ representan respectivamente la intersección y la unión y $'$ está definido por: $\emptyset' = \{a,b\}$, $\{a\}' = \{a\}$, $\{b\}' = \{b\}$, $\{a,b\}' = \emptyset$. También probó que M_4 es un álgebra característica para las álgebras de De Morgan, es decir, que basta probar que una igualdad se verifica en M_4 para garantizar que dicha igualdad es válida para toda ágebra de De Morgan. Pero en M_4 no se verifica $x \cap x' \subseteq x \cap x' \cap (y \cup y')$, como se ve fácilmente considerando $x = \{a\}$ y $y = \{b\}$.

En 1938 St. Kleene ([Kle38]) consideró un cálculo proposicional con tres conectivos que tiene por matriz característica a M_3, un conjunto con tres elementos y tres operaciones, en el que se satisface esta igualdad para todo x y todo y y es, además, un álgebra de De Morgan.

La igualdad $x \wedge \neg x = x \wedge \neg x \wedge (y \vee \neg y)$ es conocida como la *igualdad de Kalman* , dado que fue este matemático, quien trabajó con las álgebras de De Morgan que la verifican y las denominó álgebras de Kleene.

Tal vez la igualdad $x \wedge \neg x = x \wedge \neg x \wedge (y \vee \neg y)$ parezca en cierto modo caprichosa. Si la escribimos como desigualdad resulta: $x \wedge \neg x \leq y \vee \neg y$ y es fácil ver que se verifica en el intervalo $[0,1]$ con las operaciones $x \wedge y = \text{máx}\{x,y\}, x \wedge y = \text{mín}\{x,y\}, \neg x = 1 - x$, ya que $\text{mín}\{x, \neg x\} \leq 0.5$ y $\text{máx}\{y, \neg y\} \geq 0.5$, cualesquiera sean $x, y \in [0,1]$. Más adelante analizaremos la interpretación de estos valores ($x \wedge \neg$ y $x \vee \neg x$) para la lógica fuzzy.

Definición 5.21. [Kal58] Sea un retículo de De Morgan $\langle A, \wedge, \vee, , \neg\rangle$. Si se verifica $x \wedge \neg x \leq y \vee \neg y$ para todo $x, y \in A$ se denomina un *retículo de Kleene.*

Definición 5.22. [Kal58] Sea un álgebra de De Morgan $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$. Si se verifica $x \wedge \neg x \leq y \vee \neg y$ para todo $x, y \in A$ se denomina un *álgebra de Kleene.*

Ejemplo 5.5. Sea n un número natural. A el conjunto de todos los divisores naturales de n. Definimos:

$x \wedge y = (x, y)$, el máximo común divisor de x e y,

$x \vee y = [x, y]$, el mínimo común múltiplo de x e y,

$$\neg x = \frac{n}{x}.$$

En la tesis doctoral antes mencionada Kalman prueba que toda álgebra de Kleene con más de un elemento es isomorfa a una subálgebra de un producto cartesiano de álgebras M_3, y que M_3 es un álgebra característica para las álgebras de Kleene.

Aún más, prueba que si un álgebra A contiene una subálgebra isomorfa a M_3, entonces, para que una igualdad sea válida en A es necesario y suficiente que sea válida en M_3, y por lo tanto en todas las álgebras de Kleene.

Dado que la matriz M_3 utilizada por Kleene es un álgebra característica para las álgebras de Kleene, resulta que el conjunto de identidades puede ser caracterizado por un conjunto finito de ecuaciones, a partir de las cuales se deducen todas las demás utilizando las reglas de la lógica. Es decir, se trata de una variedad.

De este modo Kalman responde a los problemas mencionados, pero aún no se cuenta con un operador en el álgebra que permita representar la implicación lógica.

5.2.1. Álgebras de De Morgan con implicación

Un álgebra de De Morgan $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ no tiene implicación definida y por lo tanto no aparece naturalmente la noción de par adjunto. Si bien un álgebra de Boole $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$,asociada a la lógica clásica, tampoco cuenta entre sus operaciones fundamentales con un operador de implicación, es bien conocida la definición de $x \to y = \neg x \vee y$ y su buen comportamiento en las inferencias. Analizaremos cuáles son los operadores de implicación que se utilizan con mayor frecuencia en un álgebra de De Morgan definida sobre $[0, 1]$.

Recordemos que cada $x \in A$ es un valor de verdad asociado a una proposición y, consecuentemente, $\neg x$ el valor de verdad asociado a su negación. Si $\max\{x, \neg x\} = 1$, se infiere que o bien la proposición es absolutamente válida o bien es absolutamente falsa. Es decir, tiene un “comportamiento clásico”. Si, en cambio, $\max\{x, \neg x\} = 0.7$ (por mencionar un valor menor que 1), podemos afirmar que la proposición o su negación son “0.7 confiables”. Un análisis similar puede realizarse a partir de $\min\{x, \neg x\}$ con 0, que si continuamos con los mismos valores resulta $\min\{x, \neg x\} = 0.3$. Estos razonamientos motivan las siguientes definiciones:

Definición 5.23. [Yag80] Sea $(L, \wedge, \vee, \neg, 1)$ un álgebra de De Morgan. La *medida de clasicidad* k es una función $k : L \to L$, definida por: $k(x) = x \vee \neg x$.

Definición 5.24. [Yag80] Sea $(L, \wedge, \vee, \neg, 1)$ un álgebra de De Morgan. La *medida de difusión* es una función $f : L \to L$, definida por: por $f(x) = x \wedge \neg x$.

Lema 5.19. *Sea $(L, \wedge, \vee, \neg)$ un álgebra de De Morgan, la función k definida en L satisface las siguientes propiedades:*

1) $k(x) \wedge k(y) \geq k(x \wedge y)$

2) $k(k(x)) = k(x)$

Demostración:

1) $k(x) \wedge k(y) = (x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \geq (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = k(x \wedge y)$

2) $k(k(x)) = (k(x) \vee \neg k(x)) = ((x \vee \neg x) \vee \neg(x \vee \neg x)) = ((x \vee \neg x) \vee (\neg x \wedge \neg\neg x)) = (x \vee (\neg x \vee (\neg x \wedge \neg\neg x))) = x \vee \neg x = k(x)$

□

Buscando siempre generalizar la implicación booleana, algunos de los operadores de implicación propuestos en la literatura son:

1) Implicación de Kleene-Dienes: [BJ80]

$$x \rightarrow_K y = \neg x \vee y \tag{5.14}$$

2) Implicación de Zadeh: [Zad73]

$$x \rightarrow_Z y = (x \rightarrow_K y) \wedge k(x) \tag{5.15}$$

3) Wilmott: [Wil80]

$$x \rightarrow_W y = (x \rightarrow_K y) \wedge k(x) \wedge k(y) \tag{5.16}$$

Definición 5.25. Sea una operación binaria $\rightarrow$ en $(L, \wedge, \vee, \neg)$, álgebra de De Morgan. Se dice que $\rightarrow$ *conserva la clasicidad* si:

$$k(a \rightarrow b) \geq k(a) \wedge k(b) \tag{5.17}$$

Lema 5.20. *Sea $(L, \wedge, \vee, \neg)$ un álgebra de De Morgan, entonces las implicaciones de Kleene-Dienes, de Zadeh y de Willmott, satisfacen (5.17).*

Demostración:

1) $k(x \rightarrow_K y) = k(\neg x \vee y) = (\neg x \vee y) \vee \neg(\neg x \vee y) = (\neg x \vee y) \vee (\neg\neg x \wedge \neg y) = (\neg x \vee y \vee \neg\neg x) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg y) \geq (\neg x \vee y \vee x) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg y) = (k(x) \vee y) \wedge (\neg x \vee k(y)) \geq k(x) \wedge k(y)$.

2) $k(x \rightarrow_Z y) = k((x \rightarrow_K y) \wedge k(x)) = \neg((x \rightarrow_K y) \wedge k(x)) \vee ((x \rightarrow_K y) \wedge k(x)) = \neg(x \rightarrow_K y) \vee \neg k(x) \vee ((x \rightarrow_K y) \wedge k(x)) = (\neg(x \rightarrow_K y) \vee \neg k(x) \vee (x \rightarrow_K y)) \wedge (\neg(x \rightarrow_K y) \vee \neg k(x) \vee k(x)) \geq k(x \rightarrow_K y) \wedge k(k(x) = k(x \rightarrow_K y) \wedge k(x) \geq k(x) \wedge k(y) \wedge k(x) = k(x) \wedge k(y)$.

3) $k(x \to_W y) = k((x \to_Z y) \wedge k(y)) = \neg((x \to_Z y) \wedge k(y)) \vee ((x \to_Z y) \wedge k(y)) = \neg(x \to_Z y) \vee \neg k(y) \vee ((x \to_Z y) \wedge k(y)) = (\neg(x \to_Z y) \vee \neg k(y) \vee (x \to_Z y)) \wedge (\neg(x \to_Z y) \vee \neg k(y) \vee k(y)) \geq k(x \to_Z y) \wedge k(k(y) = k(x \to_Z y) \wedge k(y) \geq k(x) \wedge k(y) \wedge k(y) = k(x) \wedge k(y)$.

$\square$

Observación 5.9. Realizando operaciones sencillas es fácil ver que en un álgebra de De Morgan con implicación, donde $\to$ es la implicación de Kleene-Dienes, Zadeh ó Willmott, se satisfacen las siguientes igualdades:

1) $1 \to x = x$

2) $x \to 0 = \neg x$

3) $\neg x \to x = x$

4) $x \to (x \vee \neg x) = x \vee \neg x$

5) $(x \vee \neg x) \to x = x$

6) $x \to x = x \vee \neg x$

7) $x \to (x \wedge \neg x) = \neg x$

8) $(x \wedge \neg x) \to x = x \vee \neg x$

9) $x \to \neg x = \neg x$

En efecto: consideremos en primer lugar la impliación de Kleene-Dienes:

1) $1 \to x = \neg 1 \vee x = 0 \vee x = x$

2) $x \to 0 = \neg x \vee 0 = \neg x$

3) $\neg x \to x = \neg(\neg x) \vee x = x \vee x = x$

4) $x \to (x \vee \neg x) = \neg x \vee (x \vee \neg x) = x \vee \neg x$

5) $(x \vee \neg x) \to x = \neg(x \vee \neg x) \vee x = (\neg x \wedge \neg\neg x) \vee x = (\neg x \wedge x) \vee x = x$

6) $x \to x = \neg x \vee x = x \vee \neg x$

7) $x \to (x \wedge \neg x) = \neg x \vee (x \wedge \neg x) = \neg x$

8) $(x \wedge \neg x) \to x = \neg(x \wedge \neg x) \vee x = (\neg x \vee \neg\neg x) \vee x = x \vee \neg x$

9) $x \to \neg x = \neg x \vee \neg x = \neg x$

Las verificaciones para las implicaciones de Zadeh y de Willmott resultan triviales viendo que $k(0) = k(1) = 1$, $x \wedge k(x) = x$, $\neg x \wedge k(x) = \neg x$ y $k(k(x)) = k(x)$.

La proposición 6) muestra que lógica asociada a este sistema no satisface la *ley de integralidad*, ya que $x \to x \neq 1$. Si x es tal que $k(x) = 1$, es decir, un elemento de "comportamiento clásico", 4) se escribe $x \to 1 = 1$, y 8) $0 \to x = 1$. Es decir, coinciden con las enunciadas para álgebras de Boole.

Veamos que con estas implicaciones no es posible convertir un álgebra de De Morgan en un retículo residual. Consideremos en primer lugar que el producto coincide con el ínfimo, es decir, $x \otimes y = \text{mín}\{x, y\}$.

En virtud del Lema 2.7, podemos afirmar que el único retículo residuado asociado a $\otimes = \wedge$ es un álgebra de Heyting, y, por lo tanto, divisible. Tomemos M_4, entonces el residuo definido gracias al Lema 2.7 está dado por la tabla:

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	b	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

y podemos verificar con facilidad que $\neg a \neq a \to 0$.

Veamos ahora qué ocurre con las implicaciones de Kleene-Dienes, Zadeh y Willmott. Dado que todas ellas satisfacen las condiciones del Lema 2.8, es posible definir un producto $x \otimes y = \bigwedge\{t : x \leq y \to t\}$. Intentemos calcular $0.6 \otimes 0.7$ y $0.7 \otimes 0.6$.

1) $x \otimes_K y = \bigwedge\{t : x \leq y \to_K t\} = \bigwedge\{t : x \leq \text{máx}\{1 - y, t\}\}$.
   $0.6 \otimes_K 0.7 = \bigwedge\{t : 0.6 \leq \text{máx}\{1 - 0.7, t\}\} = 0.6$.
   $0.7 \otimes_K 0.6 = \bigwedge\{t : 0.7 \leq \text{máx}\{1 - 0.6, t\}\} = 0.7$.

2) $x \otimes_Z y = \bigwedge\{t : x \leq y \to_Z t\} = \bigwedge\{t : x \leq (y \to_K t) \wedge k(y)\}$.
   $0.6 \otimes_Z 0.7 = \bigwedge\{t : 0.6 \leq \text{mín}\{\text{máx}\{1 - 0.7, t\}, 0.7\}\} = 0.6$.
   $0.7 \otimes_Z 0.6 = \bigwedge\{t : 0.7 \leq \text{mín}\{\text{máx}\{1 - 0.6, t\}, \text{máx}\{t, 1 - t\}\}\} = 0.7$.

3) $x \otimes_W y = \bigwedge\{t : x \leq y \to_W t\} = \bigwedge\{t : x \leq (y \to_K t) \wedge k(y) \wedge k(t)\}$.
   $0.6 \otimes_W 0.7 = \bigwedge\{t : 0.6 \leq \text{mín}\{\text{máx}\{1 - 0.7, t\}, 0.7, \text{máx}\{t, 1 - t\}\}\} = 0.6$.
   $0.7 \otimes_W 0.6 = \bigwedge\{t : 0.7 \leq \text{mín}\{\text{máx}\{1 - 0.6, t\}, \text{máx}\{t, 1 - t\}, 0.7\}\} = 0.7$.

Según hemos comprobado, el producto obtenido en cualquiera de los casos no es conmutativo, es decir, no resulta un retículo residual.

Capítulo 6

Lógica básica para $PC(\otimes)$

Dado un retículo $\mathbf{L}$, al fijar un producto $\otimes$ en $\mathbf{L}$ establecemos un cálculo proposicional ($PC(\otimes)$) cuyos valores de verdad son los elementos del retículo $\mathbf{L}$, donde el producto del retículo es la conjunción y la implicación está dada por el residuo asociado al producto en $\mathbf{L}$.
En los capítulos anteriores hemos analizado las estructuras algebraicas partiendo desde el retículo residual generalizado de Turunen, hasta llegar a las obtenidas en el intervalo real unitario $[0,1]$, a partir de las t-normas continuas de uso más extendido, es decir, la norma mínimo T_M, la norma producto T_P y la suma acotada T_L, que generan respectivamente un álgebra de Heyting lineal, un álgebra producto y una MV álgebra. En el presente capítulo estudiaremos las estructuras lógicas asociadas a estas t-normas. Seguiremos los conceptos presentados por Peter Hájek en [Háj97].

6.1. Definiciones previas

Definición 6.1. [Men97] Una *teoría formal* $\mathcal{T}$ está definida cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

(T1) Existe un conjunto numerable (**S**), llamado el *conjunto de símbolos de la teoría* $\mathcal{T}$. En este conjunto incluímos las *variables* (**V**), las *constantes* (**K**) y los *conectivos lógicos* (**O**), a cada conectivo lógico corresponde un único número natural n, llamado la *aridad* del conectivo. Una sucesión finita de símbolos es una *expresión* en $\mathcal{T}$.

(T2) Existe un subconjunto (**P**) de las expresiones que se denomina las *fórmulas bien formadas de* $\mathcal{T}$ o *lenguaje* de $\mathcal{T}$.

(T3) Existe un subconjunto (**A**) del conjunto de fórmulas bien formadas llamado los *axiomas de* $\mathcal{T}$. Si se puede decidir efectivamente si una fórmula bien formada es o no un axioma de la teoría, $\mathcal{T}$ de dice una *teoría axiomática*.

(T4) Existe un conjunto finito (**R**) de relaciones entre las fórmulas bien formadas, $R_1, \cdots, R_n$ llamado *reglas de inferencia*. Para cada R_i existe un único número natural j tal que para cualquier conjunto de j fórmulas bien formadas y cada fórmula bien formada φ, se puede decidir efectivamente si las j fórmulas bien formadas están o no en relación R_i con φ. En caso afirmativo, se dice que φ es consecuencia directa de las j fórmulas bien formadas, en virtud de R_i.

Definición 6.2. Una *demostración* en $\mathcal{T}$ es una sucesión de fórmulas $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ tal que cada miembro de la sucesión es o bien un axioma de la teoría o es consecuencia de los anteriores por modus ponens. Si $\varphi = \varphi_n$ la sucesión anterior se dice una demostración para φ en $\mathcal{T}$ y se escribe $\vdash_{\mathcal{T}} \varphi$. En tal caso se dice que φ es una *fórmula demostrable* o *teorema*. Dado un conjunto de fórmulas Γ se escribe $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \varphi$ si existe una sucesión de fórmulas $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ tal que cada miembro de la sucesión es o bien un axioma de la teoría o es consecuencia de los anteriores por modus ponens o pertenece al conjunto Γ. Si $\Gamma = \{\psi\}$ simplemente notamos $\psi \vdash_{\mathcal{T}} \varphi$.

Definición 6.3. Dada una teoría axiomática $\mathcal{T}$, un *modelo* para el lenguaje de $\mathcal{T}$ es $\mathfrak{A} = \langle A, f, \cdots, c, \cdots \rangle$. Donde A es un conjunto no vacío llamado *dominio* o *universo*, cada f es una *función* en el dominio, es decir, una aplicación de A^n en A para cada conectivo lógico de aridad n, y cada c es un elemento del dominio, denominado *elemento distinguido* correspondiendo con las constantes de la teoría. Los elementos distinguidos usualmente son considerados como funciones 0-arias.

Claramente un modelo para una teoría es un álgebra. Los modelos se utilizan para intepretar que una teoría debe cumplimentar ciertos aspectos. Para interpretar las variables libres asignamos libremente valores en el conjunto A, según la siguiente definición.

Definición 6.4. Dado un modelo $\mathfrak{A}$ para una teoría $\mathcal{T}$, una *asignación* en $\mathfrak{A}$ es una función a que asigna un elemento de A a cada variable de la teoría, y una función n aria a cada conectivo lógico n ario de la teoría.

Definición 6.5. Dado un modelo $\mathfrak{A}$ y una asignación a para una teoría $\mathcal{T}$, una *evaluación* e en $\mathfrak{A}$ es una extensión inductiva de la asignación a, que asigna a cada fórmula de $\mathcal{T}$ el elemento de A obtenido a partir de las asignaciones de cada término de la fórmula.

Definición 6.6. Una fórmula φ es *verdadera para una cierta interpretación* en $\mathcal{T}$ si $e(\varphi) = 1$ para alguna evaluación e, y se escribe $\models_{\mathcal{T}_e} \varphi$. Una fórmula φ es una *1-tautología* o *fórmula semánticamente válida* de $\mathcal{T}$ si $e(\varphi) = 1$ para toda evaluación e, en este caso se escribe $\models_{\mathcal{T}} \varphi$.

Observación 6.1. Es claro, entonces, que una 1-tautología es una fórmula que es válida para toda evaluación y, en consecuencia, para todo modelo.

Una teoría axiomática, en general, es *indecidible*, es decir, no es posible escribir un programa de computación tal que, dado una fórmula de primer orden como entrada, pueda terminar después de un número finito de pasos, informando si la fórmula en cuestión es verdadera o falsa, en forma correcta. Sin embargo sí es posible generar todas las fórmulas válidas mediante un programa de computación, es decir, es *recursivamente numerable*.
El modo usual de mostrar que la colección de teoremas es recursivamente numerable es dar un sistema de demostración *sano* y *completo*. Es decir, tal que toda fórmula demostrable sea válida y que toda fórmula semánticamente válida tenga una demostración.

6.2. Lógica Básica (BL)

Daremos a continuación, una teoría axiomática formal para el cálculo proposicional $PC(\otimes)$, asociado al intervalo unitario real $[0,1]$, cuyo producto es una t-norma continua $\otimes$. Es decir, buscamos una teoría axiomática tal que un retículo residual, BL álgebra en este caso, sea un modelo para la misma.
Las variables, estan representadas por letras $p_1, p_2, \ldots$; la única constante es $\mathbf{0}$ y las funciones símbolo están dadas por los conectivos $\&$, $\Rightarrow$.
Las fórmulas se definen de modo usual, es decir: son fórmulas la constante y todas las variables proposicionales. Si φ, ψ son fórmulas, entonces $\varphi \,\&\, \psi$ y $\varphi \Rightarrow \psi$ son fórmulas.
Para simplificar la escritura introducimos las abreviaturas: $\varphi \frown \psi$ para $\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi)$ y $\varphi \smile \psi$ para $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi) \frown ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$.

Dado un modelo $\mathfrak{A}$ y una asignación a para la teoría BL, la evaluación e en $\mathfrak{A}$ está dada por:

$$e(\mathbf{0}) = 0,$$

$$e(x_i) = a(x_i),$$

$$e(\varphi \,\&\, \psi) = e(\varphi) \otimes e(\psi),$$

$$e(\varphi \Rightarrow \psi) = e(\varphi) \rightarrow e(\psi).$$

Buscamos un conjunto de axiomas $\mathbf{A}$ tal que el retículo residual $\langle [0,1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$, donde $\otimes$ es una t-norma continua y $\rightarrow$ su residuo asociado, sea un modelo para toda evaluación. Si verificamos que son 1-tautologías para cualquier BL álgebra, lo serán para este retículo residual, ya que por el Lema 5.16 sabemos que es integral, divisible y que satisface la condición de prelinealidad, es decir, una BL álgebra.

Lema 6.1. *Las siguientes fórmulas son 1-tautologías en BL.*

(A1) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

(A2) $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \varphi$

(A3) $(\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow (\psi \ \& \ \varphi)$

(A4) $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow (\psi \frown \varphi)$

$(\mathrm{A5})_a$ $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow \chi)$

$(\mathrm{A5})_b$ $((\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$

(A6) $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow \chi)$

(A7) $\mathbf{0} \Rightarrow \varphi$

Demostración:
Buscamos probar que las proposiciones enunciadas tienen valor 1 para toda evaluación. Sea la asignación $e(\varphi) = x, e(\psi) = y$ y $e(\chi) = z$.

(A1) $e((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))) =$
$= (e(\varphi) \to e(\psi)) \to ((e(\psi) \to e(\chi)) \to (e(\varphi) \to e(\chi))) =$
$= (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z))$.
En el Lema 2.9.(5) hemos probado que $(x \to y) \otimes (y \to z) \leq x \to z$, que por la condición (2.13) puede escribirse $(x \to y) \leq (y \to z) \to (x \to z)$ y por el Lema 2.12.(2) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$.

(A2) $e((\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow \varphi) = (e(\varphi) \otimes e(\psi)) \to e(\varphi) = (x \otimes y) \to x$.
Dada la integralidad del retículo, de los Lemas 2.14.(2) y 2.12.(2) podemos afirmar que $(x \otimes y) \to x = 1$.

(A3) $e((\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow (\psi \ \& \ \varphi)) = (e(\varphi) \otimes e(\psi)) \to (e(\psi) \otimes e(\varphi)) = (x \otimes y) \to (y \otimes x)$.
En la Definición 5.2.(T2) afirmamos que $T(x, y) = T(y, x)$, es decir $x \otimes y = y \otimes x$, y por el Lema 2.12.(4) resulta la proposición.

(A4) Según las abreviaturas, escribimos:
$e((\varphi \ \& \ (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\psi \ \& \ (\psi \Rightarrow \varphi))) =$
$= (e(\varphi) \otimes (e(\varphi) \to e(\psi))) \to (e(\psi) \otimes (e(\psi) \to e(\varphi))) =$
$= (x \otimes (x \to y)) \to (y \otimes (y \to x))$.
La estructura de BL álgebra asegura la divisibilidad del retículo, aplicando el Lema 2.21.(2), afirmamos $x \otimes (x \to y) = x \wedge y = y \wedge x = y \otimes (y \to x)$.

(A5) $e((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow \chi)) = (x \to (y \to z)) \to ((x \otimes y) \to z)$, y $e(((\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))) = ((x \otimes y) \to z) \to (x \to (y \to z))$.
Esta afirmación sigue simplemente de la conexión de Galois (2.13).

(A6) $e(((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow \chi)) =$
$= ((e(\varphi) \to e(\psi)) \to e(\chi)) \to (((e(\psi) \to e(\varphi)) \to e(\chi)) \to e(\chi)) =$
$= ((x \to y) \to z) \to (((y \to x) \to z) \to z)$.

La estructura de BL álgebra asegura la linealidad del retículo, y la Proposición 2.11 afirma que $((x \to y) \to z) \to (((y \to x) \to z) \to z) = 1$.

(A7) $e(\mathbf{0} \Rightarrow \varphi) = 0 \to x = 1$. Es el inciso (1) del Lema 2.14.

$\square$

Lema 6.2. *Si φ y $\varphi \Rightarrow \psi$ son tautologías, entonces ψ también lo es.*

Demostración: Por el Lema 2.9.(26), escribimos $x \leq (x \to y) \to y$, entonces resulta $e(x) \leq e(x \to y) \to e(y)$. Aplicando la hipótesis, tenemos que $1 \leq 1 \to e(y)$ y por el Lema 2.12.(3), podemos afirmar $e(y) = 1$. $\square$

En el Lema 6.1; (A1) nos da la *propiedad transitiva de la implicación*; (A2), la *ley de simplificación* para el conectivo &; (A3), la *conmutatividad* de &; (A4), considerando la abreviatura $\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi) = \varphi \frown \psi$, nos da la conmutatividad de $\frown$; (A5), la conexión de Galois; (A6) nos provee de una variante de la demostración por casos que será de utilidad para asegurar la estructura de retículo y la linealidad y (A7) nos permite enunciar el *ex falso quodlibet*. Finalmente el Lema 6.2 nos habilita para enunciar la *ley de modus ponens*.
Estos razonamientos nos llevan a formular los axiomas de la llamada *lógica básica*, es decir, $PC(\otimes)$, cuando $\otimes$ es una t-norma continua:

Definición 6.7. Las siguientes fórmulas son axiomas de la lógica básica BL:

(A1) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

(A2) $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \varphi$

(A3) $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\psi \,\&\, \varphi)$

(A4) $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow (\psi \frown \varphi)$

$(A5)_a$ $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \chi)$

$(A5)_b$ $((\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$

(A6) $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow \chi)$

(A7) $\mathbf{0} \Rightarrow \varphi$

La *regla de inferencia* es el Modus Ponens:

(RI) $\varphi, \varphi \Rightarrow \psi \vdash_{BL} \psi$

Corolario 6.1. (del Lema 6.2) *Toda fórmula probable en BL es una tautología en BL. (BL es sano.)*

Lema 6.3. *Sea φ una fórmula en BL, entonces se verifica:* $\vdash_{BL} (\varphi \Rightarrow \varphi)$.

Demostración:

1. $((((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi) \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi))$ $\quad (A5)_b$
2. $(((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi) \,\&\, \varphi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, ((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi))$ $\quad$ (A3)
3. $(\varphi \,\&\, ((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi$ $\quad$ (A2)
4. $((((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi) \,\&\, \varphi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, ((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi))) \Rightarrow$
   $(((\varphi \,\&\, ((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi) \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi))$ $\quad$ (A1)
5. $((\varphi \,\&\, ((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi) \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi)$ $\quad$ MP: 4,2
6. $(((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi) \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi$ $\quad$ MP: 5,3
7. $((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$ $\quad$ MP: 1,6
8. $(\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow \varphi$ $\quad$ (A2)
9. $\varphi \Rightarrow \varphi$ $\quad$ MP: 7,8

$\square$

Lema 6.4. *Sean φ, ψ dos fórmulas en la teoría BL , entonces* $\vdash_{BL} \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$.

Demostración:

1. $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \varphi$ $\quad$ (A2)
2. $((\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi))$ $\quad (A5)_b$
3. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ $\quad$ MP: 1,2

$\square$

Corolario 6.2. *Si* $\vdash_{BL} \varphi$ *, entonces* $\vdash_{BL} (\psi \Rightarrow \varphi)$*, cualquiera sea ψ en BL.*

Demostración:
Probaremos que si $\vdash_{BL} \varphi$, entonces $\vdash_{BL} \psi \Rightarrow \varphi$, cualquiera que sea $\psi \in BL$.

1. φ $\quad$ (H)
2. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ $\quad$ Lema 6.4
3. $\psi \Rightarrow \varphi$ $\quad$ MP: 1,2

$\square$

Lema 6.5. *Sean las fórmulas $\varphi, \psi, \chi \in BL$:*

1) $\vdash_{BL} (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$,

2) $\vdash_{BL} (\varphi \frown \psi) \Rightarrow \psi$,

3) $\vdash_{BL} \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\psi \mathbin{\&} \varphi))$,

4) $\vdash_{BL} (\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))$,

5) $\vdash_{BL} (\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))$,

6) $\vdash_{BL} (\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \frown \varphi) \Rightarrow \chi)$.

Demostración:

1)

1.	$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow \chi)$	$(A5)_a$
2.	$((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \psi)) \Rightarrow (((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi))$	(A1)
3.	$(\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \psi)$	(A3)
4.	$((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi)$	MP: 2,3
5.	$((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow \chi)) \Rightarrow$ $((((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi)))$	(A1)
6.	$(((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi))$	MP: 1,5
7.	$((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi))$	MP: 4,6
8.	$((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$	$(A5)_b$
9.	$((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi)) \Rightarrow$ $((((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))))$	(A1)
10.	$(((\psi \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)))$	MP: 7,9
11.	$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$	MP: 8,10

2)

1.	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$	Lema 6.3
2.	$((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi))$	1)
3.	$\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$	MP: 1,2

4. $(\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow \psi)$ $\quad$ (A5)$_a$
5. $(\varphi \mathbin{\&} (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow \psi$ $\quad$ MP: 3,4
6. $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow \psi$ $\quad$ abrev. a 5

3)

1. $(\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\psi \mathbin{\&} \varphi)$ $\quad$ (A3)
2. $((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\psi \mathbin{\&} \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\psi \mathbin{\&} \varphi)))$ $\quad$ (A5)$_b$
3. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\psi \mathbin{\&} \varphi))$ $\quad$ MP: 1,2

4)

1. $(\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow \chi$ $\quad$ 2)
2. $\chi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))$ $\quad$ 3)
3. $((\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow \chi) \Rightarrow$
   $((\chi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))))$ $\quad$ (A1)
4. $(\chi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))$ $\quad$ MP: 1,3
5. $(\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))$ $\quad$ MP: 2,4

5)

1. $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))$ $\quad$ (A5)$_a$
2. $((\psi \Rightarrow \chi) \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi))$ $\quad$ (A3)
3. $(\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))$ $\quad$ 4)
4. $(((\psi \Rightarrow \chi) \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi))) \Rightarrow$
   $(((\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow (((\psi \Rightarrow \chi) \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))))$ $\quad$ (A1)
5. $((\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow (((\psi \Rightarrow \chi) \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))$ $\quad$ MP: 2,4
6. $((\psi \Rightarrow \chi) \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))$ $\quad$ MP: 3,5
7. $(((\psi \Rightarrow \chi) \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))))$ $\quad$ (A5)$_b$
8. $(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))$ $\quad$ MP: 6,7
9. $(\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))$ $\quad$ 1)
10. $((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))) \Rightarrow$ $\quad$ (A1)
    $(((\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))))))$

11. $(((\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))) \Rightarrow$
$((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))$ MP: 8,10

12. $(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))$ MP: 9,11

13. $((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))) \Rightarrow$ (A1)
$(((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))))$

14. $((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))) \Rightarrow$
$((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi)))$ MP: 12,13

15. $(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi))$ MP: 14,1

6)

1. $(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ L.6.3
2. $(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$ de 1. por Cor 6.2
3. $(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow \chi))$ de 3. por 1)
4. $(\psi \mathbin{\&} (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow \chi))$ de 3. por (A5)
5. $(\psi \frown \varphi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow \chi))$ de 4. por def. de $\frown$
6. $(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \frown \varphi) \Rightarrow \chi)$ de 5. por 1)

□

Daremos a continuación una variante del *teorema de la deducción* que se verifica para la lógica BL. Para ello, introduciremos φ^n del modo habitual:

Definición 6.8. Sea φ una fórmula en BL.

$$\varphi^1 = \varphi$$

$$\varphi^{n+1} = \varphi \mathbin{\&} \varphi^n$$

Teorema 6.1. [Háj97] *Sean φ y ψ fórmulas en BL. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1) $\varphi \vdash_{BL} \psi$,

2) *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\vdash_{BL} \varphi^n \Rightarrow \psi$.*

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2): Dado que $\varphi \vdash_{BL} \psi$, existe una demostración $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ en BL tal que γ_k es ψ y γ_1 es φ. Probaremos 2) por inducción sobre la longitud de la demostración.
Si la demostración consta de una única fórmula, es decir, si $k = 1$ φ es ψ y por el Lema 6.3 afirmamos $\varphi^1 \Rightarrow \psi$.
Sea una demostración de longitud k y supongamos que la afirmación es válida para cualquier demostración de longitud $j < k$. Tenemos entonces que γ_k es ψ. Las posibilidades son tres:

(a) ψ es φ, entonces 2) se verifica por el Lema 6.3,

(b) ψ es un axioma de BL, entonces 2) se verifica por el Lema 6.4

(c) ψ es consecuencia de fórmulas anteriores por modus ponens.
En este caso dos fórmulas de la demostración son γ_i y $\gamma_j := \gamma_i \Rightarrow \psi$, con $i, j < k$ y, en consecuencia, por la hipótesis inductiva, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\vdash_{BL} \varphi^{n_i} \Rightarrow \gamma_i$ y $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\vdash_{BL} \varphi^{n_j} \Rightarrow (\gamma_i \Rightarrow \psi)$. Podemos escribir, entonces, la siguiente demostración:

1. $\varphi^{n_i} \Rightarrow \gamma_i$
2. $\varphi^{n_j} \Rightarrow (\gamma_i \Rightarrow \psi)$
3. $(\varphi^{n_j} \ \& \ \gamma_i) \Rightarrow \psi$ — de 2. por (A5)
4. $(\varphi^{n_j} \ \& \ \varphi^{n_i}) \Rightarrow (\varphi^{n_j} \ \& \ \gamma_i)$ — por L.6.5.5 a 1.
5. $(\varphi^{n_j} \ \& \ \varphi^{n_i}) \Rightarrow \psi$ — de 3. y 4. por (A1)
6. $\varphi^{n_j+n_i} \Rightarrow \psi$ — de 5.

2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que $\vdash_{BL} \varphi^n \Rightarrow \psi$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de φ^n escribimos: $\vdash_{BL} (\varphi \ \& \ \varphi^{n-1}) \Rightarrow \psi$ que, por $(A5)_a$ y el Lema 6.5.5) podemos escribir: $\vdash_{BL} (\varphi \Rightarrow (\varphi^{n-1} \Rightarrow \psi))$, entonces, por modus ponens resulta: $\varphi \vdash_{BL} (\varphi^{n-1} \Rightarrow \psi)$, iterando el procedimiento obtenemos $\varphi \vdash_{BL} \psi$.

$\square$

6.2.1. Álgebra de Lindenbaum

Consideremos la teoría axiomática BL.
Si $\vdash_{BL} \varphi \Rightarrow \psi$ y $\vdash_{BL} \psi \Rightarrow \chi$, en virtud del axioma (A1) y aplicando modus ponens dos veces podemos ver que $\vdash_{BL} \varphi \Rightarrow \chi$, esto nos permite definir en BL la relación de orden:

Definición 6.9. Dados $\varphi, \psi, \in BL$ definimos $\lhd$ por: $\varphi \lhd \psi$ si y sólo si $\vdash_{BL} (\varphi \Rightarrow \psi)$

Teniendo en cuenta el Lema 6.3, que nos garantiza la reflexividad, y el axioma (A1) que nos da la transitividad podemos definir en forma simétrica la relación de equivalencia:

Definición 6.10. Dados $\varphi, \psi, \in BL$ definimos la relación de $\cong$ en BL por: $\varphi \cong \psi$ si y sólo si $\vdash_{BL} (\varphi \Rightarrow \psi)$ y $\vdash_{BL} (\psi \Rightarrow \varphi)$.

Sea $L_{BL} = BL/\cong$ el conjunto de todas las clases de fórmulas lógicamente equivalentes en BL. $\triangleleft$ induce una relación de orden $\preceq$ en L_{BL} definida por $[\varphi] \preceq [\psi]$ si y sólo si $\varphi \triangleleft \psi$, donde $\varphi \in [\varphi]$ y $\psi \in [\psi]$.

Lema 6.6. *La relación definida por $[\varphi] \preceq [\psi]$ si y sólo si $\varphi \triangleleft \psi$, donde $\varphi \in [\varphi]$ y $\psi \in [\psi]$, establece un orden en L_{BL}.*

Demostración:
En efecto: supongamos que $\varphi \triangleleft \psi$, $\varphi \cong \varphi'$ y $\psi \cong \psi'$, probaremos que $\varphi' \triangleleft \psi'$:

1. $\varphi \Rightarrow \psi$ (H)
2. $\varphi' \Rightarrow \varphi$ (H)
3. $\psi \Rightarrow \psi'$ (H)
4. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi'))$ (A1)
5. $((\psi \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi'))$ MP: 1,4
6. $\varphi \Rightarrow \psi'$ MP: 5,3
7. $(\varphi' \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \psi'))$ (A1)
8. $(\varphi \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \psi')$ MP: 2,7
9. $\varphi' \Rightarrow \psi'$ MP: 6,8

Hemos probado que la relación está bien definida. Dado que $[\varphi] \preceq [\psi]$ si y sólo si $\varphi \triangleleft \psi$ y que $\triangleleft$ es una relación de orden en BL, resulta que $\preceq$ es una relación de orden en L_{BL}. $\square$

Definimos $\mathbf{I} = \{\varphi \in L : \vdash_{BL} \varphi\}$. En virtud del Corolario 6.2 del Lema 6.4, $\langle L_{BL}, \preceq, \mathbf{I}\rangle$ es un conjunto ordenado con último elemento.

Lema 6.7. *Sean las fórmulas φ, ψ. Si $\vdash_{BL} \varphi$ y $\vdash_{BL} \psi$, entonces $\vdash_{BL} \varphi \frown \psi$.*

Demostración:

1. φ H
2. ψ H
3. $\varphi \Rightarrow \psi$ por Cor. 6.2)

4. $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} (\varphi \Rightarrow \psi)))$ Lem 6.5.3)
5. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} (\varphi \Rightarrow \psi))$ MP:1,4
6. $\varphi \mathbin{\&} (\varphi \Rightarrow \psi)$ MP:3,5
7. $\varphi \frown \psi$ def. $\frown$

□

Vamos a definir ahora operaciones en L_{BL}, para ello demostremos antes:

Lema 6.8. *Sean las fórmulas $\varphi, \psi, \chi \in BL$:*

1) $\vdash_{BL} ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \frown \psi)))$,
2) $\vdash_{BL} (\varphi \frown \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi)$,
3) $\vdash_{BL} ((\varphi \Rightarrow \psi) \frown (\varphi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \frown \chi))$,
4) $\vdash_{BL} \varphi \Rightarrow (\varphi \smile \psi)$,
5) $\vdash_{BL} ((\varphi \Rightarrow \chi) \frown (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \smile \psi) \Rightarrow \chi))$,
6) $\vdash_{BL} (\varphi \Rightarrow \psi) \smile (\psi \Rightarrow \varphi)$.

Demostración:

1)

1. $(\varphi \mathbin{\&} (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} (\varphi \Rightarrow \psi))$ Lema 6.3
2. $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} (\varphi \Rightarrow \psi)))$ de 1. por $(A5)_b$
3. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} (\varphi \Rightarrow \psi)))$ de 2. por L.6.5.1)
4. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \frown \psi))$ abrev. a 3.

2)

1. $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow (\psi \frown \varphi)$ (A4)
2. $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow \varphi$ de 1. por (A1) y Lema 6.5.2)
3. $\chi \Rightarrow ((\varphi \frown \psi) \Rightarrow \varphi)$ de 2. por Cor. 6.2
4. $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi)$ de 3. por Lema 6.5.1)

3)

1. $(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\psi \frown \chi))$ 1)

2. $(\psi \Rightarrow (\psi \frown \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \frown \chi)))$ (A1) y L.6.5.1)
3. $(\psi \Rightarrow (\psi \frown \chi)) \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \psi) \frown (\varphi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \frown \chi)))$ de 2. por L.6.5.6) y (A1)
4. $(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \psi) \frown (\varphi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \frown \chi)))$ de 1. y 3. por (A1)
5. $(\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow (\chi \frown \psi))$ 1)
6. $(\chi \Rightarrow (\chi \frown \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\chi \frown \psi)))$ (A1)
7. $(\chi \Rightarrow (\chi \frown \psi)) \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \chi) \frown (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\chi \frown \psi)))$ de 6. por L.6.5.6) y (A1)
8. $(\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \chi) \frown (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\chi \frown \psi)))$ de 5. y 7. por (A1)
9. $(\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \chi) \frown (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \frown \chi)))$ de 8. por (A4)
10. $((\varphi \Rightarrow \psi) \frown (\varphi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \frown \chi))$ de 4 y 9 por (A6)

4)

1. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ L.6.3
2. $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$ de 1. por L.6.5.1)
3. $(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$ C.6.2
4. $\varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$ de 3. por L.6.5.1)
5. $\varphi \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi) \frown ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi))$ 3) a 2 y 4.
6. $\varphi \Rightarrow (\varphi \smile \psi)$ abrev. a 5.

5)

1. $(((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi) \frown ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$ L.6.5.2) y (A4)
2. $(\varphi \smile \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$ abrev. a 1.
3. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \smile \psi) \Rightarrow \psi)$ por L.6.5.1)
4. $((\varphi \smile \psi) \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \smile \psi) \Rightarrow \chi))$ (A1)
5. $((\varphi \smile \psi) \Rightarrow \psi) \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \chi) \frown (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \smile \psi) \Rightarrow \chi))$ Lema 6.5.6) a 4.
6. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \chi) \frown (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \smile \psi) \Rightarrow \chi))$ (A1) a 3. y 5.

Análogamente obtenemos:

7. $(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \chi) \frown (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \smile \psi) \Rightarrow \psi)))$
8. $((\varphi \Rightarrow \chi) \frown (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \smile \psi) \Rightarrow \psi))$ de 6. y 7. por (A6)

6)

1. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \smile (\psi \Rightarrow \varphi))$ 4)
2. $(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \smile (\psi \Rightarrow \varphi))$ 4)
3. $(\varphi \Rightarrow \psi) \smile (\psi \Rightarrow \varphi)$ de 1. y 2. por (A6)

□

En virtud de Lema 6.5.2), $\varphi \ \& \ (\varphi \Rightarrow \psi)$ es cota inferior para φ y ψ y es la mayor de las cotas inferiores por el Lema 6.3.3). Escribimos entonces $[\varphi] \sqcap [\psi] = [\varphi \ \& \ (\varphi \Rightarrow \psi)]$. Los incisos 4) y 5) y la notación que acabamos de introducir nos permiten afirmar que $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi) \sqcap ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$ es la menor de las cotas superiores para φ y ψ. Escribimos $[\varphi] \sqcup [\psi] = [((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)] \sqcap [((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)]$. De estos razonamientos se infiere que $\langle L_{BL}, \sqcap, \sqcup, \mathbf{0}, \mathbf{I} \rangle$ es un retículo acotado.

Lema 6.9. *Sea la aplicación $\star : L_{BL} \times L_{BL} \rightarrow L_{BL}$, definida por: $[\varphi] \star [\psi] = [\varphi \ \& \ \psi]$, donde $\varphi \in [\varphi], \psi \in [\psi]$, con φ y ψ dos fórmulas en BL. $\star$ es una operación en L_{BL}.*

Demostración:
Sean $\varphi \cong \varphi'$ y $\psi \cong \psi'$, veamos que $\varphi \ \& \ \psi \cong \varphi' \ \& \ \psi'$.

1. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ H
2. $\psi \Rightarrow \psi'$ H
3. $(\psi \Rightarrow \psi') \Rightarrow ((\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow (\varphi \ \& \ \psi'))$ Lema 6.8.5)
4. $(\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow (\varphi \ \& \ \psi')$ MP: 2,3
5. $(\varphi \Rightarrow \varphi') \Rightarrow ((\psi' \ \& \ \varphi) \Rightarrow (\psi' \ \& \ \varphi'))$ Lema 6.8 .5)
6. $(\psi' \ \& \ \varphi) \Rightarrow (\psi' \ \& \ \varphi')$ MP: 1,5
7. $(\varphi \ \& \ \psi') \Rightarrow (\psi' \ \& \ \varphi)$ (A3)
8. $((\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow (\varphi \ \& \ \psi')) \Rightarrow (((\varphi \ \& \ \psi') \Rightarrow (\psi' \ \& \ \varphi)) \Rightarrow ((\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow (\psi' \ \& \ \varphi)))$ (A1)
9. $((\varphi \ \& \ \psi') \Rightarrow (\psi' \ \& \ \varphi)) \Rightarrow ((\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow (\psi' \ \& \ \varphi))$ MP: 4,8
10. $(\varphi \ \& \ \psi) \Rightarrow (\psi' \ \& \ \varphi)$ MP: 7,9
11. $(\psi' \ \& \ \varphi') \Rightarrow (\varphi' \ \& \ \psi')$ (A3)
12. $((\psi' \ \& \ \varphi) \Rightarrow (\psi' \ \& \ \varphi')) \Rightarrow (((\psi' \ \& \ \varphi') \Rightarrow (\varphi' \ \& \ \psi')) \Rightarrow ((\psi' \ \& \ \varphi) \Rightarrow (\varphi' \ \& \ \psi')))$ (A1)
13. $((\psi' \ \& \ \varphi') \Rightarrow (\varphi' \ \& \ \psi')) \Rightarrow ((\psi' \ \& \ \varphi) \Rightarrow (\varphi' \ \& \ \psi'))$ MP: 12,6
14. $(\psi' \ \& \ \varphi) \Rightarrow (\varphi' \ \& \ \psi')$ MP: 13,11

15. $((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\psi' \mathbin{\&} \varphi)) \Rightarrow (((\psi' \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow (\varphi' \mathbin{\&} \psi')) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi' \mathbin{\&} \psi')))$ (A1)

16. $((\psi' \mathbin{\&} \varphi) \Rightarrow (\varphi' \mathbin{\&} \psi')) \Rightarrow ((\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi' \mathbin{\&} \psi'))$ MP: 10,15

17. $(\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\varphi' \mathbin{\&} \psi')$ MP: 14,16

Análogamente se prueba $\vdash (\varphi' \mathbin{\&} \psi') \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \psi)$, de donde resulta $(\varphi' \mathbin{\&} \psi') \cong (\varphi \mathbin{\&} \psi)$, y $\star$ una operación bien definida.

□

Lema 6.10. *La operación $\star$ satisface las propiedades asociativa y conmutativa, $\mathbf{I}$ es el elemento neutro y es compatible con la relación $\preceq$, es decir, $\langle L_{BL}, \star, \mathbf{I}, \preceq\rangle$ es un monoide conmutativo ordenado.*

Demostración:
Propiedad asociativa: ([RV97]) Cualquiera sea $\delta \in BL$ son equivalentes, en virtud de $(A5)_a$ y $(A5)_b$:

$((\varphi \mathbin{\&} \psi) \mathbin{\&} \chi) \Rightarrow \delta$

$(\varphi \mathbin{\&} \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \delta)$

$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \delta))$

$\varphi \Rightarrow ((\psi \mathbin{\&} \chi) \Rightarrow \delta)$

$(\varphi \mathbin{\&} (\psi \mathbin{\&} \chi)) \Rightarrow \delta$

Propiedad conmutativa: por el axioma esquema (A3)

$[\mathbf{I}]$ es el elemento neutro. En efecto:

1. $\mathbf{I} \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \mathbf{I}))$ Lema 6.8. 3)
2. $\mathbf{I}$ def.
3. $\varphi \Rightarrow (\varphi \mathbin{\&} \mathbf{I})$ MP: 1,2

y por el axioma-esquema (A2) resulta $\varphi \mathbin{\&} \mathbf{I} \cong \varphi$

$\preceq$ es compatible con $\star$ por el Lema 6.8.5) □

Lema 6.11. *Sea la aplicación $\mapsto$: $L_{BL} \times L_{BL} \to L_{BL}$, definida por: $[\varphi] \mapsto [\psi] = [\varphi \Rightarrow \psi]$, donde $\varphi \in [\varphi], \psi \in [\psi]$, con φ y ψ dos fórmulas en BL. $\mapsto$ es una operación en L_{BL}.*

Demostración:
Sean $\varphi \cong \varphi'$ y $\psi \cong \psi'$, veamos que $\varphi \Rightarrow \psi \cong \varphi' \Rightarrow \psi'$.

1. $\psi \Rightarrow \psi'$ H

2. $\varphi' \Rightarrow \varphi$ H
3. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi'))$ (A1)
4. $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi'))) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \psi') \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi')))$ L.6.5.1)
5. $(\psi \Rightarrow \psi') \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi'))$ MP: 3,4
6. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi')$ MP: 1,5
7. $(\varphi' \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \psi'))$ (A1)
8. $(\varphi \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \psi')$ MP: 2,7
9. $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi')) \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \psi')) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \psi')))$ (A1)
10. $((\varphi \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \psi')) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \psi'))$ MP: 6,9
11. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \psi')$ MP: 8,10

Análogamente $\vdash (\varphi' \Rightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi)$, y resulta $(\varphi' \Rightarrow \psi') \cong (\varphi \Rightarrow \psi)$, y la operación $\mapsto$ bien definida.

$\square$

Lema 6.12. $(\star, \mapsto)$ *conforman un par de Galois.*

Demostración:
La condición (2.13) en L_{BL} se escribe: $[\varphi] \star [\psi] \preceq [\chi]$ si y sólo si $[\varphi] \preceq [\psi] \mapsto [\chi]$.

Demostremos una de las implicaciones:
Supongamos que $[\varphi] \star [\psi] \preceq [\chi]$, equivalentemente escribimos: $\varphi \,\&\, \psi \lhd \chi$, es decir, $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \chi$, aplicando la regla de inferencia a esta fórmula junto con el axioma $(A5)_b$ podemos afirmar que $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$, es decir, $\varphi \lhd \psi \Rightarrow \chi$ y, en consecuencia, $[\varphi] \preceq [\psi \Rightarrow \chi]$, de donde $[\varphi] \preceq [\psi] \mapsto [\chi]$.

La otra implicación se demuestra análogamente, utilizando el axioma $(A5)_a$. $\square$

Corolario 6.3. $\langle L_{BL}, \sqcap, \sqcup, \star, \mapsto, [\mathbf{0}], [\mathbf{I}]\rangle$ *es una BL álgebra, donde* $\sqcap$ *y* $\sqcup$ *son respectivamente el ínfimo y el supremo determinados por la relación de orden* $\preceq$.

Demostración:
Hemos demostrado que $\langle L_{BL}, \sqcap, \sqcup, \star, \mapsto, [\mathbf{0}], [\mathbf{I}]\rangle$ es un retículo residual conmutativo integral. Por la propia definición de $\sqcap$ es divisible y por el axioma (A6), en virtud de es lineal. $\square$

Definición 6.11. $\langle L_{BL}, \sqcap, \sqcup, \star, \mapsto, [\mathbf{0}], [\mathbf{I}]\rangle$ se dice el *álgebra de Lindenbaum* L_{BL}.

Corolario 6.4. *El álgebra de Lindenbaum de* L_{BL} *es una BL álgebra.*

Lema 6.13. *La aplicación* $[\cdot]_{BL}$ *que a cada* $\varphi \in BL$ *le asigna* $[\varphi]_{BL} \in L_{BL}$ *es una evaluación.*

Demostración:
En virtud del lema 6.9 podemos afirmar que $[\varphi \ \& \ \psi]_{BL} = [\varphi]_{BL} \star [\psi]_{BL}$ y por el Lema 6.11 afirmamos que $[\varphi \Rightarrow \psi]_{BL} = [\varphi]_{BL} \mapsto [\psi]_{BL}$. Resta probar que $[0]_{BL} = \mathbf{0}$.
Consideremos $[0]_{BL} \mapsto [\varphi]_{BL}$.
Aplicando el Lema 6.11 obtenemos $[0]_{BL} \mapsto [\varphi]_{BL} = [0 \Rightarrow \varphi]_{BL}$, y por (A7) podemos afirmar que $[0]_{BL} \preceq [\varphi]_{BL}$, cualquiera sea $[\varphi]_{BL} \in L_{BL}$, es decir, $[0]_{BL} = \mathbf{0}$.
□

6.2.2. Completud

Lema 6.14. *Si* φ *es una tautología para todas las BL álgebras linealmente ordenadas, entonces es tautología para toda BL álgebra.*

Demostración:
Sea φ una fórmula en BL que es 1-tautología para toda Bl álgebra $L_\bullet$ linealmente ordenada, entonces la evaluación de φ es 1 para toda BL álgebra linealmente ordenada $L_\bullet$, es decir $e_{L_\bullet}(\varphi) = 1$. Sea L una BL álgebra cualquiera. Queremos verificar que $e_L(\varphi) = 1_L$. Considerando el Lema 3.45 podemos afirmar que existe una inmersión i de L en el producto directo de una cierta familia $\mathfrak{L}$ de BL álgebras linealmente ordenadas, es decir, en $\Pi_{L_\bullet \in \mathfrak{L}} L_\bullet$. Entonces $i(e_L(\varphi)) = (e_{L_\bullet}(\varphi))_{L_\bullet \in \mathfrak{L}} = (1_{L_\bullet})_{L_\bullet \in \mathfrak{L}} = 1_{\Pi_{L_\bullet \in \mathfrak{L}} L_\bullet}$. En consecuencia, $e_L(\varphi) = 1$. □

Teorema 6.2. *(completud) BL es completa. Es decir: Para cada fórmula* φ *son equivalentes:*

1) φ *es un teorema de BL;*

2) *Para cada BL álgebra linealmente ordenada* $L_\bullet$ φ *es* $L_\bullet$*-tautología;*

3) *Para cada BL álgebra* L*,* φ *es* L*-tautología.*

Demostración:
1) $\Rightarrow$ 2) y 2) $\Rightarrow$ 3) ya están establecidas por los Lemas 6.2 y 6.14.
Para probar 3) $\Rightarrow$ 1) supongamos que para cada BL-álgebra φ es 1-tautología, en especial lo es para el álgebra de Lindenbaum L_{BL}. Es decir $e(\varphi) = [\varphi]_{BL} = \mathbf{I}$, entonces $\vdash_{BL} \varphi$.
□

6.3. Estructuras lógicas asociadas a las t-normas

En este capítulo hemos formulado una teoría axiomática de modo tal que cualquier BL álgebra sea un modelo de la teoría para toda evaluación. Consideraremos especialmente la BL álgebra $\langle [0,1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$, cuando $\otimes$ es una de las T-normas continua mencionadas en el Ejemplo 5.2. ([Tur92], [Háj97]).

$PC(T_M)$: **Cálculo proposicional asociado al operador de Zadeh:**

El operador de Zadeh es T_M, es decir, la *norma mínimo*. Por la idempotencia de cada elemento, la BL álgebra resulta un álgebra de *Heyting lineal*, *pseudo Boole*, de *Brouwer* o de *Gödel*. Este hecho agrega a los axiomas de la Definición 6.7, el siguiente:

(GL) $\varphi \Rightarrow (\varphi \,\&\, \varphi)$

Llamaremos GL a esta teoría.

Lema 6.15. *GL verifica $(\varphi \,\&\, \psi) \equiv (\varphi \frown \psi)$.*

Demostración:
Debemos probar que $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\varphi \frown \psi)$, y que $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi)$.

1) $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\varphi \frown \psi)$,

1. $\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ L.6.4
2. $(\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi))$ L.6.5.5)
3. $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi))$ MP:1.,2.
4. $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\varphi \frown \psi)$ abrev. a 3.

2) $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi)$.

1. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi))$ L.6.5.5)
2. $(\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi))$ de 1. por L.6.5.1)
3. $\varphi \Rightarrow (\varphi \,\&\, \varphi)$ (GL)
4. $\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi))$ de 1. y 3. por (A1)
5. $(\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi)$ de 4. por (A5)
6. $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \psi)$ abrev. a 5.

□

Dado que en esencia la conjunción coincide con el producto, suele los axiomas de GL suelen escribirse utilizando sólo el operador conjunción.

Definición 6.12. Las siguientes fórmulas son axioma-esquemas de $PC(T_M)$, GL o lógica de Gödel:

(A1) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

(A2) $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow \varphi$

(A3) $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow (\psi \frown \varphi)$

(A4) $(\varphi \frown (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\psi \frown (\psi \Rightarrow \varphi))$

$(\mathrm{A5})_a$ $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \frown \psi) \Rightarrow \chi)$

$(\mathrm{A5})_b$ $((\varphi \frown \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$

(A6) $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow \chi)$

(A7) $\mathbf{0} \Rightarrow \varphi$

(GL) $\varphi \Rightarrow (\varphi \frown \varphi)$

La *regla de inferencia* es el Modus Ponens:

(RI) $\varphi,\ \varphi \Rightarrow \psi \vdash_{GL} \psi$

Teorema 6.3. *GL es sana y completa. Es decir: Para cada fórmula φ son equivalentes:*

1) *φ es un teorema de GL;*

2) *Para cada álgebra de Heyting linealmente ordenada $L_\bullet$ φ es $L_\bullet$-tautología;*

3) *Para cada álgebra de Heyting lineal L, φ es L-tautología.*

Demostración:
En virtud del teorema 6.2, basta verificar que el álgebra de Lindenbaum de GL es un álgebra de Heyting lineal, lo cual es trivial a partir del Lema 6.15. □
La lógica de Gödel está estrechamente vinculada con la *lógica intuicionista*:

Definición 6.13. La *lógica intuicionista* I tiene como conectivos a $\Rightarrow, \frown, \smile, \sim$ y los siguiente axioma-esquemas:

(I_1) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$

(I_2) $\varphi \Rightarrow (\varphi \smile \psi)$

(I_3) $\psi \Rightarrow (\varphi \smile \psi)$

(I_4) $(\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \smile \psi) \Rightarrow \chi)))$

(I_5) $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow \varphi$

(I_6) $(\varphi \frown \psi) \Rightarrow \psi$

(I_7) $(\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow ((\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow (\varphi \frown \psi)))$

(I_8) $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \frown \psi) \Rightarrow \chi)$

(I_9) $((\varphi \frown \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$

(I_{10}) $(\varphi \frown \sim \varphi) \Rightarrow \psi$

(I_{11}) $(\varphi \Rightarrow (\psi \frown \sim \psi)) \Rightarrow \sim \varphi$

Lema 6.16. *La lógica de Gödel satisface todos los axiomas de la lógica intuicionista*

Demostración: Sea una evaluación e. Listaremos los lemas que permiten afirmar que toda evaluación de cada axioma-esquema es 1, es decir, cada axioma es una 1-tautología.

(I_1) Lema 2.9.(19) y Lema 2.12.(2).

(I_2) ,(I_3) Lema 2.14.(13).

(I_4) Lema 2.9.(9).

(I_5) ,(I_6) Lema 2.14.(14).

(I_7) Lema 2.9.(8).

(I_8) ,(I_9) Condición de par adjunto (2.13).

(I_{10}) Lema 2.9.(2-i), con $y = 0$, y Lema 2.14.(1).

(I_{11}) Lema 2.9.(2-i), con $y = 0$.

□

Esta lógica tiene el teorema de la deducción en su forma clásica, es decir, satisface, para cada teoría T sobre GL y fórmulas φ, ψ, $A \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ si y sólo si $A \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$. Este hecho caracteriza a la lógica GL, como veremos en el siguientes teorema.

Teorema 6.4. *GL es la única lógica $PC(\otimes)$ que tiene el teorema de la deducción en su forma clásica, es decir, GL verifica el teorema de la deducción y si $PC(\otimes)$ tiene el teorema de la deducción, entonces $x \otimes y = min\{x, y\}$.*

Demostración:
Para verificar que GL tiene el teorema de la deducción en su forma clásica basta con notar que $\varphi^n \equiv \varphi$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Supongamos que la lógica $PC(\otimes)$ tiene el teorema de la deducción y veamos que se satisface el axioma (GL).

1. φ H
2. $(\varphi \,\&\, \varphi) \Rightarrow (\varphi \,\&\, \varphi)$ L.6.3
3. $\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi \,\&\, \varphi))$ de 1. por (A5)
4. $\varphi \Rightarrow (\varphi \,\&\, \varphi)$ MP:1.,3.
5. $\varphi \,\&\, \varphi$ MP:1.,4.

Hemos probado $\varphi \vdash (\varphi \,\&\, \varphi)$. Como suponemos válido el teorema de la deducción, podemos afirmar que $\vdash \varphi \Rightarrow (\varphi \,\&\, \varphi)$, es decir, se verifica el axioma GL.
Este hecho hace que la evaluación del producto resulte el mínimo.
En efecto: sean $x, y \in [0,1]$ y supongamos que $x \leq y$. Es claro que $y \leq 1$. Por la monotonía del producto escribimos $x = x \otimes x \leq x \otimes y \leq x \otimes 1 = x$, de donde se infiere $x = x \otimes y$, es decir, $x \otimes y = min\{x, y\}$. □

$PC(T_P)$: **Cálculo proposicional asociado al operador de Mandani:**

El operador de Mandani es T_P, es decir, la *norma producto*, la BL álgebra resulta un *álgebra producto*. La lógica asociada se denomina *lógica producto* y se nota Π o bien PL. En [CT97] se encuentra un detallado análisis de la lógica producto, utilizando como contrapartida algebraica las PL-álgebras. En dicho trabajo se prueba que para que una ecuación sea válida en una PL álgebra cualquiera es condición necesaria y suficiente que lo sea en la PL álgebra construída a partir del cono negativo del l-grupo $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$.
La lógica Π agrega a los axiomas de la Definición 6.7, los siguientes:

(Π1) $\sim\sim \chi \Rightarrow (((\varphi \,\&\, \chi) \Rightarrow (\psi \,\&\, \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$

(Π2) $(\varphi \frown \sim \varphi) \Rightarrow \mathbf{0}$

Donde $\sim \varphi$ es una abreviatura para $\varphi \Rightarrow \mathbf{0}$

Definición 6.14. *Los axiomas para la lógica producto* Π *son los siguientes:*

(A1) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

(A2) $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \varphi$

(A3) $(\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow (\psi \,\&\, \varphi)$

(A4) $(\varphi \,\&\, (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\psi \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi))$

$(A5)_a$ $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \chi)$

$(A5)_b$ $((\varphi \,\&\, \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$

(A6) $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow \chi)$

(A7) $\mathbf{0} \Rightarrow \varphi$

(Π1) $\sim\sim \chi \Rightarrow (((\varphi \mathbin{\&} \chi) \Rightarrow (\psi \mathbin{\&} \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$

(Π2) $(\varphi \frown \sim \varphi) \Rightarrow \mathbf{0}$

Lema 6.17. *Los axiomas de la lógica* Π *son 1-tautologías sobre el álgebra producto* $\langle [0,1], \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow_{\cdot}, 0, 1\rangle$.

Demostración:
Basta demostrar que los axiomas (Π1) y (Π2) son tautología, lo cual es trivial a partir de la definición de álgebra producto y se encuentra verificado en el Ejemplo 2.23. $\square$

Observación 6.2. El axioma (Π2) es tautología para la lógica GL. Veamos que el axioma (Π1) no lo es. Consideremos $e(\chi) > 0$, $e(\chi) = 0{,}1$, $e(\varphi) = 0{,}6$ y $e(\psi) = 0{,}2$. Resulta entonces que $e(\sim\sim \chi \Rightarrow (((\varphi \mathbin{\&} \chi) \Rightarrow (\psi \mathbin{\&} \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))) = 0{,}6 \rightarrow 0{,}2 = 0{,}2 \neq 1$.

Teorema 6.5. *PL es sana y completa. Es decir: Para cada fórmula φ son equivalentes:*

1) *φ es un teorema de PL;*

2) *Para cada álgebra producto linealmente ordenada $L_{\bullet}$ φ es $L_{\bullet}$-tautología;*

3) *Para cada álgebra de producto L, φ es L-tautología.*

Demostración:
En virtud del teorema 6.2, basta verificar que el álgebra de Lindenbaum de PL es un álgebra producto, lo cual es trivial a partir de los axiomas (Π1) y (Π2). $\square$

$PC(T_L)$: Cálculo proposicional asociado al operador de Łukasiewicz

El operador de Łukasiewicz es T_L, la BL álgebra resulta una *MV álgebra* ó *álgebra de Łukasiewicz*, o de *Wajsberg*. De este hecho proviene el llamar a la t-norma asociada, t-norma de Łukasiewicz, aunque este operador no figure explícitamente en sus trabajos. Esta lógica se denomina *lógica de Łukasiewicz* y se nota Ł. Agrega a la Definición 6.7 el siguiente axioma:

(Ł) $\sim\sim \varphi \Rightarrow \varphi$

Lema 6.18. *Los axiomas de la lógica BL y (Ł) son 1-tautologías sobre la MV álgebra* $\langle [0,1], \wedge, \vee, T_L, \rightarrow_L, 0, 1\rangle$.

Demostración:
El Corolario 2.7 afirma que toda MV álgebra es BL álgebra, y, en consecuencia, podemos afirmar que los axiomas (A1) a (A7) son 1-tautologías.
Veamos el axioma (Ł): según el Ejemplo 5.4 y en virtud del Lema 2.12.4) podemos afirmar que $e(\sim\sim \varphi \Rightarrow \varphi) = (1 - (1 - e(\varphi)) \rightarrow_L e(\varphi) = 1$, según vimos en la definición de negación para la t-norma de Łukasiewicz, en el Ejemplo 5.4. □

Definición 6.15. *Los axiomas para la lógica de Łukasiewicz son los siguientes:*

(Ł1) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

(Ł2) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

(Ł3) $(\sim \varphi \Rightarrow \sim \psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

(Ł4) $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$

Lema 6.19. $PC(T_L)$ *satisface los axiomas de Łukasiewicz.*

Demostración:
Para demostrar esta afirmación mencionaremos los lemas que nos permiten afirmar que cada axioma es 1-tautología.

(Ł1) Lema 2.12.2) y Lema 2.14.3).

(Ł2) Lema 2.12.2) y Lema 2.9.4-ii).

(Ł3) Lema 2.12.2) y Lema 2.26.4).

(Ł4) Definición 2.23.

□

La lógica proposicional de Łukasiewicz es sana y completa. Es decir:

Teorema 6.6. *(completud) Ł es completa. Es decir: Para cada fórmula φ son equivalentes:*

1) *φ es un teorema de Ł;*

2) *Para cada MV álgebra linealmente ordenada $L_\bullet$ φ es $L_\bullet$-tautología;*

3) *Para cada MV álgebra L, φ es L-tautología.*

Demostración:
En virtud del Teorema 6.2 basta probar que el álgebra de Lindenbaum es una MV álgebra.
Por el Teorema 2.12 debemos ver que es divisible y Girard. Sabemos que es divisible, porque es BL álgebra. Finalmente, el axioma (Ł) nos permite afirmar que se trata de un retículo de Girard. $\square$
Es conocido el teorema de completud para la lógica de Łukasiewicz dada por Chang en [Cha58], que afirma que para que una ecuación sea válida en cualquier MV álgebra es condición necesaria y suficiente que lo sea para el intervalo $[0, 1]$. Puede encontrarse una demostración diferente dada por Cignoli y Mundici en [CD97a],[CD97b] y [CDM98].

Capítulo 7

Jerarquía de conceptos

La jerarquía de conceptos fue introducida con la intención de formalizar la lógica a partir de considerar un *concepto* determinado por su *extensión*, es decir, el conjunto de todos los objetos que pertenecen al concepto y su *intensión*, conformada por todos los atributos comunes a dichos objetos. Presentaremos las definiciones establecidas por Rudolph Wille [Wil82].
El primer objetivo de este capítulo es utilizar la noción de teoría de conceptos fuzzy para la definición de funciones de pertenencia a un cierto conju nto fuzzy. Más precisamente, para definir el grado de pertenencia al conjunto fuzzy "tener la propiedad P" consideraremos la cardinalidad de la extensión del concepto cuya intensión es, justamente, P.

7.1. Jerarquía de conceptos clásicos

Definición 7.1. [Wil82] Una terna (G, M, I) se dice un *contexto* si G es un conjunto de objetos, M un conjunto de atributos e $I \subseteq G \times M$, es decir es una relación binaria entre G y M. Se indica por gIm que el objeto g posee la propiedad m. Para cada $A \subseteq G$, notaremos $A_{\mathbf{1}}$ al conjunto definido por: $A_{\mathbf{1}} = \{m \in M : (\forall g \in A)\, gIm\}$. Análogamente si $B \subseteq M$, $B_{\mathbf{2}} = \{g \in G : (\forall m \in B)\, gIm\}$.

Observación 7.1. La utilización de las letras G y M para notar respectivamente los conjuntos de objetos y atributos. Esta notación es la original utilizada por Wille y hace referencia a las iniciales de Gegenstände (objetos) y Merkmale (atributos).

Definición 7.2. Dado un contexto (G, M, I), un par (A, B), con $A \subseteq G, B \subseteq M$ es un *concepto* si $A_{\mathbf{1}} = B$ y $B_{\mathbf{2}} = A$. A se dice la *extensión* del concepto (A, B) y B la *intensión*.

Lema 7.1. *Dado un contexto (G, M, I), las aplicaciones $\phi : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(M)$, definidas por $\phi(A) = A_{\mathbf{1}}$ y $\psi : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(G)$ por $\psi(B) = B_{\mathbf{2}}$ establecen una conexión de Galois entre $\mathcal{P}(G)$ y $\mathcal{P}(M)$.*

Demostración: Usaremos para esta demostración la Definición 2.3. Sea $A \subseteq \psi(B)$ y $b \in B$. Cualquiera que sea $a \in A$ resulta $a \in \psi(B)$, dado que por la Definición 7.1 $\psi(B) = \{g \in G : (\forall m \in B)\, gIm\}$ entonces $(\forall a \in A)\, aIb$ y, en consecuencia, $b \in \phi(A)$. Es decir, $B \subseteq \phi(A)$.
Recíprocamente, supongamos que $\phi(A) \supseteq B$ Y $a \in A$. Cualquiera que sea $b \in B$ resulta $b \in \phi(A)$, dado que por 7.1 $\phi(A) = \{m \in M : (\forall g \in A)\, gIm\}$ entonces $(\forall b \in B)\, aIb$ y, en consecuencia, $a \in \psi(B)$. Es decir, $A \subseteq \psi(B)$. □

Definición 7.3. Dado un contexto (G, M, I), los *operadores de construcción* φ_G y φ_M, son aplicaciones $\varphi_G : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$, tal que $\varphi_G(A) = \psi \circ \phi(A)$, $\varphi_M : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, tal que $\varphi_M(B) = \phi \circ \psi(B)$.

Lema 7.2. *Dado un contexto (G, M, I), las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *(A, B) es un concepto;*

2) *A es un punto fijo de φ_G y B es un punto fijo de φ_M, es decir $\varphi_G(A) = A$ y $\varphi_M(B) = B$.*

Demostración: Para que (A, B) sea un concepto, es condición necesaria y suficiente que $\phi(A) = B$ y $\psi(B) = A$. Observemos que, dado que ϕ y ψ establecen una correspondencia de Galois entre $\mathcal{P}(G)$ y $\mathcal{P}(M)$, se verifica siempre $A \subseteq \psi \circ \phi(A)$, es decir, $A \subseteq \varphi_G(A)$ y $B \subseteq \phi \circ \psi(B)$, es decir $B \subseteq \varphi_M(B)$.
Si (A, B) es un concepto, entonces $\varphi_G(A) = \psi(\phi(a)) = \psi(B) = A$ y $\varphi_M(B) = \phi(\psi(b)) = \phi(A) = B$.
Si A y B son puntos fijos para φ_G y φ_M, respectivamente, resulta $\phi(A) = \phi(\psi(\phi(A))) = qsy$ y $B = \varphi_M(B) = B_{\mathbf{21}} = A_{\mathbf{1}}$. □

Corolario 7.1. *Dado un contexto (G, M, I), si A es punto fijo para φ_G (ó B es punto fijo para φ_M), entonces $(A, A_{\mathbf{1}})$ (respectivamente $(B_{\mathbf{2}}, B)$) es un concepto para (G, M, I).*

Demostración: La demostración es inmediata a partir del lema anterior. □

Notación 7.1. Dado un contexto (G, M, I) notamos $\mathcal{B}(G, M, I)$ al conjunto de todos los conceptos asociados a dicho concepto. Nuevamente $\mathcal{B}$ es la inicial de Begriff, que significa concepto en alemán.

Para construir un retículo de conceptos para un contexto dado, necesitaremos los siguientes resultados:

Lema 7.3. [DP02] *Sean (G, M, I) un contexto, $A, C, A_j \subseteq G$ y $B, D, B_j \subseteq M$, para $j \in J$*

1) *$A \subseteq B_{\mathbf{2}}$ si y sólo si $A_{\mathbf{1}} \supseteq B$.*

2) $A \subseteq A_{\mathbf{12}}$ $\qquad$ $B \subseteq B_{\mathbf{21}}$

3) *Si* $A \subseteq C$, *entonces* $C_{\mathbf{1}} \subseteq A_{\mathbf{1}}$. $\qquad$ *Si* $B \subseteq D$, *entonces* $D_{\mathbf{2}} \subseteq B_{\mathbf{2}}$.

4) $A_{\mathbf{1}} = A_{\mathbf{121}}$ $\qquad$ $B_{\mathbf{2}} = B_{\mathbf{212}}$

5) $(\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{1}} = \bigcap_{j\in J}(A_{\mathbf{1}})_j$ $\qquad$ $(\bigcup_{j\in J} B_j)_{\mathbf{2}} = \bigcap_{j\in J}(B_{\mathbf{2}})_j$

Demostración:

1) Demostrado en el Lema 7.1.

2), 3) y 4) son equivalentes a 1), según lo demostrado en el Lema 2.2.

5) $(\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{1}} = \{m \in M : (\forall g \in \bigcup_{j\in J} A_j)\, gIm\} = \{m \in M : (\forall g \in A_j)\, (\forall A_j)\, gIm\} = \bigcap_{j\in J}\{m \in M : (\forall g \in A_j)\, gIm\} = \bigcap_{j\in J}(A_{\mathbf{1}})_j$. Análogamente $(\bigcup_{j\in J} B_j)_{\mathbf{2}} = \bigcap_{j\in J}(B_{\mathbf{2}})_j$.

□

Definición 7.4. Dado un contexto (G, M, I), en $\mathcal{B}(G, M, I)$, el conjunto de todos los conceptos asociados, definimos la relación: $(A, B) \leq (C, D)$ si y sólo si $A \subseteq C$.

Lema 7.4. $(A, B) \leq (C, D)$, *según la Definición* 7.4 *si y sólo si* $D \subseteq B$.

Demostración: Según la Definición 7.1, $A_{\mathbf{1}} = B$, $B_{\mathbf{2}} = A$, $C_{\mathbf{1}} = D$ y $D_{\mathbf{2}} = C$. Si $A \subseteq C$, entonces por el Lema 7.3.3) $A_{\mathbf{1}} \supseteq C_{\mathbf{1}}$ es equivalente a $D \subseteq B$. Análogamente se ve que si $D \subseteq B$ resulta $A \subseteq C$. □

Lema 7.5. *Dado un contexto* (G, M, I), $\langle \mathcal{B}(G, M, I), \leq\rangle$ *es un conjunto parcialmente ordenado, donde* $\leq$ *es la relación indicada por la Definición* 7.4.

Demostración: La relación de la Definición 7.4 es una relación de orden parcial. Las propiedades reflexiva y transitiva se deducen fácilmente de la reflexión y transitividad de la relación de inclusión. Probemos la propiedad antisimétrica: sea $(A, B) \leq (C, D)$ y $(C, D) \leq (A, B)$, entonces $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, de donde $A = B$, pero (A, B) y (C, D) son conceptos, por lo tanto $A_{\mathbf{1}} = B$ y $C_{\mathbf{1}} = D$, en consecuencia $B = D$ y $(A, B) = (C, D)$. □

Lema 7.6. *Dado un contexto* (G, M, I), *el conjunto* $\mathcal{B}(G, M, I)$ *con las operaciones:* $(A, B) \wedge (C, D) = ((A \cap C), (B \cup D)_{\mathbf{21}})$ *y* $(A, B) \vee (C, D) = ((A \cup C)_{\mathbf{12}}, (B \cap D))$ *es el retículo* $\langle \mathcal{B}(G, M, I), \wedge, \vee\rangle$, *donde* $\wedge, \vee$ *son respectivamente el ínfimo y el supremo dados por* $\leq$, *la relación definida por* (7.4).

Demostración: Veamos en primer lugar que Si $\{(A_j, B_j)\}_{j\in J}$ es una familia de conceptos, $((\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{12}}, \bigcap_{j\in J} B_j)$ y $(\bigcap_{j\in J} A_j, (\bigcup_{j\in J} B_j)_{\mathbf{21}})$ son conceptos.

Aplicando el Lema 7.3 .2) y .5) y la Definicion 7.1 escribimos:

$((\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{121}} = (\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{1}} = \bigcap_{j\in J}(A_j)_{\mathbf{1}} = \bigcap_{j\in J} B_j$

$(\bigcap_{j\in J} B_j)_{\mathbf{2}} = (\bigcap_{j\in J} (A_j)_{\mathbf{1}})_{\mathbf{2}} = (\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{12}}$.

Análogamente se ve que $((\bigcup_{j\in J} B_j)_{\mathbf{212}} = \bigcap_{j\in J} A_j$ y $(\bigcap_{j\in J} A_j)_{\mathbf{1}} = (\bigcup_{j\in J} B_j)_{\mathbf{21}}$, para concluir que $((\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{21}}, \bigcap_{j\in J} B_j)$ es un concepto. El otro razonamiento es similar.

Verifiquemos ahora que $\bigvee_{j\in J}(A_j, B_j) = ((\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{12}}, \bigcap_{j\in J} B_j)$.

Para todo $j \in J$ $A_j \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j \subseteq (\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{12}}$, por el Lema 7.3.2), por lo tanto, para todo $j \in J$ $(A_j, B_j) \leq ((\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{12}}, \bigcap_{j\in J} B_j)$

Supongamos que existe (A, B) tal que $(A_j, B_j) \leq (A, B)$ para todo $j \in J$. Resulta entonces que $\bigcup_{j\in J} A_j \subseteq A$, de donde $(\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{12}} \subseteq A_{\mathbf{12}} = B_{\mathbf{2}} = A$, y $((\bigcup_{j\in J} A_j)_{\mathbf{12}}, \bigcap_{j\in J} B_j) \leq (A, B)$.

Por un procedimiento análogo verificamos que $\bigwedge_{j\in J}(A_j, B_j) = (\bigcap_{j\in J} A_j, (\bigcup_{j\in J} B_j)_{\mathbf{21}})$ □

En virtud de este lema, podemos escribir la siguiente definición

Definición 7.5. Dado un contexto (G, M, I), el *retículo de conceptos* para dicho contexto es $\langle \mathcal{B}(G, M, I), \wedge, \vee, (M_{\mathbf{2}}, M), (G, G_{\mathbf{1}})\rangle$, definido como en el Lema 7.6, que resulta un retículo completo, con primer elemento $(M_{\mathbf{2}}, M)$ y último elemento $(G, G_{\mathbf{1}})$.

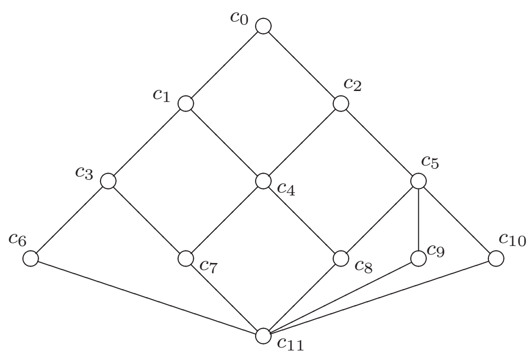
Ejemplo 7.1. (R. Wille)
G es el conjunto de los planetas del sistema solar, M: ser de tamaño pequeño, ser de tamaño mediano, ser de tamaño grande, estar cerca del sol, estar lejos del sol, tener luna y no tener luna. La relación entre objetos y propiedades se indica marcando con una cruz si el par está en relación, en la tabla:

Planeta	peq.	med.	gr.	cer.	lej.	luna	no l.
Me	×			×			×
Ve	×			×			×
Ti	×			×		×	
Ma	×			×		×	
Ju			×		×	×	
Sa			×		×	×	
Ur		×			×	×	
Ne		×			×	×	
Pl	×				×	×	

Los conceptos de este contexto son, entonces:

c_0 : ($\{Me, Ve, Ti, Ma, Ju, Sa, Ur, Ne, Pl\}$, $\emptyset\}$)
c_1 : ($\{Me, Ve, Ti, Ma, Pl\}$, {pequeño})
c_2 : ($\{Ti, Ma, Ju, Sa, Ur, Ne, Pl\}$, {tiene luna})
c_3 : ($\{Me, Ve, Ti, Ma\}$, {pequeño, cerca})
c_4 : ($\{Ti, Ma, \}$, {pequeño, tiene luna})
c_5 : ($\{Ju, Sa, Ur, Ne, Pl\}$, {lejos, tiene luna})
c_6 : ($\{Me, Ve\}$, {pequeño, cerca, no tiene luna})
c_7 : ($\{Ti, Ma\}$, {pequeño, cerca, tiene luna})
c_8 : ($\{Pl\}$, {pequeño, lejos, tiene luna})
c_9 : ($\{Ju, Sa\}$, {grande, lejos, tiene luna}
c_{10} : ($\{Ur, Ne\}$, {mediano, lejos, tiene luna}))
c_{11} : ($\emptyset$, {pequeño, mediano, grande, cerca, lejos, tiene luna, no tiene luna})

y se representan por medio del siguente diagrama de Hasse:



Observación 7.2. Podría pensarse que el primer elemento siempre debe ser $(\emptyset, M)$ y el último $(G, \emptyset)$, lo cual no es cierto y se verifica sencillamente considerando $G = \{1, 2\}$, $M = \{a, b, c\}$, $I = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a)\}$. En este caso el retículo de conceptos es B_1 y sus elementos son exactamente $(\{1\}, M)$ y $(G, \{a\})$.

El retículo de conceptos es, según Wille, una respuesta básica a dos problemas importantes relativos a un contexto dado: La clasificación apropiada de los objetos y la dependencia de los atributos. Wille considera en particular *contextos multivaluados* (G, M, W, I) para representar atributos que puedan tomar distintos valores ya sean nominales (cerca, lejos, pequeño, mediano, etc.) o numéricos.

7.1.1. Contexto multivaluado

Definición 7.6. Un *contexto multivaluado* (G, M, W, I) es una 4-upla tal que G es un conjunto de objetos, M un conjunto de atributos, W un conjunto de valores e I es una relación binaria entre G y $M \times W$, tal que, si $gI(m, w_1)$ y $gI(m, w_2)$, necesariamente $w_1 = w_2$, cualesquiera que sean $g \in G$, $m \in M$. Se indica por $gI(m, w)$ que el objeto g posee la propiedad m en grado w, o que g toma el valor w para el atributo m. Si el objeto g no posee el atributo m, escribimos $gI(m, 0)$. Usualmente asumimos que un contexto n-valuado es *completo*, es decir, para cada $g \in G$ y cada $m \in M$ existe un $w \in W$ tal que $gI(m, w)$. Si $|W| = n$, (G, M, W, I) es un contexto n-valuado.

Observación 7.3. Las consideraciones previas nos llevan a observar que dado un contexto multivaluado (G, M, W, I), $I : G \times M \to W$, la aplicación que asigna a cada par (g, m) el grado w en que el objeto g posee el atributo m es una función. Podemos escribir entonces $I(g, m) = w$.

Notaremos B^V al subconjunto de $M \times W$, que consiste en pares (m, w) tales que existe algún $g \in G$ tal que $gI(m, w)$.
Definimos:
Para $A \subseteq G$, $A_{\mathbf{1}} = \bigcap_{g \in A} \{(m, w) \in M \times W : w = I(g, m)\}$.

Para $B^V \subseteq M \times W$, $B^V_{\mathbf{2}} = \bigcap_{(m,w) \in B^V} \{g \in G : w = I(g, m)\}$.

Definición 7.7. Dado un contexto multivaluado (G, M, I, W), un par (A, B^V), con $A \subseteq G$, $B^V \subseteq M \times W$ es un *concepto multivaluado* si $A_{\mathbf{1}} = B$ y $B^V_{\mathbf{2}} = A$. A se dice la *extensión multivaluada* del concepto (A, B^V) y B^V la *intensión multivaluada.*

Del mismo modo que en el caso 2-valuado, podemos enunciar el siguiente Lema:

Lema 7.7. *Dado un contexto multivaluado (G, M, I, W), $\phi : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(M \times W)$, definidas por $\phi(A) = A_{\mathbf{1}}$ y $\psi : \mathcal{P}(M \times W) \to \mathcal{P}(G)$ por $\psi(B^V) = B^V_{\mathbf{2}}$ establecen una conexión de Galois.*

Demostración:
Haremos una demostración análoga a la vista en el Lema 7.1. Supongamos, en primer lugar que $A \subseteq \psi(B^V)$, entonces para todo $a \in A$ resulta $a \in G$ y $w = I(g, m)$, para todo $(m, w) \in B^V$. Es decir, para todo $(m, w) \in B^V$ resulta $w = I(g, m)$, para todo $g \in A$, y en consecuencia para todo $(m, w) \in B^V$, $g \in \phi(A)$, o equivalentemente, $B^V \subseteq \phi(A)$.
Recíprocamente, si $B^V \subseteq \phi(A)$, resulta que cualquiera que sea $(m, w) \in B^V$ se verifica $w = I(g, m)$ para todo $g \in A$ y, en consecuencia $A \subseteq \psi(B^V)$. □

En cualquier caso un contexto multivaluado puede reducirse a un contexto clásico considerando $(G, M, W, I) = (G, M \times W, I)$, es decir, para cada atributo y cada grado de pertenencia se define un nuevo atributo. Con un razonamiento inverso, dado un contexto clásico en el cual ciertos atributos sean diferentes grados de una misma propiedad, pueden agruparse asignando a cada atributo original un determinado grado de pertenencia, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.2. Consideremos el Ejemplo 7.1. "ser pequenõ", "ser mediano" y "ser grande" son diferentes grados de "tamaño", en consecuencia los agruparemos en el atributo t: "ser de tamaño grande", del mismo modo agrupamos las distancias al sol en c: "estar cerca del sol", y la propiedad de tener luna o no en l: "tener luna" y $W = \{1, 2, 3\}$. Con estos nuevos datos, la tabla se transforma, pero veremos que los conceptos de este contexto multivaluado coinciden con los obtenidos anteriormente:

G	t	c	l
Me	1	3	1
Ve	1	3	1
Ti	1	3	3
Ma	1	3	3
Ju	3	1	3
Sa	3	1	3
Ur	2	1	3
Ne	2	1	3
Pl	1	1	3

c_0 : $(\{Me, Ve, Ti, Ma, Ju, Sa, Ur, Ne, Pl\}, \emptyset\})$
c_1 : $(\{Me, Ve, Ti, Ma, Pl\}, \{(t, 1)\})$
c_2 : $(\{Ti, Ma, Ju, Sa, Ur, Ne, Pl\}, \{(l, 3)\})$
c_3 : $(\{Me, Ve, Ti, Ma\}, \{(t, 1), (c, 3)\})$
c_4 : $(\{Ti, Ma\}, \{(t, 1), (l, 3)\})$
c_5 : $(\{Ju, Sa, Ur, Ne, Pl\}, \{(c, 1), (l, 3)\})$
c_6 : $(\{Me, Ve\}, \{(t, 1), (c, 3), (l, 1)\})$
c_7 : $(\{Ti, Ma\}, \{(t, 1), (c, 3), (l, 3)\})$
c_8 : $(\{Pl\}, \{(t, 1), (c, 1), (l, 3)\})$
c_9 : $(\{Ju, Sa\}, \{(t, 3), (c, 1), (l, 3)\}$
c_{10} : $(\{Ur, Ne\}, \{(t, 2), (c, 1), (l, 3)\}))$
c_{11} : $(\emptyset, \{(t, 3), (t, 2), (t, 1), (c, 3), (c, 1), (l, 3), (l, 1)\})$

7.2. Obtención de funciones de pertenencia

En la Definición 7.3 hemos establecido operadores de construcción para obtener los conceptos clásicos. Definiremos a continuación los constructores para un contexto multivaluado y veremos cómo aplicarlos para definir funciones de pertenencia apropiadas al contexto.

Definición 7.8. Dado un contexto multivaluado (G, M, W, I), con $|G| < \infty$, un *constructor jerárquico para el elemento* m de M es una aplicación $\kappa_B : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$, utilizando la notación de la Observación 7.3, definida por:

$$\kappa_m(a) = \{g \in G : I(g, m) \leq I(a, m)\},$$

si $A \subseteq G,\ B \subseteq M$, resulta:

$$\kappa_m(A) = \bigcup_{a \in A} \kappa_m(a).$$

Más sencillamente explicado, $\kappa_m(a)$ es el conjunto de todos los objetos que están relacionados con m, en menor o igual grado que a y $\kappa_m(A)$ es el conjunto de todos los objetos que están relacionados con m, en menor o igual grado que alguno de los elementos de A.

Ejemplo 7.3. Volvamos al ejemplo de los planetas y consideremos el caso multivaluado presentado en el Ejemplo 7.2.
Para $A = \{Ma, Ne\}$ y la propiedad t resulta $\kappa_t(A) = \{Me, Ve, Ti, Ma, Ur, Ne, Pl\}$.

Si $|G| < \infty$, es claro que cualquiera que sea $m \in M$, para todo $g \in G$ resulta $|\kappa_m(g)| \leq |G|$, y, en consecuencia $0 \leq \dfrac{|\kappa_m(g)|}{|G|} \leq 1$. Este hecho nos permite dar la siguiente definición:

Definición 7.9. Sea (G, M, W, I) un contexto multivaluado tal que $|G| < \infty$. Si $m \in M$, entonces $\mu_m : G \to [0, 1]$, definida por $\mu_m(g) = \dfrac{|\kappa_m(g)|}{|G|}$ es una función de pertenencia que determina el subconjunto fuzzy de G: "tener la propiedad m".

Ejemplo 7.4. Construyamos la función de pertenencia para $B = \{t\}$:
$1 = I(Me, t) = I(Ve, t) = I(Ti, t) = I(Ma, t) = I(Pl, t)$,
por lo tanto
$\kappa_t(Me) = \kappa_t(Ve) = \kappa_t(Ti) = \kappa_t(Ma) = \kappa_t(Pl) = \{Me, Ve, Ti, Ma, Pl\}$,
y resulta
$\mu_t(Me) = \mu_t(Ve) = \mu_t(Ti) = \mu_t(Ma) = 5/9$.
$2 = I(Ur, t) = I(Ne, t)$,
por lo tanto
$\kappa_t(Ur) = \kappa_t(Ne) = \{Me, Ve, Ti, Ma, Ur, Ne, Pl\}$,
y resulta
$\mu_t(Ur) = \mu_t(Ne) = 7/9$.
$I(Ju, t) = I(Sa, t)$
por lo tanto
$\kappa_t(Ju) = \kappa_t(Sa) = \{Me, Ve, Ti, Ma, Ju, Sa, Ur, Ne, Pl\}$,
y resulta
$\mu_t(Ju) = \mu_t(Sa) = 9/9 = 1$.
Es decir, la función de pertenencia está dada por la siguiente tabla:

	Me	Ve	Ti	Ma	Ju	Sa	Ur	Ne	Pl
$\mu_{\{t\}}$	5/9	5/9	5/9	5/9	1	1	7/9	7/9	5/9

Una vez determinadas las funciones de pertenencia realizamos las operaciones conjuntistas utilizando las definiciones originales de Zadeh.

7.2.1. Aplicación a la teoría de desarrollo

El problema básico de la teoría de desarrollo reside justamente en la propia medición del desarrollo en sí y la definición de los aspectos que abarca. Las distintas clasificaciones que es posible encontrar en la literatura abarcan desde aspectos puramente económicos hasta nociones biológicas, sociales y políticas. De cualquier modo se suele identificar a un país económicamente desarrollado mediante un alto ingreso *per capita*. Aplicaremos la noción de conceptos multivaluados para analizar el grado de desarrollo mediante un conjunto de variables y sus interrelaciones.

Ejemplo 7.5. Consideraremos como universo un conjunto de países que cubran un amplio espectro: India, Nicaragua, Indonesia, Brasil, Méjico España, Inglaterra, Corea y África Oriental.
Listemos una serie de propiedades, que tomaremos como atributos en distintos grados:

p_1: Ingreso per capita. (a: alto, b: medio, c: bajo)

p_2: Participación relativa en la distribución del ingreso, del 40 % más pobre de la población. (d: alta, e: baja)

p_3: Participación relativa en la distribución del ingreso, del 20 % más rico de la población. (f: alta, g: baja)

p_4: Paridad de poder de compra. (h: alta, i: media, j: baja)

p_5: Paridad de poder de compra creciente. (k: alta, l: baja)

p_6: Porcentaje de la población que no trabaja en agricultura en base al promedio. (m: alto, n: bajo)

p_7: Porcentaje de exportación manufacturada, en base al promedio. (o: alto, p: bajo)

p_8: Porcentaje de población menor de 15 años. (q: alto, r: bajo)

p_9: Porcentaje de población en edad productiva. (s: alto, t: bajo)

p_{10}: Porcentaje de población senil. (u: alto, v: bajo)

p_{11}: Porcentaje de población extremadamente pobre. (w: alto, x: bajo)

p_{12}: Porcentaje de población pobre. (y: alto, z: bajo)

Tomando como fuente Development Report ([WBI95]) establecemos el contexto:

$G = \{$India, Nicaragua, Indonesia, Brasil, Méjico, España, Inglaterra, Corea, África Oriental $\}$

$M = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n,\ o,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z\,\}$

Utilizaremos las abreviaturas India: I_d, Nicaragua: N_i, Indonesia: I_n, Brasil: B_r, Méjico: M_e, España: E, Inglaterra: I_g, Corea: C_o, África Oriental: A_o, para describir la relación $I \subseteq M \times W$ en el siguiente cuadro:

	I_d	N_i	I_n	B_r	M_e	E	I_g	C_o	A_o
a	×	×							×
b			×	×	×				
c						×	×	×	
d		×	×	×	×				
e	×					×	×	×	×
f	×					×	×	×	×
g		×	×	×	×				
h	×	×	×						×
i				×	×				
j						×	×	×	
k	×		×			×		×	
l		×		×	×		×		×
m	×		×			×		×	×

	I_d	N_i	I_n	B_r	M_e	E	I_g	C_o	A_o
n		×		×	×		×		
o		×	×		×				×
p	×			×		×	×	×	
q						×	×	×	
r	×	×	×	×	×				×
s	×	×	×	×					×
t					×	×	×	×	
u	×	×	×	×					×
v					×	×	×	×	
w		×		×	×	×	×	×	
x	×		×						×
y						×	×	×	
z	×	×	×	×	×				×

que puede pasarse a un contexto multivaluado, considerando $W = \{1, 2, 3\}$, por:

	I_d	N_i	I_n	B_r	M_e	E	I_g	C_o	A_o
p_1	1	1	2	2	2	3	3	3	1
p_2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
p_3	1	2	2	2	2	1	1	1	1
p_4	1	1	1	2	2	3	3	3	1
p_5	1	2	1	2	2	1	2	1	2
p_6	1	2	1	2	2	1	2	1	1
p_7	2	1	1	2	1	2	2	2	1
p_8	2	2	2	2	2	1	1	1	2
p_9	1	1	1	1	2	2	2	2	1
p_{10}	1	1	1	1	2	2	2	2	1
p_{11}	2	1	2	1	1	1	1	1	2
p_{12}	2	2	2	2	2	1	1	1	2

Para obtener los conceptos comenzamos con los países de a uno. Tomemos, por ejemplo, India. De la tabla inferimos que está relacionada con:

$(p_1,1),(p_2,2),(p_3,1),(p_4,1)(p_5,1),(p_6,1),(p_7,2),(p_8,2),(p_9,1)$,$(p_{10},1),(p_{11},2)$,y $(p_{12},2)$

Dado que es el único país en estas condiciones, obtenemos el concepto:

({India} , $\{(p_1,1),(p_2,2),(p_3,1),(p_4,1),(p_5,1),(p_6,1),(p_7,2),(p_8,2),(p_9,1)$,$(p_{10},1),(p_{11},2),(p_{12},2)\}$)

Con el mismo procedimiento obtenemos:

({Nicaragua} , $\{(p_1,1),(p_2,1),(p_3,2),(p_4,1),(p_5,2),(p_6,2),(p_7,1),(p_8,2),(p_9,1)$,$(p_{10},1),(p_{11},1),(p_{12},2)\}$)

({Indonesia} , $\{(p_1,2),(p_2,1),(p_3,2),(p_4,1),(p_5,1),(p_6,1),(p_7,1),(p_8,2),(p_9,1)$,$(p_{10},1),(p_{11},2),(p_{12},2)\}$)

({Brasil} , $\{(p_1,2),(p_2,1),(p_3,2),(p_4,2),(p_5,2),(p_6,2),(p_7,2),(p_8,2),(p_9,1)$, $(p_{10},1),(p_{11},1),(p_{12},2)\}$)

y de modo similar procedemos con Méjico, España, Inglaterra, Corea y África Oriental. En el caso de España, dado que comparte exactamente las propiedades con Corea, obtenemos el concepto:

({España, Corea} , $\{(p_1,3),(p_2,2),(p_3,1),(p_4,3),(p_5,1),(p_6,1),(p_7,2),(p_8,1),(p_9,2)$, $(p_{10},2),(p_{11},1),(p_{12},1)\}$)

Luego de haber recorrido completa la lista de países, procedemos a realizar las uniones de las extensiones, agotando todas las posibilidades. En virtud del Lema 7.6 las intensiones serán las correspondientes intersecciones y hallaremos las extensiones por la definición de supremo entre conceptos. Por ejemplo, si unimos India y Nicaragua obtenemos, por intersecciones, que están relacionados con $(p_1,1),(p_4,1),(p_8,2),(p_9,1)$,$(p_{10},1)$ y $(p_{12},2)$, pero estas propiedades las satisface también África Oriental, por lo tanto, obtenemos el concepto:

({India, Nicaragua, África Oriental} , $\{(p_1,1),(p_4,1),(p_8,2),(p_9,1)$,$(p_{10},1),(p_{12},2)\}$)

En el caso de unir India e Indonesia, obtenemos directamente el concepto formado por la unión de la extensiones y la intersección de las intensiones. Es decir:

({India, Indonesia} , $\{(p_4,1),(p_5,1),(p_6,1),(p_8,2),(p_9,1)$,$(p_{10},1),(p_{11},2),(p_{12},2)\}$)

Continuamos este procedimiento hasta agotar las posibilidades. En este caso obtuvimos 53 conceptos, que forman un retículo con primer elemento $(\emptyset\,,\,M^V)$ y último elemento $(G\,,\,\emptyset)$, donde M^V es el conjunto de todos elementos de $M \times V$ que están relacionados con algún objeto g, es decir: $M^V = \bigcup_{g\in G}\{((m,w)\,:\,gI(m,w)\}$. La lista completa de conceptos del retículo pueden encontrarse en el Anexo.

Aplicando el operador κ obtenemos las funciones de pertenencia para cada atributo. El proceso realizado se puede encontrar en el apéndice. Resumiremos las funciones en la siguiente tabla:

	I_d	N_i	I_n	B_r	M_e	E	I_g	C_o	A_o
μ_a	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1	1	1	1/3
μ_d	1	4/9	4/9	4/9	4/9	1	1	1	1
μ_f	5/9	1	1	1	1	5/9	5/9	5/9	5/9
μ_h	4/9	4/9	4/9	2/3	2/3	1	1	1	4/9
μ_k	4/9	1	4/9	1	1	4/9	1	4/9	1
μ_m	5/9	1	5/9	1	1	5/9	1	5/9	5/9
μ_o	1	4/9	4/9	1	4/9	1	1	1	4/9
μ_q	1	1	1	1	1	1/3	1/3	1/3	1
μ_s	5/9	5/9	5/9	5/9	1	1	1	1	5/9
μ_u	5/9	5/9	5/9	5/9	1	1	1	1	5/9
μ_w	1	2/3	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1
μ_y	1	1	1	1	1	1/3	1/3	1/3	1

A partir de estos valores obtenemos las funciones de pertenencia para los restantes conjuntos utilizando los operadores $\wedge$ y $\vee$ sugeridos por Zadeh. Los resultados hallados y permiten hacer las siguientes observaciones:

1. Considerando la conjunción de p_1, p_2 y p_3 observamos que aquellos países que presentan un bajo o alto nivel de ingreso, presentan una distribución del ingreso más equitativa que los países con ingresos medios, cuya distribución se torna más desigual (una excepción la constituye Nicaragua). Esta observación avala la Hipótesis de Kuznets [Kuz55], que señala que la distribución del ingreso presenta una forma funcional de U invertida, graficando grado de desarrollo en las abscisas contra grado de desigualdad en la distribución del ingreso en las ordenadas, considerando únicamente el ingreso per capita como indicador del grado de desarrollo.

2. La conjunción de p_1, p_2 y p_4, sin embargo, deja de avalar la Hipótesis de Kuznets, con lo que estamos frente a un hecho ineludible del desarrollo: Un único indicador (el ingreso per capita) es insuficiente para este tipo de análisis. Observamos que, de todas formas, la relación entre altos ingresos / alto poder de compra / equitativa distribución del ingreso sigue manteniéndose para aquellos países que tienen altos niveles de ingreso. La relación se mantiene, aún cuando el ingreso sea corregido por su poder de compra.

3. Los resultados anteriores se mantienen al analizar el grado de pobreza en un sistema (pobreza extrema o pobreza), a partir de la conjunción de p_1, p_{11} y p_{12}.

El análisis económico realizado por la Dra. Silvia London es tan rico como extenso y excede a los objetivos del presente trabajo. Puede consultarse en [BEL99].
La relación establecida entre la jerarquía de conceptos y la teoría de conjuntos fuzzy permite obtener conclusiones de relevancia, en especial en el caso en que la información sobre las distintas variables esté proporcionada por tablas cualitativas. El enfoque de la jerarquía de conceptos da lugar a la clasificación de los elementos del universo así como a establecer la dependencia entre dichos atributos.

7.3. Jerarquía de conceptos fuzzy

Buscamos en esta sección extender lo dicho para el caso clásico, a la teoría de conjuntos L-fuzzy. Veremos que no se puede establecer una jerarquía de conceptos para un retículo no completo, ni tampoco utilizar los operadores de derivación en forma directa. Haremos uso del teorema de punto fijo de Tarski [Tar55], para lo cual necesitaremos que el retículo L sea completo.

Teorema 7.1. *Sea $\langle L, \leq \rangle$ un retículo completo y $\varphi : L \to L$ una aplicación que preserva el orden. Entonces $\alpha^\bullet := \bigvee\{x \in L : x \leq \varphi(x)\}$ es el mayor punto fijo de φ. Dualmente $\alpha_\bullet := \bigwedge\{x \in L : \varphi(x) \leq x\}$ es el menor punto fijo de φ.*
Aún más, $\langle P, \leq \rangle$, donde P es el conjunto de todos los puntos fijos de φ, es un retículo completo.

Demostración:
Sea $H = \{x \in L : x \leq \varphi(x)\}$. Dado que L es completo, tiene primer elemento y resulta $0 \leq \varphi(0)$ y $H \neq \emptyset$. Para todo $x \in H$ se verifica $x \leq \alpha^\bullet$, como φ preserva el orden podemos afirmar que $x \leq \varphi(x) \leq \varphi(\alpha^\bullet)$, es decir, para todo $x \in H$, se verifica $x \leq \varphi(\alpha)$, de donde $\alpha^\bullet := \bigvee\{x \in L : x \leq \varphi(x)\} \leq \varphi(\alpha)$, es decir, $\alpha^\bullet \in H$. Dado que $\varphi(\alpha^\bullet) \leq \varphi(\varphi(\alpha^\bullet))$ resulta que $\varphi(\alpha^\bullet) \in H$, de donde $\varphi(\alpha^\bullet) \leq \alpha^\bullet$. Esto demuestra que $\alpha^\bullet$ es un punto fijo para φ. Veamos que es el mayor de los puntos fijos.
Sea β un punto fijo, resulta que $\varphi(\beta) = \beta$ y, en consecuencia $\beta \in H$. Por lo tanto $\beta \leq \alpha^\bullet$.
La demostración para $\alpha_\bullet$ es dual.
Sea ahora $X \subseteq P$, un subconjunto no vacío de P. Dado que $P \subseteq L$ y L es completo, podemos afirmar la existencia de $s = \sup X$ y que el segmento $[s, 1]$ es un retículo completo, con el orden de L.
Sea $x \in X$, entonces $x \leq s$ y dado que φ es creciente afirmamos que $\varphi(x) \leq \varphi(s)$. Siendo $x \in X \subseteq P$, resulta $x = \varphi(x) \leq \varphi(s)$ y, en consecuencia $s = \sup X \leq \varphi(s)$.
Es claro que si $s \leq z$ resulta $\varphi(s) \leq \varphi(z)$ y $s \leq \varphi(z)$. Podemos considerar φ_s, la restricción de φ al intervalo $[s, 1]$. De este modo estamos nuevamente en las condiciones del teorema, ya que $[s, 1]$ es un retículo completo y φ_s preserva el orden, y podemos afirmar que $\beta_\bullet = \bigwedge\{x \in [s, 1] : \varphi_s(x) \leq x\} = s$, es punto fijo de φ_s, y, en consecuencia, de φ. Es decir, el conjunto X tiene supremo en P.

Dualmente construimos el ínfimo de X y dado que se trata de un subconjunto no vacío arbitrario, queda demostrado que P, el conjunto de los puntos fijos de φ, es un retículo completo. $\square$

Definición 7.10. [JFG98] Una cuadrupla (L, G, M, I) se dice un *contexto L-fuzzy* si L es un retículo completo, complementado, en el que está definida una conorma S, G es un conjunto de objetos, M un conjunto de atributos e I una relación binaria L-fuzzy entre G y M. Se indica por $\mu_I(g, m)$ el grado en que el objeto g posee la propiedad m.

Para cada subconjunto L-fuzzy A de G , indicamos con μ_A su función de pertenencia y para cada subconjunto L-fuzzy B de M, notaremos μ_B.
Notaremos $A_\mathbf{1}$ al subconjunto L-fuzzy de M, cuya función de pertenencia está definida por:

$$\mu_{A_\mathbf{1}}(m) = \bigwedge_{g\in G} S(\mu_{A'}(g), \mu_I(g, m));$$

análogamente $B_\mathbf{2}$ es subconjunto L-fuzzy de G, cuya función de pertenencia está definida por:

$$\mu_{B_\mathbf{2}}(g) = \bigwedge_{m\in M} S(\mu_{B'}(m), \mu_I(g, m)).$$

Esta noción de conjuntos derivados se suele denominar *derivación ponderada por complementación.*

Lema 7.8. *Los operadores de derivación L-fuzzy dados en la Definición 7.10 coinciden con los dados para el caso clásico en la Definición 7.1*

Demostración: Sea $L = \{0, 1\}$
$1 = \mu_{A_\mathbf{1}}(m) = \bigwedge_{g\in G} S(\mu_{A'}, \mu_I(g, m))$ si y sólo si para todo $g \in G$, $S(\mu_{A'}, \mu_I(g, m))$, si y sólo si $\mu_{A'} = 1$ ó $\mu_I(g, m) = 1$. Es decir, $A_\mathbf{1} = \{m \in M : (\forall g \in A)\, gIm\}$.
La demostración para $B_\mathbf{2}$ es análoga. $\square$

Lema 7.9. *Dado un contexto L-fuzzy (L, G, M, I), se verifican:*

1) *Si $A \subseteq C$, entonces $A_\mathbf{1} \supseteq C_\mathbf{1}$;*

2) *Si $B \subseteq D$, entonces $B_\mathbf{2} \supseteq D_\mathbf{2}$.*

Demostración:

1) Si $A \subseteq C$, resulta $\mu_A(g) \leq \mu_C(g)$, para todo $g \in G$, de donde $\mu_{A'}(g) \geq \mu_{C'}(g)$ y, en consecuencia, $\bigwedge_{g\in G} S(\mu_{A'}(g), \mu_I(g, m)) \geq \bigwedge_{g\in G} S(\mu_{C'}(g), \mu_I(g, m))$ y resulta $A_\mathbf{1} \supseteq C_\mathbf{1}$.

2) Se demuestra análogamente.

□

Las demás propiedades demostradas para el caso clásico, en el Lema 7.3 pueden no ser válidas como lo veremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 7.6. Sea $G = M = L = \{0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1\}$, con la negación $n(x) = 1 - x$, la conorma supremo y la relación fuzzy $I \subseteq G \times M$ definida por $I(g, m) = (g + m) \wedge 1$.

Dado el subconjunto L-fuzzy

$$A = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0.2, 1\rangle, \langle 0.4, 0.6\rangle, \langle 0.6, 1\rangle, \langle 0.8, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\},$$

calculamos

$$A_{\mathbf{1}} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0.2, 0.2\rangle, \langle 0.4, 0.4\rangle, \langle 0.6, 0.6\rangle, \langle 0.8, 0.8\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$$

y luego

$$A_{\mathbf{12}} = \{\langle 0, 0.6\rangle, \langle 0.2, 0.6\rangle, \langle 0.4, 0.8\rangle, \langle 0.6, 0.8\rangle, \langle 0.8, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$$

Dado que $X = Y$ en este ejemplo vemos que $A \not\subseteq A_{\mathbf{12}}$, $A_{\mathbf{1}} \neq A_{\mathbf{121}}$, $B \not\subseteq B_{\mathbf{21}}$, $B_{\mathbf{2}} \neq B_{\mathbf{212}}$.

Definición 7.11. Dado un contexto L-fuzzy (L, G, M, I), los *operadores de construcción L-fuzzy* φ_G y φ_M, son aplicaciones $\varphi_G : L^G \to L^G$, tal que $\varphi_G(A) = A_{\mathbf{12}}$, $\varphi_M : L^M \to L^M$, tal que $\varphi_M(B) = B_{\mathbf{21}}$.

Lema 7.10. *Dado un contexto L-fuzzy (L, G, M, I), las aplicaciones $\varphi_G : L^G \to L^G$, definida por $\varphi(A) = A_{\mathbf{12}}$ y $\varphi_M : L^M \to L^M$ por $\psi(B) = B_{\mathbf{21}}$ verifican:*

1) *Si $A \subseteq C$, entonces $\varphi_G(A) \subseteq \varphi_G(C)$;*

2) *Si $B \subseteq D$, entonces $\varphi_M(B) \subseteq \varphi_M(D)$.*

Demostración: Inmediata a partir del Lema 7.9. □

Dado que estamos trabajando en jerarquía L-fuzzy, el retículo L es completo y, en consecuencia lo son L^G y L^M. Estamos, entonces, en las condiciones del Teorema de punto fijo de Tarski 7.1 y podemos afirmar, en virtud de este teorema, que L_{φ_G} el conjunto de puntos fijos por φ_G y L_{φ_M}, el conjunto de puntos fijos por φ_M, son retículos completos.

Definición 7.12. Dado un contexto L-fuzzy (L, G, M, I), un par $(A, A_{\mathbf{1}})$, o un par$(B_{\mathbf{2}}, B)$ con A, B subconjutos L-fuzzy respectivamente de G y M, es un *concepto L-fuzzy* si A es punto fijo para φ_G o B es punto fijo para φ_M. A se dice la *extensión L-fuzzy* del concepto (A, B) y B la *intensión L-fuzzy.*

Lema 7.11. *Dado un contexto L-fuzzy (L, G, M, I), los conjuntos $\{(A, A_{\mathbf{1}}) : A \in L_{\varphi_G}\}$ y $\{(B_{\mathbf{2}}, B) : B \in L_{\varphi_M}\}$ coinciden.*

Demostración: Consideremos $(A, A_{\mathbf{1}})$, con $A \in L_{\varphi_G}$. $(A_{\mathbf{1}})_{\mathbf{2}} = \varphi_G(A) = A$, es decir, considerando $A_{\mathbf{1}} = B$ tiene la forma $(B_{\mathbf{2}}, B)$. Resta ver que B es punto fijo de φ_M. En efecto: $\varphi_M(B) = \varphi_M(A_{\mathbf{1}}) = (A_{\mathbf{1}})_{\mathbf{21}} = A_{\mathbf{121}} = (A_{\mathbf{12}})_{\mathbf{1}} = (\varphi_G(A))_{\mathbf{1}} = A_{\mathbf{1}} = B$.
Análogamente se ve la otra inclusión. □

Notación 7.2. Dado un contexto L-fuzzy (L, G, M, I) notamos $\mathcal{B}_L(G, M, I)$ al conjunto de todos los conceptos L-fuzzy asociados a dicho concepto.

Nuevamente buscamos construir un retículo de conceptos L-fuzzy para un contexto L-fuzzy dado.
En virtud del Lema 7.11, y el teorema de punto fijo de Tarsky, podemos escribir la siguiente definición:

Definición 7.13. Dado un contexto (L, G, M, I), el *retículo de conceptos fuzzy* para dicho contexto es $\langle \mathcal{B}_L(G, M, I), \wedge, \vee, (M_{\mathbf{2}}, M), (G, G_{\mathbf{1}}) \rangle$, que resulta un retículo completo, con primer elemento $(M_{\mathbf{2}}, M)$ y último elemento $(G, G_{\mathbf{1}})$.

Si L, G y M son conjuntos finitos, de cardinalidad k, m, n respectivamente es posible calcular los k^m subconjuntos fuzzy de L^X y comprobar si son puntos fijos para φ. Notamos $P = \{A \in L^X : \varphi(A) = A\}$, y para cada $A \in P$ construimos el concepto $(A, A_{\mathbf{1}})$, calculando de este modo el retículo completo. De cualquier modo, este método resulta lento cuando se tiene una base de datos extensa. Realicemos un ejemplo ficticio a modo de ilustración, sobre la idea original de [BGW86], y los cálculos de [BFG96]:

Ejemplo 7.7. Consideremos una pequeña encuesta realizada en tres cursos acerca de la preferencia por tres diferentes áreas: ciencias, sociales y arte. Se pidió a los docentes de los cursos que anotaran la cantidad de estudiantes que preferían cada una de las áreas, obteniendo el siguiente cuadro:

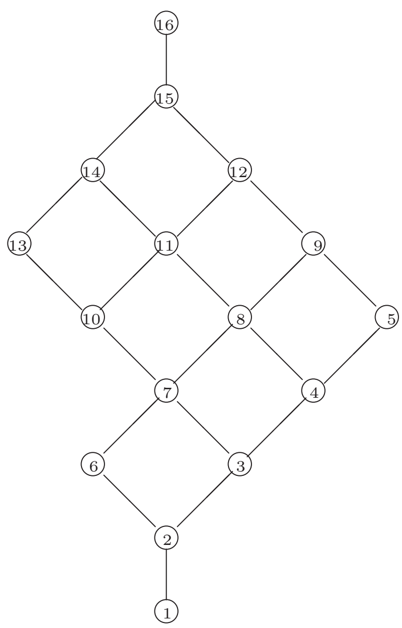
	C_1	C_2	C_3
ciencias	36	36	0
sociales	54	30	18
arte	60	12	42

En primer lugar, a fin de obtener valores entre 0 y 1, dividimos por el número mayor, es decir, por 60. Obtenemos entonces la relación fuzzy I:

I	C_1	C_2	C_3
ciencias	0.6	0.6	0
sociales	0.9	0.5	0.3
arte	1	0.2	0.7

Luego de analizar los 11^3 subconjuntos fuzzy posibles hallamos que 16 son puntos fijos para φ_G, y los detallamos en la siguiente tabla:

	A	$A_{\mathbf{1}}$	$\varphi_G(A) = A_{\mathbf{12}}$
1	$\{\langle c,0.3\rangle,\langle s,0.3\rangle,\langle a,0.3\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.7\rangle,\langle C_2,0.7\rangle,\langle C_3,0.7\rangle\}$	$\{\langle c,0.3\rangle,\langle s,0.3\rangle,\langle a,0.3\rangle\}$
2	$\{\langle c,0.3\rangle,\langle s,0.3\rangle,\langle a,0.4\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.7\rangle,\langle C_2,0.6\rangle,\langle C_3,0.7\rangle\}$	$\{\langle c,0.3\rangle,\langle s,0.3\rangle,\langle a,0.4\rangle\}$
3	$\{\langle c,0.3\rangle,\langle s,0.3\rangle,\langle a,0.5\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.7\rangle,\langle C_2,0.5\rangle,\langle C_3,0.7\rangle\}$	$\{\langle c,0.3\rangle,\langle s,0.3\rangle,\langle a,0.5\rangle\}$
4	$\{\langle c,0.3\rangle,\langle s,0.3\rangle,\langle a,0.6\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.7\rangle,\langle C_2,0.4\rangle,\langle C_3,0.7\rangle\}$	$\{\langle c,0.3\rangle,\langle s,0.3),\langle a,0.6\rangle\}$
5	$\{\langle c,0.3\rangle,\langle s,0.3\rangle,\langle a,0.7\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.7\rangle,\langle C_2,0.3\rangle,\langle C_3,0.7\rangle\}$	$\{\langle c,0.3\rangle,\langle s,0.3\rangle,\langle a,0.7\rangle\}$
6	$\{\langle c,0.4\rangle,\langle s,0.4\rangle,\langle a,0.4\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.6\rangle,\langle C_3,0.6\rangle\}$	$\{\langle c,0.4\rangle,\langle s,0.4\rangle,\langle a,0.4\rangle\}$
7	$\{\langle c,0.4\rangle,\langle s,0.4\rangle,\langle a,0.5\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.5\rangle,\langle C_3,0.6\rangle\}$	$\{\langle c,0.4\rangle,\langle s,0.4\rangle,\langle a,0.5\rangle\}$
8	$\{\langle c,0.4\rangle,\langle s,0.4\rangle,\langle a,0.4\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.4\rangle,\langle C_3,0.6\rangle\}$	$\{\langle c,0.4\rangle,\langle s,0.4\rangle,\langle a,0.4\rangle\}$
9	$\{\langle c,0.4\rangle,\langle s,0.4\rangle,\langle a,0.7\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.3\rangle,\langle C_3,0.6\rangle\}$	$\{\langle c,0.4\rangle,\langle s,0.4\rangle,\langle a,0.7\rangle\}$
10	$\{\langle c,0.5\rangle,\langle s,0.5\rangle,\langle a,0.5\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.5\rangle,\langle C_3,0.5\rangle\}$	$\{\langle c,0.5\rangle,\langle s,0.5\rangle,\langle a,0.5\rangle\}$
11	$\{\langle c,0.5\rangle,\langle s,0.5\rangle,\langle a,0.6\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.4\rangle,\langle C_3,0.5\rangle\}$	$\{\langle c,0.5\rangle,\langle s,0.5\rangle,\langle a,0.6\rangle\}$
12	$\{\langle c,0.5\rangle,\langle s,0.5\rangle,\langle a,0.7\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.3\rangle,\langle C_3,0.5\rangle\}$	$\{\langle c,0.5\rangle,\langle s,0.5\rangle,\langle a,0.7\rangle\}$
13	$\{\langle c,0.6\rangle,\langle s,0.5\rangle,\langle a,0.5\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.5\rangle,\langle C_3,0.4\rangle\}$	$\{\langle c,0.6\rangle,\langle s,0.5\rangle,\langle a,0.5\rangle\}$
14	$\{\langle c,0.6\rangle,\langle s,0.6\rangle,\langle a,0.6\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.4\rangle,\langle C_3,0.4\rangle\}$	$\{\langle c,0.6\rangle,\langle s,0.6\rangle,\langle a,0.6\rangle\}$
15	$\{\langle c,0.6\rangle,\langle s,0.6\rangle,\langle a,0.7\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.3\rangle,\langle C_3,0.4\rangle\}$	$\{\langle c,0.6\rangle,\langle s,0.6\rangle,\langle a,0.7\rangle\}$
16	$\{\langle c,0.6\rangle,\langle s,0.7\rangle,\langle a,0.7\rangle\}$	$\{\langle C_1,0.6\rangle,\langle C_2,0.3\rangle,\langle C_3,0.3\rangle\}$	$\{\langle c,0.6\rangle,\langle s,0.7\rangle,\langle a,0.7\rangle\}$



7.4. Apéndice

7.4.1. Listado de los 52 Conceptos del Ejemplo 7.5

1

$(\ \emptyset, \{(p_1,1),(p_1,2),(p_1,3),(p_2,1),(p_2,2),(p_3,1),(p_3,2),(p_4,1),(p_4,2),(p_4,3),(p_5,1),(p_5,2),$
$(p_6,1),(p_6,2),(p_7,1),(p_7,2),(p_8,1),(p_8,2),(p_9,1),(p_9,2),(p_{10},1),(p_{10},2),(p_{11},1),(p_{11},2),$
$(p_{12},1),(p_{12},2)\}\ )$

2

$(\ \{\mathrm{I}_d\}, \{(p_1,1),(p_2,2),(p_3,1),(p_4,1),(p_5,1),(p_6,1),(p_7,2),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{11},2),(p_{12},2)\}\ )$

3

$(\ \{\mathrm{N}_i\}, \{(p_1,1),(p_2,1),(p_3,2),(p_4,1),(p_5,2),(p_6,2),(p_7,1),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{11},1),(p_{12},2)\}\ )$

4

$(\ \{\mathrm{I}_n\}, \{(p_1,2),(p_2,1),(p_3,2),(p_4,1),(p_5,1),(p_6,1),(p_7,1),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{11},2),(p_{12},2)\}\ )$

5

$(\ \{\mathrm{B}_r\}, \{(p_1,2),(p_2,1),(p_3,2),(p_4,2),(p_5,2),(p_6,2),(p_7,2),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{11},1),(p_{12},2)\}\ )$

6

$(\ \{\mathrm{M}_e\}, \{(p_1,2),(p_2,1),(p_3,2),(p_4,2),(p_5,2),(p_6,2),(p_7,1),(p_8,2),(p_9,2),(p_{10},2),(p_{11},1),(p_{12},2)\}\ )$

7

$(\ \{\mathrm{E}_s,\mathrm{C}_o\}, \{(p_1,3),(p_2,2),(p_3,1),(p_4,3),(p_5,1),(p_6,1),(p_7,2),(p_8,1),(p_9,2),(p_{10},2),(p_{11},1),(p_{12},1)\}\ )$

8

$(\ \{\mathrm{I}_g\}, \{(p_1,3),(p_2,2),(p_3,1),(p_4,3),(p_5,2),(p_6,2),(p_7,2),(p_8,1),(p_9,2),(p_{10},2),(p_{11},1),(p_{12},1)\}\ )$

9

$(\ \{\mathrm{A}_o\}, \{(p_1,1),(p_2,2),(p_3,1),(p_4,1),(p_5,2),(p_6,1),(p_7,1),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{11},2),(p_{12},2)\}\ )$

10

$(\ \{\mathrm{I}_d,\mathrm{I}_n\}, \{(p_4,1),(p_5,1),(p_6,1),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{11},2),(p_{12},2)\}\ )$

11

$(\ \{\mathrm{I}_d,\mathrm{B}_r\}, \{(p_7,2),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{12},2)\}\ )$

12

$(\,\{\mathrm{N}_i, \mathrm{A}_o\}, \{(p_1,1),(p_4,1),(p_5,2),(p_7,1),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{12},2)\}\,)$

13

$(\,\{\mathrm{I}_n, \mathrm{A}_o\}, \{(p_4,1),(p_6,1),(p_7,1),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{11},2),(p_{12},2)\}\,)$

14

$(\,\{\mathrm{I}_d, \mathrm{A}_o\}, \{(p_1,1),(p_2,2),(p_3,1),(p_4,1),(p_6,1),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{11},2),(p_{12},2)\}\,)$

15

$(\,\{\mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n\}, \{(p_2,1),(p_3,2),(p_4,1),(p_7,1),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{12},2)\}\,)$

16

$(\,\{\mathrm{N}_i, \mathrm{B}_r\}, \{(p_2,1),(p_3,2),(p_5,2),(p_6,2),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{11},1),(p_{12},2)\}\,)$

17

$(\,\{\mathrm{N}_i, \mathrm{M}_e\}, \{(p_2,1),(p_3,2),(p_5,2),(p_6,2),(p_7,1),(p_8,2),(p_{11},1),(p_{12},2)\}\,)$

18

$(\,\{\mathrm{I}_n, \mathrm{B}_r\}, \{(p_1,2),(p_2,1),(p_3,2),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{12},2)\}\,)$

19

$(\,\{\mathrm{I}_n, \mathrm{M}_e\}, \{(p_1,2),(p_2,1),(p_3,2),(p_7,1),(p_8,2),(p_{12},2)\}\,)$

20

$(\,\{\mathrm{B}_r, \mathrm{M}_e\}, \{(p_1,2),(p_2,1),(p_3,2),(p_4,2),(p_5,2),(p_6,2),(p_8,2),(p_{11},1),(p_{12},2)\}\,)$

21

$(\,\{\mathrm{M}_e, \mathrm{I}_g\}, \{(p_5,2),(p_6,2),(p_9,2),(p_{10},2),(p_{11},1)\}\,)$

22

$(\,\{\mathrm{B}_r, \mathrm{I}_g\}, \{(p_5,2),(p_6,2),(p_7,2),(p_{11},1)\}\,)$

23

$(\,\{\mathrm{B}_r, \mathrm{A}_o\}, \{(p_5,2),(p_8,2),(p_9,1),(p_{10},1),(p_{12},2)\}\,)$

24

$(\,\{\mathrm{M}_e, \mathrm{A}_o\}, \{(p_5,2),(p_7,1),(p_8,2),(p_{12},2)\}\,)$

25

$(\{\mathrm{E}_s, \mathrm{I}_g, \mathrm{C}_o\}, \{(p_1, 3), (p_2, 2), (p_3, 1), (p_4, 3), (p_7, 2), (p_8, 1), (p_9, 2), (p_{10}, 2), (p_{11}, 1), (p_{12}, 1)\})$

26

$(\{\mathrm{I}_d, \mathrm{E}_s, \mathrm{C}_o\}, \{(p_2, 2), (p_3, 1), (p_5, 1), (p_6, 1), (p_7, 2)\})$

27

$(\{\mathrm{I}_d, \mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n\}, \{(p_4, 1), (p_8, 2), (p_9, 1_{10}, 1), (p_{12}, 2)\})$

28

$(\{\mathrm{I}_d, \mathrm{I}_n, \mathrm{B}_r, \mathrm{A}_o\}, \{(p_4, 1), (p_6, 1), (p_8, 2), (p_9, 1), (p_{10}, 1), (p_{11}, 2), (p_{12}, 2)\})$

29

$(\{\mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n, \mathrm{B}_r\}, \{(p_2, 1), (p_3, 2), (p_8, 2), (p_9, 1), (p_{10}, 1), (p_{12}, 2)\})$

30

$(\{\mathrm{N}_i, \mathrm{B}_r, \mathrm{M}_e\}, \{(p_2, 1), (p_3, 2), (p_5, 2), (p_6, 2), (p_8, 2), (p_{11}, 1), (p_{12}, 2)\})$

31

$(\{\mathrm{I}_n, \mathrm{B}_r, \mathrm{M}_e\}, \{(p_1, 2), (p_2, 1), (p_3, 2), (p_8, 2), (p_{12}, 2)\})$

32

$(\{\mathrm{I}_d, \mathrm{N}_i, \mathrm{A}_o\}, \{(p_1, 1), (p_4, 1), (p_8, 2), (p_9, 1), (p_{10}, 1), (p_{12}, 2)\})$

33

$(\{\mathrm{N}_i, \mathrm{M}_e, \mathrm{A}_o\}, \{(p_5, 2), (p_7, 1), (p_8, 2), (p_{12}, 2)\})$

34

$(\{\mathrm{B}_r, \mathrm{M}_e, \mathrm{A}_o\}, \{(p_5, 2), (p_8, 2), (p_{12}, 2)\})$

35

$(\{\mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n, \mathrm{A}_o\}, \{(p_4, 1), (p_7, 1), (p_8, 2), (p_9, 1), (p_{10}, 1), (p_{12}, 2)\})$

36

$(\{\mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n, \mathrm{M}_e\}, \{(p_2, 1), (p_3, 2), (p_7, 1), (p_8, 2), (p_{12}, 2)\})$

37

$(\{\mathrm{I}_d, \mathrm{E}_s, \mathrm{C}_o, \mathrm{A}_o\}, \{(p_2, 2), (p_3, 1), (p_6, 1)\})$

38

$(\,\{\mathrm{B}_r, \mathrm{E}_s, \mathrm{I}_g, \mathrm{C}_o\}, \{(p_7, 2), (p_{11}, 1)\}\,)$

39

$(\,\{\mathrm{M}_e, \mathrm{E}_s, \mathrm{I}_g, \mathrm{C}_o\}, \{(p_9, 2), (p_{10}, 2), (p_{11}, 1)\}\,)$

40

$(\,\{\mathrm{I}_d, \mathrm{I}_n, \mathrm{E}_s, \mathrm{C}_o\}, \{(p_5, 1), (p_6, 1)\}\,)$

41

$(\,\{\mathrm{I}_d, \mathrm{E}_s, \mathrm{I}_g, \mathrm{C}_o\}, \{(p_2, 2), (p_3, 1), (p_5, 1), (p_6, 1), (p_7, 2)\}\,)$

42

$(\,\{\mathrm{I}_d, \mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n, \mathrm{A}_o\}, \{(p_4, 1), (p_8, 2), (p_9, 1), (p_{10}, 1), (p_{12}, 2)\}\,)$

43

$(\,\{\mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n, \mathrm{B}_r, \mathrm{M}_e\}, \{(p_2, 1), (p_3, 2), (p_8, 2), (p_{12}, 2)\}\,)$

44

$(\,\{\mathrm{N}_i, \mathrm{B}_r, \mathrm{M}_e, \mathrm{I}_g\}, \{(p_5, 2), (p_6, 2), (p_{11}, 1)\}\,)$

45

$(\,\{\mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n, \mathrm{M}_e, \mathrm{A}_o\}, \{(p_7, 1), (p_8, 2), (p_{12}, 2)\}\,)$

46

$(\,\{\mathrm{I}_d, \mathrm{E}_s, \mathrm{I}_g, \mathrm{C}_o, \mathrm{A}_o\}, \{(p_2, 2), (p_3, 1)\}\,)$

47

$(\,\{\mathrm{I}_d, \mathrm{B}_r, \mathrm{E}_s, \mathrm{I}_g, \mathrm{C}_o\}, \{(p_7, 2)\}\,)$

48

$(\,\{\mathrm{I}_d, \mathrm{I}_n, \mathrm{E}_s, \mathrm{C}_o, \mathrm{A}_o\}, \{(p_6, 1)\}\,)$

49

$(\,\{\mathrm{I}_d, \mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n, \mathrm{B}_r, \mathrm{A}_o\}, \{(p_8, 2), (p_9, 1), (p_{10}, 1), (p_{12}, 2)\}\,)$

50

$(\,\{\mathrm{N}_i, \mathrm{B}_r, \mathrm{M}_e, \mathrm{I}_g, \mathrm{A}_o\}, \{(p_5, 2)\}\,)$

51

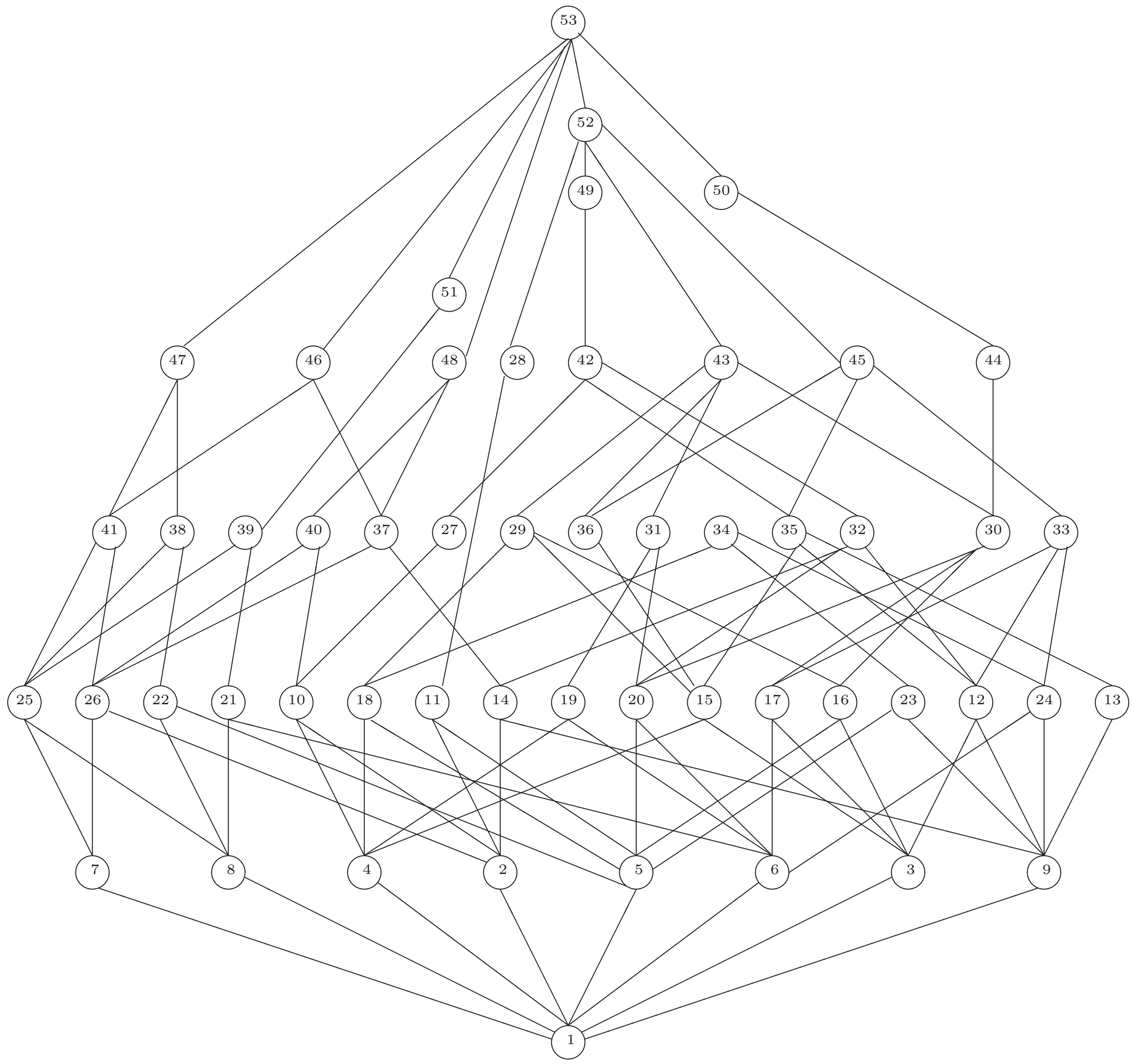
$(\ \{\mathrm{N}_i, \mathrm{B}_r, \mathrm{M}_e, \mathrm{E}_s, \mathrm{I}_g, \mathrm{C}_o\}, \{(p_{11}, 1)\}\ )$

52

$(\ \{\mathrm{I}_d, \mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n, \mathrm{B}_r, \mathrm{M}_e, \mathrm{A}_o\}, \{(p_8, 2), (p_{12}, 2)\}\ )$

53

$(\ \{\mathrm{I}_d, \mathrm{N}_i, \mathrm{I}_n, \mathrm{B}_r, \mathrm{M}_e, \mathrm{E}_s, \mathrm{I}_g, \mathrm{C}_o, \mathrm{A}_o\}, \emptyset)$



7.4.2. Proceso de obtención de las funciones de pertenencia usando el operador κ

a:

$\kappa_a(\text{In}) = \{\text{In, Ni, Af.O}\}$ $\mu_a(\text{In}) = 3/9$
$\kappa_a(\text{Ni}) = \{\text{In, Ni, Af.O}\}$ $\mu_a(\text{Ni}) = 3/9$
$\kappa_a(\text{Ind}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Af.O}\}$ $\mu_a(\text{Ind}) = 6/9$
$\kappa_a(\text{Br}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Af.O}\}$ $\mu_a(\text{Br}) = 6/9$
$\kappa_a(\text{Me}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Af.O}\}$ $\mu_a(\text{Me}) = 6/9$
$\kappa_a(\text{Es}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_a(\text{Es}) = 1$
$\kappa_a(\text{Ing}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_a(\text{Ing}) = 1$
$\kappa_a(\text{Co}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_a(\text{Co}) = 1$
$\kappa_a(\text{Af.O}) = \{\text{In, Ni, Af.O}\}$ $\mu_a(\text{Af.O}) = 3/9$

d:

$\kappa_d(\text{In}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_d(\text{In}) = 1$
$\kappa_d(\text{Ni}) = \{\text{Ni, Ind, Br, Me}\}$ $\mu_d(\text{Ni}) = 4/9$
$\kappa_d(\text{Ind}) = \{\text{Ni, Ind, Br, Me}\}$ $\mu_d(\text{Ind}) = 4/9$
$\kappa_d(\text{Br}) = \{\text{Ni, Ind, Br, Me}\}$ $\mu_d(\text{Br}) = 4/9$
$\kappa_d(\text{Me}) = \{\text{Ni, Ind, Br, Me}\}$ $\mu_d(\text{Me}) = 4/9$
$\kappa_d(\text{Es}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_d(\text{Es}) = 1$
$\kappa_d(\text{Ing}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_d(\text{Ing}) = 1$
$\kappa_d(\text{Co}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_d(\text{Co}) = 1$
$\kappa_d(\text{Af.O}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_d(\text{Af.O}) = 1$

f:

$\kappa_f(\text{In}) = \{\text{In, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_f(\text{In}) = 5/9$
$\kappa_f(\text{Ni}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_f(\text{Ni}) = 1$
$\kappa_f(\text{Ind}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_f(\text{Ind}) = 1$
$\kappa_f(\text{Br}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_f(\text{Br}) = 1$
$\kappa_f(\text{Me}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_f(\text{Me}) = 1$
$\kappa_f(\text{Es}) = \{\text{In, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_f(\text{Es}) = 5/9$
$\kappa_f(\text{Ing}) = \{\text{In, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_f(\text{Ing}) = 5/9$
$\kappa_f(\text{Co}) = \{\text{In, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_f(\text{Co}) = 5/9$
$\kappa_f(\text{Af.O}) = \{\text{In, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_f(\text{Af.O}) = 5/9$

h:

$\kappa_h(\text{In}) = \{\text{In, Ni, Ind, Af.O}\}$ $\mu_h(\text{In}) = 4/9$
$\kappa_f(\text{Ni}) = \{\text{In, Ni, Ind, Af.O}\}$ $\mu_h(\text{Ni}) = 4/9$
$\kappa_f(\text{Ind}) = \{\text{In, Ni, Ind, Af.O}\}$ $\mu_h(\text{Ind}) = 4/9$
$\kappa_f(\text{Br}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Af.O}\}$ $\mu_h(\text{Br}) = 6/9$

$\kappa_f(\text{Me}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Af.O}\}$ $\mu_h(\text{Me}) = 6/9$
$\kappa_f(\text{Es}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_h(\text{Es}) = 1$
$\kappa_f(\text{Ing}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_h(\text{Ing}) = 1$
$\kappa_f(\text{Co}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_h(\text{Co}) = 1$
$\kappa_f(\text{Af.O}) = \{\text{In, Ni, Ind, Af.O}\}$ $\mu_h(\text{Af.O}) = 4/9$

k:
$\kappa_k(\text{In}) = \{\text{In, Ind, Es, Co}\}$ $\mu_k(\text{In}) = 4/9$
$\kappa_k(\text{Ni}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_k(\text{Ni}) = 1$
$\kappa_k(\text{Ind}) = \{\text{In, Ind, Es, Co}\}$ $\mu_k(\text{Ind}) = 4/9$
$\kappa_k(\text{Br}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_k(\text{Br}) = 1$
$\kappa_k(\text{Me}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_k(\text{Me}) = 1$
$\kappa_k(\text{Es}) = \{\text{In, Ind, Es, Co}\}$ $\mu_k(\text{Es}) = 4/9$
$\kappa_k(\text{Ing}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_k(\text{Ing}) = 1$
$\kappa_k(\text{Co}) = \{\text{In, Ind, Es, Co}\}$ $\mu_k(\text{Co}) = 4/9$
$\kappa_k(\text{Af.O}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_k(\text{Af.O}) = 1$

m:
$\kappa_m(\text{In}) = \{\text{In, Ind, Es, Co, Af.O}\}$ $\mu_m(\text{In}) = 5/9$
$\kappa_m(\text{Ni}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_m(\text{Ni}) = 1$
$\kappa_m(\text{Ind}) = \{\text{In, Ind, Es, Co, Af.O}\}$ $\mu_m(\text{Ind}) = 5/9$
$\kappa_m(\text{Br}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_m(\text{Br}) = 1$
$\kappa_m(\text{Me}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_m(\text{Me}) = 1$
$\kappa_m(\text{Es}) = \{\text{In, Ind, Es, Co, Af.O}\}$ $\mu_m(\text{Es}) = 5/9$
$\kappa_m(\text{Ing}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_m(\text{Ing}) = 1$
$\kappa_m(\text{Co}) = \{\text{In, Ind, Es, Co, Af.O}\}$ $\mu_m(\text{Co}) = 5/9$
$\kappa_m(\text{Af.O}) = \{\text{In, Ind, Es, Co, Af.O}\}$ $\mu_m(\text{Af.O}) = 5/9$

o:
$\kappa_o(\text{In}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_o(\text{In}) = 1$
$\kappa_o(\text{Ni}) = \{\text{Ni, Ind, Me, Af.O}\}$ $\mu_o(\text{Ni}) = 4/9$
$\kappa_o(\text{Ind}) = \{\text{Ni, Ind, Me, Af.O}\}$ $\mu_o(\text{Ind}) = 4/9$
$\kappa_o(\text{Br}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_o(\text{Br}) = 1$
$\kappa_o(\text{Me}) = \{\text{Ni, Ind, Me, Af.O}\}$ $\mu_o(\text{Me}) = 4/9$
$\kappa_o(\text{Es}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_o(\text{Es}) = 1$
$\kappa_o(\text{Ing}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_o(\text{Ing}) = 1$
$\kappa_o(\text{Co}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_o(\text{Co}) = 1$
$\kappa_o(\text{Af.O}) = \{\text{Ni, Ind, Me, Af.O}\}$ $\mu_o(\text{Af.O}) = 4/9$

q:
$\kappa_q(\text{In}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_q(\text{In}) = 1$

$\kappa_q(\text{Ni}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_q(\text{Ni}) = 1$
$\kappa_q(\text{Ind}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_q(\text{Ind}) = 1$
$\kappa_q(\text{Br}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_q(\text{Br}) = 1$
$\kappa_q(\text{Me}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_q(\text{Me}) = 1$
$\kappa_q(\text{Es}) = \{\text{Es, Ing, Co}\}$ $\mu_q(\text{Es}) = 3/9$
$\kappa_q(\text{Ing}) = \{\text{Es, Ing, Co}\}$ $\mu_q(\text{Ing}) = 3/9$
$\kappa_q(\text{Co}) = \{\text{Es, Ing, Co}\}$ $\mu_q(\text{Co}) = 3/9$
$\kappa_q(\text{Af.O}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_q(\text{Af.O}) = 1$

s:
$\kappa_s(\text{In}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br Af.O}\}$ $\mu_s(\text{In}) = 5/9$
$\kappa_s(\text{Ni}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br Af.O}\}$ $\mu_s(\text{Ni}) = 5/9$
$\kappa_s(\text{Ind}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br Af.O}\}$ $\mu_s(\text{Ind}) = 5/9$
$\kappa_s(\text{Br}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br Af.O}\}$ $\mu_s(\text{Br}) = 5/9$
$\kappa_s(\text{Me}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_s(\text{Me}) = 1$
$\kappa_s(\text{Es}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_s(\text{Es}) = 1$
$\kappa_s(\text{Ing}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_s(\text{Ing}) = 1$
$\kappa_s(\text{Co}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_s(\text{Co}) = 1$
$\kappa_s(\text{Af.O}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br Af.O}\}$ $\mu_s(\text{Af.O}) = 5/9$

u:
$\kappa_u(\text{In}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br Af.O}\}$ $\mu_u(\text{In}) = 5/9$
$\kappa_u(\text{Ni}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br Af.O}\}$ $\mu_u(\text{Ni}) = 5/9$
$\kappa_u(\text{Ind}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br Af.O}\}$ $\mu_u(\text{Ind}) = 5/9$
$\kappa_u(\text{Br}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br Af.O}\}$ $\mu_u(\text{Br}) = 5/9$
$\kappa_u(\text{Me}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_u(\text{Me}) = 1$
$\kappa_u(\text{Es}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_u(\text{Es}) = 1$
$\kappa_u(\text{Ing}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_u(\text{Ing}) = 1$
$\kappa_u(\text{Co}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_u(\text{Co}) = 1$
$\kappa_u(\text{Af.O}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br Af.O}\}$ $\mu_u(\text{Af.O}) = 5/9$

w:
$\kappa_w(\text{In}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_w(\text{In}) = 1$
$\kappa_w(\text{Ni}) = \{\text{Ni, Br, Me, Es, Ing, Co}\}$ $\mu_w(\text{Ni}) = 6/9$
$\kappa_w(\text{Ind}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_w(\text{Ind}) = 1$
$\kappa_w(\text{Br}) = \{\text{Ni, Br, Me, Es, Ing, Co}\}$ $\mu_w(\text{Br}) = 6/9$
$\kappa_w(\text{Me}) = \{\text{Ni, Br, Me, Es, Ing, Co}\}$ $\mu_w(\text{Me}) = 6/9$
$\kappa_w(\text{Es}) = \{\text{Ni, Br, Me, Es, Ing, Co}\}$ $\mu_w(\text{Es}) = 6/9$
$\kappa_w(\text{Ing}) = \{\text{Ni, Br, Me, Es, Ing, Co}\}$ $\mu_w(\text{Ing}) = 6/9$
$\kappa_w(\text{Co}) = \{\text{Ni, Br, Me, Es, Ing, Co}\}$ $\mu_w(\text{Co}) = 6/9$
$\kappa_w(\text{Af.O}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$ $\mu_w(\text{Af.O}) = 1$

y:

$\kappa_y(\text{In}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$	$\mu_y(\text{In}) = 1$
$\kappa_y(\text{Ni}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$	$\mu_y(\text{Ni}) = 1$
$\kappa_y(\text{Ind}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$	$\mu_y(\text{Ind}) = 1$
$\kappa_y(\text{Br}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$	$\mu_y(\text{Br}) = 1$
$\kappa_y(\text{Me}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$	$\mu_y(\text{Me}) = 1$
$\kappa_y(\text{Es}) = \{\text{Es, Ing, Co}\}$	$\mu_y(\text{Es}) = 3/9$
$\kappa_y(\text{Ing}) = \{\text{Es, Ing, Co}\}$	$\mu_y(\text{Ing}) = 3/9$
$\kappa_y(\text{Co}) = \{\text{Es, Ing, Co}\}$	$\mu_y(\text{Co}) = 3/9$
$\kappa_y(\text{Af.O}) = \{\text{In, Ni, Ind, Br, Me, Es, Ing, Co, Af.O}\}$	$\mu_y(\text{Af.O}) = 1$

Capítulo 8

Conclusiones

En la presente tesis, que comenzáramos a preparar bajo la dirección de la Mg. Diana M. Brignole [BE96], hemos procurado recoger las diferentes notaciones y extensiones que ha merecido el estudio de los retículos residuados, tanto posteriores como anteriores a la aparición de la teoría de conjuntos fuzzy [Zad65]. Hemos procurado munirlo de variados ejemplos y dar las demostraciones detalladamente a fin de que pueda ser de utilidad como introducción al estudio de estas variedades. Con esta intención partimos de la estructura de retículo más general, que siguiendo a Pavelka denominamos *retículo residual generalizado*, y fuimos agregando condiciones para luego describir los *retículos residuales integrales*, *lineales*, *divisibles*, *de Girard*, *BL álgebras* y *MV álgebras* hasta llegar al intervalo unitario real en el cual analizamos las diferentes estructuras dadas por distintas t-normas y, en especial, las dadas por el *mínimo*, el *producto* y la t-norma de *Lukasiewicz*.

Hemos iniciado el capítulo 1 dando la definición original de Zadeh [Zad65], que generaliza la noción de función característica χ a una función de pertenencia μ. Esta función de pertenencia, a priori, sólo debe satisfacer dos condiciones: su dominio A debe estar incluido en el universo X y su imagen debe ser un subconjunto del intervalo real [0,1] (los grados en que cada elemento del dominio satisface la propiedad que define el conjunto A). Entonces, al modelizar una cierta situación el primer problema que se presenta es decidir qué función de pertenencia asociar al conjunto fuzzy que se pretende definir. Cuando $X \subseteq I\!\!R$ todas las posibles situaciones asociadas a proposiciones simples pueden modelizarse a utilizando funciones continuas a trozos, crecientes, decrecientes o bien con un único valor máximo que puede tomarlo en todo un intervalo de X. Las funciones Γ, L, Λ y Π satisfacen estas condiciones y S, Z y SZ son además diferenciables. Incluimos, también un caso discreto. Todas ellas se encuentran disponibles en las aplicaciones que tanto Matlab como Mathematica dedican a la teoría fuzzy. Asimismo hemos listado los modificadores fuzzy y las operaciones conjuntistas que se encuentran a disposición en dichos programas.
Dado que el objetivo principal de esta tesis es el estudio de la estructura algebraica aso-

ciada, no nos extendimos más en los conceptos básicos. Sólo hemos dado las definiciones de relación binaria fuzzy y de conjuntos L-fuzzy, para luego utilizarlas en una aplicación.

En el capítulo 2 presentamos la definición de conjunto fuzzy y sus operaciones. Estas operaciones conjuntistas pueden ser definidas debido a la estructura algebraica ordenada del intervalo real unitario. En realidad, sólo se necesita que el conjunto de posibles valores de verdad conformen un retículo residual. Esta estructura algebraica no es exclusiva de la teoría de conjuntos fuzzy, ni se originó con ella, ya que se trata de un retículo en el cual se ha definido una implicación. Esta idea había aparecido previamente de la mano de Ward y Dillworth ([DW39]), trabajando en la estructura del retículo de los ideales de un anillo. Es un hecho sabido que si el tal anillo no es abeliano, se pueden considerar ideales a izquierda y a derecha, hecho que genera una residuación a izquierda y otra residuación a derecha. Esko Turunen llama a esta estructura *retículo residual generalizado*. Luego de dar la definición que figura en [Tur92], realizamos la comparación con la que se encuentra en el libro de Galatos, Jipsen, Kowalski y Ono [GJKO01], quienes consideran un retículo no necesariamente acotado. Encontramos luego una base ecuacional, diferente a la que puede hallarse en la tesis de J. Galatos, [Gal03], debido a lo cual afirmamos que los retículos residuales generalizados, o *FL álgebras*, conforman una variedad.
Dado que en un retículo residual, el producto y el residuo conforman un par adjunto que definen una correspondencia de Galois, hemos dado las definiciones de esta correspondencia que presentan Davey y Priestley en [DP02] y Birkhoff en [Bir67], verificando que son equivalentes. Luego establecimos las correspondencias existentes entre la residuación a derecha y la residuación a izquierda. Jan Pavelka en [Pav79] da las condiciones para construir un par adjunto a partir de un producto o una implicación. Hemos generalizado este resultado para un producto no abeliano y analizado si el retículo original con el par adjunto se convierte en un retículo residual.
Luego probamos que si el producto es abeliano, existe un único residuo, esta estructura se denomina *retículo residual*. Vimos que se trata de una subvariedad y recopilamos propiedades útiles para posteriores demostraciones.
Al agregar a los axiomas *ley de conservación de la verdad*, que se refleja en el retículo por medio de la ecuación $x \to x = 1$, se obtiene una estructura que Höhle [Höh95] denomina *retículo residual integral* y conforma una subvariedad de la anterior. Luego de caracterizar la condición de integralidad dimos ejemplos finitos y no finitos para esta estructura y demostramos más propiedades que son utilizadas posteriormente, para las cuales es requisito la integralidad del retículo residuado.
Al agregar a los axiomas la condición que Hájek [Háj97] llama de *prelinealidad* y Höhle [Höh95] *ley fuerte de De Morgan*, es decir $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$, se obtiene una subvariedad de los retículos integrales, que, siguiendo a Antonio Monteiro [Mon96] llamamos *lineales*. Vemos que toda cadena es necesariamente un retículo residual lineal, y que si un retículo residual lineal finito no es totalmente ordenado, entonces su último elemento no puede ser irreducible. Este hecho es de gran utilidad para descomponer BL álgebras.

Seguidamente dimos la noción de *retículo residual divisible*, denominación que proviene claramente de los orígenes de la residuación en problemas de divisibilidad en anillos. Esta subvariedad tiene como requisito la equivalencia entre la noción ser menor y ser múltiplo. Luego de caracterizarla probamos que también forma una subvariedad de los retículos integrales. Establecimos, asimismo, la relación que tienen con un *hoop*, según la definición que se puede encontrar en [GJKO01].
A partir de un retículo residual integral, la existencia de un elemento 0 permite definir un operador unario $\neg x = x \rightarrow 0$, que llamamos *negación*. Demostramos las propiedades de este operador que son de utilidad para proposiciones posteriores. Si esta negación es involutiva, es decir, si se cumple $\neg(\neg x) = x$, el retículo se denomina *de Girard*, debido a esto afirmamos que se trata de una subvariedad de los retículos residuales integrales, que no tiene ninguna relación particular con las subvariedades de retículos divisibles o lineales.
Siguiendo a Hájek, denominamos *BL álgebra* a un retículo residual lineal y divisible. Ulrich Höhle [Höh95] denomina a esta estructura *álgebra de Hájek*. Vemos que las BL álgebras son subvariedad tanto de los retículos lineales como de los divisibles. De entre las BL álgebras distinguimos a las *álgebras producto* y vimos que son el cono negativo de un grupo abeliano.
También siguiendo a Hájek definimos una *MV álgebra* como un retículo residual integral que satisface $(x \rightarrow y) \rightarrow y = x \vee y$. Es claro que forman una subvariedad de los retículos de Girard y también de los divisibles. Aún más, caracterizamos las MV álgebras como retículo residual divisible de Girard. Esta estructura, asociada a la lógica multivaluada, fue definida originariamente por Chang en [Cha58]. Dimos esta definición original y comparamos ambas, dando las definiciones de las operaciones de cada una de las definiciones, en función de las operaciones de la otra. Realizamos el mismo procedimiento con las *álgebras de Wajsberg*, definidas según Turunen [Tur92] y comparadas también con las *álgebras de Sales* que menciona Rodríguez en su tesis doctoral [Rod80]. Finalmente, a modo de resumen, presentamos un listado de las estructuras mencionadas en el capítulo, con el diagrama de Hasse que muestra la relación entre las variedades.

En el capítulo 3, sabiendo que todas las estructuras analizadas son variedades, escribimos las definiciones de homomorfismo, subálgebra y producto analizando las características particulares, según la variedad en que se esté trabajando. Dimos la definición de filtro, que no coincide con la de filtro de retículo ya que aunque todo filtro de retículo residual es filtro de retículo, no todo filtro de retículo es un filtro en la variedad de los retículos residuales. Listamos algunos resultados del álgebra universal, interpretándolos en la variedad de los retículos residuales integrales. Dimos, asimismo, la definición de sistema deductivo y vimos que es una noción equivalente a la de filtro de retículo residual. Observamos, asimismo, que la noción de filtro primo y su caracterización coinciden con las respectivas para retículos, y que todo filtro que contiene un filtro primo, es primo. Antonio Monteiro, en [Mon96], prueba que en un álgebra de Heyting lineal, la familia

de todos los filtros que contienen a un filtro primo está linealmente ordenada. Dado que un álgebra de Heyting es un retículo residual integral con producto idempotente, hemos generalizado este resultado para cualquier retículo residual lineal.
Siguiendo esta línea de trabajo, interpretamos la noción de congruencia y cociente en la variedad de los retículos residuales integrales, y también las de subálgebra y producto directo.
Del mismo modo trabajamos con la noción de ultrafiltro, que en la variedad de los retículos residuales es equivalente a la de sistema deductivo categórico. Probamos así que todo filtro está contenido en un ultrafiltro, y todo ultrafiltro es primo.
En lo que respecta a la noción de simplicidad, la definición de Höhle no coincide con la dada por Burris y Sankappanavar en [BS81], pero hemos demostrado la equivalencia entre ambas. Probamos, asimismo, que en un retículo residual divisible, el cociente por un ultrafiltro generado por un átomo idempotente es isomorfo a $\{0, 1\}$, y en un retículo residual integral el cociente es localmente finito. Finalmente caracterizamos a los retículos lineales como productos subdirectos de cadenas; a los semi-simples como productos subdirectos de integrales localmente finitos. A las MV álgebras como retículos residuales divisibles semi-simples y a las álgebras de Boole como álgebras de Heyting semi-simples.

En el capítulo 4, siguiendo a Antonio Monteiro [Mon95], analizamos ciertos elementos en retículos residuales integrales que tienen un comportamiento especial. En primer lugar hablamos de los elementos tales que $x = (x \to 0) \to 0$, los llamamos *elementos regulares* y los caracterizamos como la negación de otro elemento. Probamos que los elementos regulares de un álgebra de Heyting lineal conforman un álgebra de Boole.
Hablamos luego de los elementos cuya negación es 0, los llamamos *elementos densos* y probamos que si el retículo es lineal o divisible, el conjunto de los elementos densos es cerrado con respecto a todas las operaciones binarias. Probamos también que en un retículo de Girard el único elemento denso es el 1.
Demostramos a continuación propiedades de los *elementos idempotentes* que utilizamos luego para caracterizar los *elementos booleanos*, es decir, los elementos x para los cuales existe un complemento booleano y; más precisamente tales que $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$. Utilizamos luego estos elementos para la representación de una BL álgebra.
Analizamos también los elementos *nilpotentes* que son de utilidad en el estudio de las t-normas nilpotentes. El teorema final de este capítulo afirma que para que una BL álgebra sea descomponible es condición necesaria y suficiente que exista un elemento booleano no trivial. Este resultado nos llevará a demostrar que toda BL álgebra finita, con más de un átomo, es isomorfa a un producto directo de BL álgebras con un único átomo.

En el capítulo 5 nos abocamos al estudio de casos particulares. En primer lugar trabajamos con la noción de t-norma, que, de la mano de Schweizer y Sklar [SS61] y procedente de la teoría de probabilidades brinda un abanico de productos diferentes para munir a la cadena [0,1] de una estructura de retículo residual, que verificamos, está asegurada

siempre que la t-norma sea continua a izquierda. Probamos, además que si dicha t-norma es continua, la estuctura que obtenemos es una BL álgebra.
Vimos las nociones de conorma y de negación que constituyen lo que se denomina ternas de De Morgan, ya que verifican las leyes de De Morgan: $1-(T(x,y)) = S((1-x),(1-y))$ y $1-(S(x,y)) = T((1-x),(1-y))$.
Describimos particularmente la t-norma mínimo, llamada también operador de Zadeh o de Gödel; el producto aritmético, llamado operador de Mandani; el producto acotado u operador de Łukasiewicz y el producto drástico.
Usando los resultados de Pavelka [Pav79], asociada a cada t-norma (producto) definimos una implicación y una negación. Vimos entonces que sólo en el caso de la t-norma de Łukasiewicz se generaliza la definición material de implicación de la lógica clásica, es decir, $x \rightarrow y = \neg x \vee y$. Si utilizamos $\neg x = 1 - x$, y como disyunción la conorma asociada, para cada t-norma definimos una nueva implicación.
Cerramos este capítulo con las nociones de álgebra de De Morgan y de Kleene, dado que históricamente fueron precursoras en esta teoría. Principalmente el problema del álgebra de De Morgan es la falta de implicación. Analizamos, entonces, las implicaciones más utilizadas para estas álgebras y verificamos que ninguna de ellas mune al álgebra de un residuo.

En el capítulo 6, luego de dar las definiciones previas de teoría formal, de lenguaje y de demostración, hemos seguido a Peter Hájek para dar los lineamientos generales de la lógica asociada a una BL álgebra, con sus particularizaciones respectivas para las t-normas estudiadas previamente, dando un teorema de completud para cada caso.
Verificamos que el operador de Zadeh está asociado a la lógica intuicionista, también llamada *lógica de Gödel* y genera un álgebra de Heyting, el operador de Mandani a la *lógica producto* y genera un álgebra producto o Π álgebra, el operador de Łukasiewicz, también llamado suma truncada, está asociado a la lógica de Łukasiewicz o multivaluada y genera una MV álgebra.

En el capítulo 7, finalmente, y en busca de un método para definir una función de pertenencia adecuada para una cierta aplicación, estudiamos la jerarquía de conceptos clásica y multivaluada. Dimos la definición de jerarquía de conceplos clásica de Rudolph Wille [Wil82] y la extensión que él mismo da a jerarquías multivaluadas. Definimos entonces un *constructor jerárquico de funciones de pertenencia* y lo aplicamos a la teoría de desarrollo económico, realizando mejoras sobre un trabajo que fuera presentado en el SIGEF'99 congress [BEL99].
Dado que trabajamos con teorías fuzzy y existiendo la jerarquía de conceptos fuzzy, dedicamos la última sección de este capítulo a exponer la definición que se encuentra en [BFG96] y [JFG98], conjuntamente con un ejemplo.

Justamente, en busca de las definiciones de funciones de pertenencia, y debido al opera-

dor de construcción jerárquico, hallamos la definición de un nuevo semi-retículo inferior para las partes fuzzy de un referencial X, con propiedades muy interesantes en lo que hace a la definición de la implicación y el supremo. No lo hemos incluido en la presente tesis, ya que hemos dejado el desarrollo de este tema para un próximo trabajo.
Del mismo modo, en el capítulo 2, la variedad más general que hemos mencionado es la de los *retículos residuales generalizados*, llamados así por Jan Pavelka [Pav79], pero luego hemos trabajado con retículos residuales cuyo producto es conmutativo. Es nuestra intención profundizar el estudio de las llamadas FL álgebras, extendiendo los resultados ya conocidos para retículos con productos abelianos a retículos con residuo a izquierda y derecha.

Índice alfabético

L-soporte, 16
Π-álgebra, 70
$\Pi-$álgebra linealmente ordenada, 72
$x \xrightarrow{n} y$, 114
Álgebra de Boole, 10
Álgebra de De Morgan, 154
Álgebra de Kleene, 155
Álgebra de Lindenbaum, 176
Álgebra de Wajsberg, 77
Álgebra producto, 70
  linealmente ordenada, 72
1-Tautología, 162

número fuzzy triangular, 5

Asignación, 162

BL álgebra, 70

Cópula, 139
Clasicidad de la implicación, 157
Composición max-$\otimes$, 17
Composición max-$\star$, 13
Composición max-min, 13
Concepto, 185
Concepto L-fuzzy, 199
Concepto Multivaluado, 190
Conectivos, 161
Congruencia, 102
  Hajek, 106
Conjunto L fuzzy, 15
Conjunto fuzzy, 1
  Altura, 7
  Contenido, 7
  Función de pertenencia, 1
  Grado de pertenencia, 1
  Igualdad, 7
  Nivel α, 8
  Soporte, 7
Conjunto referencial, 1
Conjuntos fuzzy
  Complemento, 9
  Intersección, 9
  Unión, 9
Cono negativo, 48, 73
Cono positivo, 73
Conorma drástica, 142
Conorma máximo, 142
Constructor jerárquico, 191
Contexto, 185
  completo, 190
Contexto L-fuzzy, 198
Correspondencia de Galois, 24
Cuasi inversa, 151

Demostración, 162
Derivación ponderada por complementación, 198
Divisor de cero, 146

Ecuación de Frank, 150
Elemento
  idempotente, 60
  irreducible, 54
  nilpotente, 134
  nilpotente para t-norma, 146
  booleano, 135
  denso, 128
  regular, 125

Etiqueta lingüística, 5
Evaluación, 162
Extensión, 185
  multivaluada, 190
Extensión L-fuzzy, 199

Fórmula demostrable, 162
Fórmula válida, 162
Filtro
  de retículo residual, 92
  generado, 95
  maximal, Ultrafiltro, 113
  primo, 115
Filtro núcleo de homomorfismo, 104

Grupo, 72
  abeliano, 72
  abeliano ordenado, 72

Homomorfismo, 89
  de retículos residuales, 89
Hoop, 63
Hoop de Wajsberg, 64

Igualdad de Kalman, 155
Inmersión de retículos residuales, 110
Intensión, 185
  multivaluada, 190
Intensión L-fuzzy, 199

Lógica básica, 165
Lógica de Łukasiewicz, 182
Lógica de Gödel, 178
Lógica intuicionista, 179
Lógica producto, 181
Ley de Cancelación, 146
Localmente finito, 119

Medida de clasicidad, 156
Medida de difusión, 156
Modelos, 162
Modificadores, 6
MV álgebra, 73
  de Chang, 73

Núcleo de homomorfismo, 103
Negación fuerte, 140
Norma triangular, 138

o-grupo, 72
Operador
  de Łukasiewicz, 142
  de Mandani, 142
  de Zadeh, 142
Operadores de construcción, 186
  L-fuzzy, 199
Orden puntual, 145

Par adjunto, 31
PL-álgebra, 70
Potencia, 97
Principio de resolución, 8
Producto acotado, 142
Producto aritmético, 142
Producto directo
  de dos álgebras, 110
  de dos retículos residuales, 110
  generalizado, 113
Producto drástico, 142
Producto residuado, 31
Producto subdirecto, 113
Proyección, 113

Relación binaria fuzzy, 12, 17
  matriz, 12
Retículo de conceptos, 188
Retículo de conceptos fuzzy, 200
Retículo de De Morgan, 154
Retículo de Kleene, 155
Retículo residual
  generalizado, 20
  integral, 48
  simple, 118
  conmutativo, 32
  de Girard, 67

divisible, 58
lineal, 54
semi simple, 122
Retículos isomorfos, 90
Retículo residual
localmente finito, 119

Semi simple, 122
Semigrupo, 72
abeliano, 72
abeliano ordenado, 72
Sistema deductivo, 98
categórico, 114
generado, 99
primo, 115
Subálgebra, 108
Subretículo
finitamente generado, 109
generado, 109
Subretículo residual, 108
Suma acotada, 142
Suma drástica, 142
Suma probabilística, 142

t Teorema, 162
t-conorma, 139
dual, 141
t-norma, 138
n-dual, 141
continua a izquierda, 139
de Gödel, 142
arquimedeana, 146
continua, 146
dual, 141
estricta, 146
nilpotente, 146
Teoría formal, 161
Terna de De Morgan, 141

Universo de definición, 1

Variable lingüística, 6
Variables, 161

Bibliografía

[Acz48] J. Aczél. Sur les opérations définies pour nombres reéls. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 76:59–64, 1948.

[AF88] M. Anderson and T. Feil. *Lattice-Ordered Groups: an introduction*. D. Reidel Publishing Company, 1988.

[AFS06] C. Alsina, M. Frank, and B. Schweizer. *Associative functions, t-norms and copulas*. World Scientific Publishing Co., New Jersey, 2006.

[BB57] A. Bialynicky-Birula. Remarks on quasi-boolean algebras. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, Classe III, 5:615–619, 1957.

[BBR57] A. Bialynicky-Birula and H. Rasiowa. On the representation of quasi-boolean algebras. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, Classe III, 5:259–261, 1957.

[BBS03] H. Bustince, P. Burillo, and S. Soria. Authomorphisms, negations and implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, (134):209 — 229, 2003.

[BCG+03] P. Bahls, J. Cole, N. Galatos, P. Jipsen, and Tsinakis C. Cancellative residuated lattices. *Algebra Universalis*, 2003.

[BE96] D. Brignole and R. Entizne. *Estructuras algebraicas para la lógica fuzzy.* Informe técnico interno n° 54, INMABB - UNS - CONICET, Bahía Blanca, 1996.

[BE97] D. Brignole and R. Entizne. Elementos booleanos y representación de reticulados residuales. In *Actas del IV Congreso Monteiro*. UNS-Bahía Blanca, 1997.

[BE98] D. Brignole and R. Entizne. Sobre la definición de conjuntos fuzzy por medio de las ei y eii álgebras. In *Proceedings of SIGEF'98 congress: Uncertainty logics: applications & economics and managements*, 1998.

[BE99] D. Brignole and R. Entizne. La jerarquía de conceptos y la lógica fuzzy. In *Actas del V Congreso Monteiro*. UNS-Bahía Blanca., 1999.

[BEL99] D. Brignole, R. Entizne, and S. London. Aplicación de la jerarquía de conceptos y la lógica fuzzy al desarrollo económico. In *Proceedings of SIGEF'99 congress*. Morelia., 1999.

[BFG96] A. Burusco and R. Fuentes-González. Conceptual knowledge from l-fuzzy contexts. *The Jorunal of Fuzzy Mathematics*, 4(4):889–903, 1996.

[BGW86] J. Stahl B. Ganter and R. Wille. *Conceptual measurement and many valued contexts*. W. Gaul and M. Schader, North Holland, Amsterdam, 1986. Calssification as a tool of research.

[Bir67] G. Birkhoff. *Lattice theory 3rd edition*. AMS Coll., Providence, 1967.

[BJ80] W. Bandler and L. J.Kohout. Semantics of implication operators and fuzzy relational products. *InternationalnmJ. Man-Machine Stud.*, 12:89–116, 1980.

[BK93] B. De Baerts and E. E. Kerre. The generalized modus ponens and the triangular fuzzy data model. *Fuzzy sets and systems*, 59:305–317, 1993.

[Bla37] M. Black. Vagueness: an exercise in logical analysis. *Philosophy of Science*, 4:427–455, 1937.

[Blo99] K. Blount. *On the structure of Residuated Lattices*. Ph. D. Thesis. Vanderbilt, 1999.

[BS81] S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*. Springer-Verlag, New York, 1981.

[BT01] K. Blount and C. Tsinakis. The structure of residuated lattices. *Intl. Journal of Algebra and Computation*, 2001.

[CD97a] R. Cignoli and D.Mundici. An elementary proff of chang's completeness theorem for the infinitevalued calculus of *l*ukasiewicz. *Studia Logica*, (58):79–97, 1997.

[CD97b] R. Cignoli and D.Mundici. *An invitation to Chang's MV algebras*. Advances in algebra and model theory. Gordon and Breach Publishing group, UK, 1997.

[CDM98] R. Cignoli, I. D'Ottaviano, and D. Mundici. *Algebraic foundation of many valued reasoning*. preprint. 1998.

[Cha58] C. C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics. *Trans. Am. Math. Soc.*, 88:467–490, 1958.

[Cin01] P. Cintula. About axiomatic systems of product fuzzy logic. *Soft Computing*, 5(3):243—244, 2001.

[CT97] R. Cignoli and A. Torrens. An algebraic analysis of product logic. *Centre de Recerca Matematica, Barcelona*, 363, 1997.

[Ded31] R. Dedekind. Uber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. *Gesammelte mat Werke*, 2(paper 30):236–271, 1931.

[Dil38] R. P. Dilworth. Abstract residuation over lattices. *Bull. Am. Math. Soc.*, 44:262–268, 1938.

[DP02] B. A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order, 2nd. edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Dre89] J. Drewniak. Fuzzy relation calculus. 1989.

[DW39] R. P. Dilworth and M. Ward. Residuated lattices. *Trans. Am. Math. Soc.*, 45:335–354, 1939.

[Ent97] R. Entizne. Inmersión de reticulados residuales. (Córdoba), 1997.

[FGI01] P. Flondor, G. Georgescu, and A. Iorgulescu. Pseudo t-norms and pseudo bl álgebras i. *Soft Computing*, 5:355—371, 2001.

[FR90] J. Font and G. Rodriguez. Note on algebraic models for relevance logic. *zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d.*, 36(1):535–540, 1990.

[Fra75] M. J. Frank. Associativity in a class of operations. *Aequationes Math.*, 12:120–144, 1975.

[Fra79] M. J. Frank. On the simultaneous associativity of $f(x, y)$ and $x+y-f(x, y)$. *Aequationes Math.*, 19:194–226, 1979.

[FRT84] J. Font, G. Rodriguez, and A. Torres. Wajsberg algebras. *Stochastica*, 8:5–31, 1984.

[Gal03] N. Galatos. *Varieties of Residuated Lattices*. Ph. D. Thesis. Nashville, Tennessee, 2003.

[Gal04] N. Galatos. Minimal varieties of residuated lattices. *Algebra Universalis*, 52:215—239, 2004.

[Ge89] A. M. W. Glass and W.C. Holland (editors). *Lattice-Ordered Groups*. Kluwer Academic Publisher, 1989.

[GI01] G. Georgescu and A. Iorgulescu. Pseudo mv álgebras. *Mult. Val. Logic*, 6:95—135, 2001.

[Gir87] J. Y. Girard. Linear logic. *Theor. Comp. Csi*, 50:1–102, 1987.

[GJKO01] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalsky, and H. Ono. *Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logic.* AMS Coll., Providence, 2001.

[Gog67] J. Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications*, 18:145–174, 1967.

[Gog69] J. Goguen. Categories of v-sets. *Bulletin of Amererican Mathematical Society*, 75(3):622–624, 1969.

[GW77] J. Graver, , and M. Watkins. *Combinatorics with emphasis on the theory of graphs.* Springer, New York, 1977.

[Háj97] P. Hájek. *Metamathematics of fuzzy logic.* 682 bis. Kluwer A. Publ, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, 1997.

[Höh95] U. Höhle. *Non classical logics and their applications to fuzzy systems.* Commutative, residuated l-monoids. Kluwer A. Publ, Dordrecht, The Netherlands, 1995.

[HRT01] J. Hart, L. Rafter, and C. Tsinakis. The structure of commutative residuated lattices. 2001.

[HRT02] J. Hart, L. Rafter, and C. Tsinakis. The structure of commutative residuated lattices. *International Journal of Algebra and Computation*, 12(4):509—524, 2002.

[JFG98] A. Burusco Juandeaburre and R. Fuentes-González. The study of the l-fuzzy concept lattice. *Trans. Am. Math. Soc.*, 88:467–490, 1998.

[Joh82] P. T. Johnstone. *Stone spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[JT02] P. Jipsen and C. Tsinakis. A survey of residuated lattices. *Ordered Algebraic Strucures*, pages 19 — 56, 2002.

[Jun92] W. Guo Jun. Theory of topological molecular lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 47(3):351–376, 1992.

[Kal58] J. A. Kalman. Lattices with involution. *Trans. of Am. Mathematical Society*, 87:485–491, 1958.

[Kle38] St. Kleene. On notation for ordinals numbers. *Journal of Simbolic Logic*, 3:150–155, 1938.

[Kle97] E. P. Klement. Some mathematical aspects of fuzzy sets: triangular norms, fuzzy logics and generalized measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 9(2):129–132, 1997.

[KMP00] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular norms.* Kluwer, Dordrecht, 2000.

[KO01] T. Kowalsky and H. Ono. Residuated latices: an algebraic glimpse at logics without contraction. *monografía*, pages 1—67, 2001.

[Kol97] A. Kolesárová. Triangular norm-based additions of fuzzy numbers and preserving of similarity. *BUSEFAL n° 69*, (69):43—54, 1997.

[Kra81] G. Krause. *A strengthened form of Ling's theorem on associative functions.* Ph.D.Thesis. Illinois Institute of Technology, Chicago, 1981.

[Kuz55] S. Kuznets. Economic gowth and income inequality. *American economic review*, (45):1 – 28, 1955.

[KY95] G. Klir and B. Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic, theory and applications.* Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[Lin65] C. H. Ling. Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen*, 12:182 — 212, 1965.

[Liu98] X. Liu. The fuzzy sets and systems based on afs.structure, ei algebra and eii algebra. *Fuzzy Sets and Systems*, 95(2):179 — 188, 1998.

[LT72] A. De Luca and S. Termini. Algebraic properties of fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 40:373–386, 1972.

[Luk20] J. Lukasiewicz. O logice trojwartosciowej. *Ruch Filozoficzny*, 2:170–171, 1920.

[Mak73] L. L. Maksimova. Implication lattices. *Algebra and Logic*, 12:249–261, 1973.

[Men42] K. Menger. Statistical metrics. *Proceedings of National Academy of Sciences*, 28:535–537, 1942.

[Men97] E. Mendelson. *Introduction to mathematical logic.* Chapman & Hall, 2—6 Boundary Row, London SE1 8HN, UK, 1997.

[Moi35] G. C. Moisil. Recherches sur lálgèbre de la logique. *Ann. Sci.Université de Yassy*, 22:1–117, 1935.

[Moi72] G. C. Moisil. La logique des concepts nuancées. *Essais sur les logiques non chrysipiennes*, pages 157–163, 1972.

[Mon78] A. A. R. Monteiro. Conjuntos graduados de zadeh. *Tecnica 449/450*, año LIII-volume XL:11–34, 1978.

[Mon95] A. A. R. Monteiro. Algebras de Heyting. *Informe técnico interno n° 51*, ano LIII-volume XL, 1995.

[Mon96] A. A. R. Monteiro. Les algèbres de hilbert linéaires. *Informe técnico interno n° 52*, 1996.

[Mos48] A. Mostowski. Proof on non deducibility in intuicionistic functional calculus. *Journal of Simbolic Logic*, (13), 1948.

[NGI02] A. Di Nola, G. Georgescu, and A. Iorgulescu. Pseudo bl álgebras i. *Mult. Val. Log.*, 8(5—6):673—714, 2002.

[NV89] A. Di Nola and A. Ventre. On fuzzy implication in de morgan algebras. *Fuzzy sets and systems*, 33:155–164, 1989.

[Ono] H. Ono. Substructural logics and residuated lattices: an introduction. *Studia Logica.*

[Pav79] J. Pavelka. On fuzzy logic ii°: Enriched residuated lattices and semantics of propositional calculi. *Zeitschr.f.math.Logik und Grundlagen*, d. Math.Bd.25:135–162, 1979.

[Ras74] H. Rasiowa. *An algebraic approach to non-classical logics.* North Holland Publishing Company. American Elsevier Publishing Company, New York, 1974.

[Res69] N. Rescher. *Many valued logic.* Mc Graw Hill, New York, 1969.

[RH92] H. Rasiowa and Nguyen Cat Ho. Lt-fuzzy sets. *Fuzzt Seta and Systems*, 47:323–339, 1992.

[RK93] D. Ruan and E. E. Kerre. Fuzzy implication operators and generalized fuzzy methods of cases. *Fuzzy sets and systems*, 54:23–37, 1993.

[Rod80] A. J. Rodríguez. *Un estudio algebraico de los cálculos proposicionales de Lukasiewicz.* Tesis Doctoral. Univ. de Barcelona, 1980.

[Rus23] B. Russell. Vagueness. *Australasian J. Psychol. and Philos.*, 1:84–92, 1923.

[RV97] R.J.Adillon and V.Verdú. *Produc logic and the deduction theorem.* 232. Math.preprint, Universitat de Barcelona, 1997.

[San76] E. Sanchez. Resolution of composite fuzzy relation equation. *Inf.Control*, (30):38–48, 1976.

[Skl96] A. Sklar. *Random variables, distribution functions and copulas-a personal look backward and forward.* Rüschendorf et al, 1996.

[SS61] B. Schweizer and A. Sklar. Asociative functions and statistical triangle inequalities. *Publ. Math Debrecem*, 8:169–186, 1961.

[SS63] B. Schweizer and A. Sklar. Asociative functions and abstract semigroups. *Publ. Math Debrecem*, pages 69 — 81, 1963.

[Tar55] A. Tarski. A lattice theoretical fixpoint theorems and its applications. 5:285 — 310, 1955.

[TAT95] E. Trillas, C. Alsina, and J. M. Terricabras. *Introducción a la lógica borrosa.* Ariel Matemática, Barcelona, 1995.

[Tor80] A. Torrens Torrell. *Estudi i algebraitzazió de certes logiques: Algebres d-completes.* Tesi doctoral. Universitát de Barcelona, Barcelona, 1980.

[Tri93] E. Trillas. On logic and fuzzy logic. *International Journal of Uncertainty, Fuzzyness and Knowledge-Based Systems*, I(2):107–137, 1993.

[Tur92] E. Turunen. Algebraic structures in fuzzy logic. *Fuzzy sets and systems*, 52:181–188, 1992.

[Tur99] E. Turunen. Bl-algebras of basic fuzzy logic. *Mathware and soft computing*, UPC VI(1):49–61, 1999.

[Urq96] A. Urquhart. Duality for algebras of relevant logic. *Studia Logica*, 56(1/2):263–276, 1996.

[Waj35] M. Wajsberg. *Beiträge zum Metaaussangenkalkül I.* Mh.Math.Phy.XLII, 1935.

[Wal38] Wallman. Lattices and topological spaces. *Ann. Math.*, 39(2):112 — 126, 1938.

[WBI95] Development report. Technical report, Word Bank, 1995.

[Wil80] R. Willmott. Two fuzzier implication operators in the theory of fuzzier power set. *Fuzzy Sets ans Systems*, 4:31–36, 1980.

[Wil82] R. Wille. *Orderer sets, theory and applications*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston, 1982. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts.

[Wil89] R. Wille. *Lattices in data analysis: how to draw them with a computer*. Algortims and Order. Kluwer Academic Publishers, 1989.

[Wyl95] O. Wyler. *Non classical logics and their applications to fuzzy systems*. Kluwer A. Publ, Dordrecht, The Netherlands, 1995. Fuzzy logic and categories of fuzzy sets.

[Yag80] R. R. Yager. On the mesure of fuzziness and negation. II.lattices. *Information and Control*, 44:236 — 260, 1980.

[Zad65] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[Zad73] L. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE*, 1:28–44, 1973.

[Zha93] L. Zhang. Structural and functional quantization of vagueness. *Fuzzy Sets and Systems*, 55(1):51–60, 1993.

[ZRMK99] S. Ziaie, S. Ray, M. Maschinchi, and R. Kamran. Boolean structure of triangular norms. *Mathware and soft computing*, UPC VI(1):63–78, 1999.