





UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTORA EN MATEMÁTICA

*Bases de wavelets para la representación de  
funciones definidas sobre volúmenes*

Liliana B. Boscardin

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2013

# Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre octubre de 2002 y diciembre de 2012, bajo la dirección de la Dra. Liliana Raquel Castro.

Liliana B. Boscardin

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el .../.../...,  
mereciendo la calificación de ... (.....).



*A la Universidad Nacional del Sur, que me permitió estudiar.*



# Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi directora Dra. Liliana Castro, por haber vuelto a confiar en mí. Su calidez humana, su estímulo permanente, su presencia constante y su excelente predisposición para escuchar, trabajar y discutir ideas fueron fundamentales para la concreción de este trabajo. En segundo lugar, a la Dra Silvia Castro, quien no sólo nos presentó los problemas concretos de computación gráfica que motivaron los resultados de esta tesis, sino que además colaboró en la implementación de los ejemplos presentados.

También agradezco a los integrantes del jurado: Dr. Eduardo Serrano, Dra. Ana María Ruedin y Dr. Guillermo Simari por las correcciones y sugerencias realizadas.

Por otro lado fue muy importante el apoyo implícito de mi esposo y mis hijos. Ellos son la fuerza motora que siempre impulsa a seguir adelante para conseguir nuevos logros.

Por último, quiero agradecer a todos aquellos que, de una u otra manera, mostraron su alegría y reconocimiento por este trabajo. A todos, mi más cálido y sincero agradecimiento.

Octubre de 2013

Departamento de Matemática  
Universidad Nacional del Sur





## Resumen

El aporte principal de esta tesis es la definición de wavelets sobre grillas tetraédricas no anidadas, lo que permite representar funciones definidas sobre una tetraedrización irregular dada. La aplicación inmediata es la posibilidad de representar distintos atributos definidos sobre un objeto como pueden ser su color, su brillo, su densidad, etc. En general, un objeto  $3D$  admite una representación mediante una red tetraédrica no anidada sobre la cual están definidas algunas propiedades del objeto. Esta representación consiste de un conjunto de coeficientes correspondientes a una aproximación gruesa seguida por una sucesión de coeficientes de detalle que, en el caso clásico, miden el error entre dos aproximaciones sucesivas.

En esta tesis se hallan la matriz de análisis que permite pasar de una resolución fina a una más gruesa y la de síntesis, necesaria para pasar de una resolución gruesa a una más fina, todo en el marco de grillas tetraédricas no anidadas.

En este trabajo se resuelve entonces el problema que se presenta en Computación Gráfica cuando se quiere representar alguna propiedad que posee un objeto representado por una grilla que se refina de manera irregular.

Para ilustrar esta aplicación se desarrolla un ejemplo en el cual se define un operador proyección sobre una tetraedrización dada y se hallan las matrices de análisis y de síntesis para dos resoluciones consecutivas.



## Abstract

The main contribution of this thesis is the definition of wavelets over non nested tetrahedral grids, allowing the representation of functions defined on an irregular tetrahedrization. In this way, it is possible to represent different attributes of a  $3D$  object such as its color, brightness, density, etc.

In general, a  $3D$  object can be represented using a non nested tetrahedral grid over which some of its properties are defined. This representation consists of a set of coefficients corresponding to a coarse resolution followed by a set of detail coefficients that measure the error between two successive approximations in the classic wavelet theory.

In this thesis the analysis matrix that allows going from a fine to a coarser resolution and the synthesis matrix needed for going from a coarse resolution to a finer one, are found. All this is within the framework of non nested tetrahedral grids.

In this work is then completely solved the problem that appears in Graphic Computing when it is desired to represent a property of a given  $3D$  object modeled by a tetrahedral grid irregularly refined.

In order to illustrate the developed work, an example of a projection operator defined over an irregular tetrahedrization, together with the analysis and synthesis matrices that allow going from one resolution to the next are given.



# Índice general

Índice de Figuras	XVII
Objetivos y organización de la tesis	1
<b>1. Wavelets de primera y segunda generación</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Reseña histórica . . . . .	4
1.3. Wavelets de primera generación . . . . .	8
1.3.1. La función de escala y los subespacios $V_j$ . . . . .	9
1.3.2. La función wavelet y los espacios de detalle $W_j$ . . . . .	10
1.3.3. La transformada wavelet rápida . . . . .	18
1.3.4. Propiedades de las wavelets . . . . .	18
1.3.5. Ejemplos . . . . .	20
1.4. Wavelets de segunda generación . . . . .	27
1.4.1. Funciones de escala y espacios $V_j$ . . . . .	29
1.4.2. Wavelets y espacios $W_j$ . . . . .	30
1.4.3. Esquema de lifting: notación y definiciones . . . . .	32
1.4.4. Ejemplos de wavelets de segunda generación . . . . .	37
<b>2. Mallas bidimensionales y mallas tridimensionales</b>	<b>41</b>
2.1. Introducción . . . . .	41
2.2. Definiciones previas . . . . .	42
2.3. Mallas bidimensionales . . . . .	43
2.3.1. Simplificación de mallas triangulares: algunas técnicas. . . . .	44

2.3.2.	Simplificación de mallas triangulares con atributos . . . . .	49
2.4.	Mallas tridimensionales . . . . .	50
2.4.1.	Definiciones . . . . .	50
2.4.2.	Mallas tetraédricas regulares . . . . .	52
2.4.3.	Mallas tetraédricas irregulares. . . . .	57
2.4.4.	Simplificación de mallas tetraédricas con atributos . . . . .	58
<b>3.</b>	<b>Wavelets definidas sobre grillas tetraédricas regulares</b>	<b>61</b>
3.1.	Introducción . . . . .	61
3.2.	Wavelets de Haar sobre espacios de medida general . . . . .	62
3.2.1.	Wavelets sobre tetraedros . . . . .	62
3.2.2.	Aplicación del esquema de lifting a wavelets definidas sobre un tetraedro	72
3.2.3.	Wavelets sobre un tetraedro: esquema basado en vértices . . . . .	73
3.2.4.	Aplicación del lifting a las wavelets basadas en vértices . . . . .	76
<b>4.</b>	<b>Análisis multirresolución para mallas triangulares no anidadas</b>	<b>79</b>
4.1.	Introducción . . . . .	79
4.2.	Análisis multirresolución para espacios no anidados . . . . .	80
4.2.1.	Aproximación y reconstrucción . . . . .	80
4.2.2.	Técnicas de construcción de operadores . . . . .	84
4.3.	Análisis multirresolución para funciones definidas sobre mallas triangulares irregulares . . . . .	85
4.3.1.	Decimación de mallas y espacios de aproximación . . . . .	85
<b>5.</b>	<b>Análisis multirresolución para mallas tetraédricas no anidadas</b>	<b>89</b>
5.1.	Introducción . . . . .	89
5.2.	Espacios de aproximación en el caso irregular. Bases. Operadores de aproxi- mación . . . . .	89
5.2.1.	Espacios de aproximación . . . . .	90
5.2.2.	Operadores de aproximación . . . . .	90
5.2.3.	Elección de los espacios auxiliares . . . . .	92
5.3.	Matrices de análisis y de síntesis . . . . .	92

5.3.1. Matrices de análisis y de síntesis para un cuadro semiortogonal y un operador suryectivo . . . . .	94
5.3.2. Matrices de análisis y de síntesis para un cuadro arbitrario y un operador suryectivo . . . . .	95
5.3.3. Matrices de análisis y de síntesis para un cuadro arbitrario . . . . .	101
5.3.4. Ejemplo de un operador de aproximación . . . . .	118
5.4. Formas desarrolladas de la reconstrucción . . . . .	119
5.4.1. Primera forma: utilizando la proyección auxiliar $p_k$ . . . . .	119
5.4.2. Segunda forma: utilizando la matriz de Penrose de $P^k$ . . . . .	121
<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>135</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>135</b>
<b>Apéndice A. Operador proyección. Variedades topológicas</b>	<b>141</b>
A.1. Operador proyección y operador proyección ortogonal . . . . .	141
A.1.1. Matriz del operador proyección ortogonal . . . . .	142
A.2. Variedades topológicas. Variedades con frontera. . . . .	144
<b>Apéndice B. Inversas generalizadas</b>	<b>147</b>
B.1. Inversas generalizadas de una matriz. . . . .	147





# Índice de figuras

1.1. Wavelet de Haar. . . . .	5
1.2. Base de Schauder. . . . .	6
1.3. Transformada directa wavelet. . . . .	19
1.4. Transformada inversa wavelet. . . . .	19
1.5. Función de escala y wavelet de Haar. . . . .	21
1.6. Función de escala de Shannon. . . . .	22
1.7. Wavelet de Shannon. . . . .	23
1.8. Izquierda: funciones de escala de Daubechies. Derecha: wavelets de Daubechies.	24
1.9. B-spline cúbico. . . . .	27
1.10. Wavelet B-spline cúbica. . . . .	27
1.11. Construcción geodésica de la esfera . . . . .	37
1.12. Funciones de escala de Haar y sus duales . . . . .	38
1.13. Wavelets de Bio-Haar . . . . .	39
1.14. Lifting dual de las wavelets Bio-Haar duales . . . . .	39
2.1. Modelo obtenido por scanner y dos aproximaciones. . . . .	45
2.2. Supresión e inserción de un vértice. . . . .	48
2.3. Colapsado de lado y expansión de vértice. . . . .	49
2.4. Supresión de triángulo. . . . .	49
2.5. Subdivisión de un tetraedro según el método de Bey. Octaedro interior. . . . .	53
2.6. Subdivisión de un tetraedro según el método de Bey. . . . .	54
2.7. Subtetraedros obtenidos por el método de Bey. . . . .	55
2.8. a) Ejemplo de 1/2 pirámide. b) Ejemplo de 1/4 pirámide. c) Ejemplo de 1/8 pirámide . . . . .	55

2.9. Diamantes . . . . .	56
2.10. Colapsado de medio lado y expansión media de vértice. . . . .	57
3.1. El conjunto de hijos de $T_\alpha$ . . . . .	63
3.2. Árbol de subdivisión. . . . .	64
3.3. Árbol de índices. . . . .	65
3.4. Función del ejemplo 1 sobre un tetraedro. . . . .	70
3.5. Un paso en la descomposición multirresolución de la función del ejemplo 1 sobre un tetraedro. . . . .	70
3.6. Tres pasos consecutivos en la descomposición multirresolución de la función del ejemplo 1 sobre un tetraedro. . . . .	71
3.7. Primer paso en la subdivisión de Bey: conjuntos de índices. . . . .	74
3.8. Descomposición en base de wavelets con el atributo definido sobre los vértices de los tetraedros. . . . .	76
4.1. Descomposición de una función $f_n \in V_n$ . . . . .	81
4.2. Reconstrucción de una función $f_n \in V_n$ . . . . .	82
5.1. Aproximación por mínimos cuadrados. . . . .	109
5.2. Red en tres resoluciones: (a) fina, (b) intermedia, (c) gruesa. . . . .	123
5.3. Red en tres resoluciones: (a) fina, (b) intermedia, (c) gruesa. . . . .	124

# Objetivos y organización de la tesis

## Objetivos

El trabajo realizado está centrado en wavelets definidas sobre volúmenes y es la continuación del realizado en la Tesis de Magíster, en la cual se definen wavelets de Haar sobre un tetraedro, en el marco de trabajo de un análisis de multirresolución para espacios anidados. A partir de ellas, se realizó la extensión de las mismas a grillas tetraédricas semirregulares ([50]). El último paso en este sentido es la representación de funciones sobre una grilla tetraédrica irregular que modela un objeto 3D. Esto exige pasar a un nuevo marco de trabajo, el análisis multirresolución definido sobre espacios no anidados. En este contexto se definen operadores de aproximación que pueden o no ser suryectivos. Por otro lado, los espacios asociados al análisis multirresolución pueden generar cuadros con o sin la propiedad de semiortogonalidad.

Teniendo en cuenta lo mencionado arriba, los objetivos de esta investigación son:

- Obtener una base de wavelets que permita representar funciones definidas sobre una grilla tetraédrica irregular.
- Hallar las matrices de análisis y de síntesis para cuadros sin la propiedad de semiortogonalidad y operadores suryectivos.
- Hallar las matrices de análisis y de síntesis para cuadros que pueden o no tener la propiedad de semiortogonalidad y operadores no suryectivos.

## Organización de la tesis

La tesis está organizada como se describe a continuación.

En el Capítulo 1 se da una breve reseña histórica de las wavelets; se describe el entorno relacionado con las wavelets de primera generación y el marco teórico para las de segunda generación. Se dan ejemplos de ambas clasificaciones de wavelets.

En el Capítulo 2 se presenta el modelado de superficies y modelado de volúmenes, entendiéndose por ello a los métodos usados para representar y modelar los atributos de objetos bidimensionales ( $2D$ ), tridimensionales ( $3D$ ) y sus respectivos interiores. Se describen las técnicas más utilizadas para la simplificación de mallas triangulares y de mallas tetraédricas regulares e irregulares.

En el Capítulo 3 se da una breve reseña de las wavelets definidas sobre un tetraedro. También se presentan las vertex wavelets y se indica cómo se calculan los coeficientes de análisis y de síntesis en este caso. Para ambos casos se describe el método de lifting que permite obtener wavelets con más momentos nulos.

En el Capítulo 4 se presenta el marco de trabajo para espacios no anidados y la descomposición multirresolución para funciones constantes por tramos sobre una triangulación irregular dada.

En el Capítulo 5 se encuentran los resultados principales de esta tesis. En primer lugar, se describe la representación multirresolución de funciones definidas sobre grillas tetraédricas irregulares y se presenta el operador proyección ortogonal de un espacio sobre el siguiente para el caso tridimensional. Como en el caso de representación multirresolución de funciones definidas sobre grillas tetraédricas regulares y semirregulares, este marco de trabajo se aplica a las funciones constantes por tramos.

Luego se indica cómo se realiza el cálculo de las matrices de análisis y de síntesis para operadores de aproximación suryectivos y cuadros no necesariamente semiortogonales. Se prueba que este resultado generaliza al obtenido por Gerussi en [25], Capítulo 5.

En la tercera parte se obtienen las matrices de análisis y de síntesis para operadores no suryectivos y cuadros no necesariamente semiortogonales. Los resultados obtenidos son aplicables tanto al caso de mallas triangulares no anidadas como al de mallas tetraédricas no anidadas. Por último, se da una forma detallada de la reconstrucción para el caso en que el operador de aproximación es no suryectivo.

# Capítulo 1

## Wavelets de primera y segunda generación

### 1.1. Introducción

Las wavelets son funciones base que pueden o no tener una expresión explícita y que permiten la descomposición de funciones en diferentes niveles de detalle. Si bien sus orígenes están en la teoría de aproximación y procesamiento de señales, actualmente se las utiliza para resolver problemas en otras disciplinas: cartografía, infografía, computación gráfica, estadística, etc. Las primeras wavelets que se empezaron a utilizar estaban definidas en  $\mathbb{R}$  ó en  $\mathbb{R}^n$  como dilataciones y traslaciones de una misma función llamada "madre wavelet" o como producto tensorial, respectivamente, y se las conoce con el nombre de *wavelets de primera generación*. La herramienta clásica para su construcción es la transformada de Fourier. Los trabajos tradicionales sobre wavelets son los realizados por Mallat [45], Daubechies [16] y Chui [6] quienes introducen las wavelets desde la óptica del procesamiento de señales.

El principal inconveniente de estas wavelets es que las señales que pueden representarse en una base de wavelets son aquellas cuyas muestras están igualmente espaciadas. Si bien muchos datos sonoros y estadísticos verifican por naturaleza esta propiedad, la diversidad de situaciones propuestas en otras aplicaciones como por ejemplo, visualización científica, rápidamente motivaron la extensión de la teoría original.

En los primeros años de la década del '90 comenzaron a aparecer las wavelets de *segunda generación*, denominación atribuida a Wim Sweldens. El trabajo de Michael Lounsbery, [41] extiende la teoría de wavelets a superficies topológicas de tipo arbitrario y pone en evidencia la relación entre el análisis de multirresolución y los esquemas de subdivisión. Generalizando la técnica de construcción de Lounsbery, Sweldens propone un modelo general de construcción de wavelets de segunda generación: *el esquema de lifting* [58].

Las wavelets actuales son una generalización del concepto de análisis multirresolución que introdujo Stéphane Mallat [45] en 1989 y su construcción se basa en la creación de esquemas de subdivisión adaptativos al dominio sobre el cual se definirán las wavelets. De todos ellos,

los más conocidos son los *regulares* que se caracterizan por tener una estrategia recursiva de subdivisión, dando lugar así a mallas con *subdivisión de conectividad*. Los esquemas que parten de una malla arbitraria y luego la subdividen regularmente, dan lugar a mallas *regulares* o *semirregulares*, según que la malla de partida sea regular o irregular respectivamente.

Si bien el análisis multirresolución surgió y se formalizó con la teoría de wavelets, hizo su propio camino en el campo del modelado geométrico y de la visualización científica. En estos casos, análisis multirresolución significa edición en diferentes niveles de detalle de un volumen determinado. Algunos trabajos que se pueden consultar sobre este aspecto del análisis de mutirresolución son [29], [1], [34].

Este capítulo está organizado como sigue: en la Sección 2 damos una breve reseña histórica; en la Sección 3 y subsecciones describimos el entorno relacionado con las wavelets de primera generación; en la última subsección damos los ejemplos clásicos de wavelets. En la sección 4 introducimos el marco teórico para las wavelets de segunda generación.

## 1.2. Reseña histórica

Si bien la aplicación de wavelets al procesamiento de señales data de hace unos años, sus orígenes se remontan mucho más atrás. En 1807, J. Fourier aseguró que "cualquier función periódica de período  $2\pi$  es la suma de su serie de Fourier". Cuando J. Fourier anunció este resultado sorprendente, las definiciones de función e integral todavía no eran precisas y su trabajo jugó un rol fundamental en la evolución de las ideas que los matemáticos tenían de esos conceptos. Sin embargo, en 1873, P. Du Bois-Reymond construyó una función continua periódica, de período  $2\pi$ , cuya serie de Fourier era divergente en un punto. Para solucionar este problema, H. Lebesgue dio un nuevo concepto de funciones que se adecuaba a las series de Fourier mediante la definición de funciones medibles y del espacio  $L^2[0, 2\pi]$ . Este espacio, formado por clases de funciones de cuadrado integrable en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , tiene una base ortonormal dada por las funciones:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} 2x, \dots$$

Los coeficientes de la descomposición en esta base ortonormal forman una serie de funciones de cuadrado integrable que se relacionan con la media cuadrática de la función desarrollada, excepto por un factor de normalización, mediante la igualdad de Parseval. Por otro lado, hacia 1909, A. Haar trabajó en la búsqueda de otros sistemas ortonormales para los cuales no se diera el fenómeno descubierto por P. Du Bois-Reymond para el caso de series trigonométricas. Concretamente, él buscaba un sistema ortonormal  $h_0(x), h_1(x), \dots, h_n(x), \dots$ , de funciones definidas en el intervalo  $[0, 1]$ , tal que para que cualquier función continua  $f(x)$  en  $[0, 1]$ , la serie:

$$\langle f, h_0 \rangle h_0(x) + \langle f, h_1 \rangle h_1(x) + \dots + \langle f, h_n \rangle h_n(x) + \dots$$

fuera uniformemente convergente en  $[0, 1]$ , donde:  $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}dx$ , siendo  $\overline{v(x)}$  el complejo conjugado de  $v(x)$ . Si bien este problema no tiene solución única, en 1909 A. Haar descubrió la más simple de ellas y al mismo tiempo abrió uno de los caminos que conducirían a las wavelets. Comenzando con la función  $h(x)$  definida como:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1/2), \\ -1, & \text{si } x \in [1/2, 1), \\ 0, & \text{otro caso;} \end{cases}$$

para  $n \geq 1$ , toma  $n = 2^{-j} + k$ ,  $j \geq 0$ ,  $0 \leq k < 2^{-j}$ , y define  $h_n(x) = 2^{j/2}h(2^j x - k)$ . El soporte de  $h_n(x)$  es el intervalo diádico  $I_n = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$  que está contenido en el intervalo  $[0, 1)$  cuando  $0 \leq k < 2^{-j}$ . Para completar el conjunto, define  $h_0(x) = 1, \forall x \in [0, 1)$  y la sucesión:  $h_0(x), h_1(x), \dots, h_n(x), \dots$  así construida resulta una base ortonormal para  $L^2[0, 1]$ . La función de Haar se muestra en la Figura 1.1.

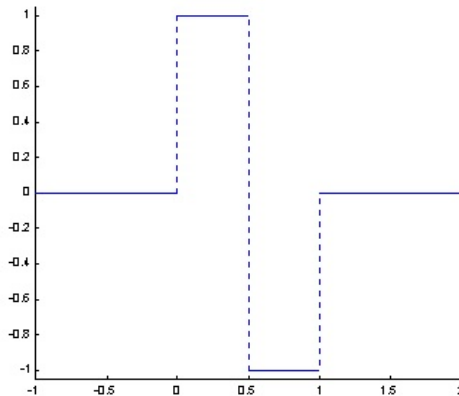


Figura 1.1: Wavelet de Haar.

El inconveniente de la construcción de A. Haar es que la base sólo es adecuada para funciones continuas, funciones de cuadrado integrable en  $[0, 1)$  o, más generalmente, para funciones cuyo índice de regularidad esté próximo a cero. Es decir si  $f(x)$  es una función de clase  $C^1$  en  $[0, 1]$ , su aproximación por funciones escalón es inapropiada. Estos defectos del sistema de A. Haar y la idea de aproximar el gráfico de  $f(x)$  por poligonales inscriptas, condujeron a G. Faber y J. Schauder a reemplazar las funciones  $h_n(x)$  por sus primitivas. Esta búsqueda comenzó en 1910 y continuó hasta 1920. El sistema que ellos crearon es lo que se denomina base de *Schauder*, Figura 1.2, y es una base para el espacio de Banach de las funciones continuas en el  $[0, 1]$  siendo la convergencia uniforme sobre este intervalo y únicos los coeficientes del desarrollo.

Algunos ejemplos, como la función atribuida a B. Riemann y el movimiento browniano [47],

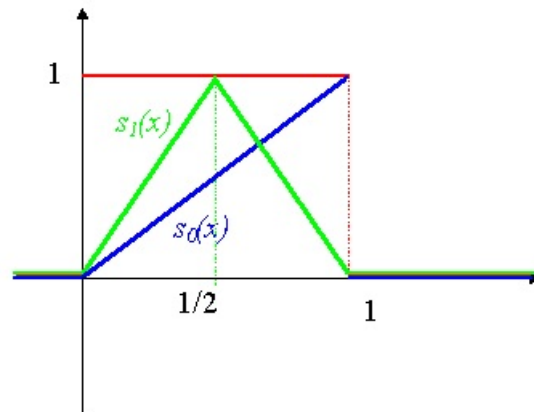


Figura 1.2: Base de Schauder.

muestran que el sistema trigonométrico no da acceso rápido y directo a las propiedades locales de regularidad y que estas propiedades son claras cuando se analizan mediante otras representaciones.

Dificultades similares se encuentran cuando se trata de localizar la energía  $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$  de una función  $f$ . Esta integral es, según la igualdad de Parseval, la suma de los cuadrados de los coeficientes de Fourier. Sin embargo, a veces es importante conocer si la energía está concentrada alrededor de unos pocos puntos o si esta distribuida sobre todo el intervalo y no es posible obtener esta información a partir de esta representación. Alrededor de 1930, J. Littlewood y R. Paley descubrieron que la información necesaria para resolver ese problema se encontraba en el desarrollo de Fourier de  $f$ . Definieron así los “bloques diádicos” de la siguiente manera:

$$\Delta_j f(x) = \sum_{2^j < x < 2^{j+1}} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$$

donde  $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$  es la serie de Fourier de  $f$ . Luego  $f(x) = a_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f(x)$  y el resultado fundamental de J. Littlewood y R. Paley es que para  $1 < p < \infty$ , existen dos constantes  $C_p > c_p > 0$ , tales que:

$$c_p \|f\|_p \leq \left\| \left( |a_0|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j f(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

verificándose la igualdad si  $p = 2$  y  $C_p = c_p = 1$ . A. Zygmund y un grupo de matemáticos de la Universidad de Chicago extendieron al espacio euclideo  $n$  – dimensional los resultados



obtenidos en el caso unidimensional periódico por J. Littlewood y R. Paley. En otra dirección, P. Franklin quien era profesor en el Instituto de Tecnología de Massachusetts, creó en 1927 una base ortonormal para  $L^2[0, 1]$  a partir de la base de Schauder usando el proceso de Gram-Schmidt. El problema de esta base es que no tiene una estructura algorítmica simple. Las funciones que la forman, a diferencia de las que forman la base de Haar o la base de Schauder, no se obtienen por traslaciones y dilataciones diádicas de una función fija. Esto hizo que alrededor de los años 40 el sistema de P. Franklin fuera olvidado. Sin embargo en 1963, Z. Ciesielski retomó este sistema y construyó uno nuevo que salvaba las falencias del anterior. Las funciones del sistema que él creó, están definidas como sigue:

$$f_n(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 2^j + k, \quad 0 \leq k < 2^j,$$

siendo  $\psi$  una función fija con decrecimiento exponencial. En 1980, J. Stromberg retoma el trabajo hecho por P. Franklin y mejorado por Z. Ciesielski y da una expresión explícita para la función  $\psi$ , probando además que tal sistema es una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ . También N. Lusin trabajó, en la década del 30, en la búsqueda de bases para los espacios de Hardy  $H_p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Su trabajo está relacionado con el análisis y la síntesis de funciones en estos espacios mediante el uso de elementos que después se llamarían átomos y que son funciones elementales de  $H_p(\mathbb{R})$ . En la década del 70, estas descomposiciones atómicas fueron ampliamente usadas en la teoría de los espacios de Hardy. Hacia 1980 e independientemente de los desarrollos hechos en análisis armónico, A. Grossman y J. Morlet, [31], mostraron cómo señales arbitrarias podían ser analizadas en términos de escalamientos y traslaciones de una sola función. Desde principios y hasta mediados de la década del 80 se notó que las representaciones de J. Littlewood y R. Paley tenían sus análogas discretizadas y que podían dar una visión unificada de muchos de los resultados del análisis armónico. Esto fue hecho independientemente por Y. Meyer y sus colaboradores por un lado, y por M. Frazier y B. Jawerth por otro, en su trabajo sobre la transformada  $\varphi$ . Se comenzó a comprender que estas técnicas podían constituirse en sustitutos efectivos de las series de Fourier en aplicaciones numéricas. El énfasis se puso entonces en las representaciones mismas y en los bloques constructores o átomos involucrados. El objetivo de la teoría era entonces hallar los átomos y las reglas que permitieran representar todos los elementos de un espacio funcional por medio de esos átomos. Como resultado de esto, cambió el nombre de la teoría. Y. Meyer y J. Morlet sugirieron la palabra *wavelet* para esos bloques primitivos y lo que hasta ese momento se conocía como teoría de Littlewood-Paley, a partir de ese momento se comenzó a denominar *teoría de wavelets*. P. Lemarie e Y. Meyer, independientemente de J. Stromberg, construyeron wavelets ortonormales. Con la noción de análisis de multirresolución introducida por Y. Meyer y S. Mallat se desarrolló un método sistemático para comprender las expansiones en wavelets ortogonales. Este último, especialista en procesamiento de señales, descubre ([45],[44]) las relaciones existentes entre filtros, algoritmos piramidales y bases ortonormales de wavelets. Usando los resultados de S. Mallat, I. Daubechies crea bases ortonormales de wavelets para  $L^2(\mathbb{R})$ , [16]. En general estas bases no pueden ser escritas en forma analítica pero sus gráficos pueden ser calculados con alta precisión usando esquemas de refinamiento

como los usados en diseño asistido por computadora.

Hasta el año 1994 todos los resultados obtenidos estaban referidos a la teoría clásica de wavelets, esto es a las funciones que se obtienen como traslaciones y dilataciones diádicas de una función fija llamada *wavelet madre*. Esta teoría es conocida como *wavelets de primera generación* y la herramienta básica que utiliza es la transformada de Fourier. En el año 1994 comienzan a aparecer las wavelets de *segunda generación*, en las que las funciones de la base no son traslaciones y dilataciones de una única wavelet madre y se pueden definir sobre curvas y superficies de topologías arbitrarias. En las secciones siguientes trataremos las wavelets de primera y segunda generación.

### 1.3. Wavelets de primera generación

En esta sección trataremos los aspectos básicos de las wavelets de primera generación. Referencias clásicas de esta teoría son: [16], [45] y [6]. También se pueden encontrar numerosos artículos disponibles en línea en [63].

Desde que surgió la teoría de wavelets, muchos y variados métodos fueron utilizados para su construcción. En 1989 Mallat, [45], describió el análisis de multirresolución que da un marco natural y una explicación satisfactoria para todas esas construcciones y provee una herramienta para la construcción de nuevos ejemplos. Básicamente, en un análisis multirresolución de  $L^2(\mathbb{R})$  es posible escribir cada función  $f$  de este espacio como límite de aproximaciones sucesivas, siendo cada una de ellas una versión más detallada de  $f$ . Estas aproximaciones sucesivas utilizan diferentes resoluciones o escalas y de allí surge el nombre de análisis multirresolución. Formalmente, un análisis multirresolución de  $L^2(\mathbb{R})$  está definido como una sucesión de subespacios cerrados  $V_j \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , con las siguientes propiedades:

- 1)  $V_j \subset V_{j+1}$ ,
- 2)  $v(x) \in V_j \Leftrightarrow v(2x) \in V_{j+1}$ ,
- 3)  $v(x) \in V_0 \Leftrightarrow v(x+1) \in V_0$ ,
- 4)  $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$  es densa en  $L^2(\mathbb{R})$  y  $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$ ,
- 5) Existe una función  $\varphi \in V_0$ , llamada *función de escala*, con integral no nula, tal que la colección  $\{\varphi(x-l) : l \in \mathbb{Z}\}$ , es una base de Riesz de  $V_0$ .

Usaremos la siguiente terminología: un nivel de un análisis de multirresolución es uno de los subespacios  $V_j$  y un nivel es más grueso (respectivamente, más fino) con respecto a otro cuando el índice del correspondiente espacio es menor (respectivamente, mayor).

### 1.3.1. La función de escala y los subespacios $V_j$

De la definición anterior surgen las siguientes observaciones:

- 1) dado que la función de escala  $\varphi \in V_0 \subset V_1$ , existe una sucesión  $\{h_k\} \in l^2$  tal que:

$$\varphi(x) = 2 \sum_k h_k \varphi(2x - k), \quad (1.1)$$

Esta ecuación funcional se llama *ecuación de refinamiento* o *de dos escala* y la sucesión  $\{h_k\}$  se denomina *filtro*.

- 2) de las propiedades 2) y 5) del análisis de multirresolución, se concluye que la familia de funciones:  $\{\varphi_{j,l} : l \in \mathbb{Z}\}$  donde  $\{\varphi_{j,l}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - l)\}$ , es una base de Riesz de  $V_j$ . Integrando ambos miembros de (1.1) y dividiendo por la integral de  $\varphi$ , vemos que:

$$\sum_k h_k = 1.$$

- 3) bajo condiciones muy generales, la función de escala esta unívocamente definida por su ecuación de refinamiento y la normalización, [17]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

En muchos casos no hay una expresión explícita para  $\varphi$ , pero existen algoritmos que usan la ecuación de refinamiento para evaluar dicha función en los puntos diádicos; algunos de estos algoritmos pueden consultarse en [57]. En general, en las aplicaciones no es necesario conocer la función  $\varphi$ , sino que basta con conocer el filtro  $\{h_k\}$ .

- 4) La descomposición de  $L^2(\mathbb{R})$  en subespacios anidados  $V_j \subset V_{j+1}$ , implica la descomposición de cada función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  en "piezas"  $f_j \in V_j$ . Estas piezas o proyecciones dan información cada vez más fina o detallada de  $f$ . El requerimiento  $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ , asegura que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f_j(t) - f(t)\| = 0$ ; por otro lado, cuando  $j \rightarrow -\infty$ , la propiedad  $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$  indica que  $\lim_{j \rightarrow -\infty} \|f_j\| = 0$ .

Con el objetivo de aproximar funciones tan simples como las constantes mediante la colección  $\{\varphi_{j,l}, l \in \mathbb{Z}\}$ , es natural asumir que la función de escala y sus traslaciones enteras forman una partición de la unidad, es decir satisfacen la ecuación:

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi(x - l) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por (1.1), la transformada de Fourier de la función de escala debe satisfacer:

$$\widehat{\varphi}(\omega) = h\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (1.2)$$

donde  $h$  es una función periódica de período  $2\pi$  definida por:

$$h(\omega) = \sum_k h_k e^{-i\omega k}. \quad (1.3)$$

Como  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ , la aplicación recursiva de (1.2) da, al menos formalmente, la fórmula:

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} h(2^{-j}\omega). \quad (1.4)$$

La convergencia de este producto infinito y los requerimientos para que  $\varphi(x)$  sea una función suficientemente regular (al menos continua), son analizados en [11] y [15]. La representación (1.4) de  $\widehat{\varphi}$  es útil en muchas situaciones ya que permite construir  $\varphi$  a partir de la sucesión  $\{h_k\}$ . Teoremas sobre condiciones necesarias y sobre condiciones suficientes para que (1.3), defina una función  $\varphi(x)$  tal que la familia  $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal para el subespacio  $V_0$ , pueden consultarse en [44]. Para finalizar esta sección, introduciremos la siguiente función  $2\pi$ -periódica que necesitaremos en la sección siguiente:

$$b(\omega) = \sum_k |\widehat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2, \quad (1.5)$$

El hecho que  $\varphi$  y sus trasladadas formen una base de Riesz se corresponde con el hecho que existen constantes positivas  $A$  y  $B$  tales que ([16], cap. 5):

$$0 < A \leq b(\omega) \leq B < \infty. \quad (1.6)$$

### 1.3.2. La función wavelet y los espacios de detalle $W_j$

Dada una sucesión de subespacios anidados  $V_j$ , indicaremos con  $W_j$  a un subespacio que es el complemento de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ , es decir que satisface:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, j \in \mathbb{Z}, \quad (1.7)$$

donde el símbolo  $\oplus$  denota suma directa. Observemos que el subespacio  $W_j$  no necesariamente es único; puede haber varias formas de complementar  $V_j$  en  $V_{j+1}$ . Debido a (1.7), se que dice  $W_j$  contiene el "detalle" para pasar de la resolución  $j$  a la  $j + 1$ . La suma de subespacios puede comenzar en  $j = 0$  ó  $j = -\infty$ . Cuando termina en  $J \geq 0$ , se tiene el subespacio  $V_{J+1}$ :

$$V_{J+1} = V_0 + \sum_{j=0}^J W_j \quad (1.8)$$

ó

$$V_{J+1} = \sum_{j=-\infty}^J W_j. \quad (1.9)$$

Cuando  $J \rightarrow +\infty$ , se tiene:

$$L^2(\mathbb{R}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_j, \quad (1.10)$$

y los espacios  $W_j$  heredan la propiedad de escala de los  $V_j$  :

$$f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2x) \in W_{j+1}.$$

Una función  $\psi$  es una wavelet si la colección de funciones  $\{\psi(x-l), l \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $W_0$ . Entonces la familia  $\{\psi_{j,l} = 2^{j/2}\psi(2^j x - l) : l, j \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $L^2(\mathbb{R})$ . Como la wavelet  $\psi$  es una función de  $V_1$ , existe una sucesión  $\{g_k\} \in l^2$  tal que:

$$\psi(x) = 2 \sum_k g_k \varphi(2x - k). \quad (1.11)$$

Esta ecuación funcional se conoce como *relación de dos escalas para wavelets* y la sucesión  $\{g_k\} \in l^2$  se denomina *filtro*. Cada uno de los espacios  $V_j$  y  $W_j$ , tienen un complemento en  $L^2(\mathbb{R})$  que indicaremos con  $V_j^c$  y  $W_j^c$ , respectivamente. Luego podemos escribir:

$$V_j^c = \bigoplus_{i=j}^{\infty} W_i,$$

y:

$$W_j^c = \bigoplus_{i \neq j} W_i.$$

Definimos  $P_j$  como el operador proyección sobre  $V_j$  y paralelo a  $V_j^c$  y  $Q_j$  como el operador proyección sobre  $W_j$  y paralelo a  $W_j^c$ . Con esta notación, las ecuaciones (1.9) y (1.10) pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$P_{j+1}(f) = P_0(f) + \sum_{j=0}^J Q_j(f) \quad \text{ó} \quad P_{j+1}(f) = \sum_{j=-\infty}^J Q_j(f) \quad (1.12)$$

$$f(x) = \sum_j Q_j f(x) = \sum_{j,l} \gamma_{j,l} \psi_{j,l}(x), \quad (1.13)$$

siendo  $f$  una función de  $L^2(\mathbb{R})$ . En la práctica los índices  $j$  y  $l$  nunca son infinitos; en general se conocen los datos en un nivel  $j < J$  y se desea obtener una aproximación en la resolución  $J + 1$ , motivo por el cual la descomposición más usada es la (1.12).

Como se mencionó antes, el espacio  $W_j$  que complementa a  $V_j$  en  $V_{j+1}$  no es necesariamente único. Cuando estos espacios de wavelets son definidos como el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ , se dice que el análisis de multirresolución es *ortogonal*. Consecuentemente los espacios  $W_j$  resultan mutuamente ortogonales, las proyecciones  $P_j$  y  $Q_j$  son ortogonales y el desarrollo:

$$f(x) = \sum_j Q_j f(x),$$

es un desarrollo ortogonal. Si la función de escala  $\varphi$  es tal que  $\{\varphi_{j,l}, l \in \mathbb{Z}\}$ , es una base ortonormal para  $V_j$  y el análisis de multirresolución es ortogonal, entonces es posible hallar una wavelet ortogonal, esto es, una función  $\psi$  tal que  $\{\psi(x-l), l \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $W_0$ . Por la propiedad de escalado de  $W_j$ , sigue que  $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal para  $W_j$  y como los  $W_j$  son mutuamente ortogonales, resulta que  $\{\psi_{j,k}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ , ([16]).

En este caso los operadores proyección  $P_j$  y  $Q_j$  pueden ser escritos como sigue:

$$P_j f(x) = \sum_l \lambda_{j,l} \varphi_{j,l}(x), \quad \text{con} \quad \lambda_{j,l} = \langle f, \varphi_{j,l} \rangle,$$

$$Q_j f(x) = \sum_l \gamma_{j,l} \psi_{j,l}(x), \quad \text{con} \quad \gamma_{j,l} = \langle f, \psi_{j,l} \rangle,$$

y tienen la propiedad de dar la mejor aproximación de la función  $f$  en los espacios  $V_j$  y  $W_j$ , respectivamente. Para una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se tiene el siguiente desarrollo ortogonal:

$$f(x) = \sum_{j,l} \gamma_{j,l} \psi_{j,l}(x), \quad \text{con} \quad \gamma_{j,l} = \langle f, \psi_{j,l} \rangle.$$

De esta manera se logra construir una base ortonormal de wavelets para  $L^2(\mathbb{R})$ . Hay otra manera de obtener wavelets ortonormales que consiste en ortonormalizar la base de Riesz  $\{\varphi(x-l), l \in \mathbb{Z}\}$  de  $V_0$ , [16]. Concretamente, si  $\varphi$  y sus trasladadas enteras forman una base de Riesz para  $V_0$ , entonces la función  $\varphi^\#$  y sus trasladadas enteras forman una base ortonormal para  $V_0$ , siendo:

$$\widetilde{\varphi}^\# = \frac{\widehat{\varphi}(\omega)}{\sqrt{b(\omega)}}, \quad (1.14)$$

con  $b(\omega)$  definido como en (1.5).

A partir de esta nueva base ortonormal, las propiedades de dilatación y de traslación de  $V_j$  aseguran que  $\{\varphi_{j,l}^\#\}$  es una base ortonormal para  $V_j$ . La elección de los  $W_j$  como el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$  y la elección de una  $\psi$  tal que  $\{\psi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $W_0$ , aseguran que las funciones  $\{\psi_{j,l}, j, l \in \mathbb{Z}\}$  constituyen una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ . El inconveniente de este proceso de ortonormalización es que si las funciones  $\{\varphi(x-l), l \in \mathbb{Z}\}$  tienen soporte compacto, las funciones  $\{\varphi^\#\}$  obtenidas por ortonormalización, en general no lo tendrán. Las wavelets ortogonales antes descritas son una clase particularmente interesante dentro de la teoría de wavelets ya que permiten desarrollos ortogonales. Pero la propiedad de ortogonalidad es una limitación muy fuerte en la construcción de wavelets. Daubechies demuestra en [15], que la wavelet de Haar es la única wavelet a valores reales que tiene soporte compacto, es simétrica y ortogonal. Con la finalidad de ganar más flexibilidad en la construcción, surgieron las wavelets *biortogonales*. En este caso existen una *función de escala dual*  $\tilde{\varphi}$  y una *wavelet dual*  $\tilde{\psi}$  que generan un análisis de multirresolución dual con subespacios  $\tilde{V}_j$  y  $\tilde{W}_j$  que satisfacen:

$$V_j \perp \tilde{W}_j \quad \text{y} \quad \tilde{V}_j \perp W_j, \quad (1.15)$$

y como consecuencia:

$$\tilde{W}_j \perp W_{j'}, \quad \text{si } j \neq j'.$$

El análisis de multirresolución dual no es necesariamente el mismo que el generado por las funciones bases originales. Una condición equivalente a (1.15) es:

$$\langle \tilde{\varphi}_{0,k}, \psi_{0,l} \rangle = \langle \tilde{\psi}_{0,k}, \varphi_{0,l} \rangle, \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}.$$

Además, las funciones duales deben satisfacer:

$$\langle \varphi_{0,k}, \tilde{\varphi}_{0,l} \rangle = \delta_{k,l} \quad \text{y} \quad \langle \tilde{\psi}_{0,k}, \psi_{0,l} \rangle = \delta_{k,l},$$

donde:

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}.$$

Por las propiedades de escala, las dos últimas ecuaciones implican:

$$\langle \tilde{\varphi}_{j,l}, \varphi_{j,k} \rangle = \delta_{l,k}, \quad j, k, l \in \mathbb{Z} \quad (1.16)$$

y:

$$\langle \tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',l} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,l}, \quad j, j', k, l \in \mathbb{Z}. \quad (1.17)$$

Las definiciones de  $\tilde{\varphi}_{j,l}$  y  $\tilde{\psi}_{j,l}$  son similares a las de  $\varphi_{j,l}$  y  $\psi_{j,l}$ .

Usando la fórmula de Poisson, las relaciones de biortogonalidad son equivalentes a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_k \widehat{\tilde{\varphi}}(\omega + 2k\pi) \overline{\widehat{\tilde{\varphi}}(\omega + 2k\pi)} = 1 \\ \sum_k \widehat{\tilde{\psi}}(\omega + 2k\pi) \overline{\widehat{\tilde{\psi}}(\omega + 2k\pi)} = 1 \\ \sum_k \widehat{\tilde{\psi}}(\omega + 2k\pi) \overline{\widehat{\tilde{\varphi}}(\omega + 2k\pi)} = 0 \\ \sum_k \widehat{\tilde{\varphi}}(\omega + 2k\pi) \overline{\widehat{\tilde{\psi}}(\omega + 2k\pi)} = 0 \end{array} \right. \quad (1.18)$$

para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Como las funciones duales definen un análisis multirresolución, entonces satisfacen:

$$\tilde{\varphi}(x) = 2 \sum_k \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(2x - k) \quad \text{y} \quad \tilde{\psi}(x) = 2 \sum_k \tilde{g}_k \tilde{\varphi}(2x - k). \quad (1.19)$$

Si definimos las funciones  $\tilde{h}(\omega)$  y  $\tilde{g}(\omega)$  de manera análoga a como definimos  $h(\omega)$  en (1.3), vemos que las condiciones anteriores se satisfacen si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{h}(\omega) \overline{\tilde{h}(\omega)} + \tilde{h}(\omega + \pi) \overline{\tilde{h}(\omega + \pi)} = 1 \\ \tilde{g}(\omega) \overline{\tilde{g}(\omega)} + \tilde{g}(\omega + \pi) \overline{\tilde{g}(\omega + \pi)} = 1 \\ \tilde{g}(\omega) \overline{\tilde{h}(\omega)} + \tilde{g}(\omega + \pi) \overline{\tilde{h}(\omega + \pi)} = 1 \\ \tilde{h}(\omega) \overline{\tilde{g}(\omega)} + \tilde{h}(\omega + \pi) \overline{\tilde{g}(\omega + \pi)} = 1, \end{array} \right. \quad (1.20)$$

para todo  $\omega \in \mathbb{R}$  o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}(\omega) & \tilde{h}(\omega + \pi) \\ \tilde{g}(\omega) & \tilde{g}(\omega + \pi) \end{bmatrix} \overline{\begin{bmatrix} h(\omega) & g(\omega) \\ h(\omega)(\omega + \pi) & g(\omega + \pi) \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ . Si notamos:

$$m(\omega) = \begin{bmatrix} h(\omega) & h(\omega + \pi) \\ g(\omega) & g(\omega + \pi) \end{bmatrix},$$

y:

$$\tilde{m}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{h}(\omega) & \tilde{h}(\omega + \pi) \\ \tilde{g}(\omega) & \tilde{g}(\omega + \pi) \end{bmatrix},$$

entonces:



$$\tilde{m}(\omega)\overline{m^t}(\omega) = 1.$$

Intercambiando las matrices en el miembro izquierdo de (1.21), obtenemos:

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : \begin{cases} \overline{h(\omega)}\tilde{h}(\omega) + \overline{g(\omega)}\tilde{g}(\omega) & = 1 \\ \overline{h(\omega)}\tilde{h}(\omega + \pi) + \overline{g(\omega)}\tilde{g}(\omega + \pi) & = 0 \end{cases} . \quad (1.22)$$

Usando la regla de Cramer podemos hallar:

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{\overline{g(\omega + \pi)}}{\Delta(\omega)}, \quad (1.23)$$

$$\tilde{g}(\omega) = -\frac{\overline{h(\omega + \pi)}}{\Delta(\omega)}, \quad (1.24)$$

donde:

$$\Delta(\omega) = \det m(\omega).$$

El espacio generado por el conjunto de funciones  $\{\psi_{j,l}, l \in \mathbb{Z}\}$  complementa  $V_j$  en  $V_{j+1}$  si y sólo si  $\Delta(\omega)$  no se anula. En este caso, los operadores proyección son los siguientes:

$$P_j f(x) = \sum_l \tilde{\lambda}_{j,l} \varphi_{j,l}(x), \text{ con } \tilde{\lambda}_{j,l} = \langle f, \tilde{\varphi}_{j,l} \rangle,$$

$$Q_j f(x) = \sum_l \tilde{\gamma}_{j,l} \psi_{j,l}(x), \text{ con } \tilde{\gamma}_{j,l} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle;$$

y si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$f = \sum_{j,l} \langle f, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle \psi_{j,l}(x).$$

Es preciso notar que esta igualdad puede verse como una transformada wavelet discreta y que las condiciones sobre  $\psi$  son menos restrictivas que en el caso ortogonal. De las ecuaciones (1.16),(1.17) y (1.19) se observa que:

$$\tilde{h}_{k-2l} = \langle \tilde{\varphi}(x-l), \varphi(2x-k) \rangle \text{ y } \tilde{g}_{k-2l} = \langle \tilde{\psi}(x-l), \varphi(2x-k) \rangle.$$

En particular, escribiendo  $\varphi(2x-k) \in V_1$  en las bases de  $V_0$  y  $W_0$ , obtenemos:

$$\varphi(2x - k) = \sum_k \tilde{h}_{k-2l} \varphi(x - l) + \sum_l \tilde{g}_{k-2l} \psi(x - l). \quad (1.25)$$

Una ecuación similar puede deducirse para  $\tilde{\varphi}(2x - k) \in \tilde{V}_1$ :

$$\tilde{\varphi}(2x - k) = \sum_k h_{k-2l} \varphi(x - l) + \sum_l g_{k-2l} \psi(x - l). \quad (1.26)$$

Una función de escala y una wavelet biortogonales se dicen *semiortogonales* o *prewavelets* si generan un análisis de multirresolución ortogonal. En este caso, como los espacios  $W_j$  son mutuamente ortogonales, se tiene que:

$$W_j \perp \widetilde{W}'_j \quad \text{y} \quad W_j \perp W'_j.$$

Como consecuencia,  $W_j = \widetilde{W}_j$  y esto implica que  $V_j = \widetilde{V}_j$ . Luego las funciones originales y sus duales generan el mismo análisis de multirresolución. Al final del capítulo se presentarán ejemplos de las wavelets mencionadas en esta sección. Previamente indicaremos cómo calcular los coeficientes del desarrollo en (1.13) mediante la transformada wavelet rápida.

### Momentos de la wavelet y de la función de escala

Los momentos de la función de escala y de la wavelet están definidos por:

$$\mathcal{M}_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p \varphi(x) dx, \quad p \in \mathbb{N}$$

y:

$$\mathcal{N}_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p \psi(x) dx, \quad p \in \mathbb{N},$$

y análogamente para las funciones duales. Las funciones de escala están normalizadas tomando  $\mathcal{M}_0 = \widetilde{\mathcal{M}}_0 = 1$ . El hecho de que la wavelet dual tenga momentos nulos permite que la función de escala y sus trasladadas puedan representar polinomios. Veamos qué significa esta afirmación. Sea  $N$  el número de momentos nulos de la wavelet dual, es decir:

$$\widetilde{\mathcal{N}}_p = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq p < N \quad \text{y} \quad \widetilde{\mathcal{M}}_N \neq 0.$$

Esto es lo mismo que decir que  $\widehat{\tilde{\varphi}}(\omega)$  tiene una raíz de multiplicidad  $N$  en  $\omega = 0$  pues:

$$\left( \widehat{\tilde{\psi}} \right)^{(k)}(0) = \frac{1}{i^k} \widetilde{\mathcal{N}}_p.$$

Como  $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ , esto a su vez equivale a que  $\widetilde{g}(\omega)$  tiene una raíz de multiplicidad  $N$  en  $\omega = 0$ . Luego la sucesión  $\{\widetilde{g}_k\}$  tiene  $N$  momentos nulos discretos. Por lo tanto:

$$\sum_k \widetilde{g}_k k^p = 0, \text{ para } 0 \leq p < N.$$

Por (1.23) vemos que esto es equivalente a que  $h(\omega)$  tenga una raíz de multiplicidad  $N$  en  $\omega = \pi$  lo que implica por (1.2) que:

$$i^p \widehat{\varphi}^p(2k\pi) = \delta_k \mathcal{M}_p, \text{ para } 0 \leq p < N.$$

Por la fórmula de Poisson se obtiene:

$$\sum_l (x-l)^p \varphi(x-l) = \mathcal{M}_p, \text{ para } 0 \leq p < N.$$

Es decir, cualquier polinomio de grado menor que  $N$  puede escribirse como combinación lineal de las funciones  $\varphi(x-l)$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  y los coeficientes de la combinación lineal son polinomios en  $l$  del mismo grado que el polinomio que se quiere representar. En efecto, si  $A$  es un polinomio de grado  $(N-1)$ , en la representación:

$$A(x) = \sum_l B(l) \varphi(x-l),$$

los coeficientes  $B(l)$  se calculan como:

$$B(l) = \int A(x) \widetilde{\varphi}(x-l) dx = \int A(x+l) \widetilde{\varphi}(x) dx,$$

y por lo tanto  $B$  es un polinomio en  $l$ . Más aún, como:

$$A(x) = \sum_l B(x-l) \varphi(l),$$

$A$  y  $B$  son del mismo grado.

### 1.3.3. La transformada wavelet rápida

Supongamos que  $v_j$  es una función de  $V_j$ . Es claro que  $v_j$  es combinación lineal de las funciones  $\varphi_{j,k}$  de la base de  $V_j$ . Por otro lado, como  $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ , la función  $v_j$  es combinación lineal de las funciones  $\varphi_{j-1,k}$  y  $\psi_{j-1,k}$ , bases de  $V_{j-1}$  y  $W_{j-1}$ , respectivamente. Luego:

$$v_j(x) = \sum_k \tilde{\lambda}_{j,k} \varphi_{j,k}(x) = \sum_k \tilde{\lambda}_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}(x) + \sum_k \tilde{\gamma}_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x)$$

Es decir, tenemos dos representaciones de la función  $v_j$ : una como elemento de  $V_j$  asociado a la sucesión  $\{\tilde{\lambda}_{j,k}\}$  y otra como suma de elementos en  $V_{j-1}$  y  $W_{j-1}$  asociados a las sucesiones  $\{\tilde{\lambda}_{j-1,k}\}$  y  $\{\tilde{\gamma}_{j-1,k}\}$ , respectivamente. Queremos hallar una relación entre estos coeficientes que nos permita pasar de una representación a la otra. De (1.19):

$$\tilde{\lambda}_{j-1,l} = \langle v_j, \tilde{\varphi}_{j-1,l} \rangle = \sqrt{2} \left\langle v_j, \sum_k \tilde{h}_{k-2l} \tilde{\varphi}_{j,k} \right\rangle = \sqrt{2} \sum_k \tilde{h}_{k-2l} \tilde{\lambda}_{j,k} \quad (1.27)$$

y análogamente:

$$\tilde{\gamma}_{j-1,l} = \langle v_j, \tilde{\psi}_{j-1,l} \rangle = \sqrt{2} \sum_k \tilde{g}_{k-2l} \tilde{\lambda}_{j,k} \quad (1.28)$$

Es decir una función  $v_j(x) = \sum_k \tilde{\lambda}_{j,k} \varphi_{j,k}(x)$  en el espacio  $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$  tiene coeficientes  $\tilde{\lambda}_{j,l}$  y  $\tilde{\gamma}_{j,l}$  en la nueva base  $\{\varphi_{j-1,k}(x), \psi_{j-1,k}(x)\}$ .

Vayamos ahora en la dirección opuesta, es decir conociendo los coeficientes en la base  $\{\varphi_{j-1}(x), \psi_{j-1,k}(x)\}$ , queremos hallar los coeficientes en la base  $\psi_{j,k}$ . Usando (1.26), tenemos:

$$\tilde{\lambda}_{j,k} = \sqrt{2} \sum_l h_{k-2l} \tilde{\lambda}_{j-1,k} + \sqrt{2} \sum_l g_{k-2l} \tilde{\gamma}_{j-1,l}. \quad (1.29)$$

Las fórmulas (1.27), (1.28) y (1.29) aplicadas recursivamente definen la *transformada wavelet rápida*; las relaciones (1.27) y (1.28) definen la *transformada directa* ( fórmulas de descomposición), mientras que (1.29), define la *transformada inversa* ( fórmula de reconstrucción). Estos algoritmos pueden verse gráficamente en la Figura 1.3 y en la Figura 1.4.

### 1.3.4. Propiedades de las wavelets

Enunciaremos a continuación características "deseables" de las wavelets, esto es propiedades que se busca que tenga una wavelet cuando se la construye, para facilitar su uso. En general, no es posible hallar una que tenga todas las propiedades simultáneamente.

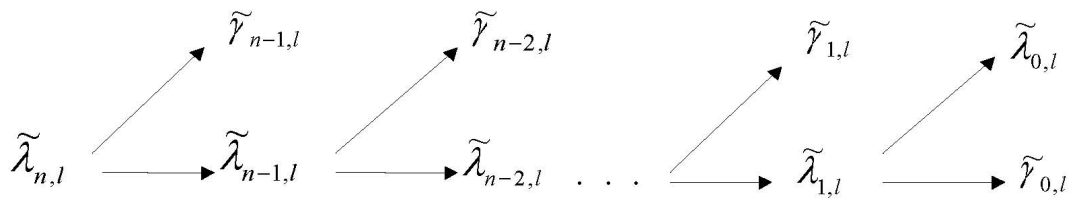


Figura 1.3: Transformada directa wavelet.

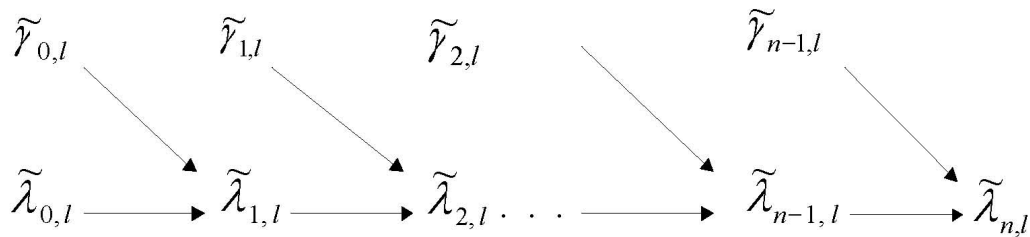


Figura 1.4: Transformada inversa wavelet.

- **Ortogonalidad:** permite relacionar la norma  $L^2$  de una función con la norma de sus coeficientes wavelets mediante la igualdad:

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{j,l} \gamma_{j,l}^2}.$$

En el caso biortogonal, estas dos magnitudes son sólo equivalentes ya que  $\{\psi_{j,l} : l \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $W_j$ . Si el análisis multirresolución es ortogonal, los operadores proyección sobre los diferentes subespacios dan aproximaciones óptimas en el sentido de  $L^2$ .

- **Soporte compacto:** si la función de escala y la wavelet tienen soporte compacto, entonces los filtros  $h$  y  $g$  son filtros de respuesta finita al impulso y esto beneficia las implementaciones. Si no tienen soporte compacto, es deseable que tengan un decrecimiento rápido de manera tal que los filtros puedan ser aproximados por filtros de respuesta finita.
- **Coefficientes racionales:** si los coeficientes  $\{h_k\}$  y  $\{g_k\}$  de los filtros son racionales o racionales diádicos, se ve beneficiada la implementación ya que las operaciones son más rápidas.
- **Simetría:** si la función de escala y la wavelet son simétricas, los filtros  $h$  y  $g$  tienen fase lineal generalizada. La ausencia de esta propiedad puede conducir a distorsión de fase, [6], [16], páginas 160 y 254, respectivamente. Esta propiedad es importante en las aplicaciones a procesamiento de señales.

- **Suavidad:** es una propiedad importante en las aplicaciones de compresión. Si se desea, por ejemplo, comprimir información en la representación de una imagen  $I$  se descartan los coeficientes  $\gamma_{j,l}$  que son pequeños y se obtiene una representación del tipo:

$$\tilde{I} = \sum_{j,l \in S} \gamma_{j,l} \psi_{j,l},$$

donde  $S$  es un subconjunto de todos los valores posibles. La diferencia entre  $I$  e  $\tilde{I}$ , es decir el error cometido al eliminar las funciones  $\psi_{j,l}$ , será menos perceptible cuanto más suave sea  $\psi$ .

- **Número de momentos nulos de la wavelet dual:** permite caracterizar clases de funciones de suavidad  $\alpha > 1$ . Esta propiedad está relacionada con la propiedad de que la función de escala y sus trasladadas puedan reproducir polinomios. Otra consecuencia es que permite determinar la velocidad de convergencia del desarrollo en wavelets de funciones suaves. Por otra parte, el número de momentos nulos de la wavelet dual está relacionado con la suavidad de la wavelet ([16], página 269).
- **Expresiones analíticas:** no siempre existe una expresión analítica de la función de escala o de la wavelet. En estos casos, toda la información acerca de  $\varphi$  y  $\psi$  (ortogonalidad, suavidad, momentos nulos, etc.) debe ser determinada a partir de los filtros. Hay otros casos en los que existe una expresión analítica y es de gran utilidad su uso.

Como ya dijimos, no es posible construir wavelets que tengan todas estas propiedades. En general las propiedades se eligen de acuerdo a la utilización que se vaya a dar a la base que se desea construir.

### 1.3.5. Ejemplos

#### Ejemplo 1: Wavelets de Haar.

El ejemplo más antiguo de una función  $\psi$  para la cual  $\{\psi_{j,l}\}$  constituye una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$  es la función de Haar:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

La función de escala está definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

El subespacio  $V_0$  está generado por las funciones  $\varphi(x - k)$  que son traslaciones enteras de funciones constantes a trozos en el intervalo  $[0, 1]$ . El subespacio  $V_1$  está generado por funciones  $\varphi(2x - k)$  que son funciones trasladadas en  $k/2$  de las funciones constantes a trozos sobre el intervalo  $[0, 1/2]$ . En general, el subespacio  $V_j$  está generado por funciones trasladadas en  $k/2^j$  de funciones constantes a trozos en el intervalo  $[0, 1/2^j]$ . La ecuación de refinamiento es:

$$\varphi(x) = 2 \sum_k h_k \varphi(2x - k) = \varphi(x) + \varphi(2x - 1),$$

y la ecuación para la wavelet está dada por:

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(2x - 1).$$

Observemos que la wavelet tiene un solo momento nulo, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0.$$

No es de mucha utilidad en la práctica debido a su baja regularidad; los gráficos de ambas funciones pueden verse en la Figura 1.5.

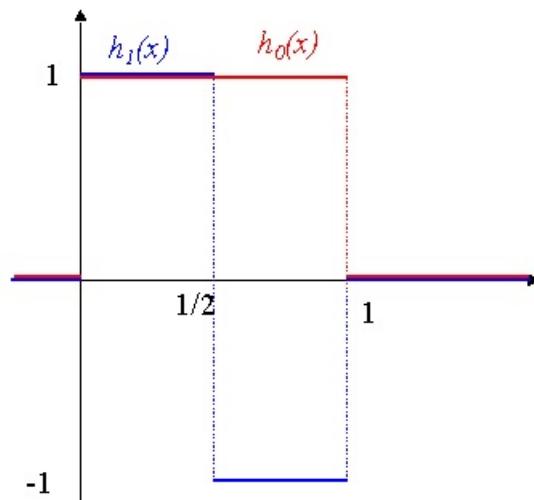


Figura 1.5: Función de escala y wavelet de Haar.

### Ejemplo 2: wavelet de Shannon.

La función de escala es:

$$\varphi(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x},$$

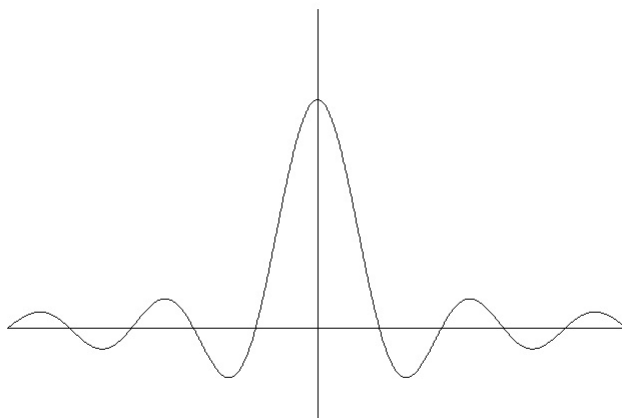


Figura 1.6: Función de escala de Shannon.

cuyo gráfico se muestra la Figura 1.6.

De la ecuación:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sum_k h_k e^{-\frac{ik\omega}{2}} \hat{\varphi}(\omega/2),$$

se pueden determinar los coeficientes  $h_k$ :

$$h_k = \begin{cases} 1/2 & k = 0 \\ \frac{1}{\pi k} \text{sen} \left( \frac{\pi k}{2} \right) & k \neq 0 \end{cases} .$$

La expresión de la wavelet de Shannon es:

$$\psi(x) = \frac{\text{sen}(2\pi x) - \text{sen}(\pi x)}{\pi x},$$

y su gráfico puede verse en la Figura 1.7.

Esta wavelet tampoco es muy útil en la práctica debido a su lento decrecimiento.

### Ejemplo 3: Wavelets de Daubechies.

Las wavelets originales de Daubechies son probablemente las wavelets ortonormales más conocidas y usadas.

En lugar de comenzar con la función de escala o los espacios  $V_j$ , Daubechies basa su construcción en una factorización de (1.3). Las wavelets así obtenidas no tienen, en general, una expresión analítica. Sus gráficos pueden ser realizados con muy buena precisión usando



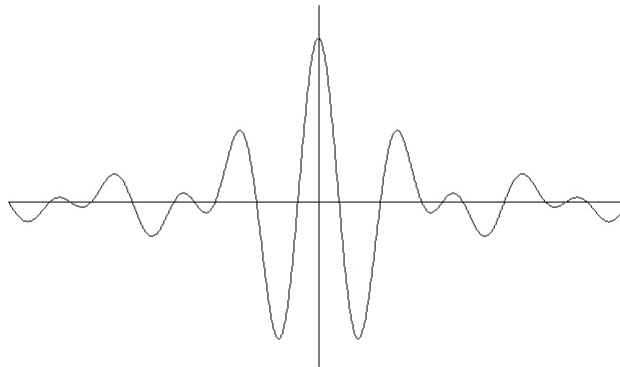


Figura 1.7: Wavelet de Shannon.

el algoritmo de la cascada y pueden verse en [16], Capítulo 6. Las mismas consisten en una familia indexada con  $N \in \mathbb{N}$ , siendo  $N$  el número de momentos nulos de la wavelet. Para cada  $N$  hay una función de escala  ${}_N\varphi$  y una wavelet  ${}_N\psi$  que tienen soporte en un intervalo de longitud  $(2N - 1)$  y cuya regularidad aumenta con  $N$ . Ninguna de las funciones de esta familia es simétrica o antisimétrica. Más aún, Daubechies prueba en [16], Capítulo 8, que no es posible obtener simetría para las funciones de escala y la wavelet dentro del marco de las bases ortonormales de wavelets con soporte compacto. En la Figura 1.8 mostramos la función de escala y su correspondiente wavelet para  $N = 2, 4, 6$ .

#### Ejemplo 4: funciones de escala B-splines y B-wavelets.

Los *B-splines* cardinales  $N_m$  de orden  $m$ ,  $m$  entero positivo, son ejemplos típicos de funciones de escala cuya implementación computacional es sencilla. Existen algoritmos para realizar los gráficos y para calcular exactamente las piezas polinomiales que lo componen. Daremos a continuación algunas definiciones y luego el análisis multirresolución que ellos generan. El espacio  $S_m$  de splines cardinales de orden  $m$  con nodos en los enteros es la colección de todas las funciones  $f \in C^{m-2}$  tal que las restricciones de  $f$  al intervalo  $[k, k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , son polinomios de grado a lo sumo  $(m - 1)$ .

Consideremos ahora los espacios  $S_m^j$  de splines cardinales con nodos en  $2^{-j}\mathbb{Z}$ . Es claro que:

$$\dots \subseteq S_m^{-1} \subseteq S_m^0 \subseteq S_m^1 \subseteq \dots$$

Si definimos  $V_m^j$  como la clausura en  $L^2(\mathbb{R})$  de  $S_m^j \cap L^2(\mathbb{R})$ , obtenemos una sucesión de espacios spline cardinales anidados:

$$\dots V_m^{-1} \subseteq V_m^0 \subseteq V_m^1 \subseteq \dots$$

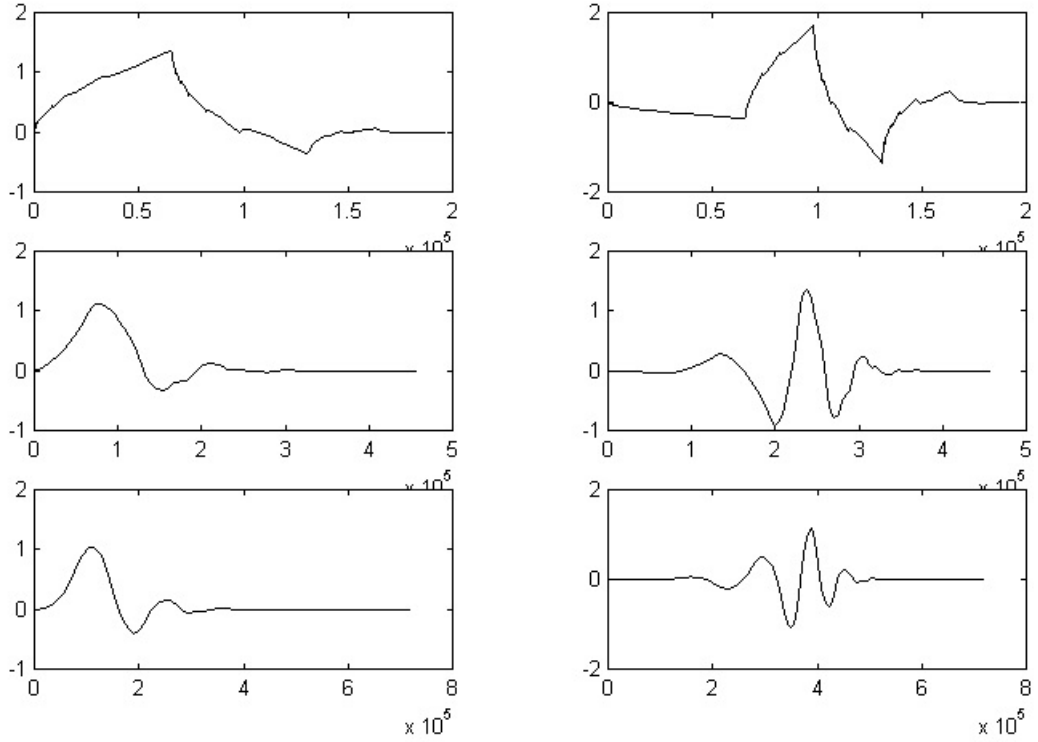


Figura 1.8: Izquierda: funciones de escala de Daubechies. Derecha: wavelets de Daubechies.

Es decir los espacios  $V_m$  satisfacen la propiedad 4) de un análisis multirresolución. Se define entonces el B-spline cardinal  $N_m$  de orden  $m$  de la siguiente manera:

$$N_m(x) := (N_{m-1})(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt, \quad m \geq 2, \quad (1.30)$$

siendo  $N_1$  la función característica del intervalo  $[0, 1)$ . Las propiedades más importantes del B-spline cardinal  $N_m$  son:

- Soporte  $N_m = [0, m]$ .
- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_m(x-k) = 1, \forall x$ .
- $N_m$  y  $N_{m-1}$ ,  $m \geq 2$ , están relacionados por la identidad:

$$N_m(x) = \frac{x}{m-1}N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}(x-1). \quad (1.31)$$

Es claro que  $N_m \subseteq V_0^m$ ; más aún  $\{N_m(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ , es una base de Riesz de  $V_m^0$  y como consecuencia  $\{2^{j/2}N_m(2^jx - k), k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz de  $V_m^j$ .

La relación de dos escalas para el B-spline cardinal  $N_m$  está dada por:

$$N_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-m+1} \binom{m}{k} N_m(2x - k). \quad (1.32)$$

Excepto por una constante multiplicativa no nula y una traslación entera, la única wavelet semiortogonal  $\psi_m$  de soporte mínimo  $[0, 2m - 1]$  que corresponde al B-spline cardinal  $N_m$  de orden  $m$ , está dada por:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{3m-2} q_n N_m(2x - n), \quad (1.33)$$

donde la sucesión  $q_n$  es:

$$q_n = \frac{(-1)^n}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(n + 1 - l), \quad n = 0, 1, \dots, 3m - 2.$$

La wavelet (1.33) asociada al B-spline  $N_m$ , se llama *B-wavelet*. La teoría correspondiente a *B-splines cardinales* y *B-wavelets* puede consultarse en [6]. Daremos a continuación las expresiones analíticas y los gráficos para los casos  $m = 2$  y  $m = 4$  correspondientes a los B-splines lineales y cúbicos, respectivamente. El B-spline cardinal de orden 2 se obtiene de (1.30):

$$N_2(x) = \varphi(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

Las funciones  $N_2(2x - k)$  en  $V_1$  se expresan explícitamente de la siguiente manera:

$$N_2(2x - k) = \varphi(2x - k) = \begin{cases} 2x - k & \frac{k}{2} \leq x < \frac{k}{2} + 1 \\ 2 + k - 2x & \frac{k}{k} + \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

De (1.32), la ecuación de refinamiento resulta ser:

$$N_2(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(2x) + \varphi(2x - 1) + \frac{1}{2}\varphi(2x - 2),$$

y la *B-wavelet* correspondiente es:

$$\psi_2(x) = \sum_{n=0}^4 q_n N_2(2x - n),$$

donde:

$$q_n = \frac{(-1)^n}{2} \sum_{l=0}^2 \binom{2}{l} N_4(n+1-l) = \frac{(-1)^n}{2} \{N_4(n+1) + 2N_4(n) + N_4(n-1)\}.$$

El término  $N_4$  en la ecuación anterior es un  $B$ -spline cúbico que puede calcularse usando (1.31). De esta manera, la sucesión  $\{q_k\}$  obtenida es:  $\{q_k\} = \{1/12, -1/2, 5/6, -1/2, 1/12\}$  y la ecuación para la  $B$ -wavelet está dada por:

$$\psi_2(x) = \frac{1}{12}N_2(2x) - \frac{1}{2}N_2(2x-1) + \frac{5}{6}N_2(2x-2) - \frac{1}{2}N_2(2x-3) + \frac{1}{2}N_2(2x-4).$$

La representación explícita de  $\psi(x)$  es la siguiente:

$$\psi_2(x) = \begin{cases} x/6 & 0 \leq x < 1/2 \\ \frac{1}{6}(-7x+4) & 1/2 \leq x < 1 \\ \frac{1}{6}(16x-19) & 1 \leq x < 3/2 \\ \frac{1}{6}(-16x+19) & 3/2 \leq x < 2 \\ \frac{1}{6}(7x-17) & 2 \leq x < 5/2 \\ \frac{1}{6}(-x+3) & 5/2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} .$$

El  $B$ -spline cúbico está dado por:

$$N_4(x) = \varphi(x) = \begin{cases} x^3/6 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{6}(-3x^3 + 12x^2 - 12x + 4) & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}(3x^3 - 24x^2 + 60x - 44) & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{6}(4-x)^3 & 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} .$$

La ecuación de refinamiento es en este caso:

$$N_4(x) = \varphi(x) = \frac{1}{8}\varphi(2x) + \frac{4}{8}\varphi(2x-1) + \frac{6}{8}\varphi(2x-3) + \frac{1}{8}\varphi(2x-4).$$

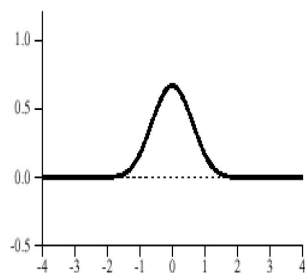


Figura 1.9: B-spline cúbico.

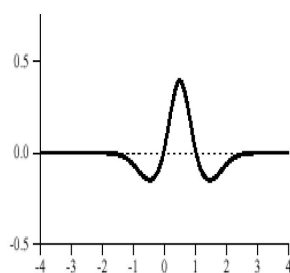


Figura 1.10: Wavelet B-spline cúbica.

La ecuación para la  $B$ -wavelet correspondiente se obtiene igual que en el caso  $m = 2$ . Los gráficos del  $B$ -spline cúbico  $N_4(x)$  y de la  $B$ -wavelet asociada  $\psi_4(x)$ , pueden verse en las Figuras 1.9 y 1.10.

## 1.4. Wavelets de segunda generación

En esta sección introduciremos el marco de trabajo para las wavelets que no son necesariamente trasladadas y dilatadas de una función fija pero igualmente gozan de las buenas propiedades de las wavelets de primera generación. Se las conoce como wavelets de *segunda generación*. Ejemplos típicos son:

- wavelets en un intervalo;
- wavelets en dominios acotados de  $\mathbb{R}^n$ ;
- wavelets en espacios con producto interior ponderado;
- wavelets sobre curvas y superficies;

- wavelets adaptadas a muestreo irregular.

Las wavelets de primera generación tienen dominios que son *espacialmente invariantes*. La invariancia espacial permite que las traslaciones y dilataciones de una misma función de escala estén definidas en lugares arbitrarios del dominio, propiedad ésta que hace posible construir los espacios anidados  $V_j$ .

Sin embargo, en los ejemplos mencionados arriba, no hay invariancia espacial y por lo tanto es necesario contar con otros métodos para construir los espacios de escala.

Existen varios resultados relacionados con wavelets definidas sobre intervalos ([56], [16], [7], [57]), wavelets en dominios acotados y wavelets ponderadas, pero todas estas construcciones apuntan a resolver un problema específico.

Nosotros optamos por presentar dos de las técnicas más generales para la construcción de wavelets de segunda generación: *el esquema de lifting* y la *subdivisión* o *refinamiento* de superficies.

La primera de ellas fue desarrollada por W. Sweldens, [58] a partir de 1996 pero tiene numerosas conexiones con resultados obtenidos anteriormente por D. Donoho ([19] [20], [21]) por un lado y por M. Lounsbery, T. De Rose y Warren [41], por otro. También está relacionado con trabajos realizados por W. Dahmen y sus colaboradores ([38], [13]).

La técnica de subdivisión o refinamiento de superficies fue desarrollada por Lounsbery, [41] y permite extender el análisis de multirresolución a superficies topológicas de tipo arbitrario. En las subsecciones siguientes describiremos estas técnicas, pero previamente estableceremos el marco de trabajo de las wavelets de segunda generación. Para ello comenzaremos dando la versión de análisis de multirresolución, función de escala y wavelets. Veremos que gran parte de la terminología y simbología usados en el caso de primera generación subsisten en este contexto, si bien a veces su significado sea algo diferente. Por ejemplo, mantendremos el nombre *función de escala*, aunque en este caso dicha función no pueda ser escrita como combinación lineal de sus versiones escaladas.

Consideremos el espacio  $L^2 = L^2(X, \Sigma, \mu)$ , donde  $X \subset \mathbb{R}^n$  es el dominio espacial,  $\Sigma$  es una  $\sigma$  álgebra y  $\mu$  es una medida sobre  $\Sigma$ . No pedimos que la medida sea invariante a las traslaciones de manera que  $\mu$  puede ser una medida ponderada y suponemos que  $(X, d)$  es un espacio métrico. Comenzamos dando la definición de análisis multirresolución para segunda generación:

**Definición 1.4.1** *Un análisis de multirresolución de  $L^2$  es una sucesión de subespacios cerrados  $V_j \in L^2 : j \in \mathcal{J} \subset \mathbb{Z}$  que verifican:*

- $V_j \subset V_{j+1}$ .
- $\bigcup_{j \in \mathcal{J}} V_j$  es densa en  $L^2$ .

- Para cada  $j$ ,  $V_j$  tiene una base de Riesz dada por las funciones de escala  $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathcal{K}(j)\}$ , donde  $\mathcal{K}(j)$  es un conjunto general de índices y suponemos que  $\mathcal{K}(j) \subset \mathcal{K}(j+1)$ .

Consideraremos dos casos:

- I.**  $\mathcal{J} = \mathbb{N}$ . Esto significa que el nivel más grueso es  $V_0$ . Este es el caso cuando  $\mu(X) < \infty$ .
- II.**  $\mathcal{J} = \mathbb{Z}$ . La sucesión de espacios  $V_j$  es bi-infinita. Esto ocurre cuando  $\mu(X) = \infty$ . En este caso agregamos la condición :

$$\bigcap_{j \in \mathcal{J}} V_j = \{0\}.$$

Un análisis de multirresolución dual consiste de espacios  $\{\tilde{V}_j \subset L^2 : j \in \mathcal{J} \subset \mathbb{Z}\}$  con bases dadas por funciones de escala duales  $\tilde{\varphi}_{j,k}$ . Estas funciones de escala dual son biortogonales a las funciones de escala en el siguiente sentido:

$$\langle \varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}, \quad \text{para } k, k' \in \mathcal{K}(j). \quad (1.34)$$

Cualquier función de energía finita puede ser aproximada por funciones de escala, esto es existen operadores proyección  $P_j : L^2 \rightarrow V_j$ , definidos como:

$$P_j(f) = \sum_{k \in \mathcal{K}(j)} \lambda_{j,k} \varphi_{j,k}, \quad \text{con } \lambda_{j,k} = \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle,$$

tal que  $\forall f \in L^2$  se verifica:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j(f) = f.$$

### 1.4.1. Funciones de escala y espacios $V_j$

En las construcciones clásicas, las funciones de escala  $\varphi_{j,k}$  están definidas como traslaciones y dilataciones diádicas de una función de escala fija  $\varphi(x)$ , y satisfacen la relación de refinamiento:

$$\varphi(x) = \sum_l h_{k-2l} \varphi_{j+1,l}. \quad (1.35)$$

En el caso de segunda generación, las funciones de escala no son necesariamente trasladadas y dilatadas de una función fija. La principal característica de las wavelets de segunda generación es que aún satisfacen relaciones de refinamiento que se deducen del hecho que  $V_j \subset V_{j+1}$ . Más precisamente, para cada función de escala  $\varphi_{j,k}$ ,  $j \in \mathcal{J}$ ,  $k \in \mathcal{K}(j)$ , existen coeficientes  $\{h_{j,k,l} : l \in \mathcal{K}(j+1)\}$  tales que:

$$\varphi_{j,k} = \sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} h_{j,k,l} \varphi_{j+1,l}. \quad (1.36)$$

Nos referimos a esta última como la *ecuación de refinamiento*. Siempre elegiremos los índices de manera tal que  $j \in \mathcal{J}$ ,  $k \in \mathcal{K}(j)$  y  $l \in \mathcal{K}(j+1)$  y al conjunto de coeficientes  $\{h_{j,k,l} : j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}(j), l \in \mathcal{K}(j+1)\}$  lo llamaremos *filtro*.

Notemos que en este caso los coeficientes de la ecuación de refinamiento son, en general, distintos para cada función de escala. Comparando esto con el caso de primera generación, de la ecuación (1.35) tendremos  $\{h_{j,k,l}\} = \{h_{l-2k}\}, \forall j$ . En el contexto de la ecuación (1.35), los  $\{h_{j,k,l}\}$  son invariantes a las traslaciones y dilataciones. Supondremos que para cada  $j$  y  $k$  solamente un número finito de coeficientes  $\{h_{j,k,l}\}$  son no nulos. Diremos entonces que  $h$  es un filtro finito.

Definimos ahora los siguientes conjuntos finitos:

$$L(j, k) = \{l \in \mathcal{K}(j+1) : h_{j,k,l} \neq 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{K}(j, l) = \{k \in \mathcal{K}(j) : h_{j,k,l} \neq 0\}$$

Estos conjuntos de índices indican los elementos no nulos sobre cada fila, (respectivamente columna), de la matriz (posiblemente infinita)  $\{h_{j,k,l} : k \in \mathcal{K}(j), l \in \mathcal{K}(j+1)\}$ .

Las funciones de escala dual satisfacen relaciones de refinamiento similares a (1.36) con coeficientes  $\{\tilde{h}_{j,k,l}\}$  y podemos definir conjuntos similares de índices denotándolos con tilde para diferenciarlos de los coeficientes de las funciones de escala  $\varphi_{j,k}$ .

### 1.4.2. Wavelets y espacios $W_j$

Las wavelets de primera generación son bases de funciones para espacios  $W_j$  que complementan  $V_j$  en  $V_{j+1}$ . La misma idea subsiste para el caso de segunda generación, lo que conduce a la siguiente definición.

**Definición 1.4.2** *Un conjunto de funciones  $\{\psi_{j,m}, j \in \mathcal{J}, m \in \mathcal{M}(\mathcal{J})\}$ , donde  $\mathcal{M}(\mathcal{J}) = \mathcal{K}(j+1) - \mathcal{K}(j)$  es un conjunto de funciones wavelets si:*

- *El espacio  $W_j = \text{clos span} \left\{ \frac{\psi_{j,m}}{\|\psi_{j,m}\|} : m \in \mathcal{M}(\mathcal{J}) \right\}$  es un complemento de  $V_j$  en  $V_{j+1}$  y  $W_j \perp \tilde{V}_j$ .*
- *Si  $\mathcal{J} = \mathbb{Z}$ , el conjunto  $W_j = \text{clos span} \left\{ \frac{\psi_{j,m}}{\|\psi_{j,m}\|} : m \in \mathcal{M}(\mathcal{J}) \right\}$  es una base de Riesz para  $L^2$ .*
- *Si  $\mathcal{J} = \mathbb{N}$ , el conjunto  $W_j = \text{clos span} \left\{ \frac{\psi_{j,m}}{\|\psi_{j,m}\|} : m \in \mathcal{M}(\mathcal{J}) \right\} \cup \left\{ \frac{\varphi_{0,k}}{\|\varphi_{0,k}\|} : k \in \mathcal{K}(0) \right\}$ , es una base de Riesz para  $L^2$ .*



Siempre supondremos que  $m \in M(\mathcal{J})$ . La base dual está dada por wavelets duales  $\tilde{\psi}_{j,m}$  que son biortogonales a las wavelets, es decir que satisfacen:

$$\langle \psi_{j,m}, \tilde{\psi}_{j',m'} \rangle = \delta_{j,j',m,m'}. \quad (1.37)$$

Las wavelets duales generan espacios  $\tilde{W}_j$  que complementan  $\tilde{V}_j$  en  $\tilde{V}_{j+1}$  y  $\tilde{W}_j \perp V_j$ . Para  $f \in L^2$ , definimos los coeficientes  $\gamma_{j,m} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,m} \rangle$ . Entonces:

$$f = \sum_{j,m} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}.$$

La definición implica que las wavelets satisfacen relaciones de la forma:

$$\psi_{j,m} = \sum_l g_{j,m,l} \varphi_{j+1,l}, \quad (1.38)$$

donde  $g = \{g_{j,m,l}, j \in \mathcal{J}, m \in M(\mathcal{J}), l \in \mathcal{K}(j+1)\}$  es un filtro; las wavelets duales satisfacen relaciones de refinamiento con un filtro  $\tilde{g}$ . Como  $\varphi_{j+1,l} \in V_j \oplus W_j$ , se tiene que:

$$\varphi_{j+1,l} = \sum_k \tilde{h}_{j,k,l} \varphi_{j,k} + \sum_m \tilde{g}_{j,m,l} \psi_{j,m} \quad (1.39)$$

La biortogonalidad de las funciones de escala y de las wavelets (ecuaciones (1.36) y (1.37), respectivamente), implican las siguientes relaciones entre los filtros:

$$\begin{aligned} \sum_l g_{j,m,l} \tilde{g}_{j,m',l} &= \delta_{m,m'}, \\ \sum_l h_{j,k,l} \tilde{h}_{j,k',l} &= \delta_{k,k'}, \\ \sum_l h_{j,k,l} \tilde{g}_{j,m,l} &= 0, \\ \sum_l g_{j,m,l} \tilde{h}_{j,k',l} &= 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

**Definición 1.4.3** *Un conjunto de filtros  $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$  es un conjunto biortogonal de filtros si se satisfacen las condiciones (1.40).*

En el caso de segunda generación, las wavelets no pueden ser construidas tan fácilmente como en el caso de primera generación y el esquema de lifting provee una manera de hallarlas. Daremos ahora la versión del esquema de lifting para el caso de segunda generación.

### 1.4.3. Esquema de lifting: notación y definiciones

El lifting constituye una herramienta poderosa para construir wavelets de segunda generación pero también puede ser usado para construir wavelets de primera generación. Sin embargo, en el caso de primera generación no se han obtenido wavelets que no hayan sido construidas con los métodos tradicionales. Las ventajas del método son:

- permite diseñar las wavelets de acuerdo a las necesidades del usuario;
- da una implementación más rápida de la transformada wavelet;
- permite construir wavelets de segunda generación.

La idea básica es comenzar con un análisis de multirresolución muy simple y “modificarlo gradualmente” hasta obtener uno con las propiedades deseadas. No presentaremos aquí el esquema de lifting para las wavelets de primera generación; el lector interesado puede remitirse a [60]. Presentaremos el esquema de lifting para segunda generación ya que esta técnica, complementada con los esquemas de subdivisión, brinda herramientas versátiles y directas para construir las wavelets de segunda generación.

En primer lugar debemos aclarar que cuando escribimos la ecuación (1.36), utilizamos  $h_{j,k,l}$  para indicar los coeficientes del filtro; nos referimos a ésta como la notación indexada. Ahora vamos a introducir una nueva notación que se basa en considerar operadores. La ventaja de esta última es que los enunciados y las demostraciones son más simples; la desventaja es que no es práctica en las implementaciones. Por este motivo enunciaremos los resultados en las dos notaciones.

Consideremos los espacios  $l^2(\mathcal{K}(j+1))$ ,  $l^2(\mathcal{K}(j))$  y  $l^2(\mathcal{M}(\mathcal{J}))$  con sus normas y productos interiores usuales. Denotemos los elementos de esos espacios como  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente, de manera tal que:

$$a = \{a_l : l \in \mathcal{K}(j+1)\} \in l^2(\mathcal{K}(j+1)),$$

y análogamente para  $b \in l^2(\mathcal{K}(j))$  y  $c \in l^2(\mathcal{M}(\mathcal{J}))$ .

Introducimos ahora los siguientes operadores:

1.  $H_j : l^2(\mathcal{K}(j+1)) \rightarrow l^2(\mathcal{K}(j))$ , donde  $b = H_j a$  significa que:

$$b_k = \sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} h_{j,k,l} a_l.$$

2.  $G_j : l^2(\mathcal{K}(j+1)) \rightarrow l^2(\mathcal{M}(\mathcal{J}))$ , donde  $c = G_j a$  significa que:

$$c_m = \sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} g_{j,m,l} a_l.$$

En forma similar se definen los operadores  $\tilde{H}_j$  y  $\tilde{G}_j$ . Nos referimos a estos operadores como operadores filtro o simplemente operadores. Con esta notación, las condiciones (1.40) para la biortogonalidad de los filtros se traducen en:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j H_j^* &= \tilde{G}_j G_j^* = 1, \\ \tilde{G}_j H_j^* &= \tilde{H}_j G_j^* = 0, \\ H_j^* \tilde{H}_j + G_j^* \tilde{G}_j &= 1, \end{aligned} \quad (1.41)$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_j \\ \tilde{G}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_j^* & Q_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} H_j^* & Q_j^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_j \\ \tilde{G}_j \end{bmatrix} = 1. \quad (1.42)$$

Podemos dar así la siguiente definición.

**Definición 1.4.4** *El conjunto de operadores filtro  $\{H_j, \tilde{H}_j, G_j, \tilde{G}_j\}$  es un conjunto biortogonal de operadores filtro si se satisface la condición (1.42).*

Haciendo abuso de la notación, y permitiendo que los operadores actúen sobre sucesiones de funciones, podemos escribir la ecuación de refinamiento y la ecuación de dos escalas para la wavelet. Para ello definamos:  $\varphi_j = \{\varphi_{j,k} : k \in \mathcal{K}(j)\}$  y  $\psi_j = \{\psi_{j,m} : m \in \mathcal{M}(J)\}$ . Entonces:

$$\varphi_j = H_j \varphi_{j+1} \quad \text{y} \quad \psi_j = G_j \varphi_{j+1},$$

lo que permite escribir la ecuación (1.39) de la siguiente manera:

$$\varphi_{j+1} = H_j^* \varphi_j + \tilde{G}_j^* \psi_j.$$

### Esquema de lifting

**Teorema 1.4.5** *(Wim Sweldens, [60]) Sea  $\{H_j^{old}, \tilde{H}_j^{old}, G_j^{old}, \tilde{G}_j^{old}\}$  un conjunto inicial de operadores filtros biortogonales. Entonces los siguientes operadores filtros también son biortogonales:*

$$\begin{aligned} H_j &= H_j^{old}, \\ \tilde{H}_j &= H_j^{old} + S_j \tilde{G}_j^{old}, \\ G_j &= \tilde{G}_j^{old} - S_j^* H_j^{old}, \\ \tilde{G}_j &= \tilde{G}_j^{old}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

donde  $S_j$  es un operador de  $l^2(\mathcal{M}(J))$  en  $l^2(\mathcal{K}(j))$ .

**Demostración:** escribamos el esquema de lifting en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_j \\ \tilde{G}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_j^{old} \\ \tilde{G}_j^{old} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} H_j \\ G_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S_j^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_j^{old} \\ G_j^{old} \end{bmatrix}$$

Si pensamos en las condiciones de biortogonalidad en la forma (1.42), la demostración sigue del hecho que:

$$\begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \diamond$$

Con la notación indexada, el conjunto de operadores filtros biortogonales dados es:

$$\{h^{old}, \tilde{h}^{old}, g^{old}, \tilde{g}^{old}\}$$

y el nuevo conjunto de operadores filtros biortogonales construido a partir de él es:

$$\begin{aligned} h_{j,k,l} &= h_{j,k,l}^{old}, \\ \tilde{h}_{j,k,l} &= \tilde{h}_{j,k,l}^{old} + \sum_m S_{j,k,m} \tilde{g}_{j,m,l}^{old}, \\ g_{j,m,l} &= g_{j,m,l}^{old} - \sum_m S_{j,k,m} h_{j,m,l}^{old}, \\ \tilde{g}_{j,m,l} &= \tilde{g}_{j,m,l}^{old}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Observemos que después del lifting, los filtros  $\tilde{h}$  y  $g$  cambian y por este motivo las funciones de escala duales y las wavelets también cambian. Como  $h$  no cambia, tampoco lo hacen las funciones de escala. Las wavelets duales también se modifican ya que se construyen a partir de las funciones de escala duales y éstas son diferentes. Con la notación acordada, las funciones que genera el esquema de lifting son las siguientes:

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \varphi_j^{old} \\ \tilde{\varphi}_j &= \tilde{H}_j^{old} \tilde{\varphi}_{j+1} + S_j \tilde{G}_j^{old} \tilde{\varphi}_{j+1} = \tilde{H}_j^{old} \tilde{\varphi}_{j+1} + S_j \tilde{\psi}_j \\ \psi_j &= G_j^{old} \varphi_{j+1} - S_j^* H_j^{old} \varphi_{j+1} = \psi_j^{old} - S_j \varphi_j^{old} \\ \tilde{\psi}_j &= \tilde{G}_j^{old} \tilde{\varphi}_{j+1}, \end{aligned}$$

o con la notación indexada es:

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,k} &= \varphi_{j,k}^{old}, \\
&= \\
\tilde{\varphi}_{j,k} &= \sum_l \tilde{h}_{j,k,l}^{old} \tilde{\varphi}_{j+1,l} + \sum_m s_{j,k,m} \tilde{\psi}_{j,m}, \\
\psi_{j,m} &= \psi_{j,m}^{old} - \sum_k s_{j,k,m} \varphi_{j,k}^{old}, \\
\tilde{\psi}_{j,m} &= \sum_l \tilde{g}_{j,k,m}^{old} \tilde{\varphi}_{j+1,l}.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

La ventaja del esquema de lifting es que a través del operador  $S$  tenemos control sobre todas las wavelets y funciones duales que pueden ser construidas a partir de un conjunto de funciones de escala dado. Esto significa que podemos comenzar con un análisis de multirresolución simple y usar (1.45) para elegir  $S$  de manera tal que las wavelets después del lifting tengan propiedades particulares. Esto es lo que permite diseñar la wavelet de acuerdo a las necesidades del usuario. La ecuación (1.45) permite hallar el operador  $S$ , dado que las funciones del miembro derecho no se modifican. Las condiciones sobre  $\psi_{j,m}$  se traducen en condiciones sobre  $S$ .

### Esquema de lifting dual

Introducimos ahora el esquema de lifting dual. La idea básica es la misma que para el esquema de lifting excepto que ahora la función de escala dual y los filtros  $\tilde{H}_j$  y  $G_j$  no cambian. Los filtros  $H_j$ ,  $\tilde{G}_j$ , la wavelet dual, la función de escala y la wavelet se modifican debiéndose el cambio de esta última a la relación de dos escalas. Podemos usar el esquema de lifting dual para diseñar la wavelet dual. Si indicamos el operador involucrado con  $\tilde{S}_j$ , el nuevo conjunto de filtros biortogonales está dado por:

$$\begin{aligned}
H_j &= H_j^{old} + \tilde{G}^{old}, \\
\tilde{H}_j &= \tilde{H}_j^{old}, \\
G_j &= G^{old}, \\
\tilde{G}^{old} &= \tilde{G}^{old} - S_j^* \tilde{H}_j^{old},
\end{aligned}$$

donde  $\tilde{S}_j$  es un operador de  $l^2(\mathcal{M}(\mathcal{J}))$  en  $l^2(\mathcal{K}(j))$ .

Para mostrar cómo pueden combinarse el lifting y el lifting dual para mejorar algunas propiedades de las funciones obtenidas, necesitamos generalizar la definición de momentos nulos

para el caso de primera generación, al caso de segunda generación. Para ello consideremos el siguiente conjunto de funciones  $C^\infty$  sobre el espacio  $X$ :

$$\{P_p : p = 0, 1, 2, \dots\}, \text{ con } P_0 = 1.$$

Supondremos que la restricción de un número finito de estas funciones a cualquier esfera de radio  $\epsilon$  resulta un conjunto linealmente independiente. Decimos que el orden del análisis de multirresolución es  $N$  si para todo  $j \in J$ , cada  $P_p$  puede escribirse como combinación lineal de las funciones de escala  $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathcal{K}(j)\}$ :

$$P_p(x) = \sum_{k \in \mathcal{K}(j)} c_{j,k}^p \varphi_{j,k}(x), \quad 0 \leq p < N. \quad (1.46)$$

Análogamente se define el orden del análisis de multirresolución dual que notaremos con  $N$ . Los momentos de la función de escala  $\varphi_{j,k}$  y de la wavelet  $\psi_{j,m}$  se definen respectivamente como:

$$\mathcal{M}_p = \int_{-\infty}^{\infty} P_p(x) \varphi_{j,k}(x) dx \quad \text{y} \quad \mathcal{N}_p = \int_{-\infty}^{\infty} P_p(x) \psi_{j,m}(x) dx$$

Análogamente se definen los momentos de la función de escala dual  $\tilde{\varphi}_{j,k}$  y de la wavelet dual  $\tilde{\psi}_{j,m}$ .

Si las funciones de escala  $\varphi_{j,k}$ , con  $k \in \mathcal{K}(j)$  satisfacen (1.46), entonces:

$$\int_X P_p \tilde{\psi}_{j,m} dx = 0, \quad \text{para } 0 \leq p < N, j \in \mathcal{J}, m \in \mathcal{M}(\mathcal{J}).$$

Decimos entonces que las wavelets duales tienen  $N$  momentos nulos. En forma análoga diremos que las wavelets tienen  $\tilde{N}$  momentos nulos.

El lifting y el lifting dual se pueden alternar: por ejemplo, después de incrementar el número de momentos nulos de la wavelet con el esquema de lifting, se puede usar el esquema de lifting dual para incrementar el número de momentos nulos de la wavelet dual. Iterando el lifting y el lifting dual se puede construir un análisis de multirresolución para el cual la wavelet y la wavelet dual tengan las propiedades que se desee. Esto es lo que se conoce como construcción "cakewalk".

Resta aclarar lo siguiente. Supongamos que se usa el esquema de lifting dual para incrementar el número de momentos nulos de la wavelet dual. Dado que el esquema de lifting cambia la función de escala dual y la wavelet dual, ¿cómo sabemos que la aplicación del esquema de lifting no modifica el número de momentos nulos de la wavelet dual? La respuesta la da el siguiente teorema [60]:

**Teorema 1.4.6** *Dado un análisis de multirresolución de orden  $N$ , después del lifting los primeros  $N$  momentos de la función de escala dual y de las wavelets duales no cambian.*

### 1.4.4. Ejemplos de wavelets de segunda generación

La combinación de las técnicas de subdivisión y lifting han demostrado ser herramientas directas y versátiles para la construcción de wavelets de segunda generación, en particular así se construyeron las wavelets ortogonales de Haar generalizadas [27] y las wavelets esféricas [54]. Para el primer caso se construye una base ortogonal de wavelets para  $L^2(X, \sigma, \mu)$ , donde  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  y  $\mu$  es una medida sobre  $\sigma$ . El punto de partida para esta construcción es la subdivisión de  $X$  en particiones anidadas de subconjuntos medibles de  $X$ . La ventaja de estas wavelets es su generalidad. Las desventajas son que no son suaves y que tienen un solo momento nulo. Sin embargo, mediante la aplicación del esquema de lifting, los autores hallan un nuevo conjunto ortogonal en el cual las wavelets tienen más momentos nulos. En [54] se presentan dos familias de wavelets sobre la esfera. Una de ellas está basada en funciones de escala interpolantes y la otra en wavelets biortogonales de Haar generalizadas (*Bio-Haar wavelets*). A continuación describiremos brevemente las (*Bio-Haar wavelets*); el lector interesado puede encontrar más detalles en [54].

#### Bio-Haar wavelets.

Para describirlas, previamente indicaremos una subdivisión de la esfera en triángulos esféricos (construcción geodésica), que induce una sucesión de espacios anidados como los que se necesitan para definir un análisis multirresolución. Esto se hace comenzando con un sólido cuyas caras son triángulos. Los niveles sucesivos son generados agregando vértices en los puntos medios de los lados y conectándolos con geodésicas. De esta manera, cada triángulo  $T_{j,*}$ ,  $j$  perteneciente al nivel  $j$ , tiene cuatro hijos  $T_{j+1,l}$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$  en el nivel  $(j + 1)$ . En la Figura 1.11 se muestra la construcción geodésica de la esfera comenzando con el icosaedro (nivel de subdivisión cero) y los dos próximos niveles de subdivisión. La triangulación resultante, eligiendo al icosaedro como punto de partida, se caracteriza por ser la que tiene las áreas más balanceadas entre los cuatro triángulos constituyentes de un triángulo  $T_{j,*}$ ; esto significa que las diferencias entre las áreas de los cuatro triángulos que forman  $T_{j,*}$  es mínima.

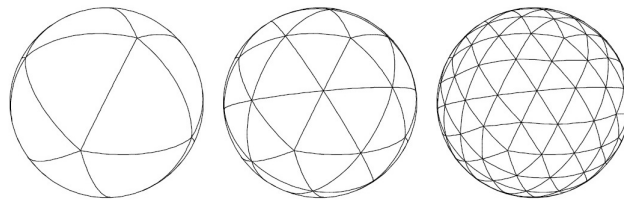


Figura 1.11: Construcción geodésica de la esfera

Los triángulos esféricos  $T_{j,k}$ ,  $k$  perteneciente a un conjunto de índices  $K(j)$ , que resultan de una construcción geodésica de la esfera  $S^2$ , satisfacen las siguientes propiedades:

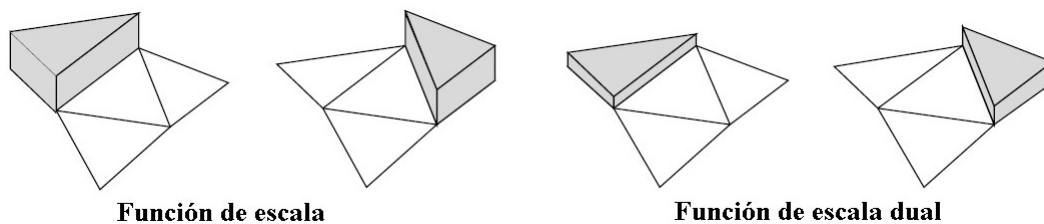


Figura 1.12: Funciones de escala de Haar y sus duales

- 1)  $S^2 = \cup_{k \in K(j)} T_{j,k}$  y esta unión es disjunta, es decir los  $T_{j,k}$  dan un cubrimiento de  $S^2$  para cada  $j$ .
- 2) Para cada  $j$  y  $k$ ,  $T_{j,k}$  puede ser escrito como la unión de cuatro triángulos "hijos"  $T_{j+1,l}$ .

Sea  $\alpha(T_{j,k})$  el área del triángulo esférico  $T_{j,k}$ . La función de escala y la función de escala dual se definen como:

$$\varphi_{j,k} = \chi_{T_{j,k}} \text{ y } \tilde{\varphi}_{j,k} = \frac{1}{\alpha(T_{j,k})} \chi_{T_{j,k}},$$

donde  $\chi_{T_{j,k}}$  es la función característica de  $T_{j,k}$ . Es claro que la función de escala y su dual resultan biortogonales debido a que sus soportes son disjuntos; ver Figura 1.12.

Los espacios  $V_j \subset L^2$  definidos por:

$$V_j = \text{span } \varphi_{j,k} : k \in K(j),$$

generan un análisis de multirresolución de  $L^2$ . Fijemos ahora un triángulo  $T_{j,*}$ . Para la construcción de las wavelets biortogonales de Haar generalizadas, necesitamos considerar el conjunto de hijos  $T_{j+1,l}$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$  de  $T_{j,*}$ . Las wavelets *Bio Haar* elegidas para que sus integrales sean nulas, se definen como:

$$\psi_{j,m} = 2 \left( \varphi_{j+1,m} - \frac{I_{j+1,m}}{I_{j+1,0}} \varphi_{j+1,0} \right), \quad m = 0, 1, 2, 3,$$

donde  $I_{j,k} = \int_{S^2} \varphi_{j,k} d\omega$ .

Un conjunto de wavelets semiortogonales duales está dado por:

$$\tilde{\psi}_{j,m} = 1/2(\tilde{\varphi}_{j+1,m} - \tilde{\varphi}_{j,*}).$$

Con el esquema de lifting dual, se puede construir un nuevo análisis de multirresolución en el cual la wavelet dual tenga más momentos nulos. Sean  $T_{j,k}$ ,  $k = 4, 5, 6$ , los triángulos vecinos de  $T_{j,*}$  y  $K(m) = \{*, 4, 5, 6\}$ . Las nuevas wavelets duales están dadas por:

$$\tilde{\psi}_{j,m} = 1/2(\tilde{\varphi}_{j+1,m} - \tilde{\varphi}_{j,*}) - \sum_{k \in K(m)} \tilde{s}_{j,k,m} \tilde{\varphi}_{j,k},$$

donde  $\tilde{s}_{j,k,m}$  son elegidos de manera tal que  $\tilde{\psi}_{j,m}$  tenga momentos nulos.



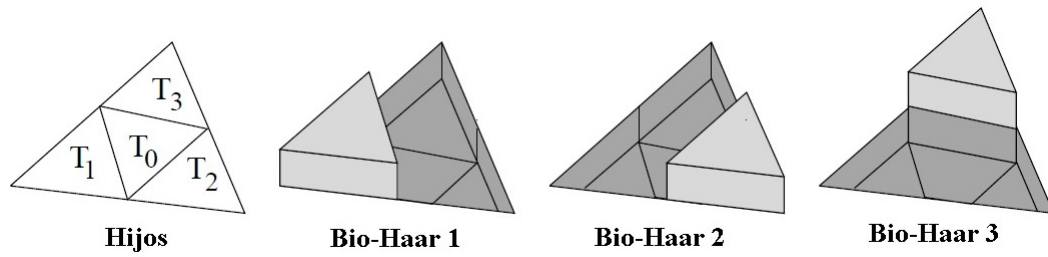


Figura 1.13: Wavelets de Bio-Haar

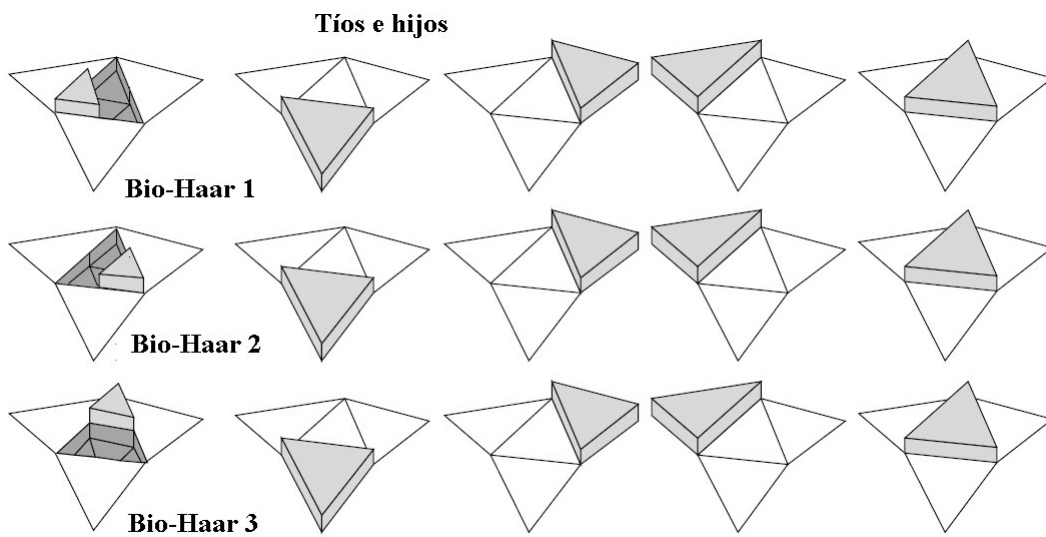


Figura 1.14: Lifting dual de las wavelets Bio-Haar duales



# Capítulo 2

## Mallas bidimensionales y mallas tridimensionales

### 2.1. Introducción

En este capítulo presentamos *modelado de superficies* y *modelado de volúmenes* entendiendo por ello a los métodos usados para representar y modelar los atributos de objetos bidimensionales ( $2D$ ), tridimensionales ( $3D$ ) y sus respectivos interiores.

Hay diversas formas de obtener muestras de un objeto y sus atributos y, a partir de éstas, generar un modelo discreto del mismo. Las *redes*, también llamadas *mallas* o *grillas* en  $2D$  o  $3D$  son usadas como modelos discretos para una gran variedad de objetos en  $2D$  o  $3D$ . Por ejemplo, las redes bidimensionales constituidas por celdas poligonales se utilizan para la representación de terrenos en aplicaciones geográficas y de superficies de sólidos en Computación Gráfica.

Las redes tridimensionales formadas por celdas poliédricas se utilizan para representar tanto el interior de un objeto como su frontera. Las redes  $d$ -dimensionales,  $d > 3$ , se suelen utilizar para la descomposición del dominio de un campo escalar o vectorial definido sobre un objeto. Una clasificación habitual para grillas es aquella que tiene en cuenta la topología de las mismas. Según este criterio se las clasifica en *estructuradas* y *no estructuradas*. Una grilla estructurada es aquella en la que la topología está implícita. Ejemplos de grillas estructuradas son las grillas uniformes en las cuales las celdas están alineadas con los ejes y la separación sobre los mismos es constante. Sabiendo cuál es la posición de los vértices más alejados del origen según cada eje, se pueden calcular los otros vértices siendo trivial la conectividad de las celdas. Este tipo de grillas se utilizan en modelado de terrenos y datos médicos como tomografías y resonancias magnéticas.

Las grillas *no estructuradas* son aquellas en las que es necesario especificar la conectividad de las celdas. Si bien es cierto que en algunos ejemplos, como lo es el caso de renderización de volúmenes, la topología del modelo es irrelevante, en otros, como imágenes médicas, la topología del objeto es esencial. Lo cierto es que muchos problemas del mundo real están

definidos sobre grillas no estructuradas y por lo tanto la demanda de representaciones eficientes de esta clase de mallas ha ido en aumento.

Si bien en las grillas no estructuradas bidimensionales el bloque básico puede ser cualquier polígono, el más utilizado es el triángulo ya que permite modelar mejor los objetos, sobre todo en las proximidades de la frontera. Por el mismo motivo, entre las grillas no estructuradas tridimensionales los métodos más modernos de generación de grillas generan mallas de tetraedros, en lugar de mallas de hexaedros que fueron los primeros bloques constructores básicos para volúmenes.

Independientemente de que se trate de grillas poligonales o poliédricas, éstas permiten describir cómo están estructurados los datos; esta información de conectividad que está de manera implícita o explícita, constituye la *topología del modelo*.

La exactitud con la que una red representa a un objeto está relacionada con la precisión con la que se representa cada vértice, lado, celda y su atributo. Se calcula el error de aproximación en alguna norma. Un error pequeño indica que el modelo es preciso. En general, cuanto mayor es la cantidad de celdas, mayor es la precisión. Pero si el objeto es suave o tiene superficies planas, no es necesario tener una gran cantidad de celdas para tener buena precisión. Además, no siempre se requiere la misma cantidad de celdas en todas las partes de un objeto para tener la misma precisión.

Con el fin de obtener resoluciones de redes adecuadas a los casos mencionados en el párrafo anterior, comenzaron a estudiarse diferentes esquemas de *simplificación* y *refinamiento* de redes. Las soluciones efectivas al problema de simplificación de redes bidimensionales han sido obtenidas a partir de técnicas incrementales basadas en la estrategia de supresión o decimación, (supression o decimation, respectivamente en inglés) de vértices, lados o celdas. Esta técnica consiste en remover vértices, lados o celdas de la malla y volver a generar una malla (re-mesh). La operación inversa a la técnica de supresión de vértices es la estrategia de *refinamiento* que consiste en agregar puntos a la red y volver a crear una malla.

Muchas de estas técnicas han sido extendidas al caso  $3D$  es decir a la simplificación o refinamiento de mallas  $3D$ .

Formalizaremos los conceptos de redes bidimensionales y redes tridimensionales y describiremos algunas de las técnicas de refinamiento de las mismas.

## 2.2. Definiciones previas

**Definición 2.2.1** *Una celda  $k$ -dimensional o  $k$ -celda es un subconjunto del espacio euclideo  $d$  dimensional  $\mathbb{R}^d$  homeomorfo a una bola cerrada de dimensión  $k$ , con  $k \leq d$ .*

**Definición 2.2.2** *Sea  $M$  un conjunto finito conexo de celdas de dimensión heterogénea en el espacio Euclideo  $\mathbb{R}^d$ , donde  $d$  es el máximo de las dimensiones de las celdas de  $M$ . Supongamos que la frontera de cada celda de  $M$  es una colección de celdas de dimensión menor, llamadas *facetas*, que pertenecen a  $M$ . Se dice que  $M$  es una malla  $d$ -dimensional*

si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

- los interiores de cualquier par de celdas  $d$ -dimensionales de  $M$  son disjuntos,
- cualquier  $k$ -celda de  $M$  con  $k < d$  acota al menos una  $d$ -celda de  $M$ .

La unión como conjunto de puntos de las celdas de una malla  $M$  es llamado dominio de  $M$ .

Un caso especial e interesante de mallas son las *mallas simpliciales*.

**Definición 2.2.3** *Un  $k$ -símplice  $k$ -dimensional o  $k$ -símplice en  $\mathbb{R}^d$  es el lugar geométrico de todos los puntos de  $\mathbb{R}^d$  que pueden ser expresados como combinaciones convexas de  $k + 1$  puntos.*

**Definición 2.2.4** *Una malla simplicial  $\Sigma$  o simplicial complejo es una malla en la cual todas las celdas son símplices. En una malla  $d$ -dimensional cada  $k$ -símplice con  $k < d$  es generado por un subconjunto de vértices de algún  $d$ -símplice.*

**Definición 2.2.5** *Una malla se dice conforme si y sólo si para cada par de  $d$ -celdas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , la intersección de las fronteras de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  es vacía o consiste de una  $k$  faceta que pertenece a la frontera de ambos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , para algún  $k < d$ .*

**Definición 2.2.6** *La valencia de una  $d$  celda  $C$  en una malla  $M$  es el número de  $(d + 1)$  celdas de  $M$  que intersectan a  $C$*

En una malla triangular, la valencia de un vértice es el número de lados que concurren a ese vértice. En una malla tetraédrica la valencia de un lado es el número de triángulos que tienen en común ese lado.

## 2.3. Mallas bidimensionales

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la malla consiste en caras triangulares ya que cualquier polígono no triangular puede ser triangulado. Representar la superficie de un objeto mediante una red de caras triangulares constituye un modelo clásico en Computación Gráfica tridimensional ya que en el caso general la superficie de un objeto puede aproximarse por caras planas.

**Definición 2.3.1** *Una malla triangular o triangulación  $T$  es una dupla  $T=(M,C)$  donde  $M$  es un conjunto de  $N$  puntos  $M_i$  (de  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ ) y  $C$  es un 2-simplicial complejo.*

**Definición 2.3.2** Sea  $V$  un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$ . Una triangulación de Delaunay de  $V$  es una triangulación  $\Sigma$  tal que:

- i)  $V$  es un conjunto de vértices de  $\Sigma$ ,
- ii)  $\Sigma$  cubre la cápsula convexa de  $V$ ,
- iii) el círculo circunscripto de cada triángulo de  $\Sigma$  no contiene ningún punto de  $V$  en su interior.

### Observaciones.

- 1) Cuando el conjunto de puntos  $M_i$  está irregularmente distribuido en el espacio, hablamos de *malla irregular*. Por otro lado, cuando los puntos están alineados con los nodos de una grilla regular decimos que la malla es *regular*.
- 2) Los puntos  $M_i$  de la malla pueden tener asociados ciertos atributos en cuyo caso son considerados como muestras de una función escalar o vectorial definida sobre esa región.
- 3) La información que describe los elementos de la malla consiste en la *conectividad* y la *geometría* de la malla. La *conectividad de la malla*, información contenida en  $C$ , describe las relaciones entre los elementos de la misma; por ejemplo para cada cara se especifican sus vértices y sus lados; para cada lado se especifican sus vértices y las caras que concurren a él. La *información geométrica* está contenida en  $M$  y especifica la posición en el espacio para cada vértice.

Los elementos de  $C$  deben verificar las siguientes condiciones:

- Cada vértice  $v_i \in C$  tiene una posición definida por el punto  $M_i \in M$ .
- Cada lado  $l_i \in C$  está definido por un par de vértices  $(M_{i1}, M_{i2})$  de  $M$ .
- Cada cara  $f_i \in C$  es un ciclo cerrado de lados:  $l_i = (M_{i1}, M_{i2})$ ,  $l_j = (M_{j1}, M_{j2})$ ,  $l_k = (M_{k1}, M_{k2})$ , con  $M_{j1} = M_{i2}$ ,  $M_{j2} = M_{k1}$  y  $M_{i1} = M_{k2}$ .

### 2.3.1. Simplificación de mallas triangulares: algunas técnicas.

En diversas disciplinas (cartografía, computación gráfica, visualización científica, diseño asistido por computadoras, métodos de elementos finitos, teoría de aproximación, geometría computacional), se desarrollaron técnicas para generar modelos de mallas triangulares que consisten en millones de triángulos. Por ejemplo, los datos capturados por escáneres, las imágenes satelitales, las imágenes médicas, los datos para modelar un objeto y sus atributos

son modelados con redes triangulares que contienen millones de triángulos. En todas estas aplicaciones existe un compromiso entre la exactitud del modelo y el tiempo necesario para procesarlo. Para alcanzar un tiempo de procesamiento aceptable es necesario a veces sustituir el modelo original por otro más simple. En algunos casos se necesita que el modelo capte los detalles más finos de la superficie, por ejemplo si el observador está muy cerca del objeto; en otros, cuando el observador está a mucha distancia se necesitan menos detalles. Como consecuencia de esto comenzaron a estudiarse técnicas para la simplificación de superficies que permitieran obtener superficies confiables con menor cantidad de triángulos.

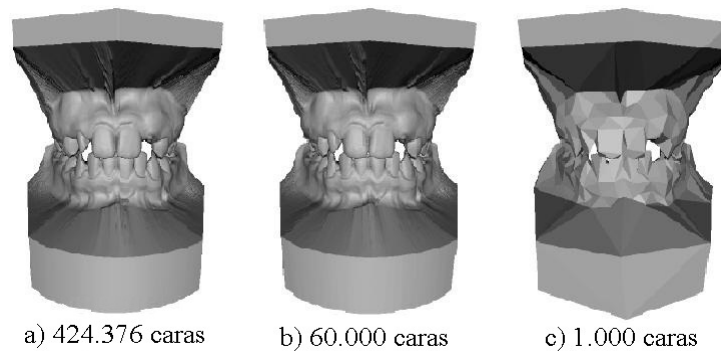


Figura 2.1: Modelo obtenido por scanner y dos aproximaciones.

En la Figura 2.1 se muestra el modelo en tres diferentes niveles de detalle. La superficie original a) contiene casi medio millón de caras; la aproximación b) contiene un 86 % menos de triángulos pero su apariencia, vista en una imagen reducida, es casi igual a la primera. La aproximación c) contiene alrededor de 1000 caras; si bien es cierto que en este caso se han perdido los detalles, la forma general del objeto se mantiene. A los efectos de medir alguna propiedad del objeto, como por ejemplo su volumen, se llegaría a una buena aproximación usando este modelo simple.

Si bien los algoritmos de simplificación de mallas fueron creados para resolver problemas específicos de cada rama de la ciencia, todos ellos tienen grandes similitudes en cuanto al problema que resuelven. Por eso, en [33] se clasifican estos algoritmos de acuerdo al problema que resuelven y no a la aplicación para la cual fueron creados.

Otra clasificación importante para estos algoritmos consiste en tener en cuenta si realizan o no una simplificación topológica de la superficie. En este sentido, muchos de los métodos de simplificación de mallas pertenecen a alguna de las tres categorías siguientes:

- 1) los que prohíben cualquier alteración topológica, [12];
- 2) los que simplifican la topología implícitamente. En estos casos el criterio de simplificación es geométrico y como efecto secundario puede simplificar la topología;

- 3) los que específicamente consideran la simplificación topológica y geométrica de la superficie.

Claramente, hay aplicaciones donde debe evitarse la simplificación topológica. Por ejemplo, en imágenes médicas preservar un agujero en el corazón es mucho más importante que preservar la forma exacta de la superficie. Por otro lado, en algunos casos es deseable simplificar la topología de los modelos. Supongamos que la malla triangular modela la superficie de una esponja. Los agujeros que este animal marino tiene en su superficie son una característica visualmente importante si se lo observa de cerca. Sin embargo, observado a la distancia, estos agujeros son imperceptibles y por lo tanto no es necesario que el modelo los capture.

La mayoría de las técnicas de simplificación de mallas está basada en una operación de simplificación elemental que es iterada hasta la obtención de una malla adecuada a las necesidades del usuario. Las operaciones elementales más utilizadas son la supresión de algún elemento de la triangulación: triángulo, lado o vértice. Junto con cada técnica de simplificación de mallas, hay asociada una técnica de refinamiento que permite pasar de una resolución gruesa a otra más fina.

Describiremos brevemente las técnicas de simplificación más utilizadas y sus respectivas operaciones inversas.

### Supresión de vértices

Este algoritmo iterativo de simplificación fue propuesto originalmente por William Schröder en [55]. Consiste en dos etapas:

- 1) supresión de un vértice  $v$  y de todos los lados incidentes en él. Esto da lugar a una región poligonal llamada *polígono de influencia* del vértice  $v$  que consiste en todos los triángulos que tienen a  $v$  como uno de sus vértices.
- 2) retriangulación del polígono de influencia.

En el caso plano la segunda etapa de esta técnica se realiza sin dificultad ya que todo polígono plano es triangulable. Generalmente, los grados de libertad que quedan para elegir la triangulación se fijan imponiendo que sea una *triangulación de Delaunay*, [18]. Si la superficie está en  $\mathbb{R}^3$  el polígono está en  $\mathbb{R}^3$ ; entonces la retriangulación requiere previamente una proyección de la superficie sobre el plano motivo por el cual, en este caso, se supone que la superficie es una 2-variedad, es decir cada punto de la superficie tiene un entorno homeomorfo a un disco bidimensional, (Apéndice A).

Sin embargo, las técnicas de subdivisión para superficies también pueden aplicarse a superficies que no son una variedad. En [33] los algoritmos de simplificación de superficies se clasifican de acuerdo a la clase de superficies sobre las cuales operan; entre ellas se encuentran aquellas superficies que son variedades y aquellas que no lo son.



Por ejemplo, en [25] se presenta un algoritmo de supresión de vértices basado en un algoritmo introducido previamente por Kirkpatrick [39]. Dicho algoritmo selecciona, para suprimir, un conjunto de vértices separados por una distancia predeterminada llamada *paso de decimación del algoritmo*. Para elegir esta distancia, el usuario introduce un parámetro fijo  $K > 0$  y elige el paso de decimación mayor o igual a  $máx(1, 2K)$ . Si se nota:  $S = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$  al conjunto de los índices de los vértices suprimidos y con  $V_{j_k, K}$  al conjunto de índices de vértices que están en un entorno de radio  $K$  del vértice suprimido  $v_{j_k}$ , resulta que los conjuntos  $V_{j_k, K}$  son disjuntos. Como consecuencia, el conjunto de los índices de los vértices de la triangulación más gruesa queda particionado como la unión disjunta:

$$R \cup (\cup_{k=1}^n V_{j_k, K}),$$

donde  $R$  es el conjunto de índices de los vértices que no están en un entorno de radio  $K$  de un vértice suprimido.

La operación inversa a la supresión de vértices es la *inserción* de vértice. Esta operación consiste en lo siguiente:

- borrar los triángulos de un conjunto conexo  $C$  de la malla, quedando definida así una región poligonal  $G$ , que será la región de influencia del vértice a insertar. Esta región de influencia depende en cada caso del algoritmo usado;
- insertar en esa región poligonal  $G$  el nuevo vértice y triangular  $G$  con un nuevo conjunto de triángulos incidentes en  $v$ .

La Figura 2.2 muestra un ejemplo de supresión e inserción de vértice. El polígono de influencia es la parte de la triangulación afectada por la supresión del vértice suprimido.

### Colapsado de lado

Consiste en contraer un lado  $e$  en un vértice  $v$  que puede ser un nuevo vértice (*colapsado de lado completo*) o uno de los vértices extremos de  $e$  (*colapsado de medio lado*). La operación inversa al colapsado de lado completo es la *expansión completa de vértice* que consiste en expandir un vértice  $v$  en un lado con vértices  $v'$  y  $v''$ ,  $v' \neq v$ ,  $v'' \neq v$ . La operación inversa al colapsado de medio lado es la *expansión media de vértice* que consiste en expandir un vértice  $v$  en un lado  $e$  insertando el otro extremo  $w$  del lado  $e$ .

La Figura 2.3 muestra un colapsado de lado completo y una expansión completa de vértice. En [35] se construyen mallas progresivas considerando una sucesión de colapsados de lado que simplifican progresivamente una malla dada  $M$ . El almacenamiento de la sucesión completa de los colapsados de lado y cada una de sus actualizaciones inversas (expansión de vértices), permite representar la malla  $M$  como una malla  $M_0$  junto con una sucesión de expansiones de vértice que indican cómo refinar progresivamente  $M_0$  para recuperar la malla original  $M$ . A esta representación se la llama *representación progresiva de  $M$*  y  $M$  puede ser obtenida a

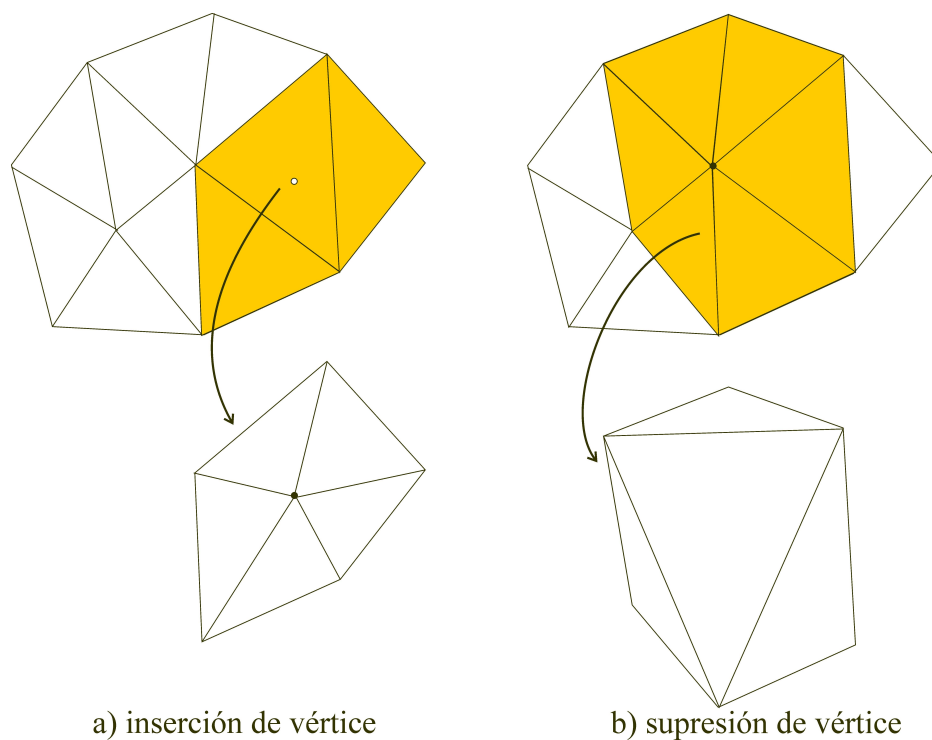


Figura 2.2: Supresión e inserción de un vértice.

partir de  $M_0$  aplicando todas las expansiones de vértices de la sucesión. Si sólo se utilizan un número prefijado de esas expansiones se obtiene un modelo en una resolución intermedia o una aproximación en diferentes *niveles de detalle* que se conoce en forma abreviada como "LOD" , (level of detail).

### Supresión de triángulo

Esta técnica consiste en reducir un triángulo a un punto siguiendo estos pasos:

- se selecciona el triángulo  $(s_1, s_2, s_3)$  que se desea suprimir y el punto  $s_c$  que va a reemplazar al triángulo.
- se contraen en forma conjunta los tres vértices del triángulo hacia  $s_c$ . El triángulo se reduce entonces al punto  $s_c$  y los triángulos adyacentes se transforman en lados incidentes en  $s_c$ .

El inconveniente de esta técnica es el gran tamaño de la zona de influencia del triángulo suprimido lo cual produce muchos cambios en la malla que es necesario preservar; esto conlleva un costo de almacenamiento no deseable. Más detalles de la supresión de triángulos pueden encontrarse en [26]. En la Figura 2.4 se muestra un colapsado de triángulo.

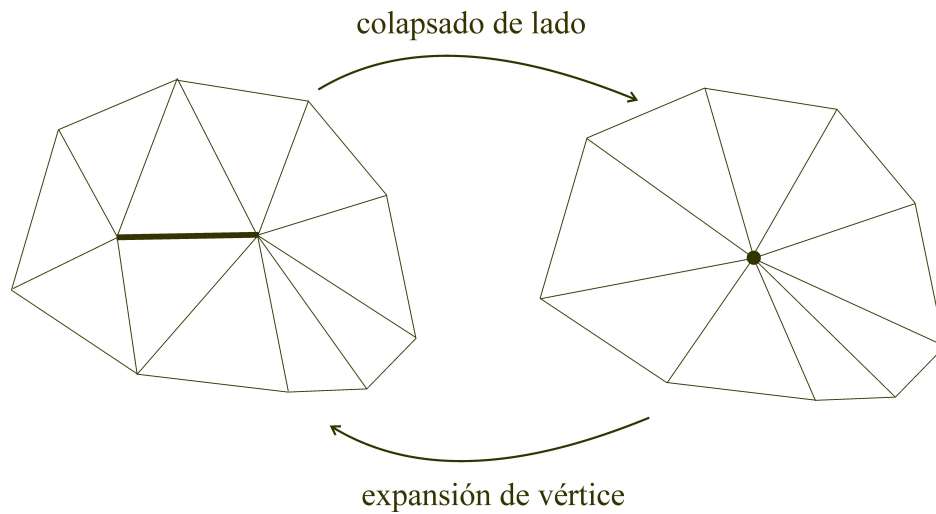


Figura 2.3: Colapsado de lado y expansión de vértice.

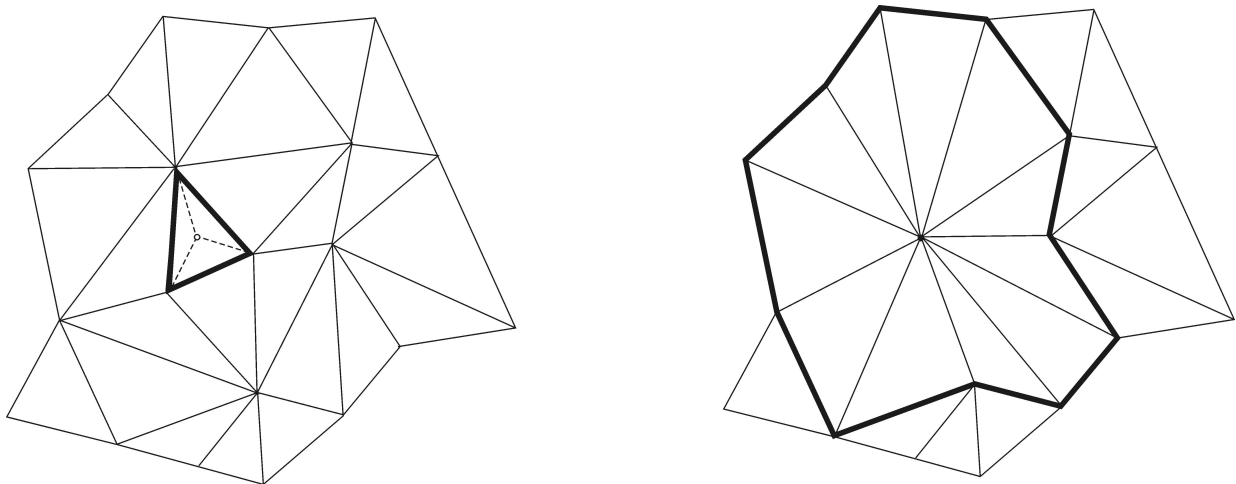


Figura 2.4: Supresión de triángulo.

### 2.3.2. Simplificación de mallas triangulares con atributos

En la sección anterior se describieron las técnicas más utilizadas para la simplificación geométrica de mallas triangulares. Más información de esta clase de técnicas puede encontrarse en [36], [51], [22]. Sin embargo, la mayoría de las mallas con las que se trabaja actualmente tienen propiedades que van más allá de la geometría. En el caso general, cada vértice además de tener una posición geométrica, tiene asociados otros valores que describen ciertas propiedades. Estos valores son generalmente interpolados sobre las caras del modelo. En Computación Gráfica, los más comunes son color, textura y normales. Para producir aproximaciones que representen lo más fidedignamente posible a la superficie original es necesario

simplificar tanto la información geométrica como la de los atributos. Por este motivo, primero comenzaron a desarrollarse algoritmos de simplificación de mallas que realizaban la simplificación de los atributos, para complementar con los ya existentes de simplificación geométrica ([5], [37], [23], [34]). Actualmente, los métodos propuestos pueden dividirse en dos grandes grupos: los que realizan primero una simplificación geométrica y, en un proceso aparte, la simplificación de los atributos ([9]) y aquellos que en un solo proceso realizan ambas simplificaciones, ([23],[34]). En su gran mayoría todos estos métodos miden el error de aproximación con la norma  $L^2$  ó  $L^\infty$ .

## 2.4. Mallas tridimensionales

Si bien existen trabajos donde los bloques constructores básicos de una red tridimensional son hexaedros, en la actualidad los tetraedros constituyen la unidad básica para estas mallas ya que tienen la propiedad de producir mejores modelos de los objetos, sobre todo en proximidades de la frontera. Dado un conjunto volumétrico de datos, que pudo haberse obtenido mediante muestreo, simulación o a través de técnicas de modelamiento, existen diversos métodos que permiten obtener una tetraedrización del mismo. Nosotros no nos ocuparemos de este problema sino que supondremos conocida una tetraedrización irregular del volumen sobre el cual están definidos los datos. A partir de ésto, en el capítulo siguiente nos abocaremos a la representación de funciones constantes por tramos definidas sobre el volumen así tetraedrizado.

Si bien se tiene una idea intuitiva de los conceptos hasta aquí mencionados, necesitamos precisar las definiciones.

En la primera subsección damos la definición de conjunto volumétrico de datos, mallas tetraédricas regulares e irregulares y algunas de sus propiedades. En la segunda trataremos los métodos más utilizados de simplificación y sus respectivos inversos para mallas tetraédricas regulares. Lo mismo haremos en la tercera parte para mallas tetraédricas irregulares. En la última subsección, indicaremos la técnica que nosotros elegimos para el caso irregular y justificaremos la elección.

### 2.4.1. Definiciones

**Definición 2.4.1** *Se llama conjunto volumétrico de datos a una dupla  $S = (V, F)$  donde  $V$  es un subconjunto  $\mathbb{R}^3$  y  $F$  es una colección de escalares  $F = (f_1, \dots, f_k)$  asociada con los puntos de  $V$ . Si los puntos de  $V$  están regularmente espaciados se dice que el conjunto  $S = (V, F)$  es regular o estructurado; si los puntos de  $V$  están irregularmente espaciados se dice que el conjunto volumétrico es irregular o no estructurado.*

Suponemos que el dominio  $D$  de un conjunto volumétrico de datos es una variedad tridimensional con frontera,(Apéndice A).

**Definición 2.4.2** Una malla tetraédrica o tetraedrización  $T$  es una dupla  $T=(M,C)$  donde  $M$  es un conjunto de  $N$  puntos  $M_i \in \mathbb{R}^3$  y  $C$  es un 3-simplicial complejo.

De las definiciones anteriores surgen las siguientes observaciones.

#### Observaciones.

- La información que describe los elementos de la malla consiste en la *conectividad* y la *geometría* de la malla. La *conectividad de una malla tetraédrica*, información contenida  $C$ , es una 4 – *upla* formada por:
  - $V$ : conjunto de vértices,
  - $E$ : conjunto de lados,
  - $F$ : conjunto de caras,
  - $T$ : conjunto de tetraedros.
- Estos elementos tienen las siguientes propiedades:
  - Cada vértice  $v_i \in V$  tiene una posición definida por un punto  $M_i \in M$ .
  - Cada lado  $e_i \in E$  está definido por un par de vértices  $(v_{i1}, v_{i2}) \in V \times V$ .
  - Cada cara  $f_i \in F$  está definida por un ciclo cerrado de lados  $\{e_{i1} = (v_{i1,1}, v_{i1,2}), e_{i2} = (v_{i2,1}, v_{i2,2}), e_{i3} = (v_{i3,1}, v_{i3,2})\}$  con  $v_{ij,2} = v_{i(j+1),1}$  y  $v_{i3,2} = v_{i1,1}$ .
  - Cada tetraedro  $T_i \in T$  está definido por cuatro triángulos  $\{f_{i1} = (e_{i1,1}, e_{i1,2}, e_{i1,3}), f_{i2} = (e_{i2,1}, e_{i2,2}, e_{i2,3}), f_{i3} = (e_{i3,1}, e_{i3,2}, e_{i3,3}), f_{i4} = (e_{i4,1}, e_{i4,2}, e_{i4,3})\}$

Las mallas tetraédricas serán para nosotros una descomposición de un dominio de datos volumétricos. La siguiente definición permite clasificar las mallas tetraédricas:

**Definición 2.4.3** Una malla tetraédrica  $\Sigma$  se dice:

- i) **conforme** si la intersección de las fronteras de dos tetraedros  $T_1$  y  $T_2$  que tienen intersección no vacía consiste en una celda (símplice) de dimensión menor (vértices, lados o triángulos) que pertenece a las fronteras de ambos;
- ii) **regular o estructurada** cuando ha sido generada por una descomposición recursiva aplicada a los puntos de un conjunto regular. En caso contrario se dice **irregular o no estructurada**.

Las mallas conformes tienen una estructura bien definida: cada tetraedro es adyacente a exactamente un tetraedro a lo largo de cada una de sus caras. Esta propiedad es importante cuando la malla se utiliza como una descomposición de un conjunto volumétrico de datos. Tanto en Computación Gráfica como en Elementos Finitos se han estudiado distintos métodos para la obtención de mallas tetraédricas regulares generadas por una descomposición recursiva ([32], [28], [43]); estas mallas son adecuadas para trabajar con conjuntos volumétricos regulares. Cuando el conjunto de datos está distribuido irregularmente, las mallas tetraédricas regulares no son adecuadas. En estos casos es conveniente trabajar con mallas tetraédricas irregulares ya que permiten capturar mejor los datos disponibles. La literatura existente para esta clase de mallas y sus simplificaciones, ([8], [30], [62]), no es tan vasta como para mallas regulares.

El tamaño de una malla tetraédrica  $\Sigma$  es el número  $m$  de tetraedros que la componen. En las aplicaciones prácticas se supone que  $m \approx 6n$ , siendo  $n$  el número de puntos de  $V$ .

### 2.4.2. Mallas tetraédricas regulares

En el contexto de la teoría clásica de wavelets a las mallas tetraédricas regulares se las llama *mallas anidadas* ya que permiten definir una sucesión de espacios funcionales anidados. A los efectos de lograr una representación multirresolución de una función escalar definida sobre una tetraedrización regular  $\Sigma$ , es necesario contar con técnicas de simplificación y refinamiento de grillas tetraédricas que nos permitan pasar, respectivamente, a tetraedrizaciones más gruesas o más finas que  $\Sigma$ . Cabe aclarar que, aunque no es nuestro objetivo, tales técnicas son utilizadas para obtener representaciones multirresolución de volúmenes.

#### Técnicas de refinamiento

Las técnicas de refinamiento más conocidas son:

- a) el refinamiento *rojo y verde* de tetraedros, que puede consultarse en [49];
- b) la subdivisión recursiva presentada por Jürgen Bey en [2]. Este método fue utilizado en [4];
- c) la bisección recursiva de tetraedros.

Describiremos a continuación las técnicas indicadas en b) y c).

#### Método de Bey

Para describir este método necesitamos la siguiente definición.

**Definición 2.4.4** *Dos tetraedros  $T_1$  y  $T_2$  son congruentes si se pueden hacer coincidir por un movimiento rígido y una traslación, i.e. si existen una constante  $c \neq 0$ , un vector  $\mathbf{x}$  y una matriz ortogonal  $Q$  tal que:*

$$T_1 = \mathbf{x} + cQT_2 \doteq \{\mathbf{x} + cQ\mathbf{x}' : \mathbf{x}' \in T_2\}.$$

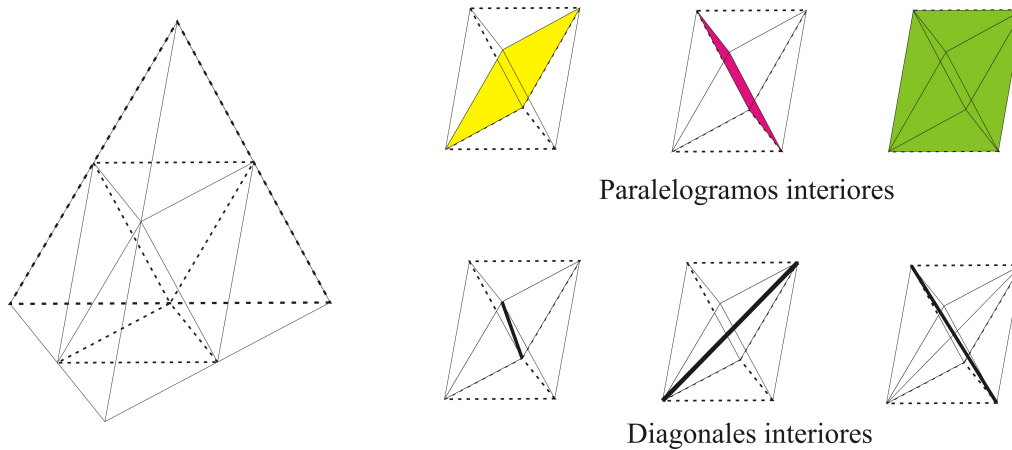


Figura 2.5: Subdivisión de un tetraedro según el método de Bey. Octaedro interior.

Para subdividir un tetraedro  $T$ , que llamaremos *padre*, según el método de Bey, se conectan los puntos medios de los lados de cada cara triangular del tetraedro y luego se cortan los cuatro tetraedros de las esquinas que son congruentes con  $T$ . En el octaedro interior quedan así determinados tres paralelogramos; cortando el octaedro a lo largo de dos de estos paralelogramos obtendremos cuatro subtetraedros más. Cada elección de dos paralelogramos corresponde a una de las tres posibles diagonales, como muestra la Figura 2.5. Los ocho subtetraedros, que llamaremos hijos (ver Figura 2.7), tienen igual volumen pero los interiores no son en general congruentes con  $T$ . Es claro que la operación inversa a ésta, llamada *simplificación*, consiste en encontrar el padre de cada tetraedro de una tetraedrización dada, reconstruyendo así una grilla más gruesa.

Con este método se obtienen tetraedrizaciones *estables* (los ángulos interiores de los elementos de la partición no tienden a cero) y *consistentes* o *conformes* (la intersección de dos subtetraedros del paso  $k$ -ésimo es vacía, una cara común, un lado común o un vértice común). Los elementos generados pertenecen, a lo sumo, a tres clases de congruencia, independientemente del número de pasos realizados en el refinamiento. En [53] los autores proponen una variante del método de Bey: en lugar de elegir una diagonal para dividir el octaedro central en cuatro nuevos tetraedros, crean un nuevo esquema de subdivisión para dicho octaedro que lo divide en seis nuevos octaedros y ocho nuevos tetraedros. Este método de subdivisión tiene la ventaja de generar deformaciones  $C^2$  excepto a lo largo de los lados de la malla tetraédrica base.

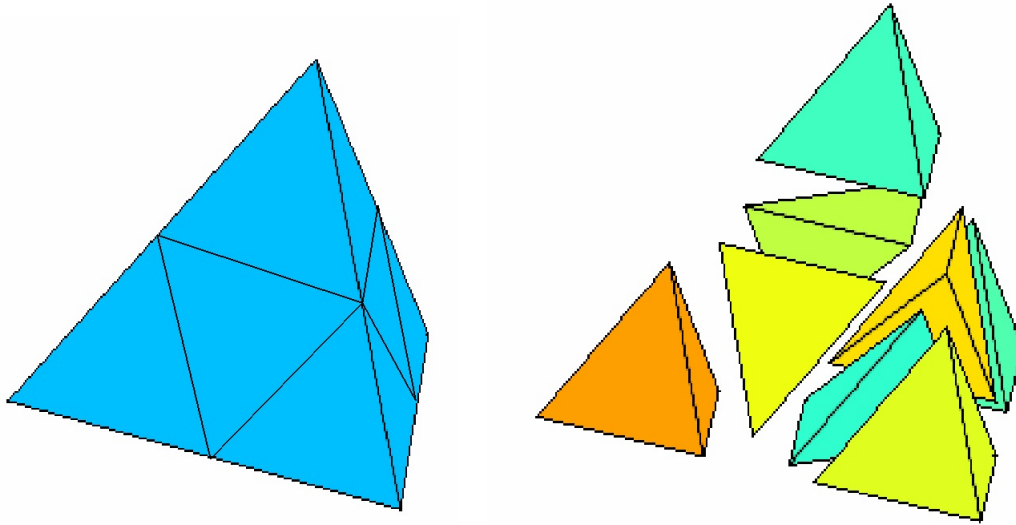


Figura 2.6: Subdivisión de un tetraedro según el método de Bey.

### Bisección de tetraedros

La *bisección de tetraedros* consiste en reemplazar un tetraedro  $T$  por dos tetraedros que se obtienen cortando a  $T$  con el plano que contiene al punto medio  $M$  del lado más largo de  $T$  y a su lado opuesto, siendo el lado opuesto de un lado  $l$  del tetraedro aquel lado que no tiene ningún punto en común con  $l$ . Esta regla de subdivisión se aplica recursivamente a la descomposición inicial de un dominio cúbico en seis tetraedros (ver Figura 2.8). La división de un tetraedro del cubo inicial da dos nuevos tetraedros cuya forma es idéntica a la obtenida dividiendo una pirámide de base cuadrada a lo largo de la diagonal de su base. A esta forma se la llama *1/2 pirámide* (ver Figura 2.8). Dividiendo una media pirámide a lo largo de su lado mayor se obtienen dos nuevos tetraedros cuya forma recibe el nombre de *1/4 pirámide* (ver Figura 2.8). Finalmente, dividiendo un cuarto de pirámide a lo largo de su lado mayor se obtienen dos nuevos tetraedros cuya forma se llama *1/8 pirámide* (ver Figura 2.8). Estas formas son cíclicas en el sentido que cada tres niveles de subdivisión se obtiene una forma congruente. Cuando se aplica bisección tetraédrica, todos los tetraedros que comparten un lado deben ser divididos al mismo tiempo para garantizar que la malla generada sea conforme. Los tetraedros que comparten su lado mayor y que por lo tanto serán bisecados al mismo tiempo forman un *diamante*. Hay tres tipos de diamantes generados por las tres formas congruentes dadas, (ver Figura 2.9). Son los siguientes:

- i) *diamante alineado por un plano*: está formado por cuatro *1/2 pirámides* que comparten un lado paralelo a uno de los planos coordenados;



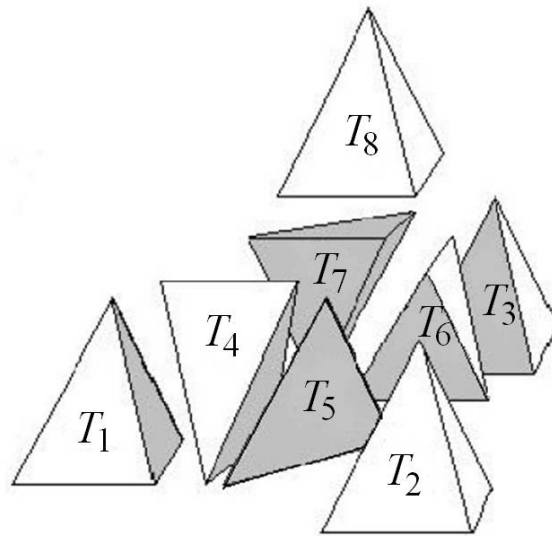


Figura 2.7: Subtetraedros obtenidos por el método de Bey.

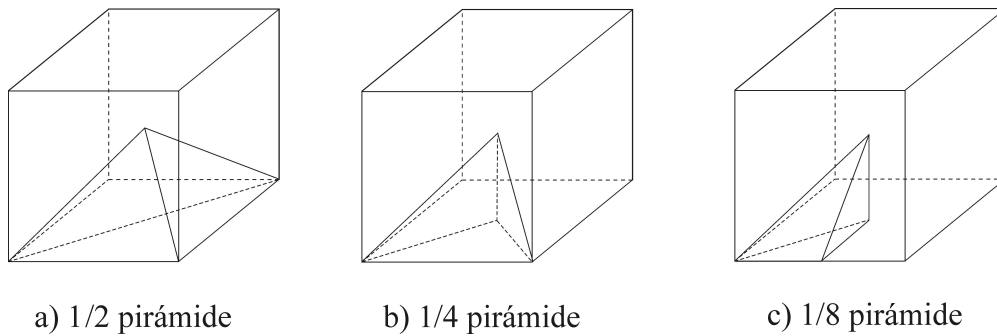


Figura 2.8: a) Ejemplo de 1/2 pirámide. b) Ejemplo de 1/4 pirámide. c) Ejemplo de 1/8 pirámide

- ii) *diamante alineado por un eje*: está formado por ocho 1/4 pirámides que comparten un lado paralelo a uno de los ejes coordenados;
- iii) *diamante no alineado*: está formado por seis 1/8 pirámides que comparten un lado que no es paralelo ni a los ejes ni a los planos coordenados.

En [14] se comparan dos representaciones multirresolución que difieren en el método de subdivisión utilizado para refinar una malla inicial: uno está basado en la bisección tetraédrica y el otro en la *expansión completa de vértice*, técnica que describiremos en la subsección siguiente.



a) diamante formado por cuatro  $1/2$  pirámides



b) diamante formado por ocho  $1/4$  pirámides



c) diamante formado por seis  $1/8$  pirámides

Figura 2.9: Diamantes

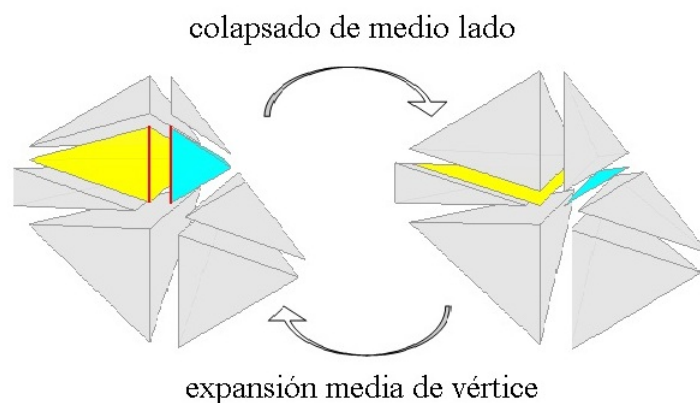


Figura 2.10: Colapsado de medio lado y expansión media de vértice.

### 2.4.3. Mallas tetraédricas irregulares.

En el contexto de la teoría de wavelets se las conoce como mallas no anidadas. Para dar una representación multiresolución de una función definida sobre un conjunto irregular de datos, es preciso contar con técnicas de simplificación y refinamiento de mallas tetraédricas irregulares ya que estas operaciones nos serán útiles, en lo que sigue, para definir los *espacios de aproximación*.

#### Técnicas de refinamiento

Nos interesa describir el colapsado de *lado completo* y el *colapsado de medio lado*.

#### Colapsado de lado completo

El *colapsado de lado completo* es una *actualización* local que consiste en contraer un lado  $e$  con vértices  $v'$  y  $v''$  en un vértice  $v$ , a menudo el punto medio de  $e$ . La malla alrededor de  $e$  se modifica ya que se reemplazan los vértices  $v'$  y  $v''$  por el nuevo vértice  $v$  y los tetraedros incidentes en  $v'$  y en  $v''$  colpsan en triángulos. La operación inversa del colpsado de lado completo es la *expansión completa de vértice* que expande un vértice  $v$  en un lado  $e$  con extremos  $v'$  y  $v''$ . También puede verse el colapsado de lado completo como un *update* que remueve los tetraedros incidentes en  $v'$  y  $v''$  y los reemplaza por nuevos tetraedros incidentes en  $v$ . Análogamente, la expansión de vértice puede verse como un *actualización* que remueve los tetraedros incidentes en  $v$  y los reemplaza por nuevos tetraedros incidentes en  $v'$  y  $v''$ . Llamaremos *región de influencia* o *poliedro de influencia* de un *colapsado de lado completo* a la colección de todos los tetraedros que son incidentes en los extremos del lado colapsado. En [61] se dan un conjunto de condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales se preserve la topología del simplicial complejo que se refina cuando se utiliza el colapsado de lado.

### Colapsado de medio lado

El *colapsado de medio lado* es una *actualización* local que consiste en contraer un lado  $e$  de vértices  $v, w$  en uno de sus extremos, por ejemplo  $w$ . La *actualización* inversa del colapsado de medio lado es la *expansión media de vértice* que consiste en expandir un vértice  $w$  en un lado  $e$  insertando el otro vértice del segmento  $e$ . La *región de influencia* o *poliedro de influencia* del colapsado de medio lado del lado  $e$  de vértices  $v, w$  en el vértice  $w$ , es el conjunto de tetraedros incidentes en  $v$ . Una sucesión de colapsados de medio lado o de lado completo transforma una malla dada en una malla simplificada (más gruesa) mientras que la correspondiente sucesión de expansión completa o media de vértices refina la malla original. La ventaja del colapsado de medio lado, con respecto al de lado completo, es que produce menos actualizaciones en la malla. Por este motivo para nuestros ejemplos, usaremos este método.

#### 2.4.4. Simplificación de mallas tetraédricas con atributos

En la sección anterior se describieron las técnicas más utilizadas para la simplificación geo-métrica de mallas tetraédricas. Pero, en general, el conjunto volumétrico de datos que se quiere tetraedrizarse y simplificar o engrosar contiene en sus vértices información de alguna función escalar que representa una propiedad del volumen (color, textura). En estos casos es necesario que las técnicas de simplificación o decimación actualicen no sólo la geometría sino también esos datos escalares. En [8] se propone una forma de evaluar el error cometido en la modificación geométrica de la malla y del campo escalar cuando se utiliza la técnica de colapsado de lado. Para ello se consideran dos tipos de errores: el *error de dominio* y el *error del campo escalar*. Dados el conjunto original de datos:  $D = (V, \sigma, F)$  donde:

- $V$ : es un conjunto de  $n$  vértices,
- $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ : es una tetraedrización de  $m$  celdas con vértices en  $V$  que cubre un dominio  $\Omega$ ,
- $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ : es un conjunto de funciones tal que cada función  $f_i$  está definida sobre cada celda  $\sigma_i$ ,

y su simplificación  $\tilde{D} = (\tilde{V}, \tilde{\sigma}, \tilde{F})$  y  $\tilde{\Omega}$ , los autores de [8] calculan el error de campo  $e_f$  evaluando la diferencia entre dos campos escalares sólo en los vértices del conjunto original  $V$ :

$$e_f(D, \tilde{D}) = \max |F(x) - \tilde{F}(x)|.$$

Para calcular el error de dominio usan la siguiente aproximación de la métrica Hausdorff:

$$e_d(\Omega, \tilde{\Omega}) = \max_{x \in V - \tilde{V}, x \notin \tilde{\Omega}} d(x, \tilde{\Omega}).$$

De esta forma obtienen, para cada lado colapsado, un par de errores (el de dominio y el de escalares) que pueden graficarse en el plano  $XY$ : en el eje  $X$  se grafica el error escalar y en el eje  $Y$  el error de dominio. Suponiendo que un usuario fija un par de umbrales de error  $(e_f^{\text{máx}}, e_d^{\text{máx}})$  y que la malla actual tiene un error  $(e_f, e_d)$ , es necesario contar con un método de elección del próximo lado a colapsar. Esto es lo que en [8] se llama *error de predicción* y para el cual se presentan y comparan tres formas posibles. La ventaja de los métodos presentados en [8] para medir ambos errores es que pueden realizarse durante el proceso de simplificación a diferencia de los presentados en [10], que se realizan una vez que la malla ya está simplificada.



# Capítulo 3

## Wavelets definidas sobre grillas tetraédricas regulares

### 3.1. Introducción

En el Capítulo 1 vimos que la subdivisión de superficies y el esquema de lifting proveen métodos constructivos tanto para la generación de wavelets definidas a conveniencia del usuario como para la construcción de wavelets de segunda generación. Allí se mencionaron como ejemplo de la conjunción de estos dos métodos, las wavelets ortogonales de Haar generalizadas y las wavelets esféricas, (Sección 4).

La necesidad de resolver problemas físicos planteados en espacios de dimensión mayor que tres, hizo que se estudiaran esquemas de subdivisión en esos subespacios. Un trabajo relacionado con métodos de refinamiento en dimensión  $n$  puede consultarse en [46].

Para definir wavelets sobre subespacios de dimensión tres y siguiendo los exitosos resultados para el caso unidimensional y bidimensional, se necesita contar, por un lado, con técnicas de subdivisión de mallas tetraédricas ya que en general un objeto se representa sobre un dominio tetraédrico y, por otro, con un marco teórico de análisis de multirresolución para el caso  $3D$ . Las técnicas de subdivisión fueron descritas en el Capítulo 2, en la sección mallas tridimensionales.

El análisis multirresolución para objetos representados mediante tetraedros se realizó en [4]. Las wavelets allí definidas están basadas en la construcción de las wavelets ortogonales de Haar para espacios de medida general [27]. El ingrediente principal para su construcción es la creación de espacios anidados de funciones, para lo cual se requiere que la tetraedrización del volumen tenga la propiedad de conectividad de subdivisión. Este es el motivo por el cual el método de subdivisión elegido en ese trabajo es el de Bey, (ver Capítulo 2, Sección 3). Haremos una breve descripción de estas wavelets en la Sección 1.

En la Sección 2 presentaremos las *vertex wavelets* [3]; si bien no tienen una expresión analítica como las presentadas en [4], el cálculo de los coeficientes de análisis y síntesis es relativamente sencillo.

En ambos casos [4] y [3], la aplicación del esquema de lifting al análisis de multirresolución obtenido, permite obtener wavelets con más momentos nulos.

## 3.2. Wavelets de Haar sobre espacios de medida general

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida completa  $\mu$ . En [27] se definen wavelets de Haar sobre  $(X, \Sigma, \mu)$ , que forman una base incondicional para  $L^p(X, \Sigma, \mu)$ ,  $1 < p < \infty$ . Tomando como base el mencionado artículo, en [4] se definen wavelets de Haar sobre un tetraedro  $T$ , que forman una base incondicional para  $L^p(T, \Sigma, \mu)$ ,  $1 < p < \infty$ . En este caso  $\Sigma$  es la unión arbitraria de subtetraedros obtenidos por el método de subdivisión elegido y  $\mu$  la medida de Lebesgue. Ese trabajo fue el puntapié inicial que permitió representar funciones sobre un tetraedro que, sometido a un método de subdivisión regular, genera un análisis multirresolución anidado. Siguiendo con esta línea, en esta tesis se aborda el problema de la representación de funciones cuando el análisis multirresolución es no anidado.

En la siguiente sección presentamos las wavelets definidas sobre tetraedros para el caso del espacio  $L^2$ .

### 3.2.1. Wavelets sobre tetraedros

El método de subdivisión elegido es el de Bey, presentado en la sección (2.4.2). Queremos indicar ahora un orden para los tetraedros obtenidos en este proceso de subdivisión. Lo hacemos de la siguiente manera (ver Figura 3.1):

- numeramos los de abajo en sentido antihorario:  $T_1, T_2, T_3$ ;
- los interiores se numeran también en sentido antihorario:  $T_4, T_5, T_6, T_7$ ;
- el de arriba es  $T_8$ .

Para definir las wavelets, definimos en primer lugar las funciones de escala. Para ello, utilizaremos el árbol de subdivisión que se muestra en la Figura 3.2, en el cual cada tetraedro tiene 8 hijos (subtetraedros) obtenidos aplicando el método de Bey. El procedimiento es el siguiente:

- 1) indicamos con  $T = T^{(0)}$  al tetraedro inicial (nivel cero) cuyo volumen es  $V(T) = V$ .
- 2) consideramos el conjunto  $T^{(1)}$  de sus ocho hijos (nivel 1):

$$T^{(1)} = \{T_1, T_2, \dots, T_8\}; \quad T = \bigcup_{j=1}^8 T_j, \quad V(T_j) = \frac{V}{8}, j = 1, \dots, 8.$$



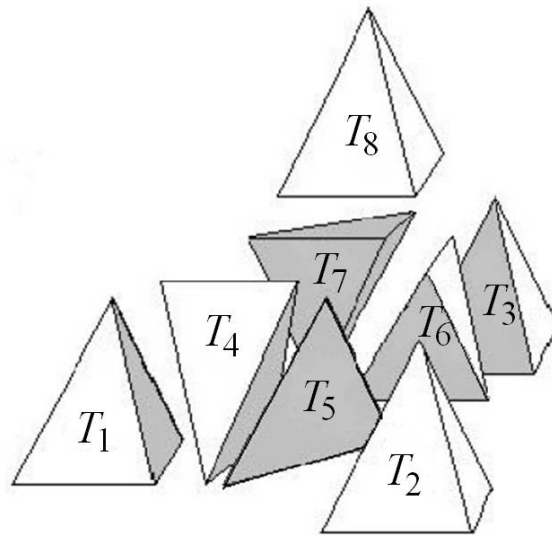


Figura 3.1: El conjunto de hijos de  $T_\alpha$ .

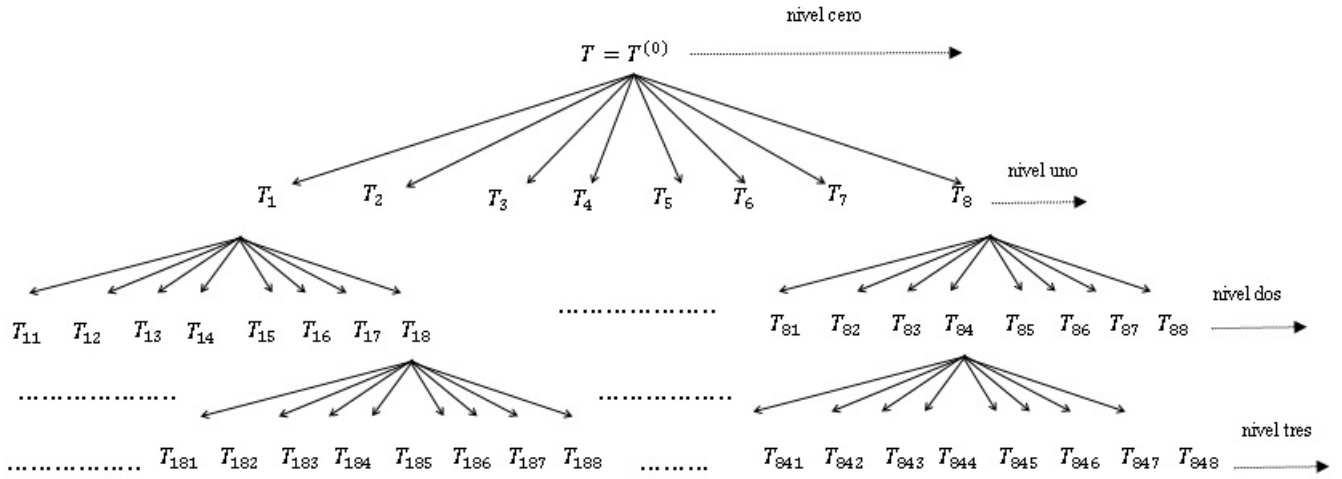


Figura 3.2: Árbol de subdivisión.

- 3) para cada tetraedro del conjunto  $T^{(1)}$ , consideramos el conjunto de sus hijos. Todos ellos constituyen los tetraedros del nivel dos:

$$T^{(2)} = \{T_{11}, \dots, T_{18}, T_{21}, \dots, T_{28}, \dots, T_{81}, \dots, T_{88}\}; \quad V(T_{ij}) = \frac{V}{8^2}, i = 1, \dots, 8, j = 1, \dots, 8.$$

- 4) Repitiendo el procedimiento para los tetraedros del nivel 2, obtenemos los tetraedros del nivel 3:

$$T^{(3)} = \{T_{111}, \dots, T_{118}, \dots, T_{881}, \dots, T_{888}\}; \quad V(T_{ijk}) = \frac{V}{8^3}, i = 1, \dots, 8, j = 1, \dots, 8, k = 1, \dots, 8.$$

- 4) En general, para un tetraedro  $T_\alpha$  del nivel  $n$ , es decir  $T_\alpha \in T^{(n)}$ , se tiene que:

$$T_\alpha = \bigcup_{j=1}^8 T_{\alpha,j}, \quad T_{\alpha,j} \in T^{(n+1)}, \quad V(T_\alpha) = \frac{V}{8^n}, \quad V(T_{\alpha,j}) = \frac{V}{8^{n+1}}.$$

Utilizando el árbol de subdivisión anterior, definimos a continuación las funciones de escala. Para cada tetraedro  $T$ , el bloque constructor básico de la función de escala  $\varphi$  es la función característica de ese tetraedro, que notamos  $\chi(T)$ , multiplicada por una constante de normalización. Entonces:

- i) para el tetraedro inicial  $T$  la función de escala es  $\varphi = K\chi(T)$ , siendo  $K$  una constante que se elige para que:

$$\|\varphi\|_2^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle = K^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi(T) dx^3 = K^2 V = 1.$$

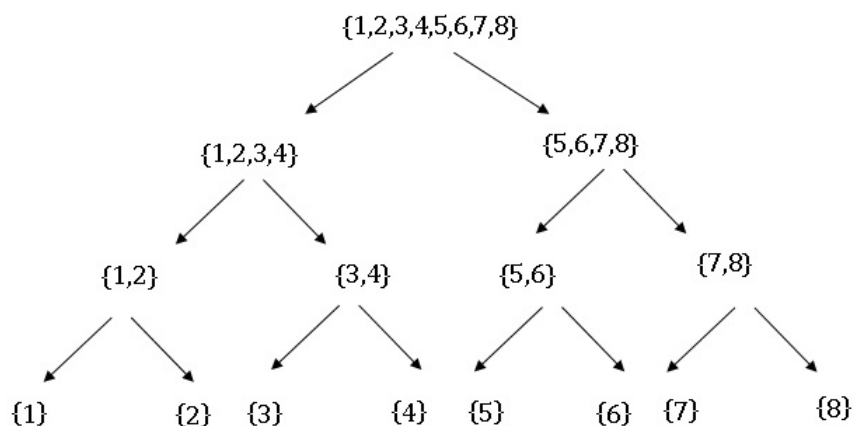


Figura 3.3: Árbol de índices.

Luego para el tetraedro inicial  $T$ , la función de escala asociada es:

$$\varphi(T) = \frac{1}{\sqrt{V}}\chi(T).$$

- ii) para un tetraedro  $T \in T^{(n)}$  la función de escala es  $\varphi = K\chi(T)$ , siendo  $K$  una constante que se elige para que:

$$\|\varphi\|_2^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle = K^2 \int_{\mathbb{R}^3} \chi(T) dx^3 = K^2 \frac{V}{8^n} = 1.$$

Luego para un tetraedro  $T \in T^{(n)}$ , la función de escala asociada es:

$$\varphi(T) = \frac{8^{n/2}}{\sqrt{V}}\chi(T).$$

Para construir las wavelets, además de las funciones de escala definidas arriba, necesitaremos el árbol que se indica en la Figura 3.3, construido a partir de los índices que indexan a los hijos de un tetraedro. Cada wavelet se obtiene a partir de un nodo interior y considerando sus dos hijos. Más precisamente, cada wavelet se obtiene normalizando la diferencia entre la función característica de los tetraedros que tienen índice en el primer hijo y la función característica de los tetraedros que tienen índice en el segundo hijo. Se obtienen así 7 wavelets, que detallamos a continuación:

- 1) **1<sup>ra</sup> wavelet:**

$$\psi_1 = A_1[\chi(P_1) - \chi(N_1)], \quad P_1 = \cup_{j=1}^4 T_j, \quad N_1 = \cup_{j=5}^8 T_j,$$

siendo  $A_1$  una constante que se elige para que  $\|\psi_1\|_2 = 1$ . Con esta elección resulta:

$$\psi_1 = \frac{8^{n/2}}{\sqrt{V}}[\chi(P_1) - \chi(N_1)], \quad P_1 = \cup_{j=1}^4 T_j, \quad N_1 = \cup_{j=5}^8 T_j.$$

2) 2<sup>da</sup> wavelet:

$$\psi_2 = A_2[\chi(P_2) - \chi(N_2)], \quad P_2 = \cup_{j=1}^2 T_j, \quad N_2 = \cup_{j=3}^4 T_j,$$

siendo  $A_2$  una constante que se elige para que  $\|\psi_2\|_2 = 1$ . Con esta elección resulta:

$$\psi_2 = \frac{\sqrt{2} 8^{n/2}}{\sqrt{V}}[\chi(P_2) - \chi(N_2)], \quad P_2 = \cup_{j=1}^2 T_j, \quad N_2 = \cup_{j=3}^4 T_j.$$

3) 3<sup>ra</sup> wavelet:

$$\psi_3 = A_3[\chi(P_3) - \chi(N_3)], \quad P_3 = \cup_{j=5}^6 T_j, \quad N_3 = \cup_{j=7}^8 T_j,$$

siendo  $A_3$  una constante que se elige para que  $\|\psi_3\|_2 = 1$ . Con esta elección resulta:

$$\psi_3 = \frac{\sqrt{2} 8^{n/2}}{\sqrt{V}}[\chi(P_3) - \chi(N_3)], \quad P_3 = \cup_{j=5}^6 T_j, \quad N_3 = \cup_{j=7}^8 T_j.$$

4) 4<sup>ta</sup> wavelet:

$$\psi_4 = A_4[\chi(P_4) - \chi(N_4)], \quad P_4 = T_1, \quad N_4 = T_2,$$

siendo  $A_4$  una constante que se elige para que  $\|\psi_4\|_2 = 1$ . Con esta elección resulta:

$$\psi_4 = 2 \frac{8^{n/2}}{\sqrt{V}}[\chi(P_4) - \chi(N_4)], \quad P_4 = T_1, \quad N_4 = T_2.$$

5) 5<sup>ta</sup> wavelet:

$$\psi_5 = A_5[\chi(P_5) - \chi(N_5)], \quad P_5 = T_3, \quad N_5 = T_4,$$

siendo  $A_5$  una constante que se elige para que  $\|\psi_5\|_2 = 1$ . Con esta elección resulta:

$$\psi_5 = 2 \frac{8^{n/2}}{\sqrt{V}}[\chi(P_5) - \chi(N_5)], \quad P_5 = T_3, \quad N_5 = T_4.$$

6) 6<sup>ta</sup> wavelet:

$$\psi_6 = A_6[\chi(P_6) - \chi(N_6)], \quad P_6 = T_5, \quad N_6 = T_6,$$

siendo  $A_6$  una constante que se elige para que  $\|\psi_6\|_2 = 1$ . Con esta elección resulta:

$$\psi_6 = 2 \frac{8^{n/2}}{\sqrt{V}}[\chi(P_6) - \chi(N_6)], \quad P_6 = T_5, \quad N_6 = T_6.$$

7) 7<sup>ma</sup> wavelet:

$$\psi_7 = A_7[\chi(P_7) - \chi(N_7)], \quad P_7 = T_7, \quad N_7 = T_8,$$

siendo  $A_7$  una constante que se elige para que  $\|\psi_7\|_2 = 1$ . Con esta elección resulta:

$$\psi_7 = 2 \frac{8^{n/2}}{\sqrt{V}} [\chi(P_7) - \chi(N_7)], \quad P_7 = T_7, \quad N_7 = T_8.$$

Finalmente, la octava wavelet es:

$$\psi_8 = \frac{8^{n/2}}{\sqrt{V}} \chi(T),$$

es decir la función de escala asociada a  $T \in T^{(n)}$ .

**Propiedades:** Estas wavelets definidas sobre un tetraedro  $T$ , tienen las siguientes propiedades:

1)  $\{\psi_j, j = 1, \dots, 7\}$  es un conjunto ortonormal

2)  $\int_T \psi_i dx^3 = 0, \forall i = 1, \dots, 7$ .

Teniendo en cuenta que las funciones de escala asociadas a  $T \in T^{(n)}$  y a  $T_j \in T^{(n+1)}$  son respectivamente:

$$\varphi = \frac{8^{n/2}}{\sqrt{V}} \chi(T), \quad (3.1)$$

y

$$\varphi_j = \frac{8^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{V}} \chi(T_j), \quad (3.2)$$

se deduce que:

$$\chi(T) = \sum_{j=1}^8 \chi(T_j) \Rightarrow \frac{8^{n/2} \chi(T)}{\sqrt{V}} = \sum_{j=1}^8 \frac{8^{n/2} \chi(T_j)}{\sqrt{V}} \Rightarrow \varphi = \sum_{j=1}^8 \frac{1}{\sqrt{8}} \underbrace{\frac{\sqrt{8} 8^{n/2} \chi(T_j)}{\sqrt{V}}}_{=\varphi_j}, \text{ es decir:}$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^8 \frac{1}{\sqrt{8}} \varphi_j. \quad (3.3)$$

Utilizando la igualdad (3.2), las wavelets pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} [\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - (\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8)],$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} [\varphi_1 + \varphi_2 - (\varphi_3 + \varphi_4)],$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2} [\varphi_5 + \varphi_6 - (\varphi_7 + \varphi_8)],$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2} [\varphi_1 - \varphi_2],$$

$$\psi_5 = \frac{1}{2} [\varphi_3 - \varphi_4],$$

$$\psi_6 = \frac{1}{2} [\varphi_5 - \varphi_6],$$

$$\psi_7 = \frac{1}{2} [\varphi_7 - \varphi_8].$$

### Análisis multirresolución generado por las wavelets definidas sobre un tetraedro

Veremos ahora cómo las wavelets definidas en la sección anterior se encuadran en el concepto de análisis multirresolución. Utilizaremos la notación:

- $\overline{A}$ : subespacio generado por los elementos del conjunto  $A$ .
- $\varphi^n = \{\varphi_j^n : \varphi_j^n \text{ es la función de escala asociada a un tetraedro } T_j \in T^{(n)}\}$ .
- $\psi^n = \{\psi_j^n : \psi_j^n \text{ es la wavelet asociada a un tetraedro } T_j \in T^{(n)}\}$ .

Para un nivel  $n$  en el árbol de subdivisión, definimos los espacios de escala  $V^n$  y los espacios de detalle  $W^n$  de la siguiente manera:

$$V^n = \overline{\{\varphi^n\}} \text{ y } W^n = \overline{\{\psi^n\}}$$

Suponiendo que el árbol de subdivisión tiene dos niveles,  $(n - 1)$  y  $n$ , se sigue que:

$$V^n = V^{n-1} \oplus W^{n-1},$$

y por lo tanto una función  $f \in V^n$  admite las siguientes representaciones:

$$f = \sum_j a_j \varphi_j^n \quad \text{y} \quad f = \sum_j (b_j \varphi_j^{n-1} + c_j \psi_j^{n-1}).$$

La primera de ellas utiliza sólo funciones de escala del nivel  $n$  y la segunda, funciones de escala y wavelets del nivel  $(n - 1)$ .

### Ejemplos

Presentamos a continuación dos ejemplos de aplicación de las wavelets definidas anteriormente.

#### Ejemplo 1.

En este caso elegimos representar una función sobre un tetraedro usando la representación a través de las funciones de escala. Esta función fue transformada a una escala de grises cuyo rango varía entre cero y uno, haciendo corresponder el menor y el mayor valor de la función, al blanco y al negro, respectivamente.

En las figuras es posible visualizar la representación de esta función en diferentes resoluciones. Para poder lograr una buena visualización en los gráficos, sólo presentamos cuatro resoluciones diferentes, desde la más fina a la más burda, (Figura 3.4). En la Figura 3.5 se muestra la descomposición multirresolución de la función del Ejemplo 1 representada mediante tetraedros. En dicha figura puede verse el primer paso de la descomposición; se ha partido de la mayor resolución y se ha dado un paso en la descomposición pasando a una resolución más burda. Los tetraedros en gris representan la primera aproximación de la función definida sobre el volumen, en tanto que los demás representan el valor de los distintos coeficientes de la descomposición en wavelets. En este caso se ven los siete detalles, cada uno de ellos con un color distinto para poder diferenciarlos; en cada uno de estos grupos los tetraedros se han coloreado de acuerdo al valor absoluto de los coeficientes de wavelets. Cuando el valor de un coeficiente es cero, el tetraedro correspondiente es blanco, mientras que si el valor absoluto aumenta, se aumenta la saturación del color correspondiente; es decir el valor de la saturación está transformada al intervalo  $[0, 1]$ .

En la Figura 3.6, se puede observar de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo:

- a) la función del Ejemplo 1 definida en el subespacio  $V^3$ ;
- b) la función del Ejemplo 1 en el subespacio  $V^2$  y los detalles en el subespacio  $W^2$ ;
- c) la función del Ejemplo 1 en el subespacio  $V^1$  y los detalles en el subespacio  $W^2$  y  $W^1$ ;

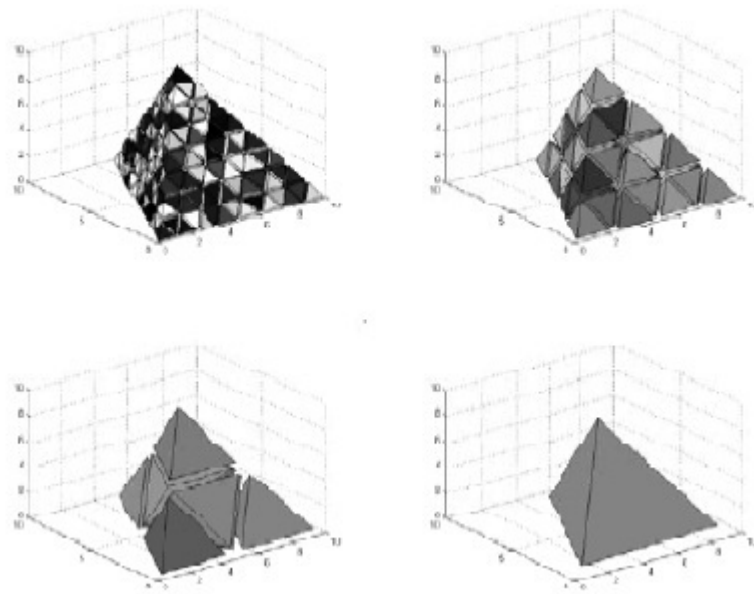


Figura 3.4: Función del ejemplo 1 sobre un tetraedro.

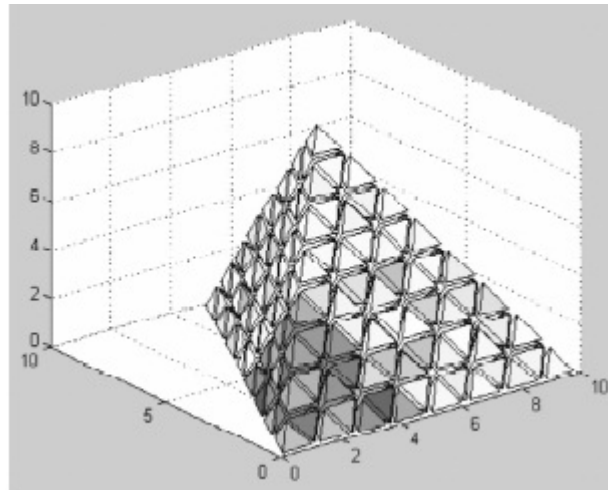


Figura 3.5: Un paso en la descomposición multirresolución de la función del ejemplo 1 sobre un tetraedro.



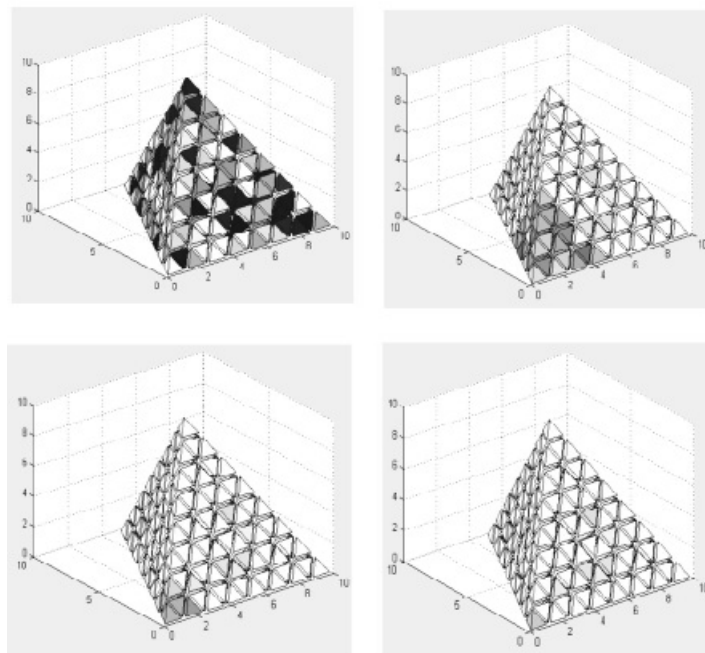


Figura 3.6: Tres pasos consecutivos en la descomposición multirresolución de la función del ejemplo 1 sobre un tetraedro.

- d) la función del Ejemplo 1 en el subespacio  $V^0$  y los detalles en el subespacio  $W^0$ ,  $W^1$  y  $W^2$ .

### Ejemplo 2.

Las mallas que representan un objeto deben almacenar su geometría  $3D$ , su topología y sus atributos. Una de las principales ventajas de las mallas tetraédricas es que cualquier otra malla poliédrica puede ser reducida a una malla tetraédrica y, como consecuencia, una malla tetraédrica puede representar un volumen de topología arbitraria.

Por otro lado, las wavelets han demostrado ser una herramienta muy útil para la compresión de objetos  $3D$ .

Este ejemplo es una aplicación del modelado de volúmenes utilizando mallas tetraédricas que se refinan siguiendo el método de Bey y aplicando las wavelets presentadas en la Sección 2.1. Damos aquí una breve descripción del mismo y para más detalles, remitimos al lector interesado a [52].

La construcción del modelo multirresolución se realiza a partir de una malla tetraédrica semirregular  $\Gamma_\infty$  que tiene la propiedad de conectividad de subdivisión. Aplicando la transformada wavelet rápida tantas veces como sea posible, se obtiene finalmente la resolución  $\Gamma_0$  y un conjunto de detalles. Teniendo en cuenta que la transformada wavelet concentra la energía en la resolución más gruesa y que la red goza de localización espacial, este modelo resulta adecuado para compresión. Los detalles de los algoritmos de compresión y de transmisión utilizados pueden ser consultados en [52].

### 3.2.2. Aplicación del esquema de lifting a wavelets definidas sobre un tetraedro

Una propiedad importante de una familia de wavelets es tener momentos nulos. Decimos que la wavelet  $\psi$  tiene  $N$  momentos nulos si existen  $N$  polinomios linealmente independientes  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  tal que  $\langle \psi, P_i \rangle = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ .

Las wavelets definidas sobre un tetraedro presentadas en la sección anterior tienen sólo un momento nulo pero el análisis multirresolución que generan es adecuado para aplicar el esquema de lifting [59]. En esta sección construiremos un nuevo análisis de multirresolución basado en las wavelets definidas en un tetraedro en el cual las wavelets obtenidas tienen más momentos nulos.

De acuerdo al esquema de lifting, las nuevas wavelets son de la forma:

$$\psi_j^{n(lif)} = \psi_j^n - \sum_j s_j \varphi_j^n, \quad (3.4)$$

siendo  $\varphi_j^n$  y  $\psi_j^n$ , respectivamente, la función de escala y la wavelet asociadas a un tetraedro  $T_j \in T^{(n)}$ . Los coeficientes  $s_j$  pueden ser elegidos de manera tal que  $\psi_j^{n(lif)}$  tenga más de un

momento nulo. Considerando el tetraedro con vértices en  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  y  $(0, 0, 0)$  al que llamaremos  $T_0$ , construiremos wavelets que anulan a los siguientes polinomios:

$$x, x + y + 5, x + z + 5, y, z, y + z, xy, xyz. \quad (3.5)$$

Para ello es necesario resolver las siguientes ecuaciones:

$$\langle \psi_j^n, P \rangle = \sum_j s_j \langle \varphi_j^n, P \rangle, \quad (3.6)$$

donde  $P$  representa a cada uno de los ocho polinomios elegidos en (3.5). Como tres de ellos:  $x$ ,  $x + y + 5$ ,  $x + z + 5$ , son linealmente independientes sobre el tetraedro  $T_0$ , las nuevas wavelets tendrán tres momentos nulos. Debemos resolver entonces, un sistema singular de  $8 \times 8$  en las incógnitas  $s_j$  para cada  $j = 1, \dots, 8$ . Los coeficientes del sistema son las integrales de los polinomios elegidos sobre el tetraedro  $T_0$ .

Estas integrales fueron evaluadas usando coordenadas baricéntricas. Comenzando con la wavelet  $\psi_j^3$  y haciendo un paso en la subdivisión, encontramos los siguientes valores de  $s_j$ :

-0.3103	0.0052	0.0883	0.0849	-0.1658	-0.0198	-0.0187
-0.1476	0.0079	0.0469	-0.0411	-0.0678	-0.0280	-0.0277
-0.0742	-0.0120	0.0153	-0.0019	0.0203	-0.0149	-0.0140
-0.2369	-0.0147	0.0567	0.0357	-0.1661	-0.0066	-0.0050
0.4080	-0.0436	-0.1211	-0.0674	0.2524	0.0325	0.0191
0.1233	0.1356	0.0167	0.0185	0.0252	0.0284	0.0411
0.3018	0.0558	-0.0654	-0.0466	0.1333	0.0299	0.0397
-0.0640	-0.1343	-0.0375	-0.0180	-0.0314	-0.0215	-0.0345

Coeficientes  $s_j$  de las wavelets una vez aplicado el esquema de lifting.

### 3.2.3. Wavelets sobre un tetraedro: esquema basado en vértices

Para el caso de dos dimensiones, Schröder y Sweldens presentaron en [54] cuatro bases de wavelets basadas en vértices: lazy, linear, butterfly y cuadrática.

Inspirándonos en este trabajo, nosotros construimos una base de wavelets sobre un tetraedro, basada en vértices. Esta construcción fue presentada en nuestro trabajo previo [3]. Las funciones de esta base no tienen una expresión analítica; en la Sección siguiente, indicamos los pasos de análisis y síntesis para hallarlas.

Las bases de wavelets presentadas en [54] dependen de los entornos usados para un vértice dado. Como nosotros elegimos el método de subdivisión de Bey, los nuevos vértices se agregan en el punto medio de cada lado del tetraedro, lo cual produce seis nuevos vértices. Luego si en el nivel de subdivisión  $n$  tenemos un conjunto de vértices  $K^n$  para indexar los vértices

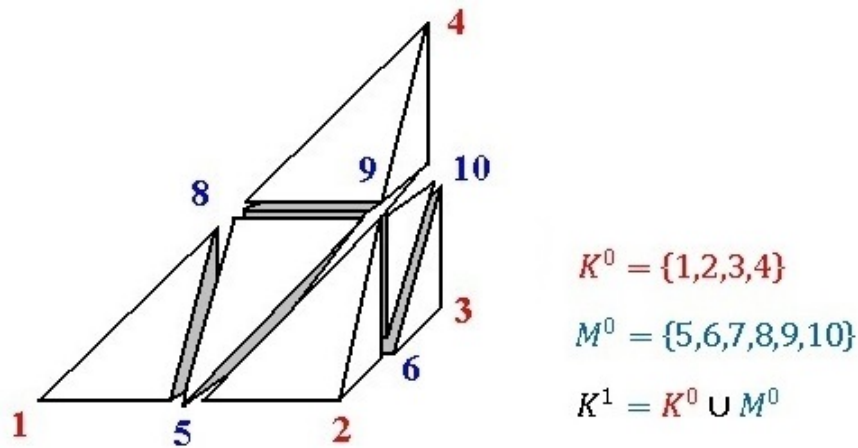


Figura 3.7: Primer paso en la subdivisión de Bey: conjuntos de índices.

de los tetraedros de ese nivel, en el nivel  $(n + 1)$ , el conjunto de índices es  $K^{n+1} = K^n \cup M^n$  donde  $M^n$  es el conjunto de índices que se obtiene al agregar, a cada tetraedro del nivel  $n$ , los seis nuevos vértices. La Figura 3.7 muestra el conjunto inicial de vértices  $K^0$  y el siguiente,  $K^1$ , que se obtiene al efectuar un paso en el método de subdivisión de Bey .

Cada vértice con índice  $m \in M^n$  puede pensarse como el punto medio de algún lado *padre*. Con  $(u, v)$  indicamos los índices de los extremos inicial y final, respectivamente, de un lado padre. Llamaremos vértices *vecinos* de un vértice con índice en  $m \in M^n$  a los vértices con índices  $u, v, \in K^n$  . Los vértices vecinos serán empleados para definir las wavelets basadas en vértices.

En lo que sigue notaremos con  $c_{n,k}$  y  $d_{n,k}$ , respectivamente, a los coeficientes de las funciones de escala y de las wavelets en la resolución  $n$ . Como es usual, los coeficientes  $c_{0,k}$  corresponden a la aproximación más burda y el proceso comienza con un conjunto dado  $c_{N,k}$  donde  $N$  es el nivel de mayor resolución.

### Base de wavelets basada en vértices

Los coeficientes de las funciones de escala son simplemente submuestreados en el análisis y sobremuestreados durante la síntesis, en tanto que para calcular los coeficientes en la base de wavelets, debemos realizar algunos cálculos.

Para el análisis y la síntesis, los coeficientes se calculan de la siguiente manera:

#### ■ Análisis

$$\begin{aligned}
 c_{n,k} &= c_{n+1,k}, \quad \forall k \in K^n \\
 d_{n,m} &= c_{n+1,m} - \sum_{k \in K^n} \tilde{s}_{n,k,m} c_{n,k}, \quad \forall m \in M^n,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

■ **Síntesis**

$$\begin{aligned} c_{n+1,k} &= c_{n,k}, \quad \forall k \in K^n \\ c_{n+1,m} &= d_{n,m} + \sum_{k \in K^n} \tilde{s}_{n,k,m} c_{n,k}, \quad \forall m \in M^n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Siguiendo el esquema de arriba, y eligiendo  $\tilde{s}_{n,k,m} = 1/2$  en las ecuaciones (3.7) y (3.8) respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} d_{n,m} &= c_{n+1,m} - \frac{1}{2}(c_{n+1,u} + c_{n+1,v}), \\ c_{n+1,m} &= d_{n,m} + \frac{1}{2}(c_{n+1,u} + c_{n+1,v}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

**Análisis de multirresolución**

Como antes, indicamos con  $T = T^{(0)}$  al tetraedro inicial y con  $T^{(n)}$  a la tetraedrización del nivel  $n$  que se obtiene aplicando el método de subdivisión de Bey al tetraedro  $T$ . Para cada nivel  $n$ , definimos los espacios  $V^n$  de la siguiente manera:

$$V^n = \{f : f \text{ es continua sobre la tetraedrización } T^{(n)} \text{ y lineal sobre cada tetraedro de } T^{(n)}\}. \quad (3.10)$$

Estos espacios son anidados porque cualquier función que es lineal en los tetraedros del nivel  $n$  es también lineal sobre los tetraedros del nivel  $(n+1)$ .

Como  $V^n$  sólo contiene funciones lineales sobre cada tetraedro de  $T^{(n)}$ , cualquier función de  $V^n$  está unívocamente determinado por sus valores en los vértices de tal tetraedro. El conjunto de índices que indexa los vértices de los tetraedros de  $T^{(n)}$  es  $K^n = K^{(n-1)} \cup M^{(n-1)}$ . Sea  $\varphi_i^n$  la función continua y lineal por tramos que vale *uno* en el vértice  $v_i^n = (x_i^n, y_i^n, z_i^n)$ ,  $i \in K^n$  y cero en los otros vértices, es decir:

$$\varphi_i^n(v_k^n) = \delta_{i,k}.$$

Las funciones  $\varphi_i^n$ ,  $i \in K^n$ , forman una base para  $V^n$ . Los espacios  $V^n$  son, como siempre, los espacios complementarios de  $V^n$  y a sus funciones base las indicaremos  $\psi^n$ . Luego, para una función  $f \in V^n$ , si notamos  $f(v_i^n) = c_{i,n}$  tenemos que:

$$f(x) = \sum_{i \in K^n} c_{i,n} \varphi_i^n(x), \quad x \in T^{(n)} \quad (3.11)$$

Por otro lado, utilizando las funciones de escala y las wavelets, la función  $f$  admite la siguiente descomposición:

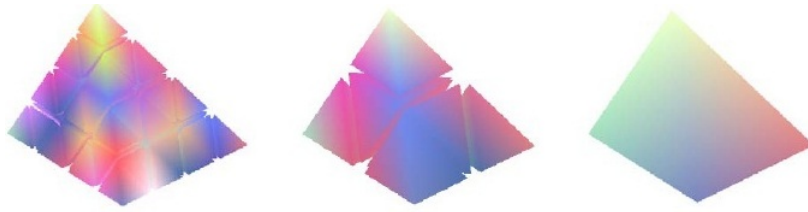


Figura 3.8: Descomposición en base de wavelets con el atributo definido sobre los vértices de los tetraedros.

$$f(x) = \sum_{i \in K^0} c_{i,n} \varphi_i^0(x) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i \in (K^{j+1} - K^j)} d_{j,i} \psi_i^j(x), \quad (3.12)$$

donde las funciones  $\varphi_i^0$  y  $\psi_i^j$  son, respectivamente, las funciones de escala y las wavelets basadas en vértices.

### Ejemplo

Para representar una función sobre un tetraedro usando las funciones de escala basadas en vértices, transformamos dicha función en una escala de colores en cada vértice del tetraedro. Cada componente del color, (rojo, verde o azul) es tratada como una función escalar definida sobre la malla inicial  $T^0$ . Cada función color puede ser escrita en forma multirresolución usando los filtros para el análisis y los coeficientes wavelets. En la Figura 3.8 pueden verse dos pasos en el análisis.

### 3.2.4. Aplicación del lifting a las wavelets basadas en vértices

Utilizaremos a continuación el esquema de lifting para obtener wavelets basadas en vértices con un momento nulo.

Comenzamos por las wavelets propuestas por Schröder y Sweldens en [54] dadas por:

$$\psi_m^n = \varphi_m^{n+1} - s_{n,u,m} \varphi_u^n - s_{n,v,m} \varphi_v^n, \quad m \in M^{(n)}. \quad (3.13)$$

Es decir la wavelet en el punto medio  $m$  de un lado está definida como una combinación lineal de la función de escala en el punto medio y dos funciones de escala del nivel anterior, calculadas en los vértices de índices  $u$  y  $v$ . Los pesos  $s_{j,*,m}$  se eligen de manera tal que la wavelet resultante tenga integral nula:

$$\int_T \psi_m^n dx^3 = \int_T \varphi_m^{n+1} dx^3 - s_{n,u,m} \int_T \varphi_u^n dx^3 - s_{n,v,m} \int_T \varphi_v^n dx^3. \quad (3.14)$$

Luego:

$$s_{n,*,m} = \frac{\int_T \varphi_m^{n+1} dx^3}{2 \int_T \varphi_*^n dx^3} = \frac{I_{n+1,m}}{2I_{n,*}}. \quad (3.15)$$

Podemos entonces expresar  $\psi_m^n$  como:

$$\psi_m^n = \varphi_m^{n+1} - \frac{I_{n+1,m}}{2I_{n,*}} \varphi_*^n. \quad (3.16)$$

A continuación mostramos cómo expresar el cálculo de los coeficientes para el análisis y la síntesis.

### Etapas de análisis

**A1)** Cálculo de los coeficientes de detalle:

$$\forall m \in M^n, d_{n,m} = c_{n+1,m} - \frac{1}{2}(c_{n+1,u} - c_{n+1,v}). \quad (3.17)$$

**A2)** Cálculo de los coeficientes  $c_{n,k}$ :

$$\forall k \in K^n, c_{n,k} = c_{n+1,k}, \quad (3.18)$$

$$\forall m \in M^n, u, v \in K^n, \begin{cases} c_{n,u} = c_{n+1,u} + s_{n,u,m} d_{n,m} \\ c_{n,v} = c_{n+1,v} + s_{n,v,m} d_{n,m} \end{cases}. \quad (3.19)$$

### Etapas de síntesis

**S1)** Cálculo de los coeficientes  $c_{n+1,k}$ :

$$\forall k \in K^n, c_{n+1,k} = c_{n,k}, \quad (3.20)$$

$$\forall m \in M^n, u, v \in K^n, \begin{cases} c_{n+1,u} = c_{n,u} - s_{n,u,m} d_{n,m} \\ c_{n+1,v} = c_{n,v} - s_{n,v,m} d_{n,m} \end{cases}. \quad (3.21)$$

**S2)** Los  $c_{n+1,m}$  se calculan utilizando los  $c_{n+1,k}$  ya calculados:

$$c_{n+1,m} := d_{n,m} + \frac{1}{2}(c_{n+1,u} + c_{n+1,v}). \quad (3.22)$$





# Capítulo 4

## Análisis multirresolución para mallas triangulares no anidadas

### 4.1. Introducción

Con la teoría de wavelets se ha podido resolver el problema de la representación multirresolución de funciones definidas sobre mallas triangulares que se refinan subdividiendo en 4 triángulos cada uno de los triángulos que la componen. Prueba de esto son los trabajos presentados por Michael Lounsbery [42] y Wim Sweldens [54] respectivamente.

Utilizando también la teoría de wavelets, en [4] se da una representación multirresolución de una función definida sobre un tetraedro. Una descripción de esto fue hecha en el Capítulo 3, Sección 2.1. En este caso se utiliza el método de Bey ([2]) para subdivisión de tetraedros y se define una base adecuada de funciones de escala y wavelets para representar la función densidad definida sobre un tetraedro. La extensión de este resultado a una representación multirresolución de una función definida sobre un volumen tetraedrizado se dio brevemente en el Capítulo 3, Sección 2.1.2, Ejemplo 2.

El motivo básico por el cual es posible aplicar la teoría de wavelets en los trabajos mencionados antes es que el método de subdivisión elegido, ya sea en el caso de grillas triangulares regulares como tetraédricas regulares y semirregulares, permite obtener mallas anidadas y esto a su vez permite definir los espacios anidados que son característicos en dicha teoría.

Ahora bien, cuando los datos están distribuidos de forma irregular, es conveniente tetraedrizar el dominio con una malla tetraédrica irregular y aplicar alguna de las técnicas de subdivisión vistas en el Capítulo 2, Sección 3. Pero con estas técnicas no se obtienen mallas anidadas y por lo tanto ya no puede aplicarse la teoría clásica de wavelets. Es necesario entonces hacer una extensión de dicha teoría para la cual ya no sea necesario tener una sucesión de espacios anidados. El trabajo de Bonneau [24] presenta dicha extensión y es uno de los que inspiraron los resultados de esta tesis.

En la primera parte de este capítulo presentaremos el marco de trabajo para espacios no anidados y veremos su relación con las mallas irregulares. En la segunda parte daremos la

descomposición multirresolución para funciones constantes por tramos sobre una triangulación irregular dada.

## 4.2. Análisis multirresolución para espacios no anidados

En lo que sigue, con  $E$  indicaremos a un espacio de Hilbert, que en la mayoría de las aplicaciones será el espacio funcional  $L^2(\Omega)$ , siendo  $\Omega$  un dominio medible.

### 4.2.1. Aproximación y reconstrucción

**Definición 4.2.1** *Se llama sucesión de espacios de aproximación a una sucesión de subespacios  $V^k$  de  $E$  de dimensión finita, asociados a los operadores lineales:*

$$P^k : V^{k+1} \rightarrow V^k, k \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

llamados operadores de aproximación.

#### Observación.

Si bien la definición anterior puede extenderse a espacios con base incondicional, la mayoría de las aplicaciones que nos interesarán estarán formuladas para espacios de dimensión finita.

Dada una sucesión de espacios de aproximación y una función  $f_{k+1} \in E$  que se desea analizar, se comienza por proyectarla sobre un cierto espacio de aproximación, por ejemplo  $V_n$  y después se calculan iterativamente las aproximaciones  $f_k$  en los espacios  $V^k$ ,  $k < n$ . Así, en el primer paso obtenemos:  $f_k = P^k(f_{k+1})$ ; la iteración de este proceso termina cuando se obtiene una función  $f_0 \in V_0$ , llamada aproximación burda de  $f_{k+1}$ . Para hacer la reconstrucción de la función original es necesario conservar los detalles perdidos en la fase de análisis. En el caso clásico, los espacios de escala son anidados y por lo tanto el espacio  $V^k$  admite un complemento  $W_k$  en  $V^{k+1}$  que permite escribir la siguiente igualdad:

$$V^{k+1} = V^k \oplus W^k, \quad (4.2)$$

de donde se deduce que los detalles buscados son las funciones  $g_k = f_{k+1} - f_k \in W^k = \text{Ker}(P^k)$ . El siguiente lema, cuya demostración puede consultarse en [25], Capítulo 2, muestra cómo hallar los detalles para el caso de espacios no anidados.

**Lema 4.2.2** *Sean  $U$  y  $V$  dos espacios vectoriales y  $P : U \rightarrow V$  un homomorfismo. Entonces para todo subespacio  $G \subset U$ ,  $G$  complemento del  $\text{Ker}(P)$ , la restricción de  $P$  a  $G$  es inyectiva y tiene la misma imagen que  $P$ .*

Volviendo al caso que nos interesa, elegimos  $W^k \doteq Ker(P^k)$  y  $\tilde{V}^k$  un complemento de  $W^k$  en  $V^{k+1}$ . Aplicando el lema anterior, podemos asegurar que  $\tilde{V}^k$  es isomorfo a la imagen de  $P^k$  y por lo tanto si  $f_{k+1} = \tilde{f}_k + g_k$ , con  $\tilde{f}_k \in \tilde{V}^k$  y  $g_k \in W^k$ , entonces también vale la siguiente descomposición:

$$f_{k+1} = Inv\left(P^k|_{\tilde{V}^k}\right)(f_k) + g_k, \quad (4.3)$$

que permite reconstruir  $f_{k+1}$  a partir de su aproximación  $f_k$  y de la componente de detalle. Para reconstruir la función es necesario repetir esta descomposición en cada nivel. Para ello necesitaremos las siguientes definiciones.

**Definición 4.2.3** Para cada nivel  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , se definen:

- i) los espacios de detalle  $W^k \doteq Ker(P^k)$ ;
- ii) los espacios auxiliares  $\tilde{V}^k$  tales que:  $V^{k+1} = \tilde{V}^k \oplus W^k$ ;
- iii) los operadores  $Q_k : V^{k+1} \rightarrow W^k$  que proyectan sobre  $W^k$  en forma paralela a  $\tilde{V}^k$ ;
- iv) los operadores  $R_k : V^{k+1} \rightarrow \tilde{V}^k$ , que proyectan sobre  $\tilde{V}^k$  en forma paralela a  $\tilde{W}^k$ . Se tiene que  $f = R_k(f) + Q_k(f)$ ;
- v) los operadores de síntesis  $S_k \doteq Inv\left(P^k|_{\tilde{V}^k}\right)$ .

En virtud del Lema 4.2.2, los operadores de síntesis están bien definidos. El esquema de la Figura 4.1 representa el proceso completo de descomposición de una función  $f_n \in V_n$ .

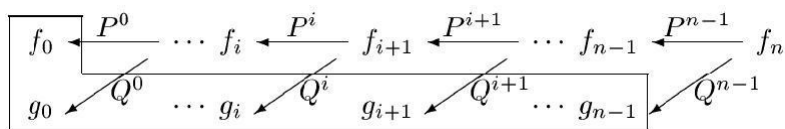


Figura 4.1: Descomposición de una función  $f_n \in V_n$ .

Como puede observarse, este esquema es similar al de la transformada wavelet directa del caso clásico: partiendo de  $f_n$  se obtienen las componentes de detalle al calcular las sucesivas aproximaciones  $f_k$ ,  $k < n$ . La parte recuadrada del esquema representa la expresión multi-resolución de  $f_n$ : una representación burda y sus detalles.

En lo que sigue describiremos el proceso de reconstrucción cuyo esquema puede verse en la Figura 4.2, en la cual se observa su similitud con la transformada wavelet inversa descrita en el Capítulo 1. Para describir más precisamente el proceso de reconstrucción y poner de relieve la contribución de cada componente de detalle en dicho proceso, presentamos la siguiente notación y probamos una proposición.

$$\begin{array}{ccccccc}
f_0 & \xrightarrow{S^0} & \cdots & f_i & \xrightarrow{S^i} & f_{i+1} & \xrightarrow{S^{i+1}} & \cdots & f_{n-1} & \xrightarrow{S^{n-1}} & f_n \\
g_0 & \nearrow + & & g_i & \nearrow + & g_{i+1} & \nearrow + & & g_{n-1} & \nearrow + & 
\end{array}$$

Figura 4.2: Reconstrucción de una función  $f_n \in V_n$ .

**Notación.**  $\forall k \in \mathbb{N}$ , notamos:

- i)  $P^{n,k} : V_n \rightarrow V^k, f \rightarrow P^k \circ \dots \circ P^{n-1}(f)$ ;
- ii)  $S^{k,n} : f \rightarrow S^{n-1} \circ \dots \circ S^{k+1} \circ S^k(f) \in V_n$ ;
- iii)  $f^{k,n} \doteq S^{k,n}(f) \in V_n, \forall f \in V^k$ ;
- iv)  $V^{k,n} \doteq \{f^{k,n} | f \in V^k\} \subset V_n$ .

Para que las composiciones indicadas en ii) puedan realizarse y para poder demostrar la siguiente proposición, supondremos que los operadores  $P^k$  son suryectivos. El caso general puede consultarse en [25], Capítulo 2.

**Proposición 4.2.4** *Suponiendo que los operadores  $P^k$  son suryectivos, el proceso de reconstrucción para todo  $0 \leq k \leq n$ , se puede escribir de las siguientes maneras equivalentes:*

- i)  $f_n = S^{n-1} \circ \dots \circ S^k(f_k) + S^{n-1} \circ \dots \circ S^{k+1}(g_k) + \dots S^{n-1}(g_{n-2}) + g_{n-1}$ .
- ii)  $f_n = S^{k,n}(f_k) + S^{k+1,n}(g_k) + \dots S^{n-1,n}(g_{n-2}) + g_{n-1}$ .
- iii)  $f_n = f_k^{k,n} + g_k^{k+1,n} + g_{k+1}^{k+2,n} + \dots g_{n-2}^{n-1,n} + g_{n-1}$ .

**Demostración** usando la relación de reconstrucción (4.3) y la linealidad de los operadores de síntesis, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
f_n &= S^{n-1}(f_{n-1}) + g_{n-1} \\
&= S^{n-1}(S^{n-2}(f_{n-2}) + g_{n-2}) + g_{n-1} \\
&= S^{n-1} \circ S^{n-2}(f_{n-2}) + S^{n-1}(g_{n-2}) + g_{n-1} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&= S^{n-1} \circ \dots \circ S^k(f_k) + S^{n-1} \circ \dots \circ S^{k+1}(g_k) + \dots + S^{n-1}(g_{n-2}) + g_{n-1}, \mathbf{q.e.d.}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

### Bases y matrices de análisis y de síntesis

Introduciremos ahora las bases y sus respectivas notaciones para para los diferentes espacios.

**Notación.**  $\forall k \in \mathbb{N}$ , notamos:

- i)  $n_k$  la dimensión de  $V^k$  y  $(\phi_i^k)$ ,  $i = 1, \dots, n_k$ , una base de  $V^k$ ;
- ii)  $m_k$  la dimensión de  $\tilde{V}^k$  y  $(\tilde{\phi}_i^k)$ ,  $i = 1, \dots, m_k$ , una base de  $\tilde{V}^k$ ;
- iii)  $r_k$  la dimensión de  $W^k$  y  $(\psi_i^k)$ ,  $i = 1, \dots, r_k$ , una base de  $W^k$ ;
- iv)  $(a_i^k)$ ,  $(\tilde{a}_i^k)$  y  $(b_i^k)$  representarán, respectivamente, los coeficientes de las funciones  $f_k \in V^k$ ,  $\tilde{f}_k \in \tilde{V}^k$  y  $g_k \in W^k$  en las bases indicadas en los incisos anteriores. Los coeficientes  $(b_i^k)$  también son llamados los coeficientes wavelet de la función  $f_k$ .

Los procesos de descomposición y reconstrucción funcionales vistos anteriormente se traducen en una gran cantidad de datos una vez que se expresan las funciones en las bases correspondientes. La hipótesis de suryectividad representa aquí una ventaja, como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.5** *Para la representación multirresolución de una función  $f_N \in V_N$  se necesitan  $n_0 + \sum_{n=0}^{N-1} r_k$  coeficientes. Si los operadores de aproximación son suryactivos, entonces esta cantidad es mínima e igual a  $n_N$ .*

**Demostración** Se utiliza el hecho de que  $\dim(Ker(P^k)) + \dim(Im(P^k)) = \dim(V^{k+1})$ , es decir:  $r_k + m_k = n_{k+1}$  y  $m_k = n_k$  si hay suryectividad.  $\diamond$

Veremos ahora cómo es una etapa en la síntesis y en la descomposición, usando las matrices correspondientes.

#### Análisis.

Se conocen los  $n_{k+1}$  coeficientes  $(a_{k+1})$  de una función  $f_{k+1} \in V^{k+1}$  relativos a una base  $\phi_i^{k+1}$  y se buscan tanto los  $n_k$  coeficientes de  $P^k(f_{k+1})$  relativos a  $\phi_i^k$  como los  $m_k$  coeficientes de  $Q_k(f_{k+1})$  relativos a la base  $\psi_i^k$ . La matriz que realiza esta operación es, por definición, la *matriz de análisis*  $A^k$ . Podemos escribir entonces:

$$\begin{bmatrix} a_i^k \\ b_i^k \end{bmatrix} = A^k [a_i^{k+1}] = \begin{bmatrix} P_{\phi_i^{k+1}, \phi_i^k}^k \\ Q_{\phi_i^{k+1}, \phi_i^k}^k \end{bmatrix} [a_i^{k+1}], \quad (4.5)$$

donde  $A^k$  es una matriz  $(n_k + r_k) \times n_{k+1}$  que resulta cuadrada si  $P^k$  es suryectivo.

#### Reconstrucción.

La operación inversa  $(f_k, g_k) \rightarrow S^k(f_k) + g_k$  es realizada por la *matriz de síntesis*  $B_k$  que aparece en la siguiente ecuación:

$$[a^{k+1}] = B^k \begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^k & \Psi^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

donde  $\Psi^k$  es la matriz cuyos vectores columna son las funciones  $\psi^k$  expresadas en la base  $\phi^{k+1}$  y  $\Phi^k$  es la matriz de un operador suryectivo de  $V^k$  en  $\tilde{V}^k$ . Este operador suryectivo es de la forma  $\bar{S}_k = S_k \circ p^k$ , siendo  $p^k$  una proyección arbitraria de  $V^k$  en  $Im(P^k) \subset V^k$ . En caso de suryectividad, los vectores columna de  $\Phi$  forman la base implícita de  $\tilde{V}^k$ , es decir una base constituida por funciones  $S_k(\phi^k)$ , si se consideran fijas las bases de los espacios de aproximación.

La relación fundamental entre las matrices de análisis y de síntesis es la ecuación:

$$B^k A^k = Id_{n_k+1}, \quad (4.7)$$

que indica que  $B^k$  es una inversa a izquierda de  $A^k$ . En el caso suryectivo, las matrices son simplemente cuadradas e inversas una de la otra.

En la etapa de la descomposición, cuando no hay suryectividad, se conserva el conjunto de coeficientes wavelets pero sólo para  $m_k < n_k$  coeficientes gruesos ( $a_k$ ).

### 4.2.2. Técnicas de construcción de operadores

Un problema común en la práctica es determinar los operadores de síntesis conociendo los de aproximación y viceversa. En esta primera parte queremos dar algunos criterios para construir los operadores de síntesis suponiendo que están dados los operadores de aproximación.

#### Elección de los operadores de síntesis conociendo los de aproximación

Supongamos que para cada  $k \in \mathbb{N}$  ya hemos elegido los operadores:

$$P^k : V^{k+1} \rightarrow V^k,$$

y por lo tanto conocemos los espacios de detalle  $W^k = Ker(P^k) \subset V^{k+1}$ . Elegir un operador de síntesis  $S^k$  asociado a  $P^k$  equivale a elegir un espacio auxiliar  $\tilde{V}^k$ . Alguno de los criterios que se pueden considerar para esta construcción son los siguientes:

- 1) Con la idea de mejorar el condicionamiento de la reconstrucción, es natural minimizar la norma de  $S^k$ . Se puede probar que esto se consigue con un cuadro semiortogonal, es decir eligiendo  $\tilde{V}^k \perp W^k$ .
- 2) Si se desea minimizar la norma de los coeficientes de detalle, se puede probar que la elección de un cuadro semiortogonal resuelve el problema.

- 3) Otra elección posible para  $\tilde{V}^k$  es la siguiente: entre todos los complementos algebraicos  $U$  de  $W^k$  en  $V^{k+1}$ , buscamos aquel para el cual, cualquiera sea  $f \in V^{k+1}$ ,  $\left\| P^k(f) - R_{\tilde{V}^k}^k \right\|$  sea mínima, siendo  $R_{\tilde{V}^k}^k$  la proyección sobre  $U$  paralela a  $W^k$ . Esta elección permite dar más sentido a la norma de los coeficientes de detalle y mide el error entre dos aproximaciones sucesivas.

El siguiente lema, cuya demostración puede consultarse en [25], Capítulo 3, prueba que esta elección es posible.

**Lema 4.2.6** *Sea  $P^k : V^{k+1} \rightarrow V^k$  un operador de aproximación y  $W^k$  su núcleo. Sea  $\text{Supl}(W^k)$  el conjunto de todos los complementos algebraicos de  $W^k$  en  $V^{k+1}$  y para  $U \in \text{Supl}(W^k)$ , notemos  $R_U^k$  la proyección sobre  $U$  paralela a  $W^k$ . Entonces*

$$\tilde{V}^k := (Id_{V^{k+1}} + P_W^\perp \circ P^k)(W^\perp \cap V^{k+1}), \text{ siendo } P_W^\perp \text{ el proyector ortogonal sobre el espacio } W,$$

es un complemento de  $W^k$  en  $V^{k+1}$  tal que:

$$R_{\tilde{V}^k}^k(f) = \text{Argmin} \left\| P^k(f) - \tilde{f} \right\|, \forall f \in V^{k+1}.$$

### 4.3. Análisis multirresolución para funciones definidas sobre mallas triangulares irregulares

En la sección anterior describimos el marco general de trabajo para espacios no anidados. En esta sección presentamos la descomposición multirresolución propuesta por Gerussi en [25] para funciones constantes por tramos sobre una triangulación irregular dada. En ese trabajo, y basándose en las wavelets de Haar, se eligen los operadores de aproximación como las proyecciones ortogonales de un espacio de aproximación sobre el siguiente.

Darmemos previamente algunas definiciones.

#### 4.3.1. Decimación de mallas y espacios de aproximación

Dada una triangulación inicial dada  $T^N$ , el proceso de supresión de vértices permite pasar a triangulaciones más gruesas  $T^{N-1}, T^{N-2}, \dots, T_0$  y definir así los espacios de aproximación.

**Definición 4.3.1** *Llamaremos polígono de influencia del vértice  $v_k^{N+1}$  y notaremos  $P_{v_k^{N+1}}$  a la unión de todos aquellos triángulos de la triangulación  $T^{N+1}$  que se modifican al suprimir el vértice  $v_k^{N+1}$ .*

**Definición 4.3.2** Llamaremos *polígono de influencia acumulado* y notaremos  $P_{ac}^{N+1}$  a la frontera de la unión de los polígonos de influencia de cada uno de los vértices suprimidos  $\{v_1^{N+1}, v_2^{N+1}, \dots, v_k^{N+1}\}$ , es decir:  $P_{ac}^{N+1} = \text{frontera}(P_{v_1^{N+1}} \cup P_{v_2^{N+1}} \cup \dots \cup P_{v_k^{N+1}})$

**Observaciones.**

- 1) Notar que  $P_{ac}^{N+1} \cap P_{v_j^{N+1}} = \emptyset$ , si  $j \notin \{1, 2, \dots, k\}$ , donde con  $\emptyset$  indicamos un símplice de dimensión menor que dos (es decir vértice, lado).
- 2) La decimación aleatoria de vértices conlleva problemas relacionados con la complejidad de los datos que se deben guardar, que son evitables si se considera una decimación regular. Por este motivo, se considera un algoritmo de decimación regular [25] para el cual el polígono de influencia acumulado es exactamente el polígono de influencia del vértice suprimido, disminuyendo así la cantidad de datos que se deben almacenar.

### Espacios de aproximación

**Definición 4.3.3** Sea  $\tau$  una triangulación arbitraria de un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Indicaremos con  $\tau_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , a las triangulaciones obtenidas por aplicaciones sucesivas del algoritmo regular de decimación de vértices a la triangulación  $\tau_N := \tau$ .

**Notación:**

- Con  $C^i$ ,  $i = 0, \dots, N$  indicaremos a los espacios de aproximación formados por las funciones constantes por tramos sobre la triangulación  $\tau_i$ . Estos espacios son considerados como subespacios del espacio de Hilbert  $L^2(\Omega)$ .
- Con  $T_i^j$  indicamos un triángulo de la triangulación  $\tau_i$  y con  $\chi_{T_i^j}$  a su función característica.

### Operadores de aproximación

**Definición 4.3.4** Para todo  $k = 0, \dots, N-1$ , los operadores de aproximación están definidos por:

$$\begin{aligned} P^k : C^{k+1} &\rightarrow C^k \\ f^{k+1} &\rightarrow \mathcal{P}_{C^k}^\perp(f^{k+1}), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{P}_{C^k}^\perp$  es el proyector ortogonal sobre el subespacio  $C^k$ .



**Observación.**

La matriz del operador de aproximación está dada por la fórmula:

$$P_{\chi^{k+1}; \chi^k}^k = \mathcal{G}_{\chi^k}^{-1} \mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^{k+1}]}, \quad (4.8)$$

donde:

- $P_{\chi^{k+1}; \chi^k}^k$  es la matriz del operador  $P^k : C^{k+1} \rightarrow C^k$  en las bases de  $C^{k+1}$  y de  $C^k$ .
- $\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^{k+1}]}$  es la matriz cuyos elementos son los productos escalares relativos a las bases  $\{\chi^k\}$  y  $\{\chi^{k+1}\}$ , es decir:  $\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^{k+1}]} = (\langle \chi_i^k, \chi_j^{k+1} \rangle)_{i,j}$ .
- $\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^k]}$  matriz cuyos elementos son los productos escalares relativos a la base  $\{\chi^k\}$ , es decir  $\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^k]} = (\langle \chi_i^k, \chi_j^k \rangle)_{i,j}$ .

Notemos que, en el caso constante, la base  $\chi_{T_j^i}$ ,  $j = 1, \dots, j_k$ , es una base ortogonal y por lo tanto la matriz  $\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^k]}$  es diagonal. Más precisamente, el elemento  $(j, j)$  de la diagonal de dicha matriz es:  $\text{área}(T_j^k)$ . Por otro lado, los cambios al pasar de la triangulación  $T^{k+1}$  a la triangulación  $T^k$  afectan sólo al polígono de influencia de cada uno de los vértices suprimidos y por este motivo, con una numeración adecuada de los triángulos, la matriz  $\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^{k+1}]}$  resultará diagonal por bloques. Cada uno de estos bloques corresponde a la matriz del proyector ortogonal restringidos a cada polígono de influencia. Hechas estas observaciones es fácil ver que el elemento  $(j_k, j_l)$  de la matriz (4.8) del operador de proyección, al que notaremos  $p_{(j_k j_l)}$ , tiene la forma:

$$p_{j_i, j_l} = \left( \frac{\text{área}(T_{j_i}^{k+1} \cap T_{j_l}^k)}{\text{área}(T_{j_l}^k)} \right).$$



# Capítulo 5

## Análisis multirresolución para mallas tetraédricas no anidadas

### 5.1. Introducción

En este capítulo presentamos los resultados más importantes de la tesis, relacionados con la representación multirresolución de funciones definidas sobre grillas tetraédricas irregulares. Este problema para el caso de grillas triangulares fue resuelto en [25] en tanto que para grillas tetraédricas regulares y semirregulares el problema fue tratado en [52]. Como en el caso de representación multirresolución de funciones definidas sobre grillas tetraédricas regulares y semirregulares, nos interesarán las funciones constantes por tramos. El capítulo está organizado como sigue: en la Sección 2 utilizaremos el marco teórico descrito en el Capítulo 4 y definimos el operador proyección ortogonal de un espacio sobre el siguiente para el caso tridimensional. En la tercera sección damos la metodología para calcular las matrices de análisis y de síntesis para operadores de aproximación suryectivos, no suryectivos, cuadros semiortogonales y no semiortogonales; también se da un ejemplo de un operador de aproximación para ejemplificar la teoría descripta. Los resultados obtenidos son aplicables tanto al caso de mallas triangulares no anidadas como al de mallas tetraédricas no anidadas. Por último, en la cuarta sección se da una forma detallada de la reconstrucción para el caso en que el operador de aproximación es no suryectivo.

### 5.2. Espacios de aproximación en el caso irregular. Bases. Operadores de aproximación

Para definir los espacios de aproximación, sus bases y los correspondientes operadores de aproximación, necesitaremos primero las definiciones que se dan a continuación.

Sea  $T^{N+1}$  una tetraedrización inicial de un dominio  $D \subset \mathbb{R}^3$  y sea  $T^N$  la tetraedrización obtenida de  $T^{N+1}$  colapsando los lados  $\{l_1^{N+1}, l_2^{N+1}, \dots, l_k^{N+1}\}$ . Definimos a continuación *poliedro de influencia* y *poliedro de influencia acumulado* correspondientes a la sucesión de lados colapsados  $\{l_1^{N+1}, l_2^{N+1}, \dots, l_k^{N+1}\}$ .

**Definición 5.2.1** *Llamaremos poliedro de influencia del lado  $l_k^{N+1}$  y notaremos  $P_{l_k^{N+1}}$  a la unión de todos aquellos tetraedros de la tetraedrización  $T^{N+1}$  que se modifican al colapsar el lado  $l_k^{N+1}$ .*

**Definición 5.2.2** *Llamaremos poliedro de influencia acumulado y notaremos  $P_{ac}^{N+1}$  a la frontera de la unión de los poliedros de influencia de cada uno de los lados colapsados  $\{l_1^{N+1}, l_2^{N+1}, \dots, l_k^{N+1}\}$ , es decir:  $P_{ac}^{N+1} = \text{frontera} \left( P_{l_1^{N+1}} \cup P_{l_2^{N+1}} \cup \dots \cup P_{l_k^{N+1}} \right)$*

**Observación.**

Notar que  $P_{ac}^{N+1} \cap P_{l_j^{N+1}} = \emptyset$ , si  $j \notin \{1, 2, \dots, k\}$ , donde con  $\emptyset$  indicamos un símplice de dimensión menor que tres (es decir vértice, arista o cara).

### 5.2.1. Espacios de aproximación

Sea  $T = T^N$  una tetraedrización arbitraria de un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Sean  $T^i$ ,  $i = 0, \dots, N$  las tetraedrizaciones obtenidas aplicando sucesivamente la estrategia de colapsado de lado a la tetraedrización  $T = T^N$ . Con  $T_j^i$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, j_k$  indicaremos el tetraedro  $T_j$  de la tetraedrización  $T^i$  y con  $\chi_{T_j^i}$ ,  $j = 1, \dots, j_k$  a su función característica.

En lo que sigue, indicaremos con  $C^i$  al espacio de aproximación de las funciones constantes sobre cada tetraedro de la tetraedrización  $T^i$ .

El espacio  $C^i$  es un subespacio del espacio de Hilbert  $L^2(\Omega)$ ; es claro que el conjunto de funciones  $\chi_{T_j^i}$ ,  $j = 1, \dots, j_k$ , es una base ortogonal para  $C^i$ .

En las dos subsecciones siguientes presentamos al operador proyector ortogonal como ejemplo de un operador de aproximación y luego damos un criterio de selección del espacio auxiliar  $\tilde{V}_k$  que puede aplicarse a cualquier operador; en particular buscamos el espacio  $\tilde{V}_k$  asociado al operador proyector ortogonal.

### 5.2.2. Operadores de aproximación

Continuando con el esquema presentado en el Capítulo 4, definiremos a continuación los operadores de aproximación.

**Definición 5.2.3** Para todo  $k = 0, \dots, N-1$ , los operadores de aproximación están definidos por:

$$\begin{aligned} P^k : C^{k+1} &\rightarrow C^k \\ f^{k+1} &\mapsto \mathcal{P}_{C^k}^\perp(f^{k+1}), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{P}_{C^k}^\perp$  es el proyector ortogonal sobre el subespacio  $C^k$ .

**Observación.**

En el Apéndice A, probamos que la matriz del operador de aproximación está dada por:

$$P_{\chi^{k+1}; \chi^k}^k = \mathcal{G}_{\chi^k}^{-1} \mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^{k+1}]}, \quad (5.1)$$

donde:

- $P_{\chi^{k+1}; \chi^k}^k$  es la matriz del operador  $P^k : C^{k+1} \rightarrow C^k$  en las bases de  $C^{k+1}$  y de  $C^k$ .
- $\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^{k+1}]}$  es la matriz cuyos elementos son los productos escalares relativos a las bases  $\{\chi^k\}$  y  $\{\chi^{k+1}\}$ ; es decir:

$$\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^{k+1}]} = (\langle \chi_i^k, \chi_j^{k+1} \rangle)_{i,j} = \int_{T_i^k \cap T_j^{k+1}} dx = \text{volumen}(T_i^k \cap T_j^{k+1}).$$

- $\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^k]}$  es la matriz cuyos elementos son los productos escalares relativos a la base ortogonal  $\{\chi^k\}$ ; es decir:

$$\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^k]} = (\langle \chi_i^k, \chi_j^k \rangle)_{i,j} = \int_{T_i^k \cap T_j^k} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \text{volumen}(T_i^k), & \text{si } i = j \end{cases}.$$

**Observación.**

La elección del operador  $P$  asegura que  $f_k$  es la mejor aproximación de  $f_{k+1}$  en el sentido de los mínimos cuadrados.

Notemos que, en el caso constante, la base  $\chi_{T_j^k}$ ,  $j = 1, \dots, j_k$ , es una base ortogonal y por lo tanto la matriz  $\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^k]}$  es diagonal. Más precisamente, el elemento  $(j, j)$  de la diagonal de dicha matriz es:  $\text{volumen}(T_j^k)$ . Por otro lado, los cambios al pasar de la tetraedrización  $T^{k+1}$  a la tetraedrización  $T^k$  afectan sólo al poliedro de influencia de cada uno de los lados suprimidos y por este motivo, con una numeración adecuada de los tetraedros, la matriz  $\mathcal{G}_{[\chi^k; \chi^{k+1}]}$  resultará diagonal por bloques. Cada uno de estos bloques corresponde a la matriz del proyector ortogonal restringido a cada poliedro de influencia. Hechas estas observaciones, es fácil ver que el elemento  $(j_i, j_i)$  de la matriz (5.1) del operador de proyección, al que notaremos  $p_{j_i, j_i}$ , tiene la forma:

$$p_{j_i, j_i} = \left( \frac{\text{volumen}(T_{j_i}^{k+1} \cap T_{j_i}^k)}{\text{volumen}(T_{j_i}^k)} \right).$$

### 5.2.3. Elección de los espacios auxiliares

Uno de los criterios que se utiliza para la elección de los espacios auxiliares  $\tilde{V}_k$  es el de minimizar la norma de la aplicación:

$$\begin{aligned} F^k : V^{k+1} &\rightarrow E \\ f &\mapsto P^k(f) - R^k(f) \end{aligned}$$

con el objetivo de tener una función auxiliar  $R^k(f)$  lo más próxima posible a la aproximación gruesa  $P^k(f)$ . Según el Lema 4.2.6 del Capítulo 4, esto se logra eligiendo los espacios auxiliares  $\tilde{V}_k$  de la siguiente manera:

$$\tilde{V}_k = (Id_{V^{k+1}} + \mathcal{P}_{W^k}^\perp \circ P^k)(W^{k\perp} \cap V^{k+1})$$

Es claro que si los operadores de aproximación son las proyecciones ortogonales sobre  $V^k$ , entonces  $Nu(P^k) = W^k = V^{k\perp} \cap V^{k+1}$  y, en consecuencia,  $\tilde{V}_k = W^{k\perp} \cap V^{k+1}$ ; es decir se obtiene un cuadro semiortogonal.

En la sección siguiente indicaremos cómo realizar el cálculo de las matrices de análisis y de síntesis teniendo en cuenta la suryectividad del operador  $P^k$ . Los resultados obtenidos son válidos para los casos no anidados bidimensional y tridimensional.

## 5.3. Matrices de análisis y de síntesis

Para las secciones que siguen, es necesario recordar la notación introducida en el Capítulo 4.

**Notación.**  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

- i)  $n_k =$  dimensión de  $V^k$  y  $(\phi_i^k)$ ,  $i = 1, \dots, n_k$ , una base de  $V^k$ ;
- ii)  $m_k =$  dimensión de  $\tilde{V}^k$  y  $(\tilde{\phi}_i^k)$ ,  $i = 1, \dots, m_k$ , una base de  $\tilde{V}^k$ ;
- iii)  $r_k =$  dimensión de  $W^k$  y  $(\psi_i^k)$ ,  $i = 1, \dots, r_k$ , una base de  $W^k$ ;
- iv)  $(a_i^k)$ ,  $(\tilde{a}_i^k)$  y  $(b_i^k)$  son, respectivamente, los coeficientes de las funciones  $f_k \in V^k$ ,  $\tilde{f}_k \in \tilde{V}^k$  y  $g_k \in W^k$  en las bases indicadas en los incisos anteriores. Los coeficientes  $(b_i^k)$  también son llamados los coeficientes wavelet de la función  $f_k$ .
- v)  $Q_k : V^{k+1} \rightarrow W^k$ : proyectores sobre  $W^k$  en forma paralela a  $\tilde{V}^k$ ;

Recordemos cómo es una etapa en la descomposición y en la síntesis, usando las matrices correspondientes.

### Análisis o descomposición.

En esta etapa, se conocen los  $n_{k+1}$  coeficientes  $(a_{k+1})$  de una función  $f_{k+1} \in V^{k+1}$  relativos a una base  $\phi_{\cdot}^{k+1}$  y se buscan los  $n_k$  coeficientes de  $P^k(f_{k+1})$  relativos a la base  $\phi_{\cdot}^k$  y los  $m_k$  coeficientes de  $Q_k(f_k + 1)$  relativos a la base  $\psi^k$ . La matriz que permite hallar dichos coeficientes se denomina *matriz de análisis*  $A^k$ . Podemos escribir entonces:

$$\begin{bmatrix} a_{\cdot}^k \\ b_{\cdot}^k \end{bmatrix} = A^k [a_{\cdot}^{k+1}] = \begin{bmatrix} P_{\phi_{\cdot}^{k+1}, \phi_{\cdot}^k}^k \\ Q_{\phi_{\cdot}^{k+1}, \phi_{\cdot}^k}^k \end{bmatrix} [a_{\cdot}^{k+1}], \quad (5.2)$$

donde  $A^k$  es una matriz  $(n_k + r_k) \times n_{k+1}$  que resulta cuadrada si  $P^k$  es suryectivo.

### Síntesis o reconstrucción.

La operación inversa  $(f_k, g_k) \mapsto S^k(f_k) + g_k$  se realiza utilizando la *matriz de síntesis*  $B^k$  dada por la siguiente ecuación:

$$[a_{\cdot}^{k+1}] = B^k \begin{bmatrix} a_{\cdot}^k \\ b_{\cdot}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^k & \Psi^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\cdot}^k \\ b_{\cdot}^k \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

donde  $\Psi^k$  es la matriz cuyos vectores columna son las funciones  $\psi^k$  expresadas en la base  $\phi_{\cdot}^{k+1}$  y  $\Phi^k$  es la matriz de una transformación sobreyectiva de  $V^k$  en de  $\tilde{V}^k$ . Más adelante especificaremos la expresión de esta transformación.

Si bien la relación fundamental que vincula las matrices de análisis y síntesis es:

$$B^k A^k = Id_{n_{k+1}},$$

el cálculo efectivo de las matrices de análisis y de síntesis depende de la suryectividad del operador  $P$ .

Cuando el operador de aproximación es **suryectivo**, las matrices de análisis y de síntesis son cuadradas e inversas una de la otra. La matriz de síntesis  $B$  es de la forma:

$$B = \begin{bmatrix} \Phi^k & \Psi^k \end{bmatrix},$$

donde  $\Phi^k$  es una matriz cuyos vectores columna forman una base de  $\tilde{V}^k$  escritos en la base de  $V^{k+1}$  y  $\Psi^k$  es una matriz cuyos vectores columna forman una base de  $W^k$  escritos en la base de  $V^{k+1}$ .

En las siguientes subsecciones se presentan dos lemas que permiten calcular la matriz de análisis conociendo la de síntesis y viceversa para el caso de operadores suryectivos. El primero de ellos es un resultado de Gerussi [25] y se puede aplicar a cuadros semiortogonales; el

segundo, que es uno de los resultados de esta tesis, es su generalización a cuadros arbitrarios. Cuando el operador  $P^k$  es **no suryectivo**, el cálculo de las matrices de análisis y de síntesis no es tan directo. En [25] se describen dos métodos para calcular aquellas matrices y se mencionan sus ventajas y desventajas. Uno es el *método de eliminación* que consiste en seleccionar un número maximal de filas linealmente independientes de  $P^k$  de manera que la matriz de análisis resultante sea inversible; el otro método consiste en la descomposición en valores singulares de  $P^k$ .

En nuestro trabajo hallamos las matrices de síntesis para el caso no suryectivo utilizando un resultado relacionado con inversas a derecha e izquierda; este es otro de los aportes de esta tesis.

En las subsecciones siguientes se describen, en primer lugar el cálculo de las matrices de análisis y de síntesis para un operador suryectivo y un cuadro semiortogonal [25]; en segundo lugar probamos nuestro resultado para el cálculo de dichas matrices para un operador suryectivo y un cuadro no necesariamente semiortogonal. En tercer lugar, exponemos otro de nuestros resultados, el cual permite calcular las matrices de análisis y síntesis en un contexto general, sin la hipótesis de suryectividad de  $P^k$  ni de semiortogonalidad del cuadro.

### 5.3.1. Matrices de análisis y de síntesis para un cuadro semiortogonal y un operador suryectivo

Recordemos que un análisis multirresolución se dice *semiortogonal* cuando los espacios de detalle son ortogonales a sus espacios auxiliares; es decir:  $W^k \perp \tilde{V}^k$ . La elección de un cuadro semiortogonal es equivalente a la condición:  $\Phi^* \mathcal{G}_{[\phi^{k+1}]} \Psi = 0$ , donde  $\mathcal{G}_{[\phi^{k+1}]}$  es la matriz de los productos escalares entre las funciones de la base de  $V^{k+1}$ .

#### Notación.

Con el objetivo de simplificar la notación, en lo que sigue, llamaremos  $P$  a la proyección  $P^k$  y  $Q$  al proyector  $Q^k$  y entonces indicaremos con  $A = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$  a la matriz de análisis y con  $H$  a la matriz  $\mathcal{G}_{[\phi^{k+1}]}$ .

Vale el siguiente lema, cuya demostración puede consultarse en [25]:

**Lema 5.3.1** *Sea  $P$  un operador suryectivo y supongamos que  $W^k \perp \tilde{V}^k$ . Entonces:*

- 1)  $PH^{-1}Q^* = 0$ .
- 2) a)  $P = (\Phi^* H \Phi)^{-1} \Phi^* H$ .  
b)  $Q = (\Psi^* H \Psi)^{-1} \Psi^* H$ .
- 3) a)  $\Phi = H^{-1} P^* (PH^{-1} P^*)^{-1}$ .



$$b) \Psi = H^{-1}Q^*(QH^{-1}Q^*)^{-1}.$$

**Observación.**

El punto 1) del lema es práctico para calcular la matriz de análisis. En efecto, si conocemos  $P$  conocemos su núcleo y  $Q$  es el proyector ortogonal sobre  $W^k$ . El lema muestra que es suficiente elegir  $Q$  tal que  $PH^{-1}Q^* = 0$ . Como esta condición no alcanza para determinar  $Q$  completamente, se puede elegir la normalización  $QH^{-1}Q^* = Id$ , que es equivalente a elegir una base ortonormal para  $W^k$ .

### 5.3.2. Matrices de análisis y de síntesis para un cuadro arbitrario y un operador suryectivo

En esta subsección presentamos uno de los resultados de esta tesis: el Teorema 5.3.2, que provee una forma de hallar las matrices  $P$  y  $Q$  conociendo  $\Phi$  y  $\Psi$  y recíprocamente para el caso en que *el operador de aproximación es suryectivo y el análisis multirresolución no es necesariamente semiortogonal*.

**Teorema 5.3.2** *Sea  $P$  un operador de aproximación suryectivo y notemos con  $P^*$  a la matriz traspuesta de  $P$ . Entonces:*

- 1)  $PH^{-1}P^* = [(\Phi^*H\Phi) - (\Phi^*H\Psi)(\Psi^*H\Psi)^{-1}(\Psi^*H\Phi)]^{-1}$ .
- 2)  $PH^{-1}Q^* = -[(\Phi^*H\Phi) - (\Phi^*H\Psi)(\Psi^*H\Psi)^{-1}(\Psi^*H\Phi)]^{-1}(\Phi^*H\Psi)(\Psi^*H\Psi)^{-1}$ .
- 3)  $QH^{-1}Q^* = [(\Psi^*H\Psi) - (\Psi^*H\Phi)(\Phi^*H\Phi)^{-1}(\Phi^*H\Psi)]^{-1}$ .
- 4)  $P = [(\Phi^*H\Phi) - (\Phi^*H\Psi)(\Psi^*H\Psi)^{-1}(\Psi^*H\Phi)]^{-1}[\Phi^* - (\Phi^*H\Psi)(\Psi^*H\Psi)^{-1}\Psi^*]H$ .
- 5)  $Q = [(\Psi^*H\Psi) - (\Psi^*H\Phi)(\Phi^*H\Phi)^{-1}(\Phi^*H\Psi)]^{-1}[\Psi^* - (\Psi^*H\Phi)(\Phi^*H\Phi)^{-1}\Phi^*]H$ .
- 6)  $\Phi = H^{-1}P^*R^* + H^{-1}Q^*S^*$ ,
- 7)  $\Psi = H^{-1}P^*T^* + H^{-1}Q^*U^*$ ,

siendo:

$$\begin{aligned}
R &= [(PH^{-1}P^*) - (PH^{-1}Q^*)(QH^{-1}Q^*)^{-1}(QH^{-1}P^*)]^{-1}, \\
S &= -[(PH^{-1}P^*) - (PH^{-1}Q^*)(QH^{-1}Q^*)^{-1}(QH^{-1}P^*)]^{-1}(PH^{-1}Q^*)(QH^{-1}Q^*)^{-1} \\
T &= -[(QH^{-1}Q^*) - (QH^{-1}P^*)(PH^{-1}P^*)^{-1}(PH^{-1}Q^*)]^{-1}(QH^{-1}P^*)(PH^{-1}P^*)^{-1}, \\
U &= [(QH^{-1}Q^*) - (QH^{-1}P^*)(PH^{-1}P^*)^{-1}(PH^{-1}Q^*)]^{-1}.
\end{aligned}$$

Además:

$$8) \quad R = \Phi^* H \Phi, \quad S = \Phi^* H \Psi, \quad T = \Psi^* H \Phi, \quad U = \Psi^* H \Psi.$$

### Demostración:

Por hipótesis,

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = [\Phi \ \Psi]^{-1}, \quad (5.4)$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} H^{-1} \begin{bmatrix} P^* & Q^* \end{bmatrix} &= [\Phi \ \Psi]^{-1} H^{-1} \begin{bmatrix} P^* & Q^* \end{bmatrix} \\
&= [\Phi \ \Psi]^{-1} H^{-1} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}^* \\
&= [\Phi \ \Psi]^{-1} H^{-1} \left( [\Phi \ \Psi]^{-1} \right)^* \\
&= \left( [\Phi \ \Psi]^* H [\Phi \ \Psi] \right)^{-1} \\
&= \left( \begin{bmatrix} \Phi^* \\ \Psi^* \end{bmatrix} H [\Phi \ \Psi] \right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \Phi^* H \Phi & \Phi^* H \Psi \\ \Psi^* H \Phi & \Psi^* H \Psi \end{pmatrix}^{-1};
\end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} H^{-1} \begin{bmatrix} P^* & Q^* \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^* H \Phi & \Phi^* H \Psi \\ \Psi^* H \Phi & \Psi^* H \Psi \end{pmatrix}^{-1}. \quad (5.5)$$

Sea:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

la matriz tal que:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^* H \Phi & \Phi^* H \Psi \\ \Psi^* H \Phi & \Psi^* H \Psi \end{pmatrix} = Id. \quad (5.7)$$

Por lo tanto deben verificarse las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} A\Phi^*H\Phi + B\Psi^*H\Phi &= Id, \\ A\Phi^*H\Psi + B\Psi^*H\Psi &= 0, \\ C\Phi^*H\Phi + D\Psi^*H\Phi &= 0, \\ C\Phi^*H\Psi + D\Psi^*H\Psi &= Id, \end{aligned} \quad (5.8)$$

a partir de las cuales se deduce:

$$A = [(\Phi^*H\Phi) - (\Phi^*H\Psi)(\Psi^*H\Psi)^{-1}(\Psi^*H\Phi)]^{-1},$$

$$B = -[(\Phi^*H\Phi) - (\Phi^*H\Psi)(\Psi^*H\Psi)^{-1}(\Psi^*H\Phi)]^{-1}(\Phi^*H\Psi)(\Psi^*H\Psi)^{-1},$$

$$C = -[(\Psi^*H\Psi) - (\Psi^*H\Phi)(\Phi^*H\Phi)^{-1}(\Phi^*H\Psi)]^{-1}(\Psi^*H\Phi)(\Phi^*H\Phi)^{-1}.$$

$$D = [(\Psi^*H\Psi) - (\Psi^*H\Phi)(\Phi^*H\Phi)^{-1}(\Phi^*H\Psi)]^{-1}.$$

Por otro lado, de (5.7) resulta que:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \left( [\Phi \ \Psi]^* H [\Phi \ \Psi] \right) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^* H \\ \Psi^* H \end{bmatrix} [\Phi \ \Psi] = Id \quad (5.9)$$

y, como consecuencia de (5.4):

$$P = A\Phi^*H + B\Psi^*H \quad \text{y} \quad Q = C\Phi^*H + D\Psi^*H.$$

Reemplazando  $A, B, C, D$  resultan los items 4) y 5) del lema.

También de (5.4) y (5.7) resulta que:

$$\begin{pmatrix} PH^{-1}P^* & PH^{-1}Q^* \\ QH^{-1}P^* & QH^{-1}Q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

igualdad que prueba los items 1), 2) y 3) del Teorema.

Para probar 6) y 7) notemos que de la ecuación (5.5), se obtiene:

$$\left( \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} H^{-1} [P^* \ Q^*] \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi^* H \Phi & \Phi^* H \Psi \\ \Psi^* H \Phi & \Psi^* H \Psi \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Sea:

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

la matriz tal que:

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PH^{-1}P^* & PH^{-1}Q^* \\ QH^{-1}P^* & QH^{-1}Q^* \end{pmatrix} = Id. \quad (5.13)$$

Por lo tanto deben verificarse las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} RPH^{-1}P^* + SQH^{-1}P^* &= Id, \\ RPH^{-1}Q^* + SQH^{-1}Q^* &= 0, \\ TPH^{-1}P^* + UQH^{-1}P^* &= 0, \\ TPH^{-1}Q^* + UQH^{-1}Q^* &= Id, \end{aligned} \quad (5.14)$$

a partir de las cuales se deduce:

$$R = [(PH^{-1}P^*) - (PH^{-1}Q^*)(QH^{-1}Q^*)(QH^{-1}P^*)]^{-1},$$

$$U = [(QH^{-1}Q^*) - (QH^{-1}P^*)(PH^{-1}P^*)^{-1}(PH^{-1}Q^*)]^{-1},$$

$$S = -[(PH^{-1}P^*) - (PH^{-1}Q^*)(QH^{-1}Q^*)(QH^{-1}P^*)]^{-1}(PH^{-1}Q^*)(QH^{-1}Q^*)^{-1},$$

$$T = -[(QH^{-1}Q^*) - (QH^{-1}P^*)(PH^{-1}P^*)^{-1}(PH^{-1}Q^*)]^{-1}(QH^{-1}P^*)(PH^{-1}P^*)^{-1}.$$

Por otro lado, de (5.13) resulta que:

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PH^{-1} \\ QH^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^* & Q^* \end{pmatrix} = Id \quad (5.15)$$

y, como consecuencia de (5.4):

$$\Phi^* = RPH^{-1} + SQH^{-1} \quad y \quad \Psi^* = TPH^{-1} + UQH^{-1}.$$

Reemplazando  $R, S, U, V$  se deducen 6) y 7) del Teorema.

También de (5.11) y (5.13) resulta que:

$$\begin{pmatrix} \Phi^*H\Phi & \Phi^*H\Psi \\ \Psi^*H\Phi & \Psi^*H\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

igualdad que prueba el ítem 8) del Teorema.  $\diamond$

**Corolario:** si el cuadro es semiortogonal, entonces  $P, Q, \Phi$  y  $\Psi$  son las mismas que las indicadas en el Lema 5.3.1.

**Demostración:** si el cuadro es semiortogonal, entonces:  $\Phi^*H\Psi = \Psi^*H\Phi = 0$ ; reemplazando estas condiciones en 4) y 5) del Teorema (5.3.2), resultan los ítems 2a) y 2b) del (5.3.1).

Por otro lado, como el cuadro es semiortogonal resultan:

- a)  $S = T = 0$ , (por 8) del Teorema 5.3.2).

$$\text{b) } PH^{-1}P^* = (\Phi^*H\Phi)^{-1}, \text{ (por 1) del Teorema 5.3.2.}$$

$$\text{c) } QH^{-1}Q^* = (\Psi^*H\Psi)^{-1}, \text{ (por 3) del Teorema 5.3.2.}$$

Luego, reemplazando estas condiciones en 6) y 7) del Teorema 5.3.2, resultan:

$$\text{a) } \Phi = H^{-1}P^*R^* = H^{-1}P^*(\Phi^*H\Phi) = H^{-1}P^*(PH^{-1}P^*)^{-1}.$$

$$\text{b) } \Psi = H^{-1}Q^*U^* = H^{-1}Q^*(\Psi^*H\Psi) = H^{-1}Q^*(QH^{-1}Q^*)^{-1}.$$

que son los items 3a) y 3b) del Lema 5.3.1.  $\diamond$

Como el cuadro es no semiortogonal, no es posible hallar la matriz del operador  $Q$  a partir de la matriz del operador  $P$ . Proponemos a continuación dos procedimientos para determinar la matriz del operador  $Q$  cuando se conoce el operador suryectivo  $P$  y el cuadro es no semiortogonal: el *método constructivo* y el *método matricial*.

### Método constructivo.

Consiste en construir un espacio  $\tilde{V}^k$  de la misma dimensión que  $V^k$ , no ortogonal a  $W^k$  y tal que  $V^{k+1} = \tilde{V}^k \oplus W^k$ . Esta construcción se realiza de la siguiente manera.

Sean  $T_j^{i+1}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , los tetraedros de la tetraedrización  $\tau^{i+1}$  y  $T_k^i$ ,  $k = 1, \dots, K$ , los tetraedros de la tetraedrización  $\tau^i$ . Para cada una de dichas tetraedrizaciones definimos los espacios:

$$V^{i+1} = \{f : f \text{ es constante sobre cada tetraedro de la tetraedrización } \tau^{i+1}\}$$

y

$$V^i = \{f : f \text{ es sobre cada tetraedro de la tetraedrización } \tau^i\}.$$

Es claro que:

$$V^{i+1} = \text{span}\{\chi_{T_j^{i+1}}, j = 1, \dots, J\} \text{ y } V^i = \text{span}\{\chi_{T_k^i}, k = 1, \dots, K\}.$$

Dado un operador de aproximación suryectivo  $P^i : V^{i+1} \rightarrow V^i$ , sea  $W^i$  su núcleo y sea  $\{\psi_l^i\}$ ,  $l = 1, \dots, L$  una base para  $W^i$  expresada en la base de  $V^{i+1}$ . Es claro que  $L + K = J$ . Elegimos un subespacio  $\tilde{V}^i$  de  $V^{i+1}$  de la misma dimensión de  $V^i$ , no ortogonal a  $W^i$  y tal que  $V^{i+1} = \tilde{V}^i \oplus W^i$ . Para ello basta hallar una base  $\tilde{\phi}_k^i$  para  $\tilde{V}^i$ ,  $k = 1, \dots, K$  que no sea ortogonal a la base de  $W^i$ .

Sea  $M$  la matriz cuyas  $L$  primeras filas son los vectores de la base  $\{\psi_l^i\}$ ,  $l = 1, \dots, L$  de  $W^i$  y cuyas  $K$  filas siguientes son los vectores de la base  $\tilde{\phi}_k^i$ ,  $k = 1, \dots, K$  de  $\tilde{V}^i$ , todos escritos en la base de  $V^{i+1}$ . Es decir  $M$  es la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} \psi_{11}^i & \psi_{12}^i & \dots & \dots & \psi_{1J}^i \\ \psi_{21}^i & \psi_{22}^i & \dots & \dots & \psi_{2J}^i \\ & & \dots & & \\ \psi_{L1}^i & \psi_{L2}^i & \dots & \dots & \psi_{LJ}^i \\ \tilde{\phi}_{11}^i & \tilde{\phi}_{12}^i & \dots & \dots & \tilde{\phi}_{1J}^i \\ \tilde{\phi}_{21}^i & \tilde{\phi}_{22}^i & \dots & \dots & \tilde{\phi}_{2J}^i \\ & & \dots & & \\ \tilde{\phi}_{K1}^i & \tilde{\phi}_{K2}^i & \dots & \dots & \tilde{\phi}_{KJ}^i \end{bmatrix}.$$

Como  $Q^i : V^{i+1} \rightarrow W^i$  es un proyector sobre  $W^i$  en forma paralela a  $\tilde{V}^i$ , las entradas de la matriz  $[Q]_{\phi_j^{i+1} \psi_l^i}$  son las primeras  $L$  filas de  $(M^*)^{-1}$ .

### Método matricial.

Del Teorema 5.3.2 resulta que  $U = \psi^* H \psi = [(QH^{-1}Q^*) - (QH^{-1}P^*)(PH^{-1}P^*)^{-1}(PH^{-1}Q^*)]^{-1}$ . Suponiendo que  $\psi^* H \psi = Id$ , es decir eligiendo una base ortonormal para  $W^k$ , del ítem 7) del lema resulta:

$$\psi = H^{-1}Q^* - H^{-1}P^*(PH^{-1}P^*)^{-1}(PH^{-1}Q^*).$$

Este es un sistema lineal cuyas incógnitas son las entradas de  $Q$ . Si el determinante de este sistema es cero, se necesita otra condición para hallar  $Q$ .

Sea  $\tilde{Q}$  la matriz del operador  $Q$  en la base de  $V^{k+1}$ , es decir  $\tilde{Q} = Q_{\phi^{k+1}, \phi^{k+1}}$ ;  $\tilde{Q}$  es cuadrada y, por ser la matriz de un proyector, debe verificar  $\tilde{Q}\tilde{Q} = \tilde{Q}$ . Si aún quedaran grados de libertad, se puede elegir  $Q$  de manera tal que su norma sea mínima.

### 5.3.3. Matrices de análisis y de síntesis para un cuadro arbitrario

En esta subsección, presentamos otro de los resultados de esta tesis: un teorema que provee una forma de hallar las matrices  $P$  y  $Q$  conociendo  $\Phi$  y  $\Psi$  y recíprocamente, para el caso en que el operador de aproximación **no es suryectivo** y el análisis multirresolución **no es necesariamente semiortogonal**. Esto nos conduce a abordar el problema de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ahora bien, nuestro espacio de trabajo  $V^i$  es el de las funciones constantes por tramos sobre

la tetraedrización  $\tau^i$  formada por  $n$  tetraedros. Este espacio es isométricamente isomorfo a  $\mathbb{R}^n$  con el producto escalar  $\langle x, y \rangle = y^*Nx$ , siendo  $N$  la matriz de los productos escalares entre las funciones de la base de  $V^i$ . Por este motivo nos interesarán los sistemas  $Ax = b$ ,  $A : m \times n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  con los siguientes productos escalares en  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente:

$$\langle x, y \rangle_m = y^*Mx, \quad x, y \in \mathbb{R}^m,$$

y

$$\langle x, y \rangle_n = y^*Nx, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Las matrices  $M$  y  $N$  son definidas positivas y, por ser ortogonales las funciones de la base de los espacios  $V^i$ , son diagonales.

Consideraremos a continuación las soluciones de sistemas consistentes y no consistentes. Previamente vamos a introducir la siguiente notación:

### Notación.

- $\mathcal{C}(A)$ : subespacio generado por las columnas de la matriz  $A$ .
- $A_L^{-1}$ : cualquiera de las inversas a izquierda de la matriz  $A$ .
- $B_R^{-1}$ : cualquiera de las inversas a derecha de la matriz  $B$ .
- $r(X)$ : rango de la matriz  $X$ .

### Sistemas consistentes

Un sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ ,  $A : m \times n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , se dice *consistente* si tiene solución. En general, la solución no es única por lo que tiene sentido preguntarse por aquella que tiene alguna propiedad óptima. Una de tales propiedades es la de norma mínima. Veremos que, si el sistema es consistente, existe una única solución de norma mínima y una  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  tal que  $Gb$  es solución de norma mínima de  $Ax = b$ .

Si bien las demostraciones de las Subsecciones 2.3.2 y 2.3.2 pueden hacerse en términos del operador adjunto de  $A$ , nosotros las hicimos teniendo en cuenta los productos escalares definidos en la Sección 2.3. Esto nos permite, por ejemplo en el Teorema 5.3.5 de la subsección 2.3.2, tener una expresión explícita de la  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  que provee la solución de norma mínima utilizando la matriz  $N$



### Existencia de la solución de norma mínima

Para esta subsección y la siguiente necesitaremos el resultado del siguiente Lema.

**Lema 5.3.3** Sean  $A$  y  $B$  matrices  $m \times n$  y  $m \times p$  respectivamente. Entonces  $\|Ax\| \leq \|Ax + By\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}^p$  si y sólo si  $A^*MB = 0$ .

#### Demostración:

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 \leq \|Ax + By\|^2 &\Leftrightarrow \langle Ax + By, Ax + By \rangle - \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \\ (By)^*MAx + (Ax)^*MBy + (By)^*MBy &\geq 0 \Leftrightarrow y^*B^*MAx + x^*A^*MBy + y^*B^*MBy \geq 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Si  $A^*MB = 0$ , en (5.17) resulta  $y^*B^*MBy \geq 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $y^*B^*MAx + x^*A^*MBy + y^*B^*MBy \geq 0$  y que  $A^*MB \neq 0$ . Entonces existe un vector  $y \in \mathbb{R}^p$  no nulo tal que  $A^*MBy \neq 0$ . Luego  $By \neq 0$  y  $y^*B^*MBy > 0$ . Sea  $a$  la  $j$ -ésima componente no nula de  $A^*MBy$  y sea  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que su  $j$ -ésima componente es  $-\frac{1}{a}y^*B^*MBy$  y las demás componentes son cero. Luego:

$$x^*A^*MBy = -\frac{1}{a}y^*B^*MBya = -y^*B^*MBy. \quad (5.18)$$

También:

$$y^*B^*MAx = a \left( \frac{-1}{a} \right) (y^*B^*MBy)^* = -y^*B^*MBy \quad (5.19)$$

Para estas elecciones de  $x$  e  $y$ , tenemos:

$$y^*B^*MAx + x^*A^*MBy + y^*B^*MBy = -y^*B^*MBy < 0, \quad (5.20)$$

lo cual es una contradicción. Luego  $A^*MB \neq 0$ .  $\diamond$

**Definición 5.3.4** Sea  $Ax = b$  un sistema consistente. Un vector  $x_0$  se dice una solución de norma mínima de  $Ax = b$  si:

- i)  $Ax_0 = b$ ,
- ii)  $\|x_0\| \leq \|x\|$  para cada  $x$  tal que  $Ax = b$ .

**Teorema 5.3.5** Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Entonces existe una  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  tal que  $Gb$  es solución de norma mínima del sistema consistente  $Ax = b$ .

**Demostración:** sea  $G = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^-$ , donde  $(AN^{-1}A^*)^-$  es alguna  $g$ -inversa de  $AN^{-1}A^*$ . Es fácil verificar que  $G$  es una  $g$ -inversa de  $A$  y que la clase de todas las soluciones de  $Ax = b$  está dada por  $Gb + (I - GA)\xi$ ,  $\xi$  arbitrario, ([48], Capítulo 2).

Veamos ahora que:

$$\|Gb\| \leq \|Gb + (I - GA)\xi\|, \forall b \in \mathcal{C}(A). \quad (5.21)$$

Si  $b \in \mathcal{C}(A)$ ,  $b = Au$  para algún  $u$ . Debemos probar que:

$$\|GAu\| \leq \|GAu + (I - GA)\xi\|, \forall u, \forall \xi. \quad (5.22)$$

Por el lema anterior, esto es equivalente a probar que:

$$(GA)^*N(I - GA) = 0. \quad (5.23)$$

Ahora:

$$\begin{aligned} (GA)^*N(I - GA) &= A^*G^*N(I - GA) = A^*G^*N - A^*G^*NGA = \\ &A^*((AN^{-1}A^*)^-)^*A \underbrace{(N^{-1})^*N}_{=Id} - A^*((AN^{-1}A^*)^-)^*A \underbrace{(N^{-1})^*N N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^-}_{=Id}A = \\ &A^*((AN^{-1}A^*)^-)^*A - A^*((AN^{-1}A^*)^-)^* \underbrace{AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^-}_{=A}A = 0. \quad \diamond \end{aligned} \quad (5.24)$$

**Corolario:** si  $A$  tiene inversas a derecha, todas ellas son de la forma  $VA^*(AVA^*)^{-1}$ , siendo  $V$  una matriz para la cual  $r(AVA^*) = r(A)$ . Tomando  $V = N^{-1}$  resulta que la inversa a derecha  $N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-1}$  es una  $g$ -inversa de norma mínima de  $A$ .

**Observación.**

Notar que  $r(AVA^*) = r(A)$  se verifica automáticamente para una matriz  $V$  definida positiva.

**Definición 5.3.6** Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  y  $G$  una  $g$ -inversa de  $A$ . Se dice que  $G$  es una  $g$ -inversa de norma mínima de  $A$  si  $Gb$  es una solución de norma mínima del sistema consistente  $Ax = b$ .

El siguiente teorema da una caracterización de las  $g$ -inversas de norma mínima.

**Teorema 5.3.7** Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Entonces  $G$  es una  $g$ -inversa de norma mínima de  $A$  si y sólo si satisface una de las siguientes condiciones equivalentes:

i)  $AGA = A$ ;  $(GA)^*N = NGA$ .

ii)  $GA = P_{N^{-1}A^*}$ , donde  $P_{N^{-1}A^*}$  es el operador proyector sobre el subespacio generado por las columnas de  $N^{-1}A^*$  con respecto al producto escalar  $\langle x, y \rangle = y^*Nx$ .

$$iii) \quad GAN^{-1}A^* = N^{-1}A^*.$$

**Demostración:** en la demostración del teorema anterior vimos que  $G$  es una  $g$ -inversa de norma mínima de  $A$  si y sólo si  $AGA = A$  y  $(GA)^*N(I - GA) = 0$ .

Pero,

$$(GA)^*N(I - GA) = 0 \Rightarrow (GA)^*N = (GA)^*N(GA) = ((GA)^*NGA)^* \Rightarrow (GA)^*N = N^*(GA) = NGA.$$

Recíprocamente, si  $AGA = A$  y  $(GA)^*N = NGA$ , entonces:

$$\begin{aligned} (GA)^*N(I - GA) &= (GA)^*N - (GA)^*NGA \\ &= NGA - \underbrace{(GA)^*NGA}_{=NGA} \\ &= NGA - NG \underbrace{AGA}_{=A} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Luego  $G$  es una  $g$ -inversa de norma mínima si y sólo si se verifica  $i$ ). Por lo tanto es suficiente probar:  $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i$ ).

$i) \Rightarrow ii)$ . Supongamos que  $AGA = A$  y que  $(GA)^*N = NGA$ . De acuerdo a A.1.4, Apéndice A, para probar que  $GA$  es el proyector sobre  $\mathcal{C}(N^{-1}A^*)$  debemos probar que:

- a)  $(GA)^2 = GA$ , es decir  $GA$  es idempotente.
- b)  $(NGA)^* = NGA$ , es decir  $NGA$  es hermitiano.

Veamos que  $GA$  verifica estas condiciones.

- a)  $AGA = A \Rightarrow GAGA = GA \Rightarrow (GA)^2 = GA$ .
- b)  $(NGA)^* = (N(GA))^* = (GA)^*N^* = (GA)^*N = NGA$ .

$ii) \Rightarrow iii)$ . Trivial.

$$iii) \Rightarrow i). \quad GAN^{-1}A^*G^* = N^{-1}A^*G^* \Rightarrow (GA)N^{-1}(GA)^* = N^{-1}(GA)^* \Rightarrow ((GA)N^{-1}(GA)^*)^* = (N^{-1}(GA)^*)^*.$$

Como  $GAN^{-1}A^*G^*$  es simétrica, debe ser:

$$N^{-1}(GA)^* = (GA)N^{-1} \Rightarrow NN^{-1}(GA)^*N = NGAN^{-1}N \Rightarrow (GA)^*N = NGA.$$

Por otro lado, de  $GAN^{-1}A^* = N^{-1}A^*$  y  $(GA)^*N = NGA$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} GAN^{-1}A^* &= N^{-1}(GA)^*NN^{-1}A^* = N^{-1}A^* \Rightarrow N^{-1}(GA)^*A^* = N^{-1}A^* \Rightarrow \\ N^{-1}((GA)^*A^* - A^*) &= 0 \Rightarrow GA^*A^* = A^* \Rightarrow (A(GA)^*) = A^* \Rightarrow AGA = A. \quad \diamond \end{aligned}$$

**Observación.**

Si  $A$  tiene inversas a izquierda, todas sus inversas a izquierda son de la forma  $(A^*VA)^{-1}A^*V$  y son  $g$ -inversas de norma mínima de  $A$  ya que verifican i) del Teorema 5.3.7.

**Teorema 5.3.8** *Sea  $Ax = b$  un sistema consistente. Entonces la solución de norma mínima es única.*

**Demostración:** sea  $G$  una  $g$ -inversa de norma mínima de  $A$ . Luego  $Gb$  es una solución de norma mínima de  $Ax = by$  cada solución de  $Ax = b$  es de la forma:  $Gb + (I - Ga)\xi$ .

Supongamos que existe algún  $\xi$  para el cual  $\|Gb\|^2 = \|Gb + (I - Ga)\xi\|^2$ . Ahora bien,

$$\|Gb + (I - Ga)\xi\|^2 = \|Gb\|^2 + \|(I - GA)\xi\|^2 + b^*G^*N(I - Ga)\xi + \xi^*(I - GA)^*NGb$$

y como  $b \in \mathcal{C}(A)$ , es  $b = Au$  para algún  $u$ .

Luego:

$$b^*G^*N(I - Ga)\xi = u^* \underbrace{(A^*G^*N)}_{=(NGA)^*=NGA} (I - Ga)\xi = u^*NGA(\xi - GA\xi) = u^*(NGA - NGAGA)\xi =$$

0 y también

$$\xi^*(I - GA)^*NGb = (b^*G^*N^*(I - Ga)\xi)^* = 0.$$

Entonces, si existe  $\xi$  tal que  $\|Gb\|^2 = \|Gb + (I - Ga)\xi\|^2$ , debe ser:

$$\|Gb\|^2 = \|Gb\|^2 + \|(I - Ga)\xi\|^2 \Leftrightarrow (I - GA)\xi = 0.$$

Luego la solución de norma mínima es única.  $\diamond$

**Observación.**

La solución de norma mínima es única aunque la  $g$ -inversa que da la solución de norma mínima puede no serlo, como lo establece el siguiente Teorema.

**Teorema 5.3.9** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  y  $G$  una  $g$ -inversa de norma mínima de  $A$ . Entonces la clase  $\{A_m^-\}$  de todas las  $g$ -inversas de norma mínima está dada por:*

$$N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^- + U[I - AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^-], \quad U \text{ matriz arbitraria.} \quad (5.26)$$

**Demostración:** veamos que todas las soluciones indicadas en (5.26) son solución de norma mínima. Para ello verificaremos la condición iii) del Teorema 4.

$$\begin{aligned}
(N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-} + U[I - AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-}](AN^{-1}A^*)) &= \\
N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-}AN^{-1}A^* + U[AN^{-1}A^* - \underbrace{AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-}AN^{-1}A^*}_{=AN^{-1}A^*}] &= \\
\underbrace{N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-}AN^{-1}A^*}_{inv. de norma mínima} &= N^{-1}A^*
\end{aligned}$$

Luego,  $N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-} + U[I - AN^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-}](AN^{-1}A^*)$  es una  $g$  inversa de norma mínima de  $A$  para todo  $U$ .

Sea ahora  $G_1$  una  $g$ -inversa arbitraria de  $A$  y  $P_{N^{-1}A^*}$  el operador proyector sobre el subespacio generado por las columnas de  $N^{-1}A^*$  con respecto al producto escalar  $\langle x, y \rangle = y^*Nx$ . Como  $GA = P_{N^{-1}A^*} = G_1A$ , entonces  $G_1 = G + U(I - AG)$ , donde  $U = G_1 - G$ .

**Observación.** Si  $A$  tiene inversas a derecha, la única  $g$ -inversa de norma mínima de  $A$  es  $N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-1}$ .

Dentro del conjunto  $\{A_m^-\}$  de las  $g$ -inversas de norma mínima, interesa en particular el conjunto de las  $g$ -inversas reflexivas de norma mínima, (ver definición B.1.11 en Apéndice B). Indicaremos con  $\{A_{mr}^-\}$  a este conjunto y con  $A_{mr}^-$  a uno de sus elementos.

Para las  $g$ -inversas reflexivas de norma mínima vale el siguiente resultado.

**Teorema 5.3.10** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  de rango  $r(A) > 0$ . La clase de todas las inversas reflexivas de norma mínima  $\{A_{mr}^-\}$  está dada por:*

$$\{N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-} : (AN^{-1}A^*)^{-} \text{ es una } g\text{-inversa arbitraria de } (AN^{-1}A^*)\}.$$

**Demostración:** en el Teorema 5.3.5, vimos que  $N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-}$  es una  $g$ -inversa de norma mínima de  $A$ . Para probar que es reflexiva, notemos en primer lugar que:

$$r(N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-}) \leq r(N^{-1}A^*) \leq r(A^*) = r(A),$$

y que

$$r(N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-}) \geq r(A)$$

pues  $N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-}$  es una  $g$ -inversa de  $A$ . Resulta entonces que  $r(N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-}) = r(A)$ .

Recíprocamente, sea  $G$  una  $g$ -inversa reflexiva de norma mínima de  $A$ , entonces  $r(A) = r(G)$

y  $GAN^{-1}A^* = N^{-1}A^*$ . Luego:

$$\mathcal{C}(N^{-1}A^*) = \mathcal{C}(GAN^{-1}A^*) = \mathcal{C}(G)$$

y por lo tanto  $G = (N^{-1}A^*)D$ , para alguna matriz  $D$ . Ahora bien,

$$AGA = A \Rightarrow AN^{-1}A^*DA = A \Rightarrow AN^{-1}A^*DAN^{-1}A^* = AN^{-1}A^*,$$

es decir  $D$  es una  $g$ -inversa de  $(AN^{-1}A^*)$  y entonces  $G = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^-$ .  $\diamond$

**Corolario:** si  $A$  es una matriz  $m \times n$  de rango  $n$ , entonces cada  $g$ -inversa de  $A$  es una  $A_{mr}^-$ .

**Demostración:** si  $r(A) = n$ , entonces  $\mathcal{C}(A^*) = \mathbb{R}^n$ . Como consecuencia, cada matriz con  $n$  filas, incluyendo la  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  se puede expresar como  $G = (N^{-1}A^*)D$  para una matriz  $D$  adecuadamente elegida. El resto de la demostración sigue como en el teorema anterior.

**Observación.**

Si  $A$  tiene inversa a derecha, entonces  $N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-1}$  es la única  $g$ -inversa reflexiva de  $A$ .

**Sistemas no consistentes**

Dado un sistema no consistente o inconsistente  $Ax = b$ ,  $A : m \times n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , es posible hallar una solución aproximada  $x_0$  tal que  $Ax_0$  esté lo más próximo a  $b$  entre todos los  $Ax$ . Más formalmente:

**Definición 5.3.11** Decimos que  $x_0$  es una solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$  si:

$$\|Ax_0 - b\| = \inf_x \|Ax - b\|.$$

Es claro que cuando el sistema es consistente, una solución de mínimos cuadrados es exacta.

**Notación.**

Consideraremos el siguiente producto escalar en  $\mathbb{R}^m$ :

$$\langle x, y \rangle = y^* Mx, \text{ siendo } M \text{ una matriz definida positiva, } x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Demostraremos a continuación la existencia de una  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  tal que  $x = Gb$  es solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$ . Para ello utilizaremos el Lema 5.3.3.

**Teorema 5.3.12** Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Entonces existe una  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  tal que  $x = Gb$  es una solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$ ,  $\forall b \in \mathbb{R}^m$ .

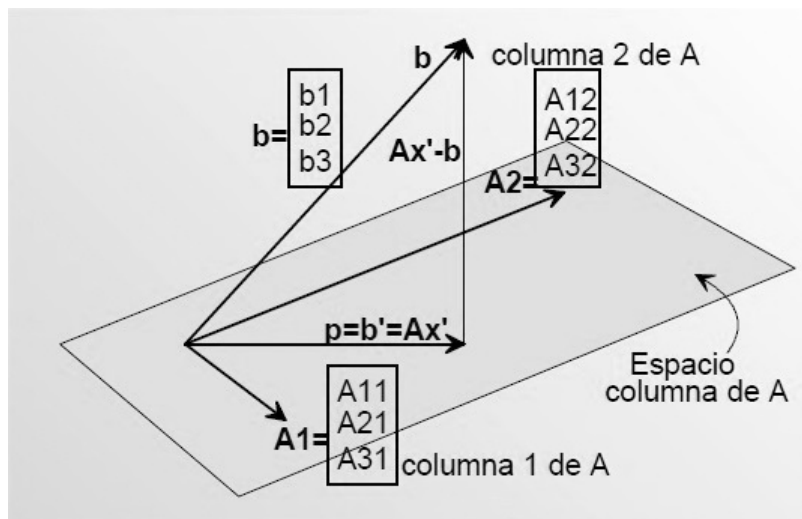


Figura 5.1: Aproximación por mínimos cuadrados.

**Demostración:** sea  $G = (A^*MA)^-A^*M$ . Por el Teorema B.1.9 del Apéndice B,  $G$  es una  $g$ -inversa de  $A$  y por el Lema 5.3.3:

$$\|AGb - b\| \leq \|AGb - b + A(x - Gb)\| \forall b, x \Leftrightarrow (AG - I)^*MA = 0.$$

Como  $\mathcal{C}(A^*MA) = \mathcal{C}(A^*M)$ , es:

$$A^*MAG = A^*MA(A^*MA)^-A^*M = A^*M.$$

Luego,  $G = (A^*MA)^-A^*M$  es una  $g$ -inversa de  $A$  tal que  $Gb$  es solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$ ,  $\forall b$ .  $\diamond$

**Definición 5.3.13** Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Una matriz  $G$  se dice una  $g$ -inversa de mínimos cuadrados de  $A$  y se nota  $A_l$ , si  $Gb$  es solución de mínimos cuadrados del sistema  $Ax = b$ ,  $\forall b \in \mathbb{R}^m$ .

El siguiente teorema da una caracterización de las  $g$ -inversas de mínimos cuadrados de una matriz  $A$ .

**Teorema 5.3.14** Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Una matriz  $G$  es una  $g$ -inversa de mínimos cuadrados de  $A$  si y sólo si satisface una de las siguientes condiciones equivalentes:

- i)  $AGA = A$ ,  $(AG)^*M = MAG$ .
- ii)  $AG = P_A$ ,  $P_A$ , proyector ortogonal sobre  $\mathcal{C}(A)$ .
- iii)  $A^*MAG = A^*M$ .

**Demostración:** en el Teorema 5.3.12 vimos que  $G$  es una  $g$ -inversa de mínimos cuadrados de  $A$  si y sólo si  $A^*MAG = A^*MA(A^*MA)^-A^*M$ . Entonces es suficiente probar:  $iii) \rightarrow i) \rightarrow ii) \rightarrow iii)$ .

$iii) \rightarrow i)$ . Sea  $G$  una matriz tal que  $A^*MAG = A^*M$ ; entonces  $A^*MAGA = A^*MA$ . Como  $\mathcal{C}(A^*MA) = \mathcal{C}(A^*M)$ , existe una matriz  $T$  tal que:  $MA = TA^*MA$ .

Luego:

$$A^*MAGA = A^*MA \Rightarrow \underbrace{TA^*MA}_{MA}GA = TA^*MA = MA \Rightarrow AGA = A.$$



Además,

$$A^*MAG = A^*M \Rightarrow \underbrace{G^*A^*MAG}_{MA} = G^*A^*M \Rightarrow MAG = G^*A^*M = (AG)^*M,$$

es decir se verifica *i*).

*i*)  $\rightarrow$  *ii*). Supongamos que se verifica *i*). Entonces  $AG$  es el proyector ortogonal sobre  $\mathcal{C}(AG)$ . Pero  $AGA = A \Rightarrow \mathcal{C}(AG) = \mathcal{C}(A)$ . Entonces  $AG = P_A$ , es decir se verifica *ii*).

*ii*)  $\rightarrow$  *iii*). Si  $AG$  es el proyector ortogonal sobre  $\mathcal{C}(AG)$ , entonces  $MAG$  es hermitiana, es decir:

$$MAG = (MAG)^* \Rightarrow MAG = G^*A^*M^* \Rightarrow A^*MAG = A^*G^*A^*M^* = A^*M. \quad \diamond$$

### Observación.

Si  $A$  es una matriz  $m \times n$  de rango  $n$  entonces  $A$  tiene inversa a izquierda. Todas sus inversas a izquierda son  $(A^*VA)^{-1}A^*V$ , siendo  $V$  una matriz arbitraria tal que  $r(A) = r(A^*VA)$  y estas también son todas sus  $g$ -inversas, (ver Teorema B.1.8 del Apéndice B). De todas ellas sólo es de mínimos cuadrados aquella para la cual  $V = M$ .

Consideremos un sistema de ecuaciones  $Ax = b$ . Entonces  $x_0$  es una solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$  si y sólo si  $Ax_0$  es la proyección ortogonal de  $b \in \mathcal{C}(A)$ . También  $b - Ax_0$  es la proyección ortogonal de  $b \in (\mathcal{C}(A))^\perp$ . Esto significa que aunque  $x_0$  puede no ser único, ambos vectores  $Ax_0$  y  $b - Ax_0$  son únicos. En este sentido, vale el siguiente teorema.

**Teorema 5.3.15** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  y sea  $G$  una  $g$ -inversa de mínimos cuadrados de  $A$ . Entonces la clase de todas las soluciones de mínimos cuadrados de  $Ax = b$  está dada por:*

$$\{Gb + (I - GA)\xi, \xi \text{ arbitrario}\}. \quad (5.27)$$

**Demostración:** es claro que  $A(Gb + (I - GA)\xi) = AGb, \forall \xi$ . Además,  $Gb$  es solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$ ; luego  $Gb + (I - GA)\xi$  es una solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b, \forall \xi$ .

Sea  $x_0$  una solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$ . Entonces  $Ax_0 = AGb$  por lo que  $A(x_0 - Gb) = 0$ . Entonces  $x_0 - Gb = (I - GA)\xi$ , es decir  $x_0 = Gb + (I - GA)\xi$  para algún  $\xi$ .  $\diamond$

**Teorema 5.3.16** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  y sea  $G$  una  $g$ -inversa de mínimos cuadrados de  $A$ . Entonces la clase de todas las  $g$ -inversas de mínimos cuadrados de  $A$  está dada por:*

$$\{G + (I - GA)T, T \text{ matriz arbitraria}\}. \quad (5.28)$$

**Demostración:** es claro que las matrices de (5.28) verifican la condición *iii*) del Teorema 5.3.14  $\forall T$  y, por lo tanto, son  $g$ -inversas de mínimos cuadrados  $\forall T$ .

Sea  $G_1$  una  $g$ -inversa de mínimos cuadrados de  $A$ . Veamos que  $G_1 = G + (I - GA)T$ , con  $T = G_1 - G$ . En efecto,

$$G + (I - GA)(G_1 - G) = G + G_1 - \underbrace{GAG_1}_{P_A} + G \underbrace{AG}_{P_A} = G_1. \quad \diamond$$

Utilizando el Teorema B.1.3 del Apéndice B se puede probar el siguiente teorema.

**Teorema 5.3.17** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  de rango  $r > 0$ . La clase  $A_{lr}^-$  de todas las  $g$ -inversas reflexivas de mínimos cuadrados, que notaremos  $\{A_{lr}^-\}$ , está dada por:*

$$\{(A^*MA)^-A^*M, \text{ donde } (A^*MA)^- \text{ es una } g \text{ inversa de } A^*MA\}.$$

**Demostración:** por el Teorema 5.3.12 sabemos que  $(A^*MA)^-A^*M$  es una  $g$ -inversa de mínimos cuadrados de  $A$ . Veamos que es reflexiva. En efecto:

$$r((A^*MA)^-A^*M) \leq r(A^*M) \leq r(A^*) = r(A),$$

pues  $r(XY) = \min(r(X), r(Y))$ . Por otro lado:

$$r(A^*MA)^-A^*M \geq r(A),$$

ya que  $(A^*MA)^-A^*M$  es una  $g$ -inversa de  $A$ . Luego  $r((A^*MA)^-A^*M) = r(A)$ .

Recíprocamente, sea  $G$  una  $g$ -inversa reflexiva que da una solución de mínimos cuadrados y veamos que  $G$  es de forma  $(A^*MA)^-A^*M$  donde  $(A^*MA)^-$  es una  $g$ -inversa de  $A$ . Como  $r(G) = r(A)$  y  $A^*MAG = A^*M$ ,

$$\mathcal{C}(MA) = \mathcal{C}(G^*A^*MA) = \mathcal{C}(G^*);$$

entonces  $G^* = MAT$  o  $G = T^*A^*M$  para alguna matriz  $T$ . Ahora bien,

$$AGA = A \Rightarrow AT^*A^*MA = A \Rightarrow A^*MA^*T^*A^*MA = A^*MA,$$

es decir  $T^*$  es una  $g$ -inversa de  $(A^*MA)$  y entonces  $G = (A^*MA)^-A^*M$  con lo cual se concluye la demostración.  $\diamond$

**Corolario:** si  $A$  es una matriz  $m \times n$  de rango  $m$ , entonces cada  $g$ -inversa de  $A$  es una  $A_{lr}^-$ .

**Demostración:** si  $r(A) = m$ , entonces  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m$ . Como consecuencia, cada matriz con  $m$  columnas, incluyendo la  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  se puede expresar como  $G = T^*A^*M$  para una matriz  $T^*$  adecuadamente elegida. El resto de la demostración sigue como en el teorema anterior.  $\diamond$

**Observación.**

$G$  es una  $A_{lr}^-$  si y sólo si  $G$  es una  $g$ -inversa de  $A$  tal que  $\mathcal{C}(G^*) = \mathcal{C}(A)$ .

**Observación.**

Como vimos en el Teorema 5.3.15, en general hay muchas soluciones de mínimos cuadrados del sistema  $Ax = b$ . Veremos ahora que hay una  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  que da una solución de norma mínima entre todas las soluciones de mínimos cuadrados de  $Ax = b \forall b \in \mathbb{R}^m$ .

**Teorema 5.3.18** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Entonces existe una  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  tal que  $Gb$  tiene norma mínima entre todas las soluciones de mínimos cuadrados de  $Ax = b \forall b \in \mathbb{R}^m$ .*

**Demostración:** sea  $G$  una  $g$ -inversa de mínimos cuadrados de  $A$ . Entonces la clase de todas las soluciones de mínimos cuadrados de  $Ax = b$  está dada por  $Gb + (I - GA)\xi$ , donde  $\xi$  es arbitrario. Buscamos una  $g$ -inversa  $G$  de mínimos cuadrados tal que:  $\|Gb\|_n \leq \|Gb + (I - GA)\xi\|_n, \forall b \in \mathbb{R}^m$  y  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ . Por el Lema 5.3.3:

$$\|Gb\|_n \leq \|Gb + (I - GA)\xi\|_n \Leftrightarrow G^*D(I - GA) = 0 \Leftrightarrow G^*M = G^*MGA.$$

Consideremos  $G = N^{-1}A^*MA(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^-N^{-1}A^*M = N^{-1}A^*M(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*M)^-$ ,

(la última igualdad es válida por la Propiedad (B.1.12) del Apéndice B).

Veamos que es de mínimos cuadrados; por el Teorema 5.3.14 basta probar que:  $A^*M = A^*MAG$ . Pero:

$$A^*MAG = A^*M \underbrace{AN^{-1}A^*MA(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^-N^{-1}}_{A^*MAG} A^*M,$$

luego es suficiente probar que  $AN^{-1}A^*MA(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^-N^{-1}$  es una  $g$ -inversa de  $A^*M$ . Llamando  $Q = N^{-1}$ ,  $B = A^*M$ ,  $P = AN^{-1}A^*MA$  y utilizando la Propiedad B.1.9 del Apéndice B, vemos que:

$$\underbrace{AN^{-1}A^*MA}_P \underbrace{(N^{-1}A^*M)}_Q \underbrace{AN^{-1}A^*MA}_P \underbrace{(N^{-1}A^*M)}_Q \underbrace{(N^{-1}A^*M)}_Q,$$

es una  $g$ -inversa de  $A^*M$  siempre que  $r(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA) = r(A^*M)$ .

Veamos entonces que se verifica esta propiedad:

$$r(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA) = \min(r(N^{-1}), r(A^*M), r(AN^{-1}A^*MA)) \leq r(A^*M)$$

y:

$$\begin{aligned}
r(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA) &\geq r(NN^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA) \\
&= r(A^*MAN^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA) \\
&= r(A^*MA) \\
&= r(A^*M),
\end{aligned}$$

siendo las últimas dos igualdades verdaderas porque  $r(A^*VA) = r(A)$ , para toda matriz  $V$  definida positiva.

Por otra parte, notemos que para probar que  $G^*NGA = G^*N$ , basta probar que:

$$N^{-1}A^*MA(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^{-1}N^{-1} \quad (5.29)$$

es una  $g$ -inversa de  $A^*MA$ .

Pero:  $N^{-1}A^*MA(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^{-1}$  es  $g$ -inversa de  $N^{-1}A^*MA$  y obtenemos la ecuación (5.29) multiplicando a izquierda por  $N$  esta última igualdad.  $\diamond$

**Corolario 1.** Sea  $A$   $m \times n$  de rango  $n$  y sean  $(A^*VA)^{-1}A^*V$ ,  $r(A^*VA) = r(A)$ , todas sus inversas a izquierda. Entonces del teorema resulta que la  $g$  inversa de norma mínima entre todas las de mínimos cuadrados de  $A$  es  $G = (A^*MA)^{-1}A^*M$ .

**Demostración:** si  $A$  tiene inversa a izquierda, también es invertible la matriz  $(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)$  y su inversa es:

$$\begin{aligned}
(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^{-1} &= (N^{-1}A^*MA)^{-1}(N^{-1}A^*MA)^{-1} \\
&= (A^*MA)^{-1}N(A^*MA)^{-1}N.
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
G &= N^{-1} \underbrace{A^*MA(A^*MA)^{-1}}_{=Id} N(A^*MA)^{-1}NN^{-1}A^*M \\
&= N^{-1}N(A^*MA)^{-1}A^*M \\
&= (A^*MA)^{-1}A^*M. \quad \diamond
\end{aligned}$$

**Corolario 2.** Sea  $A$   $m \times n$  de rango  $m$  y sean  $VA^*(AVA^*)^{-1}$ ,  $r(AVA^*) = r(A)$ , todas sus inversas a derecha. Entonces del teorema resulta que la  $g$ -inversa de norma mínima entre todas las de mínimos cuadrados de  $A$  es  $G = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{-1}$ .

**Observación.**

De la demostración del Teorema 5.3.18 resulta que  $Gb$  tiene norma mínima entre todas las

soluciones de mínimos cuadrados de  $Ax = b$  si y sólo si  $A^*MAG = A^*M$  y  $G^*M = G^*MGA$ , lo cual significa que  $G$  es una  $A_l^-$  y  $A$  es una  $G_l^-$ .

**Teorema 5.3.19** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Entonces  $G$  es una matriz tal que  $Gb$  tiene norma mínima entre todas las soluciones de mínimos cuadrados de  $Ax = b \forall b \in \mathbb{R}^m$  si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:*

i)  $A^*MAG = A^*M, G^*NGA = G^*N.$

ii)  $AG = P_A, GA = P_G.$

iii)  $AGA = A, GAG = G, (AG)^*M = MAG, (GA)^*N = NGA.$

**Demostración:** la condición i) fue probada en el Teorema 5.3.18. El resto de las condiciones se prueba en forma análoga a como se hizo en el Teorema 5.3.14.  $\diamond$

**Observación.**

Si  $Gb$  tiene norma mínima entre todas las soluciones de mínimos cuadrados de  $Ax = b \forall b \in \mathbb{R}^m$ , entonces por iii) del Teorema 5.3.19 se concluye que  $G$  es una  $g$ -inversa de mínimos cuadrados, de norma mínima, reflexiva, de  $A$ .

**Definición 5.3.20** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Una matriz  $G, n \times m$  que satisface alguna de las condiciones equivalentes del Teorema 5.3.19 se llama una inversa de Moore Penrose de  $A$  y se nota  $A^\dagger$ .*

**Teorema 5.3.21** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . La inversa de Penrose  $A^\dagger$  de  $A$  es única.*

**Demostración:** sean  $G_1$  y  $G_2$  dos inversas de Penrose de  $A$ . Entonces:

$$G_1 = G_1AG_1 = G_1P_A = G_1AG_2 = P_{A^*}G_2 = G_2AG_2 = G_2. \quad \diamond$$

**Observación.**

En el Teorema 5.3.18 se dio una expresión para  $A^\dagger$ , a saber:

$$A^\dagger = N^{-1}A^*MA(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^{-1}N^{-1}A^*M.$$

Entonces  $A^\dagger$  es la única  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  tal que:  $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(A^*)$  y  $\mathcal{C}(G^*) = \mathcal{C}(A)$ .

### Matrices de análisis y de síntesis para un cuadro arbitrario

Demostramos ahora un teorema que permite calcular las matrices de análisis y síntesis para un cuadro arbitrario, es decir un cuadro no necesariamente semiortogonal y un operador de aproximación no necesariamente sobreyectivo.

**Teorema 5.3.22** *Sea  $P$  un operador de aproximación. Sean  $A = [P \ Q]$  y  $B = [\Phi \ \Psi]$  las matrices de análisis y de síntesis, respectivamente. Entonces:*

$$1) \ P = \Phi^*(\Phi\Phi^* + \Psi\Psi^*)^{-1}.$$

$$2) \ Q = \Psi^*(\Phi\Phi^* + \Psi\Psi^*)^{-1}.$$

Además:

$$3) \ \Phi = (P^*P + Q^*Q)^{-1}P^*.$$

$$4) \ \Psi = (P^*P + Q^*Q)^{-1}Q^*.$$

#### Demostración.

Dada la matriz de síntesis  $B$  queremos resolver el sistema:

$$[a^{k+1}] = B \begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix} = [\Phi \ \Psi] \begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

siendo  $\begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix}$  la incógnita. La matriz de síntesis  $B = [\Phi \ \Psi]$  es de rango completo fila; luego admite inversa a derecha: la matriz de análisis  $A$ . Todas sus inversas a derecha están dadas por  $B_R^{-1} = VB^*(BVB^*)^{-1}$ , siendo  $V$  una matriz arbitraria tal que  $r(BVB^*) = r(B)$ . Notemos que cualquiera de las inversas a derecha  $B_R^{-1}$  de  $B$  da una solución  $\begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix} = B_R^{-1}a_{k+1}$  del sistema (5.30).

En efecto:  $BB_R^{-1}a_{k+1} = a_{k+1}, \forall a_{k+1}$ .

Un criterio de selección, a los fines de la implementación, es elegir  $A$  como la siguiente inversa a derecha de  $B$ :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \end{bmatrix}^* \left( \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \end{bmatrix}^* \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \Phi^* \\ \Psi^* \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^* \\ \Psi^* \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \Phi^* \\ \Psi^* \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \Phi \Phi^* & \Psi \Psi^* \end{bmatrix} \right)^{-1},
\end{aligned}$$

de donde resultan:

$$1) P = \Phi^*(\Phi\Phi^* + \Psi\Psi^*)^{-1}$$

$$2) Q = \Psi^*(\Phi\Phi^* + \Psi\Psi^*)^{-1}.$$

Recíprocamente, dada la matriz de análisis queremos resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix} = A[a^{k+1}] = \begin{bmatrix} P_{\phi^{k+1}, \phi^k} \\ Q_{\phi^{k+1}, \phi^k} \end{bmatrix} [a^{k+1}], \quad (5.31)$$

siendo  $a^{k+1}$  la incógnita y  $\begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix}$  el dato. Ahora bien, la matriz  $A$  es  $(n_k + r_k) \times n_{k+1}$  y de rango  $n_{k+1}$  por lo que tiene inversa a izquierda; en realidad tiene infinitas inversas a izquierda. Todas ellas son de la forma  $(A^*KA)^{-1}A^*K$ , donde  $K$  es una matriz arbitraria tal que  $r(A^*KA) = r(A)$ . En este caso, cualquiera de las inversas a izquierda de  $A$  da la misma solución del sistema. En efecto:

$$(A_L)^{-1}Aa^{k+1} = (A_L)^{-1} \begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix} \Rightarrow a^{k+1} = (A_L)^{-1} \begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Este valor de  $a^{k+1}$  es solución del sistema (5.31) ya que  $\begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix} = Ac$ . En efecto,

$$Aa^{k+1} = A(A_L)^{-1} \begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix} = A(A_L)^{-1}Ac = Ac = \begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Como todas las inversas a izquierda dan la misma solución, por motivos de practicidad en el momento de la implementación, conviene usar la siguiente inversa a izquierda:

$$\begin{aligned}
B &= (A_L)^{-1} \\
&= (A^*A)^{-1}A^* \\
&= \left( \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}^* \\
&= \left( [P^* \quad Q^*] \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} P^* \\ Q^* \end{bmatrix} \\
&= (P^*P + Q^*Q)^{-1} \begin{bmatrix} P^* \\ Q^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (P^*P + Q^*Q)^{-1}P^* \\ (P^*P + Q^*Q)^{-1}Q^* \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{cases} \Phi &= (P^*P + Q^*Q)^{-1}P^* \\ \Psi &= (P^*P + Q^*Q)^{-1}Q^* \end{cases} \cdot \quad \diamond \quad (5.34)$$

### 5.3.4. Ejemplo de un operador de aproximación

En esta sección daremos un ejemplo de un operador de aproximación para ejemplificar la teoría descrita en las secciones anteriores. La notación a usar es la indicada al comienzo de este capítulo.

Consideremos el siguiente *operador promedio* que notaremos  $P_r^i$ . Sean  $T_j^{i+1}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , los tetraedros de la tetraedrización  $\tau^{i+1}$  y  $T_k^i$ ,  $k = 1, \dots, K$ , los tetraedros de la tetredrización  $\tau^i$ .

Definimos:

$$u_j(k) = \begin{cases} 1, & T_j^{i+1} \cap T_k^i \neq \emptyset \\ 0, & T_j^{i+1} \cap T_k^i = \emptyset \end{cases} \cdot$$

Por otro lado, para cada  $k = 1, \dots, K$  indicaremos con  $l_j$  al siguiente número natural:

$$l_j = \text{cantidad de } T_j^{i+1} \text{ tales que } T_j^{i+1} \cap T_k^i \neq \emptyset.$$



Queda entonces definido el operador promedio  $P_r^i$  como:

$$\begin{aligned} P_r^i : C^{i+1} &\rightarrow C^i \\ f^{i+1} &\mapsto P_r^i(f^{i+1}), \end{aligned}$$

que tiene la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{u_1(1)}{l_1} & \frac{u_1(2)}{l_1} & \cdots & \frac{u_1(J)}{l_1} \\ \frac{u_2(1)}{l_2} & \frac{u_2(2)}{l_2} & \cdots & \frac{u_2(J)}{l_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{u_K(1)}{l_K} & \frac{u_K(2)}{l_K} & \cdots & \frac{u_K(J)}{l_K} \end{pmatrix}.$$

Según si el operador  $P_r^i$  en cada caso sea o no suryectivo, las matrices  $Q$ ,  $\Phi$  y  $\Psi$  se pueden calcular utilizando los resultados de las secciones anteriores.

## 5.4. Formas desarrolladas de la reconstrucción

### 5.4.1. Primera forma: utilizando la proyección auxiliar $p_k$

Sabemos que la forma general de la matriz de síntesis es:

$$B = [\Phi \ \Psi], \quad (5.35)$$

siendo  $\Psi$  una matriz cuyos vectores columna son los vectores de la base de  $W^k$  escritos en la base de  $V^{k+1}$ . Gerussi, en su tesis, ([25]), define la matriz  $\Phi$  como la matriz de una aplicación sobreyectiva  $\bar{S}^k$  de  $V^k$  en  $\tilde{V}^k$ . Más precisamente, define:

$$\bar{S}^k : V^k \rightarrow \tilde{V}^k, \quad (5.36)$$

de la siguiente manera:

$$\bar{S}^k = S^k \circ p_k, \quad (5.37)$$

siendo  $p_k$  una proyección cualquiera de  $V^k \rightarrow \text{Im}(P^k)$  y, como antes,  $S^k = P^k|_{\tilde{V}^k}$ . Notemos que  $\bar{S}^k$  así definida es sobreyectiva.

De esta forma:

$$f_{k+1} = \tilde{f}_k + g_k = \bar{S}^k(f_k) + g_k = (S^k \circ p_k)(f_k) + g_k,$$

es decir se reconstruye  $f_{k+1}$  a partir de una aproximación gruesa  $f_k$  y un detalle  $g_k$ .

**Observación.**

Cuando el operador  $P^k$  es sobreyectivo,  $p_k$  es cualquier aplicación biyectiva de  $V^k \rightarrow Im(P^k)$ .

**Observación.**

Cuando el operador  $P^k$  es sobreyectivo, existe una aplicación biyectiva  $S^k = inv(P^k|_{\tilde{V}^k}) : V^k \rightarrow \tilde{V}^k$  que permite escribir la siguiente fórmula de reconstrucción:

$$f_{k+1} = \tilde{f}_k + g_k = S^k(f_k) + g_k \quad (5.38)$$

en la cual se utiliza una función  $f_k \in V^k$  y un detalle  $g_k \in W^k$ .

**Observación.**

La proyección auxiliar  $p^k$  fue introducida por Gerussi en [25], para resolver el problema de la reconstrucción en el caso no sobreyectivo.

Nosotros proponemos una fórmula de reconstrucción para el caso no sobreyectivo, utilizando el operador  $\bar{S}^k$  propuesto por Gerussi y suponiendo que los datos con los que se cuenta para reconstruir son  $\tilde{f}_k$  y  $g_k$ . Para ello debemos resolver el sistema  $\bar{S}^k(f_k) = \tilde{f}_k$ . Utilizaremos, de las infinitas soluciones  $f_k$ , la de norma mínima (5.3.3) que sabemos que es única.

**Solución del sistema**  $\bar{S}^k(f_k) = \tilde{f}_k$ ,  $f_k \in V^k$ ,  $\tilde{f}_k \in \tilde{V}^k$

Supongamos que conocemos la descomposición:

$$f_{k+1} = \tilde{f}_k + g_k, \tilde{f}_k \in \tilde{V}^k, g_k \in W^k.$$

Queremos hallar  $f_k \in V^k$  tal que  $\bar{S}^k(f_k) = \tilde{f}_k$ .

Este sistema es consistente ya que  $\tilde{f}_k \in \tilde{V}^k = Im(\bar{S}^k) = \mathcal{C}(\bar{S}^k)$ ; además  $\bar{S}^k$  es un operador representado por una matriz  $m_k \times n_k$  y de rango  $m_k$ . Bajo estas condiciones, todas las soluciones del sistema están dadas por:

$$(\bar{S}^k)_R^{-1} \tilde{f}_k = f_k,$$

donde  $(\bar{S}^k)_R^{-1}$  es una inversa a derecha de  $\bar{S}^k$ .

De entre todas ellas, seleccionamos la inversa a derecha que da la solución de norma mínima, que está dada por:

$$(\bar{S}^k)_R^{-1} = N^{-1}(\bar{S}^k)^*(\bar{S}^k N^{-1}(\bar{S}^k)^*)^{-1}.$$

La existencia de la solución de norma mínima del sistema  $\bar{S}^k(f_k) = \tilde{f}_k$  fue tratada en la Sección 5.3.3. Esta solución de norma mínima nos permite efectuar la reconstrucción en el caso no sobreyectivo, como lo indica la siguiente proposición:

**Proposición 5.4.1** *Sea  $P^n : V^{n+1} \rightarrow V^n$  un operador de aproximación. El proceso de reconstrucción se escribe,  $\forall 0 \leq k \leq n$ , de la siguiente manera:*

$$f_n = \bar{S}^{(n-1)} \circ \dots \circ \bar{S}^k(f_k) + \bar{S}^{(n-1)} \circ \dots \circ \bar{S}^{(k+1)}(g_k) + \dots + \bar{S}^{(n-1)}(g_{n-2}) + g_{n-1},$$

siendo  $f_k$  la solución de norma mínima de  $\bar{S}^k(f_k) = \tilde{f}_k$ .

**Demostración:** como  $V^n = \tilde{V}^{n-1} \oplus W^{n-1}$  y  $\bar{S}^{(n-1)} : V^{n-1} \rightarrow \tilde{V}^{n-1}$  es una aplicación sobreyectiva, se tiene que:

$$\begin{aligned} f_n &= \tilde{f}_{n-1} + g_{n-1} \\ &= \bar{S}^{(n-1)}(f_{n-1}) + g_{n-1} \\ &= \bar{S}^{(n-1)}(\tilde{f}_{n-2} + g_{n-2}) + g_{n-1} \\ &= \bar{S}^{(n-1)}(\bar{S}^{(n-2)}(f_{n-2}) + g_{n-2}) + g_{n-1} \\ &= \bar{S}^{(n-1)} \circ \bar{S}^{(n-2)}(f_{n-2}) + \bar{S}^{(n-1)}(g_{n-2}) + g_{n-1} \\ &\vdots \\ &= \bar{S}^{(n-1)} \circ \dots \circ \bar{S}^k(f_k) + \bar{S}^{(n-1)} \circ \dots \circ \bar{S}^{(k+1)}(g_k) + \dots + \bar{S}^{(n-1)}(g_{n-2}) + g_{n-1}. \quad \diamond \end{aligned}$$

#### Observaciones.

- 1) Las composiciones efectuadas en la demostración anterior son correctas pues  $Im(\bar{S}^{n-1}) = \tilde{V}^{n-1} \subset Dom(\bar{S}^n) = V^n$ .
- 2) La reconstrucción en cada paso se hace a partir de la solución de norma mínima  $f_k$  y de la componente de detalle  $g_k$ .

#### 5.4.2. Segunda forma: utilizando la matriz de Penrose de $P^k$

En la etapa de reconstrucción, contamos con los datos  $f_k \in V^k$  y  $g_k \in W^k$  y queremos hallar la función  $f_{k+1}$  en la resolución más fina. Para ello, a los coeficientes  $g_k$  que tenemos guardados debemos sumar la función  $\tilde{f}_k \in \tilde{V}^k$  para la cual  $f_{k+1} = \tilde{f}_k + g_k$ . Nuestra propuesta para hallar la función  $\tilde{f}_k$  es la siguiente:

- Consideremos el operador de aproximación  $P^k : V^{k+1} \longrightarrow V^k$ .
- La función  $f_{k+1}$  que buscamos tiene una componente  $g_k \in W^k$  que conocemos y una componente  $\tilde{f}_k \in \tilde{V}^k$  que queremos determinar.
- Sabemos que:

$$f_k = P^k(f_{k+1}) = P^k(\tilde{f}_k + g_k) = P^k(\tilde{f}_k) + P^k(g_k) = P^k(\tilde{f}_k) = P^k|_{\tilde{V}^k}(\tilde{f}_k).$$

Luego para determinar  $\tilde{f}_k$  debemos resolver el sistema consistente:  $P^k|_{\tilde{V}^k}(\tilde{f}_k) = f_k$ . Lo podemos hacer de cualquiera de las dos siguientes formas:

### Primera forma.

La matriz del operador:

$$P^k|_{\tilde{V}^k} : \tilde{V}^k \rightarrow V^k$$

es  $n_k \times m_k$  y tiene rango  $m_k$ ; luego admite inversa a izquierda. Como el sistema es consistente, todas sus inversas a izquierda dan la misma solución. Podemos tomar, por ejemplo, la matriz de Penrose de  $P^k|_{\tilde{V}^k}$  que notaremos  $\text{pinv}(P^k|_{\tilde{V}^k})$  y que está dada por:

$$\text{pinv}(P^k|_{\tilde{V}^k}) = [(P^k|_{\tilde{V}^k})^* M P^k|_{\tilde{V}^k}]^{-1} (P^k|_{\tilde{V}^k})^* M.$$

### Segunda forma.

En lo que sigue, dada una transformación,

$$T : U \rightarrow V,$$

indicaremos con  $[T]_V$  a la matriz de  $T$  en la base de  $V$ .

Los coeficientes de  $f_k \in \text{Im}(P^k)$  que obtuvimos al hacer  $P^k(\tilde{f}_k)$ , corresponden a una base de  $V^k$ . Sea  $[\text{Im}(P^k)]_{V^k}$  una base de  $\text{Im}(P^k)$  escrita en la base de  $V^k$ .

Los coeficientes de  $f_k \in \text{Im}(P^k)$  en una base de la  $\text{Im}P^k$ , se obtienen de la siguiente manera:

$$[f_k]_{V^k} = [\text{Im}(P^k)]_{V^k} [f_k]_{\text{Im}(P^k)}. \quad (5.39)$$

Como la matriz  $[\text{Im}(P^k)]_{V^k}$  es  $n_k \times m_k$  y de rango  $m_k$ , tiene inversas a izquierda y como el sistema (5.39) es consistente, todas las inversas a izquierda dan la misma solución. Indiquemos con  $([\text{Im}(P^k)]_{V^k})_L^{-1}$  a una inversa a izquierda de  $[\text{Im}(P^k)]_{V^k}$ , entonces:

$$([\text{Im}(P^k)]_{V^k})_L^{-1} [f_k]_{V^k} = [f_k]_{\text{Im}(P^k)} \quad (5.40)$$

Luego:

$$[P^k|_{\tilde{V}^k}]_{\text{Im}(P^k)} = ([\text{Im}(P^k)]_{V^k})_L^{-1} [P^k|_{V^k}]_{V^k} \quad (5.41)$$

Como  $[P^k|_{\tilde{V}^k}]_{\text{Im}(P^k)}$  admite inversa  $S^k$ , (ver Capítulo 4, (4.2.4)), vale la fórmula de reconstrucción siendo  $\tilde{f}_k = S^k(f_k)$ .

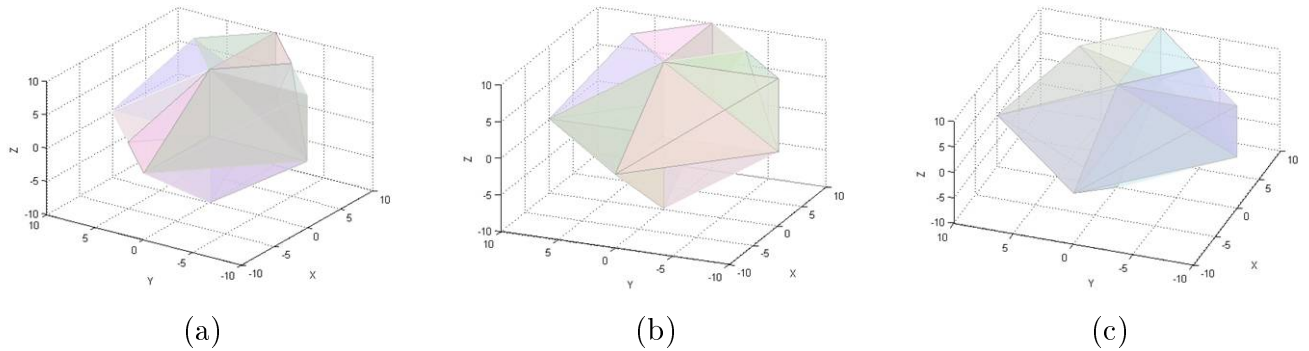


Figura 5.2: Red en tres resoluciones: (a) fina, (b) intermedia, (c) gruesa.

- Una vez obtenido  $\tilde{f}_k = \text{pinv}(P^k|_{\tilde{V}_k})(f_k)$ , se le suman los detalles guardados  $g_k$  y se recupera la función  $f_{k+1}$ .

Como en todo proceso multirresolución, es necesario contar con un método sistemático para calcular las matrices de análisis y de síntesis para pasar de una resolución a otra.

Los trabajos existentes en la literatura no resuelven el problema en forma práctica salvo para el caso de mallas triangulares [25].

La metodología presentada en esta tesis es eficiente para calcular dichas matrices cualesquiera sean las mallas irregulares utilizadas (triangulares o tetraédricas). Por otro lado, en cada paso del proceso multirresolución, es posible que el operador de aproximación utilizado resulte o no suryectivo. En nuestro trabajo damos una forma práctica de calcular las matrices de análisis y de síntesis para cada uno de estos casos.

A continuación presentamos un ejemplo que ilustra toda la teoría presentada.

### Ejemplo.

Consideremos una red tetraédrica inicial con dieciséis tetraedros (fina) a la que se le aplica el método de colapsado de medio lado descrito en el Capítulo 2, Sección 3.3, para obtener las resoluciones siguientes: una de catorce tetraedros (intermedia) y la siguiente de diez tetraedros (gruesa).

Con el objetivo de visualizar claramente las redes, en la Figura 5.2 se muestra en colores, de izquierda a derecha, una red con menor cantidad de tetraedros y con sus tres resoluciones: fina, intermedia y gruesa. En la Figura 5.3 se muestran las mismas resoluciones en escala de grises.

A los efectos de ejemplificar la teoría descrita en este Capítulo, para esas tetraedricaciones se siguieron los pasos que se indican a continuación.

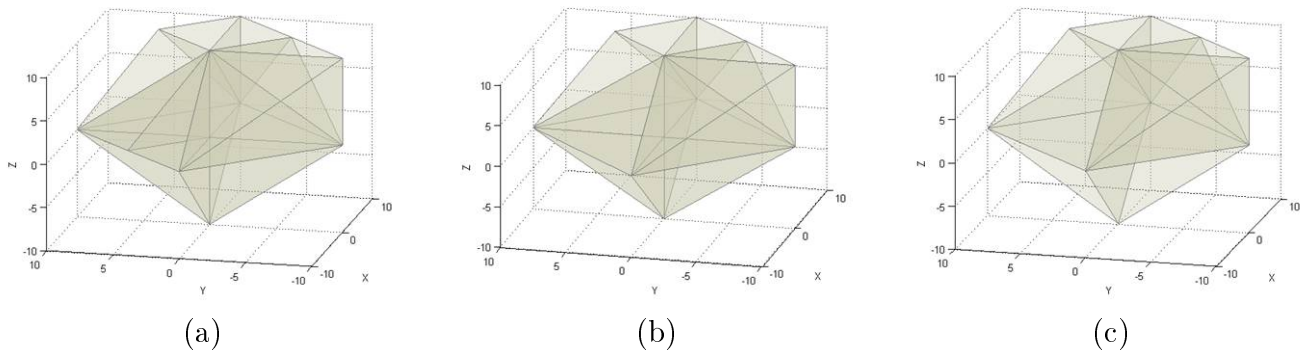


Figura 5.3: Red en tres resoluciones: (a) fina, (b) intermedia, (c) gruesa.

1) Se hallaron las matrices:

- i)  $H16$ : matriz de los volúmenes de los tetraedros de la tetraedrización inicial,
- ii)  $H14$ : matriz de los volúmenes de los tetraedros de la tetraedrización intermedia,
- iii)  $H1416$ : matriz de los volúmenes de las intersecciones entre los tetraedros de la tetraedrización inicial y la intermedia,
- iv)  $H1014$ : matriz de los volúmenes de las intersecciones entre los tetraedros de la tetraedrización intermedia y la más gruesa.

Las dos primeras son necesarias para poder aplicar el Teorema 15 de la Sección 3.3.4, y las dos últimas se utilizan para definir los operadores que se indican en el siguiente ítem.

2) Se construyeron los operadores promedio como se indicó en la Sección 3.4, para los cuales utilizamos la siguiente notación.

- i)  $P1416$ : operador promedio utilizado para pasar de la tetraedrización inicial a la intermedia y que se obtiene a partir de la matriz  $H1416$ .
- ii)  $P1014$ : operador promedio utilizado para pasar de la tetraedrización intermedia a la más gruesa y que se obtiene a partir de la matriz  $H1014$ .

3) Para cada uno de estos operadores promedio se calcularon los respectivos operadores  $Q1416$  y  $Q1014$  con los cuales se construyeron las siguientes matrices de análisis:

- i)  $A1416 = \begin{bmatrix} P1416 \\ Q1416 \end{bmatrix}$ , matriz de análisis para pasar de la resolución más fina a la intermedia.
- ii)  $A1014 = \begin{bmatrix} P1014 \\ Q1014 \end{bmatrix}$ , matriz de análisis para pasar de la resolución intermedia a la más gruesa.

4) El operador promedio  $P1416$  resultó no sobreyectivo, motivo por el cual para hallar la matriz de síntesis  $B1416 = \begin{bmatrix} \Phi1416 & \Psi1416 \end{bmatrix}$  aplicamos el Teorema 15 de la Sección 3.3.4.

Por otro lado, suponiendo conocida la matriz de síntesis  $B1416$  y utilizando el mismo Teorema, recuperamos la matriz de análisis  $A1416$ .

- 5) El operador promedio  $P1014$  resultó sobreyectivo, entonces para hallar la matriz de síntesis  $B1014 = [ \Phi1014 \quad \Psi1014 ]$  aplicamos el Teorema 1 de la Sección 3.2. Por otro lado, suponiendo conocida la matriz de síntesis  $B1014$  y utilizando el mismo Teorema, recuperamos la matriz de análisis  $A1014$ .

Exhibimos a continuación las matrices mencionadas en la descripción del ejemplo.

$$H16 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Matriz de los volúmenes de los tetraedros de la tetraedrización inicial.

$$a = 166,667, \quad b = 83,3333.$$



$$H_{14} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Matriz de los volúmenes de los tetraedros de la tetraedrización intermedia.  
 $a = 166,667$ ,  $b = 83,3333$ .

$$H_{10} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Matriz de los volúmenes de los tetraedros de la tetraedrización más gruesa.  
 $a = 166,667$ ,  $b = 83,3333$ ,  $c = 333,3333$ .

$$H_{1416} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de los volúmenes de las intersecciones entre los tetraedros de la tetraedrización más fina y la intermedia.

$$a = 166,667, b = 83,3333.$$

$$H_{1014} = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Matriz de los volúmenes de las intersecciones entre los tetraedros de la tetraedrización intermedia y la más gruesa.

$$a = 166,667, b = 83,3333.$$

$$P_{1416} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_{1416} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9283 & 1,1748 & -1,2025 & 0,4836 & -0,0708 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,1160 & 0,5006 & -0,3234 & 0,1089 & 0,0506 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,2202 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,2853 & -1,2416 & 1,0138 & -0,4186 & 0,1136 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7484 & 1,7967 & -2,5655 & 0,5375 & -0,0891 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8234 & 0,8874 & -1,5496 & 0,3693 & 0,1289 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,5645 & 0,6761 & 0,7234 & 0 & 0 \\ 0,4653 & 0,0051 & -0,2761 & 0 & 0 \\ 0,0852 & -0,1868 & 0,1197 & 0,0801 & 0,2797 \\ -0,8886 & -0,1824 & -0,0866 & 0 & 0 \\ 0,9039 & 0,7926 & 0,5893 & 1 & 0 \\ 0,6675 & 0,8166 & 0,1565 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{1416} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,8565 & -2,3496 & 2,4050 & -0,9671 & 0,1415 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2320 & -1,0011 & 0,6469 & -0,2177 & -0,1012 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4405 & -0,1704 & 0,3736 & -0,2395 & -0,1603 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2853 & 1,2416 & -1,0138 & 0,4186 & -0,1136 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,7484 & -1,7967 & 2,5655 & -0,5375 & 0,0891 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8234 & -0,8874 & 1,5496 & -0,3693 & -0,1289 \\ \\ -1,1291 & -1,3521 & -1,4469 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,9306 & -0,0102 & 0,5522 \\ -0,5595 & -0,4603 & 0,2996 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,8886 & 0,1824 & 0,0866 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,9039 & -0,7926 & -0,5893 \\ -0,6675 & -0,8166 & -0,1565 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{1416} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{1014} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{1014} = \begin{pmatrix} 0,1768 & -0,1768 & -0,1768 & 0,1768 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,7904 \\ 0,1768 & -0,1768 & -0,1768 & 0,1768 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,9225 \\ -0,1768 & 0,1768 & -0,1768 & 0,1768 & 0,25 & -0,25 & 0 & 0 & 0,0115 \\ -0,1768 & 0,1768 & -0,1768 & 0,1768 & -0,25 & 0,25 & 0 & 0 & -0,3776 \\ -0,0689 & -0,0197 & 0,1960 & -0,1136 & 0,3390 \\ -0,3118 & 0,2673 & -0,2050 & 0,0361 & -0,4763 \\ -0,4955 & 0,3395 & 0,0364 & -0,1912 & -0,0497 \\ 0,4036 & -0,1185 & -0,1046 & -0,0750 & 0 \end{pmatrix}$$



# Conclusiones y trabajo futuro

## Conclusiones

En los últimos años ha habido un rápido desarrollo de una teoría y de algoritmos para subdivisión básica de superficies. Sin embargo, muchos problemas como la representación de un volumen y sus atributos, requieren un tratamiento en dominios de mayores dimensiones, en particular  $3D$ . En el caso de los volúmenes, es necesario contar con una representación eficiente de objetos tetraedrizados ya que esto es de gran importancia práctica para una vasta variedad de aplicaciones, por ejemplo la representación de ciertas propiedades del objeto.

Las primeras tetraedrizaciones que se utilizaron tenían la propiedad de conectividad de subdivisión. Matemáticamente, esta propiedad se traduce en el hecho de poder definir espacios anidados, motivo por el cual la teoría clásica de wavelets resultó adecuada. Por otro lado, surgieron diferentes representaciones multirresolución para funciones definidas sobre esta clase particular de grillas tetraédricas.

Sin embargo, con el tiempo, surgió la necesidad de trabajar con redes tetraédricas que no tienen la propiedad de conectividad de subdivisión. En este caso ya no es posible definir espacios anidados, motivo por el cual se hizo necesario dar un nuevo marco teórico: el de las wavelets no anidadas, dentro del cual se buscó representar funciones definidas sobre volúmenes tetraedrizados con este tipo de redes.

El problema de la representación multirresolución de funciones constantes por tramos sobre grillas triangulares irregulares fue resuelto en [25] en tanto que para grillas tetraédricas regulares y semirregulares el problema fue tratado en [4] y [52], respectivamente.

En esta tesis suponemos conocida una tetraedrización irregular del volumen sobre el cual están definidos los datos y, tomando ésta como base, desarrollamos el trabajo que constituye la contribución de esta tesis: **la representación multirresolución de funciones constantes por tramos definidas sobre grillas tetraédricas irregulares**. Para ello se da una metodología que se puede implementar en forma sistemática y que permite hallar las matrices de análisis y de síntesis como así también las wavelets asociadas, cualesquiera sean el proyector utilizado y la tetraedrización inicial.

## Trabajo futuro

De acuerdo a lo expuesto en las conclusiones, podemos definir las siguientes líneas futuras de trabajo .

- Para los cuadros ortogonales y semiortogonales, el error en norma  $L^2$  está dado por el valor absoluto de los coeficientes de detalle. Es necesario entonces estimar el error entre dos aproximaciones sucesivas para un cuadro arbitrario.
- Para grillas triangulares irregulares, en [25] Gerussi halla bases de wavelets para representar funciones lineales por tramos y continuas. En este sentido, estamos interesados en resolver el problema análogo para grillas tetraédricas no anidadas.
- Estudiar la posibilidad de aplicar el esquema de lifting a las wavelets definidas en esta tesis.
- Aplicar la metodología en problemas reales.



# Bibliografía

- [1] Mauricio Cele López Belón. Visualización interactiva de volúmenes. Tesis de Magister, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2007.
- [2] Jurgen Bey. Tetrahedral grid refinement. *Computing*, 55(4):355–378, 1995.
- [3] L. Boscardin, L. Castro, S. Castro, and A. De Giusti. Wavelets defined over tetrahedra. *Journal of Computer Science and Technology*, 6(1):46–52, 2006.
- [4] Liliana B. Boscardin. Wavelets definidas sobre volúmenes. Tesis de Magister, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2001.
- [5] A. Certain, J. Popovic, T. Duchamp, T. Salesin, W. Stuetzle, and T. De Rose. Interactive multiresolution surface viewing. In *Computer Graphics SIGGRAPH'96 Proceedings*, pages 91–98, 1996.
- [6] Charles Chui. *An Introduction to Wavelets*. Charles Chui, Series Editor, Academic Press, 1992.
- [7] Charles Chui and Ewald Quak. Wavelets on a bounded interval. *Numerical Methods of Approximation Theory*, 9:53–75, 1992.
- [8] P. Cignoni, D. Costanza, C. Montani, C. Rocchini, and R. Scopigno. Simplification of tetrahedral volume with accurate error evaluation. In *Proceedings IEEE Visualization'2000*, pages 85–92, 2000.
- [9] P. Cignoni, C. Montani, C. Rocchini, and R. Scopigno. A general method for preserving attribute values on simplified meshes. In *Proceedings IEEE Visualization'98*, pages 59–66, 1998.
- [10] P. Cignoni, C. Rocchini, and R. Scopigno. Metro 3d: Measuring error on simplified tetrahedral complexes. Technical Report B4-35-00, I.E.I., C.N.R., Pisa, Italy, 2000.
- [11] A. Cohen. *Biorthogonal wavelets*, pages 123–152. *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*. Academic Press, San Diego, CA, 1992.

- [12] Jonathan Cohen, Amitabh Varshney, Dinesh Manocha, Greg Turk, Hans Weber, Pan-kaj Agarwal, Frederick Brooks, and William Wright. Simplification envelopes. *ACM Proceedings of SIGGRAPH'96*, pages 119–128, August 1996.
- [13] W. Dahmen, S.Prössdorf, and R. Schneider. *Multiscale methods for pseudo-differential equations on smooth manifolds*. Conference on wavelets: theory, algorithms and applications. Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [14] Emanuele Danovaro, Leila De Floriani, Michael Lee, and Hana Samet. Multiresolution tetrahedral meshes: an analysis and a comparison. In *IEEE SMI'02*, pages 83–94, 2002.
- [15] Ingrid Daubechies. Orthonormal basis of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41(7):909–996, October 1988.
- [16] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [17] Ingrid Daubechies and Jeffrey Lagarias. Two scale difference equations. i. existence and global regularity of solutions. *SIAM J. on Mathematical Analysis*, 22:1388–1410, 1991.
- [18] Mark de Berg, Otfried Cheongand, and Marc van Kreveldand Mark Overmars. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag.
- [19] D.L. Donoho. Interpolating wavelet transforms. *Preprint, Department of Statistics, Stanford University*, 1992.
- [20] D.L. Donoho. On minimum entropy segmentation. *Preprint, Department of Statistics, Stanford University*, 1993.
- [21] D.L. Donoho. *Smooth wavelets decompositions with blocky coefficient kernels*. Recent advances in wavelet analysis. Academic Press, New York, 1993.
- [22] M. Garland and P. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. In *Computer Graphics SIGGRAPH'97 Proceedings*, pages 209–216, 1997.
- [23] M. Garland and P. Heckbert. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics. In *Proceedings IEEE Visualization'98*, pages 263–269, 1998.
- [24] G.Bonneau, S. Hahmann, and G.M. Nielson. B-Lac wavelets: a multiresolution analysis with non nested spaces. *IEEE Visualization'96*, pages 43–48, 1996.
- [25] A. Gerussi. *Analyse Multirésolution Non Emboîtée. Applications à la visualisation Scientifique*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2000.
- [26] Tran S. Gieng, Bernard Hamann, Kenneth I.Joy, Gregory L.Schussman, and Isaac J. Trotts. Constructing hierarchies for triangle meshes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 4(2):145–161, June 1998.

- [27] María Girardi and Wim Sweldens. A new class of unbalanced Haar wavelets that form an unconditional basis for  $L^p$  on general measure spaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 3:457–474, 1997.
- [28] G. Grainer and R. Grosso. Hierarchical tetrahedral octahedral subdivision for volume visualization. In *Springer eBook Collection*, Vol. 16:6. Springerlink, 2000.
- [29] Laurent Grisoni. *Éléments de Multirésolution en Modélisation Géométrique*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, Bordeaux, France, 2000.
- [30] M.H. Gross and O.G. Staadt. Progressive tetrahedralizations. In *Proceedings IEEE Visualization'98*, pages 397–402, Research Triangle Park, NC, 1998.
- [31] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Mathematics*, 15:723–736, 1984.
- [32] R. Grosso and G. Greiner. Hierarchical meshes for volume data. In *Proceedings of the Conference on Computer Graphics International'98*, pages 761–771, 1998.
- [33] Paul Heckbert and Michael Garland. Survey of polygonal surface simplification algorithms. Technical report, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, School of Computer Science, 1997.
- [34] H. Hoppe. Progressive meshes. In *Computer Graphics SIGGRAPH'96 Proceedings*, pages 99–108, 1996.
- [35] Hugues Hoppe. Progressive meshes. *ACM Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, SIGGRAPH'96*, pages 99–108, 1996.
- [36] D. Manocha J. Cohen and M. Olano. Simplifying polygonal models using successive mappings. In *Proceedings IEEE Visualization '97*, pages 81–88, 1997.
- [37] D. Manocha J. Cohen and M. Olano. Appearance preserving simplification. In *Computer Graphics SIGGRAPH'98 Proceedings*, pages 115–122, 1998.
- [38] J.M.Carnicer, W. Dahmen, and J.M.Peña. Local decomposition of refinable spaces. Technical Report RWTH Aachen, Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, 1994.
- [39] D. Kirkpatrick. Optimal search in planar subdivision. *Siam J Computing*, 12(2):28–35, February 1983.
- [40] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds*. Springer, 2000.
- [41] John Michael Lounsbery. *Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type*. PhD thesis, University of Washington, Washington, Seattle, 1994.

- [42] Michael Lounsbery, Tony DeRose, and Joe Warren. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. *ACM Transactions on Graphics*, 16:34–73, January 1997.
- [43] H. Samet M. Lee, L. De Floriani. Constant time neighbor finding in hierarchical tetrahedral meshes. In *Proceedings International Conference on Shape Modeling*, pages 286–295, 2001.
- [44] Stéphane Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal basis of  $L^2(R)$ . *Trans. of the American Math. Society*, 315(1):69–88, 1989.
- [45] Stéphane Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 11:674–693, 1989.
- [46] Joseph M. Maubach. Local bisection refinement for n-simplicial grids generated by reflection. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16:210–227, 1995.
- [47] Yves Meyer. *Wavelets: Algorithms and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, 1993.
- [48] S. Mitra, P. Bhimasankaram, and S. Malik. *Matrix partial orders, shorted operators and applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2010.
- [49] C. Luerig R. Grosso and T. Ertl. The multilevel finite element method for adaptive mesh optimization and visualization of volume data. In *Proceedings IEEE Visualization'97*, pages 387–394, Phoenix, AZ, 1997.
- [50] C. Radhakrishna Rao and Sujit Kumar Mitra. *Generalized Inverse of matrices and its applications*. John Wiley and sons, Inc, 1971.
- [51] R. Ronfard and J. Rosignac. Full range approximation of triangulated polyhedra. In *Computer Graphics Forum. Proceedings of Eurographics'95; Vol.15(3)*, pages 67–76, 1996.
- [52] L. Boscardin S. Castro, L. Castro and A. De Giusti. Multiresolution wavelet based model for large irregular volume data sets. In *Proceedings of the 14-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision 2006, WSCG'2006*, pages 101–108, 2006.
- [53] S. Schaefer, J. Hakenberg, and J. Warren. Smooth subdivision of tetrahedral meshes. In *International Conference Proceeding Series; Vol. 71*, pages 147–154, ACM, 2004.
- [54] Peter Schröder and Wim Sweldens. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. *ACM Proceedings of SIGGRAPH'95*, pages 161–172, August 1995.
- [55] William Schröder, Jonathan A. Sarge, and William E. Lorensen. Decimation of triangle meshes. In *Computer Graphics Proceedings of SIGGRAPH'92; Vol.26(2)*, pages 65–70, July 1992.

- [56] Eric Stollnitz, Tony DeRose, and David Salesin. *Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc, 1996.
- [57] Gilbert Strang and Truong Nguyen. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley Cambridge Press, Wellesley, MA, 1996.
- [58] Wim Sweldens. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets. Technical Report 1994:7, Industrial Mathematics Initiative, Dept. of Mathematics, University of South Caroline, 1994.
- [59] Wim Sweldens. The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions. *Proceedings of the SPIE*, 2569:68–79, 1995.
- [60] Wim Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3:186–200, April 1996.
- [61] S. Guha T. K. Dey, H. Edelsbrunner and D.V. Nekhayev. Topology preserving edge contraction. Technical Report RGI-Tech-99, RainDrop Geomagic Inc. Champaign IL, 1999.
- [62] Isaac J. Trotts, Bernard Hamann, and Kenneth I. Joy. Simplification of tetrahedral meshes with error bounds. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 5(3):224–237, 1999.
- [63] The wavelet Digest. <http://www.wavelet.org/>. Internet.



# Apéndice A

## Operador proyección. Variedades topológicas

### A.1. Operador proyección y operador proyección ortogonal

Sea  $\mathbb{R}^n$  con el producto interior:  $\langle x, y \rangle = y^* N x$ , siendo  $N$  una matriz  $n \times n$ , hermitiana, definida positiva. Sean  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  dos subespacios de  $\mathbb{R}^n$  tales que:

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2.$$

Si  $x \in \mathbb{R}^n = x_1 + x_2$ , con  $x_1 \in \mathcal{S}_1$ ,  $x_2 \in \mathcal{S}_2$ , la transformación  $P : x \rightarrow x_1$  se llama *operador proyección* sobre  $\mathcal{S}_1$  a lo largo de  $\mathcal{S}_2$ . Valen los siguientes resultados, cuya demostración puede consultarse en [50].

**Lema A.1.1** *El operador proyector  $P$  es un operador lineal homogéneo.*

**Teorema A.1.2** *Un operador lineal homogéneo  $P$  es un proyector si y sólo si es idempotente, es decir  $P^2 = P$ .*

**Definición A.1.3** *El operador proyección sobre  $\mathcal{S}_1$  a lo largo de  $\mathcal{S}_2$  es el proyector ortogonal sobre  $\mathcal{S}_1$  si  $\mathcal{S}_2$  es el complemento ortogonal de  $\mathcal{S}_1$  en  $\mathbb{R}^n$ .*

Valen los siguientes resultados, cuya demostración puede consultarse en [50].

**Teorema A.1.4** *Un operador lineal homogéneo  $P$  es un proyector ortogonal si y sólo si:*

- i)  $P^2 = P$ , (es decir es idempotente).*
- ii)  $N^{-1} P^* N = P$ , (es decir  $NP$  es hermitiano).*

### A.1.1. Matriz del operador proyección ortogonal

Deduciremos en esta sección la matriz del operador de proyección ortogonal que fue descrito en el Capítulo 4, Subsección 1.2.

Sabemos que dados los espacios de aproximación  $V^k$ , se puede escribir:

$$V^{k+1} = \tilde{V}^k \oplus W^k,$$

donde  $W^k$  es el núcleo del operador de aproximación y  $\tilde{V}^k$  es un subespacio auxiliar isomorfo a  $Im(P^k)$ .

Utilizaremos la siguiente notación ya introducida en el Capítulo 4:

**Notación**  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

- i)  $n_k$  la dimensión de  $V^k$  y  $(\phi_i^k)$ ,  $i = 1, \dots, n_k$ , una base de  $V^k$ ;
- ii)  $m_k$  la dimensión de  $\tilde{V}^k$  y  $(\tilde{\phi}_i^k)$ ,  $i = 1, \dots, m_k$ , una base de  $\tilde{V}^k$ ;
- iii)  $r_k$  la dimensión de  $W^k$  y  $(\psi_i^k)$ ,  $i = 1, \dots, r_k$ , una base de  $W^k$ ;

Por otro lado,  $(x^k)$ ,  $(\tilde{x}^k)$  y  $(y^k)$  representarán, respectivamente, los coeficientes de las funciones  $f_k \in V^k$ ,  $\tilde{f}_k \in \tilde{V}^k$  y  $g_k \in W^k$  en las bases arriba indicadas.

Dada una función  $f^{k+1} = \sum_{i=1}^{n_k} x_i^{k+1} \phi_i^{k+1} \in V^{k+1}$ , la primera aproximación más gruesa es,

$$f^k = \sum_{i=1}^{n_k} x_i^k \phi_i^k \in V^k,$$

donde

$$x_i^k = P(x_i^{k+1}). \tag{A.1}$$

Consideraremos bases ortogonales para los espacios  $V^{k+1}$  y  $V^k$ .

**Notación**

$\mathcal{G}_{\phi^k}$ : matriz de los productos escalares entre las funciones  $\phi_i^k$  de la base de  $V^k$ , es decir  $\mathcal{G}_{\phi^k}$  es la matriz cuyos elementos son:  $\langle \phi_i^k, \phi_j^k \rangle$ .

$\mathcal{G}_{[\phi^k, \phi^{k+1}]}$ : matriz de los productos escalares entre las funciones  $\phi_i^k$  de la base de  $V^k$  y las funciones  $\phi_j^{k+1}$  de la base de  $V^{k+1}$ ; es decir  $\mathcal{G}_{[\phi^k, \phi^{k+1}]}$  es la matriz cuyos elementos son  $\langle \phi_i^k, \phi_j^{k+1} \rangle$ .

Si  $P^{k+1}$  es el operador proyección ortogonal de un espacio sobre el siguiente, entonces  $P^{k+1}(f^{k+1})$  da la mejor aproximación de  $f^{k+1}$  en  $V^k$ . Queremos ver que la matriz de tal



operador  $P$  en las bases  $\phi^{k+1}$  de  $V^{k+1}$  y  $\phi^k$  de  $V^k$  está dada por  $\mathcal{G}_{\phi^k}^{-1}\mathcal{G}_{[\phi^k, \phi^{k+1}]}$ .

La mejor aproximación de  $f^{k+1}$  en el sentido de los mínimos cuadrados usando la base ortogonal  $\phi_i^k$ ,  $i = 1, \dots, n_k$ , la dan los coeficientes de Fourier en esa base, es decir están dados por:

$$\begin{aligned} x_i^k &= \frac{\langle f^{k+1}, \phi_i^k \rangle}{\|\phi_i^k\|^2}, \\ &= \frac{1}{\|\phi_i^k\|^2} \left\langle \sum_{j=1}^{n_{k+1}} x_j^{k+1} \phi_j^{k+1}, \phi_i^k \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\phi_i^k\|^2} \sum_{j=1}^{n_{k+1}} x_j^{k+1} \langle \phi_j^{k+1}, \phi_i^k \rangle, i = 1, \dots, n_k. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Consideremos el vector:

$$x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{n_k}^k \end{pmatrix}.$$

Entonces, por (A.1) y (A.2), tenemos:

$$x^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\phi_1^k\|^2} \sum_{j=1}^{n_{k+1}} x_j^{k+1} \langle \phi_j^{k+1}, \phi_1^k \rangle \\ \frac{1}{\|\phi_2^k\|^2} \sum_{j=1}^{n_{k+1}} x_j^{k+1} \langle \phi_j^{k+1}, \phi_2^k \rangle \\ \vdots \\ \frac{1}{\|\phi_{n_k}^k\|^2} \sum_{j=1}^{n_{k+1}} x_j^{k+1} \langle \phi_j^{k+1}, \phi_{n_k}^k \rangle \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \vdots \\ x_{n_{k+1}}^{k+1} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\|\phi_1^k\|^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|\phi_2^k\|^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\|\phi_{n_k}^k\|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \phi_1^{k+1}, \phi_1^k \rangle & \langle \phi_2^{k+1}, \phi_1^k \rangle & \cdots & \langle \phi_{n_{k+1}}^{k+1}, \phi_1^k \rangle \\ \langle \phi_1^{k+1}, \phi_2^k \rangle & \langle \phi_2^{k+1}, \phi_2^k \rangle & \cdots & \langle \phi_{n_{k+1}}^{k+1}, \phi_2^k \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_1^{k+1}, \phi_{n_k}^k \rangle & \langle \phi_2^{k+1}, \phi_{n_k}^k \rangle & \cdots & \langle \phi_{n_{k+1}}^{k+1}, \phi_{n_k}^k \rangle \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \vdots \\ x_{n_{k+1}}^{k+1} \end{pmatrix} = \\ = P \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \vdots \\ x_{n_{k+1}}^{k+1} \end{pmatrix}$$

Resulta entonces que  $P$  es la matriz  $n_k \times n_{k+1}$  dada por:  $P = \mathcal{G}_{\phi^k}^{-1} \mathcal{G}_{[\phi_i^k, \phi_j^{k+1}]}$ .

## A.2. Variedades topológicas. Variedades con frontera.

**Definición A.2.1** Sea  $M$  un espacio topológico. Se dice que  $M$  es una variedad topológica de dimensión  $n$  o una  $n$ -variedad topológica si tiene las siguientes propiedades:

- i)  $M$  es un espacio Hausdorff: para cualquier par de puntos  $p, q \in M$  existen abiertos disjuntos  $U, V \subset M$  tales que  $p \in U, q \in V$ .
- ii)  $M$  essegundo numerable: existe una base numerable para  $M$ .
- iii)  $M$  es localmente euclideano: cada punto  $p \in M$  tiene un entorno que es homeomorfo a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

La propiedad *localmente euclideano* significa que dado  $p \in M$  se pueden hallar:

- i) un conjunto abierto  $U \subset M$  tal que  $p \in U$ ;

- ii) un conjunto abierto  $\tilde{U} \in \mathbb{R}^n$  y
- iii) un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ , (es decir una aplicación biyectiva continua con inversa continua).

En [40] se prueba el siguiente Lema que permite reemplazar subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  por bola abierta de  $\mathbb{R}^n$  o por  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema.** Un espacio topológico  $M$  es localmente euclideo de dimensión  $n$  si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones:

- i) cada punto de  $M$  tiene un entorno homeomorfo a una bola abierta de  $\mathbb{R}^n$ .
- ii) cada punto de  $M$  tiene un entorno homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $M$  es localmente euclideo de dimensión  $n$ , un homeomorfismo de un subconjunto abierto  $U \subset M$  en un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  se llama una *carta* sobre  $U$ . Cualquier subconjunto de  $M$  que es homeomorfo a una bola en  $\mathbb{R}^n$  es una *bola euclidea en  $M$* . Si  $M$  tiene dimensión 2 se utiliza el término *disco euclideo*.

**Definición A.2.2** Una variedad  $n$ -dimensional con frontera es un espacio Hausdorff segundo numerable en el cual cada punto tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto del semiplano superior  $n$ -dimensional  $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ .

Como en el caso de variedades, a cualquier homeomorfismo de un subconjunto abierto  $U$  de  $M$  en un subconjunto abierto de  $H^n$ , se lo denomina *carta*.



# Apéndice B

## Inversas generalizadas

### B.1. Inversas generalizadas de una matriz.

Sea  $A$  una matriz no singular. Entonces existe una única matriz  $G$  tal que  $AG = GA = I$ . La matriz  $G$  se llama la matriz inversa de  $A$  y se nota  $A^{-1}$ .

Sea  $A$  una matriz rectangular  $m \times n$  y notemos con  $r(A)$  su rango. Supongamos que  $r(A) = m$ . Entonces  $AA^*$  es de orden  $m \times m$  y tiene rango  $m$ . Luego la inversa  $(AA^*)^{-1}$  existe y:

$$I_m = (AA^*)(AA^*)^{-1} = A \underbrace{[A^*(AA^*)^{-1}]}_{A_R^{-1}} = AA_R^{-1}. \quad (\text{B.1})$$

Es decir existe una matriz  $A_R^{-1}$  definida por (B.1) que, multiplicando a  $A$  por derecha, da la identidad. A tal matriz se la llama *inversa a derecha de  $A$* .

Sea  $A$  una matriz rectangular  $m \times n$  y supongamos que  $r(A) = n$ . Entonces  $A^*A$  es  $n \times n$  y de rango  $n$ . Luego la inversa  $(A^*A)^{-1}$  existe y:

$$I_n = (A^*A)^{-1}(A^*A) = \underbrace{[A^*A]^{-1}A^*}_{A_L^{-1}} A = A_L^{-1}A. \quad (\text{B.2})$$

Es decir existe una matriz  $A_L^{-1}$  definida en (B.2) que multiplicando a  $A$  por izquierda, da la identidad. A tal matriz se la llama *inversa a izquierda de  $A$* .

Es claro que  $A_L^{-1}$  ó  $A_R^{-1}$  existen sólo en los casos especiales en los cuales el rango de una matriz  $m \times n$  es  $m$  ó  $n$ . En caso de existir, tanto  $A_L^{-1}$  como  $A_R^{-1}$  no son únicos. En efecto valen los siguientes resultados:

**Teorema B.1.1** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  de rango  $n$ . La clase de todas las inversas a izquierda de  $A$  está dada por  $\{(A^*VA)^{-1}A^*V, V \text{ matriz arbitraria tal que } R(A^*VA) = R(A)\}$ .*

**Demostración:** Es claro que  $(A^*VA)^{-1}A^*V$  es inversa a izquierda de  $A$ .

Sea  $X$  una inversa a izquierda de  $A$ . Tomando  $V = X^*X$ , resulta:

$$X = (A^*X^*XA)^{-1}A^*X^*X. \quad \diamond \quad (\text{B.3})$$

**Teorema B.1.2** Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  de rango  $m$ . La clase de todas las inversas a derecha de  $A$  está dada por  $\{VA^*(AVA^*)^{-1} : V \text{ matriz arbitraria tal que } R(AVA^*) = R(A)\}$ .

**Demostración:** es claro que  $VA^*(AVA^*)^{-1}$  es inversa a derecha.

Sea  $X$  una inversa a derecha de  $A$ . Tomando  $V = XX^*$ , resulta:

$$X = XX^*A^*(AXX^*A^*)^{-1}. \quad \diamond \quad (\text{B.4})$$

En todos los casos anteriores existe una matriz  $G$  tal que  $AGA = A$ . Sin embargo, si  $A$  es una matriz  $m \times n$  y de rango  $r < \min(m, n)$  **no** existe una matriz  $R$  tal que  $AR = I$  o  $RA = I$ . La pregunta que surge naturalmente es si no existirá una matriz  $G$  que satisfaga  $AGA = A$ . Si esto sucede,  $G$  puede pensarse como una generalización de inversa, inversa a derecha o inversa a izquierda.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, la existencia de inversa, inversa a derecha o inversa a izquierda permite resolver sistemas de ecuaciones. Si  $A$  es no singular, entonces  $Ax = b$  es consistente, es decir el sistema tiene solución y dicha solución está dada por  $x = Gb$ , donde  $G = A^{-1}$ . Es claro que en este caso la solución es única.

Sea  $A$   $m \times n$  de rango  $m$ ,  $m \neq n$  y sea  $G$  una inversa a derecha de  $A$ . Entonces  $Ax = b$  es consistente para todo  $b$  y  $x = Gb$  es una solución. En este caso la solución no es única.

Por otro lado, si  $A$  es  $m \times n$  de rango  $n$  y  $G$  es una inversa a izquierda de  $A$ , entonces  $Ax = b$  no necesariamente es consistente para todo  $b$ ; pero, si es consistente,  $x = Gb$  es la única solución. En efecto, si  $Ax = b$  es consistente entonces  $b = Ac$  para algún  $c$ , luego:

$$Ax = AGb = AGAc = Ac = b,$$

es decir  $x = Gb = GAc = c$  es la única solución.

Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  de rango  $r < \min(m, n)$ , ¿existirá una matriz  $G$  tal que  $x = Gb$  sea solución del sistema consistente  $Ax = b$ ? Si fuera así, la matriz  $G$  puede pensarse como una generalización de inversa, inversa a derecha o inversa a izquierda. En lo que sigue veremos

que existe una matriz  $G$  que tiene muchas de las propiedades requeridas en los párrafos anteriores. Enunciaremos primero la siguiente descomposición matricial para una matriz  $A$  conocida como *factorización de rango* de  $A$ .

**Factorización de rango:** sea  $A$  una matriz  $m \times n$  de rango  $r > 0$ . Entonces existen matrices  $R$  y  $S$  de órdenes  $m \times r$  y  $r \times n$ , respectivamente, tales que  $r(R) = r = r(S)$  y  $A = RS$ . Recíprocamente, si  $A = RS$  donde  $R$  y  $S$  son matrices  $m \times r$  y de rango  $r$  y  $r \times n$  de rango

$r$ , respectivamente, tales que  $r \leq \min(m, n)$ , entonces  $r(A) = r$ .

Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Si  $A$  es nula, entonces  $AGA = A$  para todas las matrices  $G$  de orden  $n \times n$ . En este caso,  $Ax = 0$  es el único sistema consistente y  $x = G0 = 0$  es una solución para cualquier matriz  $G$  de orden  $n \times m$ . Si  $A$  es no nula, sea  $PQ$  una factorización de rango de  $A$ . Entonces  $P$  tiene inversa a izquierda  $P_{L^{-1}}$  y  $Q$  tiene inversa a derecha  $Q_{R^{-1}}$ . Sea  $G = Q_{R^{-1}}P_{L^{-1}}$ . Es fácil ver que  $AGA = A$ . Además, si el sistema  $Ax = b$  es consistente, es decir si  $b = Ac$  para algún vector  $c$ , entonces  $AGb = AGAc = Ac = b$ , mostrando que  $Gb$  es solución de  $Ax = b$ . Entonces para cualquier matriz  $A$  existe una matriz  $G$  tal que  $AGA = A$  y  $Gb$  es solución del sistema consistente  $Ax = b$ . En realidad, vale el siguiente resultado que puede consultarse en ([48]), Capítulo 2.

**Notación:**

- $\mathcal{C}(A)$ : subespacio generado por las columnas de la matriz  $A$ .
- $r(A)$ : rango de la matriz  $A$ .

**Teorema B.1.3** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  y sea  $G$  una matriz  $n \times m$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i)  $Gb$  es solución de  $Ax = b \forall b \in \mathcal{C}(A)$ .
- ii)  $AGA = A$ .
- iii)  $AG$  es idempotente y  $r(AG) = r(A)$ .
- iv)  $GA$  es idempotente y  $r(GA) = r(A)$ .
- v)  $r(I - AG) = m - r(A)$ .
- vi)  $r(I - GA) = n - r(A)$ .

**Definición B.1.4** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Una matriz  $G$  se dice una inversa generalizada de  $A$  o  $g$ -inversa si satisface una de las seis condiciones equivalentes del Teorema B.1.3.*

**Notación:**

- $A^-$ : inversa generalizada de  $A$  o  $g$ -inversa de  $A$ .
- $\{A^-\}$ : conjunto de todas las inversas generalizadas de  $A$ .

Utilizaremos frecuentemente los siguientes resultados, cuyas demostraciones pueden consultarse en [50].

**Lema B.1.5** *Valen las siguientes propiedades:*

- a) *si  $r(BC) = r(B)$ , entonces  $C(BC)^-$  es una  $g$ -inversa de  $B$ .*
- b) *si  $r(BC) = r(c)$ , entonces  $(BC)^-B$  es una  $g$ -inversa de  $C$ .*
- c)  *$r(A^*VA) = r(A)$  para toda matriz  $V$  definida positiva.*

Nos interesarán las  $g$ -inversas de una matriz dada como soluciones de sistemas lineales de ecuaciones. En tal sentido, valen los siguiente teoremas cuyas demostraciones pueden consultarse en ([48], Capítulo 2).

**Teorema B.1.6** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  y sea  $G$  una inversa generalizada de  $A$ . Entonces:*

- i)  *$Ax = b$  es consistente si y sólo si  $AGb=b$ ;*
- ii) *el espacio nulo de  $A$ , que notaremos  $\text{Null}(A)$ , está dado por  $\mathcal{C}(I - GA)$ , o dicho de otra manera la clase de todas las soluciones de  $Ax = 0$  está dada por  $(I - GA)\xi$ ,  $\xi$  arbitrario;*
- iii) *Si  $Ax = b$  es consistente, la clase de todas las soluciones de  $Ax = b$  está dada por  $Gb + (I - GA)\xi$ , donde  $\xi$  es arbitrario.*

**Teorema B.1.7** *Sea  $Ax = b$  un sistema consistente y  $b \neq 0$ . La clase de todas las soluciones de  $Ax = b$  es  $\{Gb : G \in \{A^-\}\}$ .*

**Teorema B.1.8** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  y sea  $G$  una  $g$ -inversa específica de  $A$ . Entonces la clase de todas las  $g$ -inversas de  $A$  está dada por:*

$$\{A^-\} = \{G + U - GAUAG, U \text{ arbitraria}\},$$

*o equivalentemente:*

$$\{A^-\} = \{G + (I - GA)V + W(I - AG), V, W, \text{ arbitraria}\}.$$

El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales es posible obtener una matriz  $G$   $g$ -inversa de  $A$ , de un rango específico.

**Teorema B.1.9** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Sean  $r, s$  enteros positivos,  $P$  y  $Q$  matrices de órdenes  $n \times s$  y  $m \times r$ , respectivamente. Entonces existe una  $g$ -inversa  $G$  de  $A$  tal que  $\mathcal{C}(G) \subset \mathcal{C}(G^*) \subset \mathcal{C}(Q^*)$  si y sólo si  $r(QAP) = r(A)$ . Si  $r(QAP) = r(A)$ , entonces  $P(QAP)^-Q$  es una  $g$ -inversa de  $A$ . Además, si  $PCQ$  es una  $g$ -inversa de  $A$ , entonces  $C$  es una  $g$ -inversa de  $QAP$ .*



Dentro del conjunto de las  $g$ -inversas  $G$  de una matriz  $A$  son importantes aquellas para las cuales  $r(G) = r(A)$ .

**Teorema B.1.10** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Entonces  $G$  es una  $g$ -inversa de  $A$  tal que  $r(G) = r(A)$  si y sólo si  $AGA = A$  y  $GAG = G$ .*

**Demostración:** si  $AGA = A$ ,  $G$  es una  $g$ -inversa de  $A$  y  $r(G) \geq r(A)$ . Si  $GAG = G$ ,  $A$  es una  $g$ -inversa de  $G$  y  $r(A) \geq r(G)$ . Entonces  $r(A) = r(G)$ .

Para probar la recíproca, como  $G$  es una  $g$ -inversa de  $A$  y  $r(G) = r(A)$ ,  $AG$  es idempotente y  $r(AG) = r(A) = r(G)$ ; entonces por el Teorema B.1.3,  $A$  es una  $g$ -inversa de  $G$ . Luego,  $GAG = G$ , siendo  $G$  una  $g$ -inversa de  $A$ , es decir  $AGA = A$ .  $\diamond$

**Definición B.1.11** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Se dice que una matriz  $G$   $n \times m$  es una inversa generalizada reflexiva de  $A$  si  $AGA = A$  y  $GAG = G$ .*

**Notación:** indicaremos con  $A_r^-$  a una inversa generalizada reflexiva de  $A$ .

**Observación:** la clase de todas las  $g$ -inversas reflexivas de  $A$  está dada por:

$$\{GAG : G \in \{A-\}\}.$$

**Lema B.1.12** *Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Sean:*

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= y^* M x, \quad M \text{ matriz definida positiva, } x, y \in \mathbb{R}^m, \\ \langle x, y \rangle &= y^* N x, \quad N \text{ matriz definida positiva, } x, y \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

los productos escalares en  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$  respectivamente. Entonces:

$$A(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^- = (N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*M)^-. \quad (\text{B.5})$$

**Demostración:** para probar que:

$$(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*M)A(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^-N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*M = N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*M, \quad (\text{B.6})$$

es suficiente probar que:

$$N^{-1}(A^*MA)(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^- \quad (\text{B.7})$$

es  $g$ -inversa de  $N^{-1}A^*MA$  ya que luego, multiplicando a derecha por  $N^{-1}A^*M$ , se obtiene el resultado (B.6). Pero:

$$\begin{aligned} r(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA) &= r(A^*MAN^{-1}A^*MA) \\ &= r(A^*MA) \\ &= r(N^{-1}A^*MA), \end{aligned}$$

ya que  $N$  es una matriz definida positiva. Entonces por a) del Lema B.1.5, se tiene que:

$$N^{-1}A^*MA(N^{-1}A^*MAN^{-1}A^*MA)^{-}$$

es una  $g$ -inversa de  $N^{-1}A^*MA$ .  $\diamond$