



**TESIS DOCTOR EN INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS DE PARED DELGADA COMPUESTAS

FLORENCIA REGUERA

DIRECTOR: Dr. Ing. Víctor H. Cortínez

CO-DIRECTOR: Dr. Ing. Marcelo T. Piovan

Abril 2013 – Bahía Blanca, Argentina



Tópicos

I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

III Validación del modelo estructural

IV Modelo computacional de optimización

V Diferentes esquemas de diseño óptimo

VI Conclusiones



Tópicos

I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

III Validación del modelo estructural

IV Modelo computacional de optimización

V Diferentes esquemas de diseño óptimo

VI Conclusiones

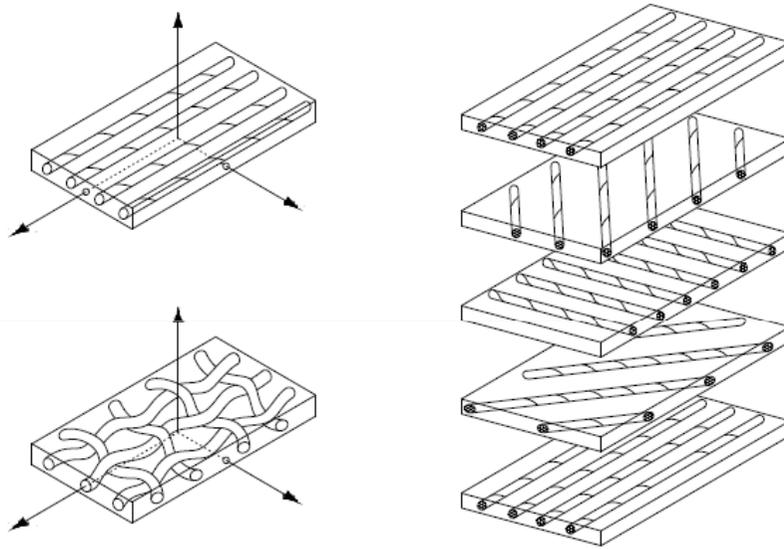


Motivación: Optimización estructural





Diseño de estructuras de materiales FRP



Esquema de laminados FRP (polímeros reforzados con fibras)

- Características más importantes: altas relaciones **rigidez/peso** y **resistencia/peso**.
- Determinar la **geometría del elemento**, los **materiales constituyentes**, la **orientación de las fibras** en cada lámina, el **espesor de cada una de ellas** y la **secuencia de apilamiento**.
- El esquema de diseño resultante genera la necesidad de implementar computacionalmente **técnicas de optimización**.



Modelo estructural

Vigas de pared delgada FRP

- En el proceso de optimización intervienen **parámetros estructurales** que deben ser analizados en forma iterativa durante el proceso de diseño.
- Por lo tanto, el modelo estructural debe satisfacer condiciones de **precisión** y **simplicidad** en forma balanceada.
- Para estructuras esbeltas, la formulación de **viga de pared delgada (VPD)** captura las características estructurales más importantes y es lo suficientemente simple para el tratamiento computacional extensivo.
- La implementación de dicho modelo permite realizar análisis estáticos y dinámicos de la estructura con suficiente exactitud, permitiendo conocer los **desplazamientos**, las **deformaciones** y las **tensiones**, producidas en la estructura.



Modelo estructural

Vigas de pared delgada FRP

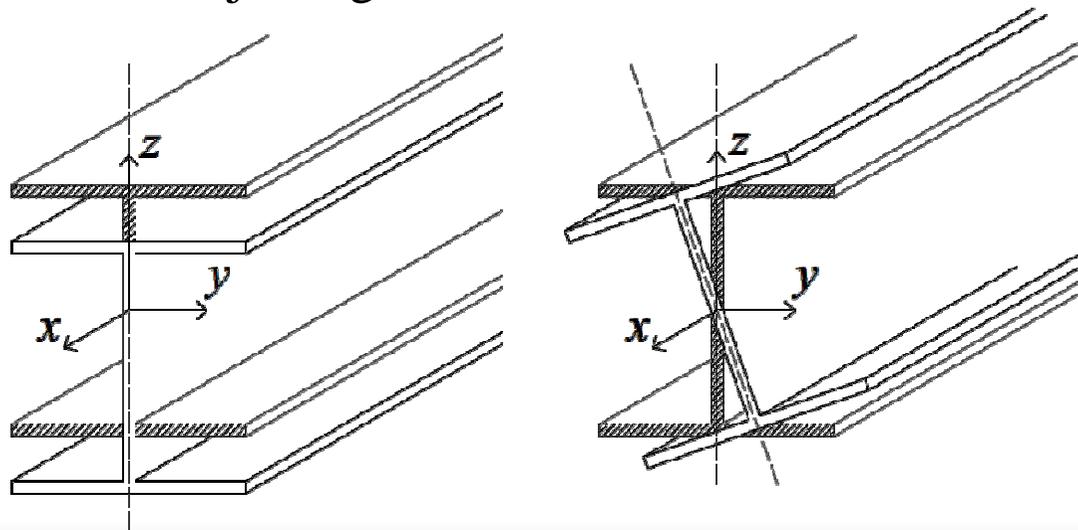
- La distribución de tensiones en la viga permite analizar su **resistencia** a través de la aplicación de criterios de falla.
- El estado límite de tensión a partir del cual un **material compuesto** sufre un daño habitualmente es definido por criterios de falla polinomiales.
- Se asume que la falla del laminado está asociada con la falla de la primera lámina (Barbero, 1998).
- En el caso de vigas sometidas a estados de carga estáticos, el criterio de falla de **Tsai-Wu** es uno de los más utilizados.
- Por su parte, cuando la viga esta sometida a estados de carga dinámicos, la resistencia a fatiga de laminados FRP se predice aquí a través del criterio de falla de **Tsai-Hill Extendido (CT-HE)**, propuesto por Jen y Lee (1998a; 1998b).



Modelo estructural

Vigas de pared delgada FRP

- Las **inestabilidades** pueden provocar daños severos en una estructura y por ello, muchas veces, el esquema de diseño de vigas de pared delgada es gobernado por este tipo de análisis.
- Cuando una viga es cargada en su plano de simetría, inicialmente **flexiona** en dicho plano. Para un cierto nivel de carga, la viga pandea lateralmente, es decir, **rota** respecto a su eje longitudinal.

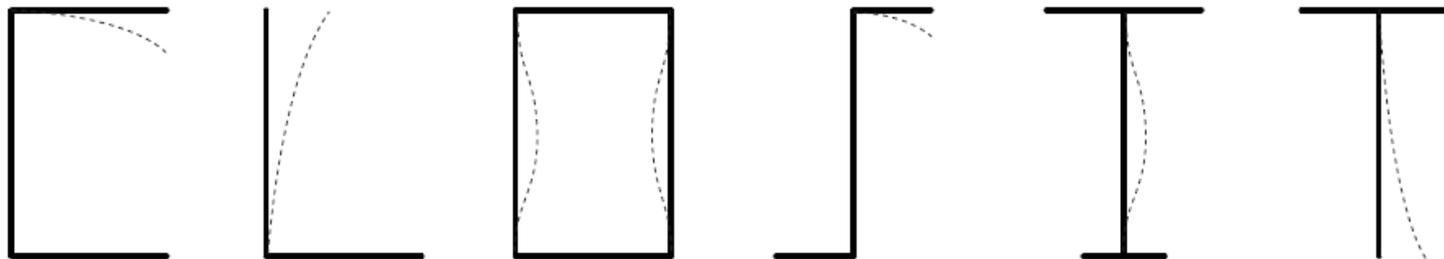




Modelo estructural

Vigas de pared delgada FRP

- La **inestabilidad local** en vigas de pared delgada, se presenta principalmente debido al pequeño espesor de las paredes que conforman su sección transversal. Cuando se trata de vigas de poca longitud, la inestabilidad local suele producirse antes que la inestabilidad global.





Objetivos

Objetivo general: Desarrollar formulaciones adecuadas para el diseño óptimo de vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos.

- Formular y aplicar un modelo estructural destinado al análisis de vigas de pared delgada compuestas.
- Implementar en forma numérica y analítica el modelo estructural destinado al análisis de vigas de pared delgada compuestas.
- Extender el modelo estructural a fin de considerar el pandeo local de la sección.



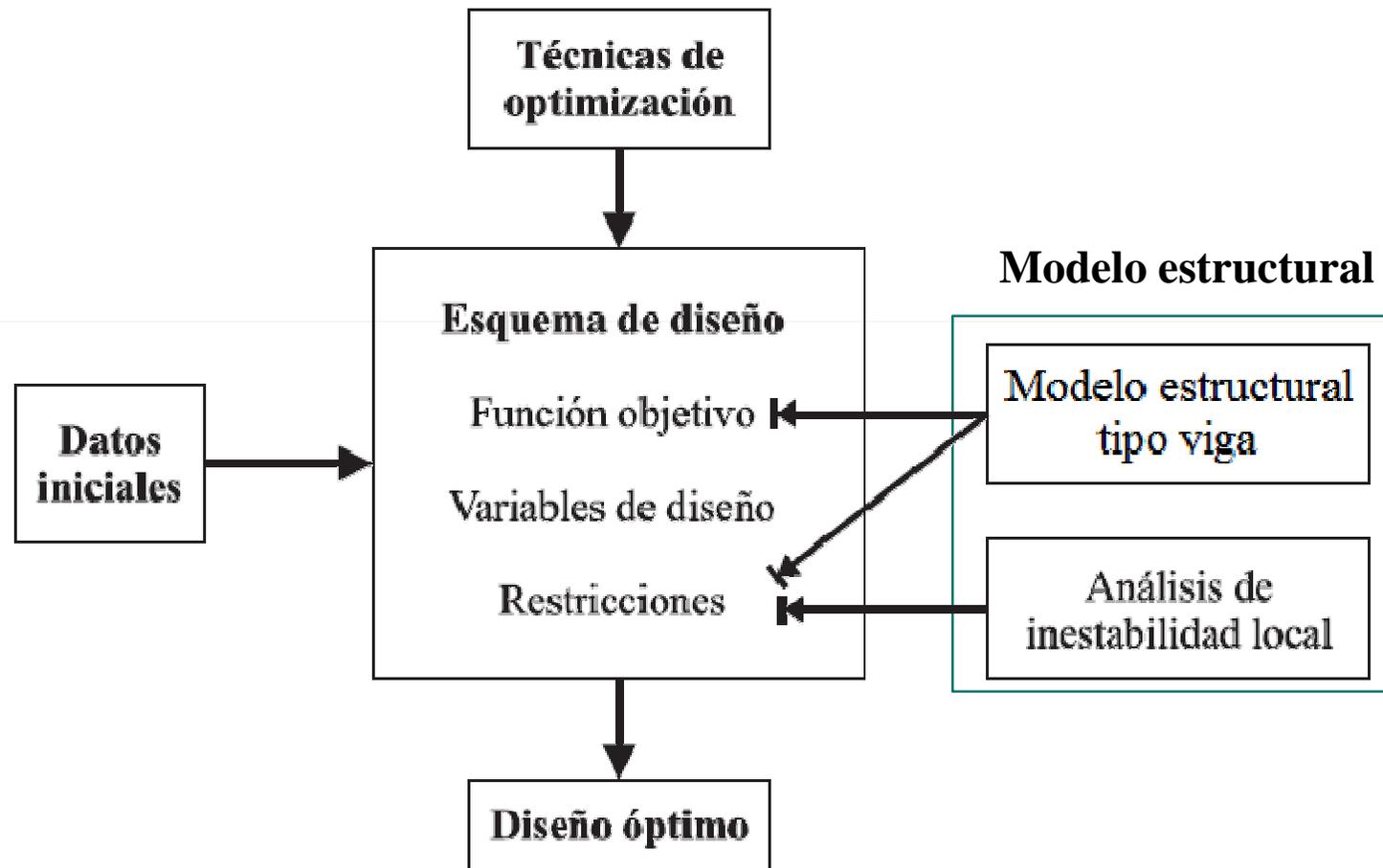
Objetivos

Objetivo general: Desarrollar formulaciones adecuadas para el diseño óptimo de vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos.

- Formular diferentes alternativas de diseño óptimo que incluyen problemas de optimización multiobjetivo considerando restricciones de desigualdad.
- Incorporar incertidumbre al problema de diseño, contemplando posibles variaciones en las condiciones operativas del esquema de diseño óptimo.
- Implementar métodos de optimización globales (técnicas heurísticas clásicas y modificadas).



Esquema global de diseño óptimo





Tópicos

I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

III Validación del modelo estructural

IV Modelo computacional de optimización

V Aplicación de los diferentes esquemas de diseño óptimo

VI Conclusiones



Tópicos

I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

- TEORÍA DE VIGAS FRP DE PARED DELGADA
 - IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA
 - SOLUCIONES ANALÍTICAS
- ANÁLISIS DEL PANDEO LOCAL



Tópicos

I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

- TEORÍA DE VIGAS FRP DE PARED DELGADA
 - IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA
 - SOLUCIONES ANALÍTICAS
- ANÁLISIS DEL PANDEO LOCAL



Teoría de VPD

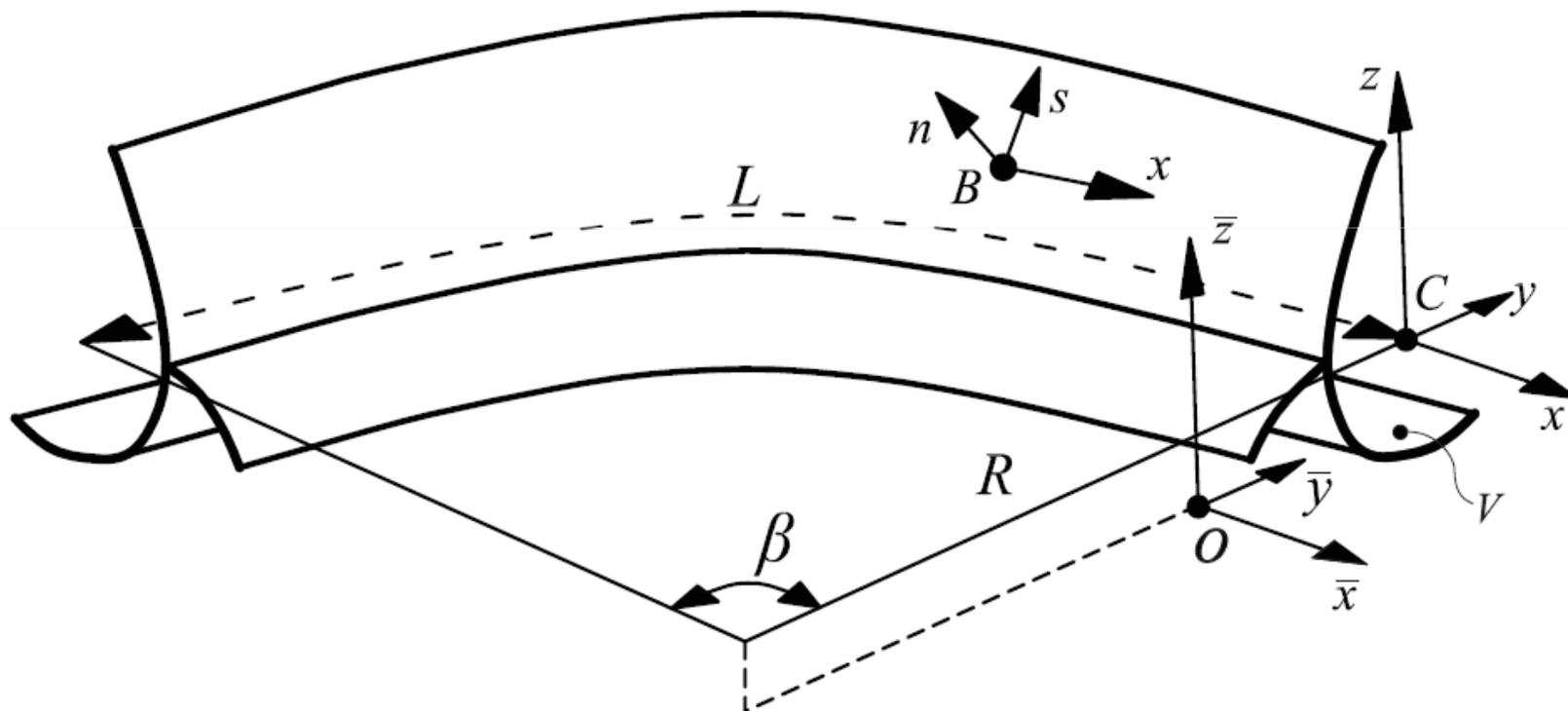
Introducción

- La teoría esta basada en el principio de **Hellinger-Reissner**.
- La teoría considera **flexibilidad por corte** en forma completa, esto es: debida a flexión y a alabeo por torsión no uniforme.
- La teoría es aplicable tanto a vigas de eje recto como de eje curvo, para secciones transversales abiertas y cerradas.
- La presente formulación constituye una extensión de la teoría desarrollada por Cortínez y Piovan para el análisis de vigas curvas.
- Es estrictamente válida para laminaciones simétricas y balanceadas, ortótropas y cruzadas (*cross-ply*).



Teoría de VPD

Cinemática general

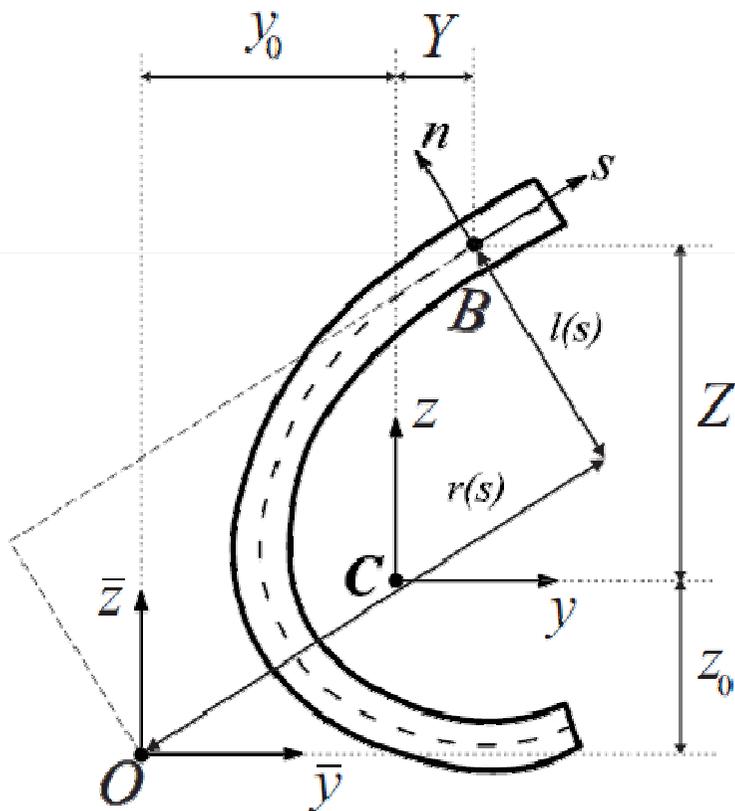


Esquema de viga de pared delgada de eje curvo de sección abierta



Teoría de VPD

Campo de desplazamientos



$$u_x = u - y \left(\theta_z - \frac{u}{R} \right) - z \theta_y - \omega \left(\theta_x - \frac{\theta_y}{R} \right),$$

$$u_y = v - \bar{z} \phi_x, \quad u_z = w + \bar{y} \phi_x,$$

$$u_x^{NL} = \frac{1}{2} \left[z \phi_x \left(\theta_z - \frac{u}{R} \right) - y \phi_x \theta_y \right],$$

$$u_y^{NL} = \frac{y}{2} \left[\phi_x^2 + \left(\theta_z - \frac{u}{R} \right)^2 \right] - \frac{z}{2} \left(\theta_z - \frac{u}{R} \right) \theta_y,$$

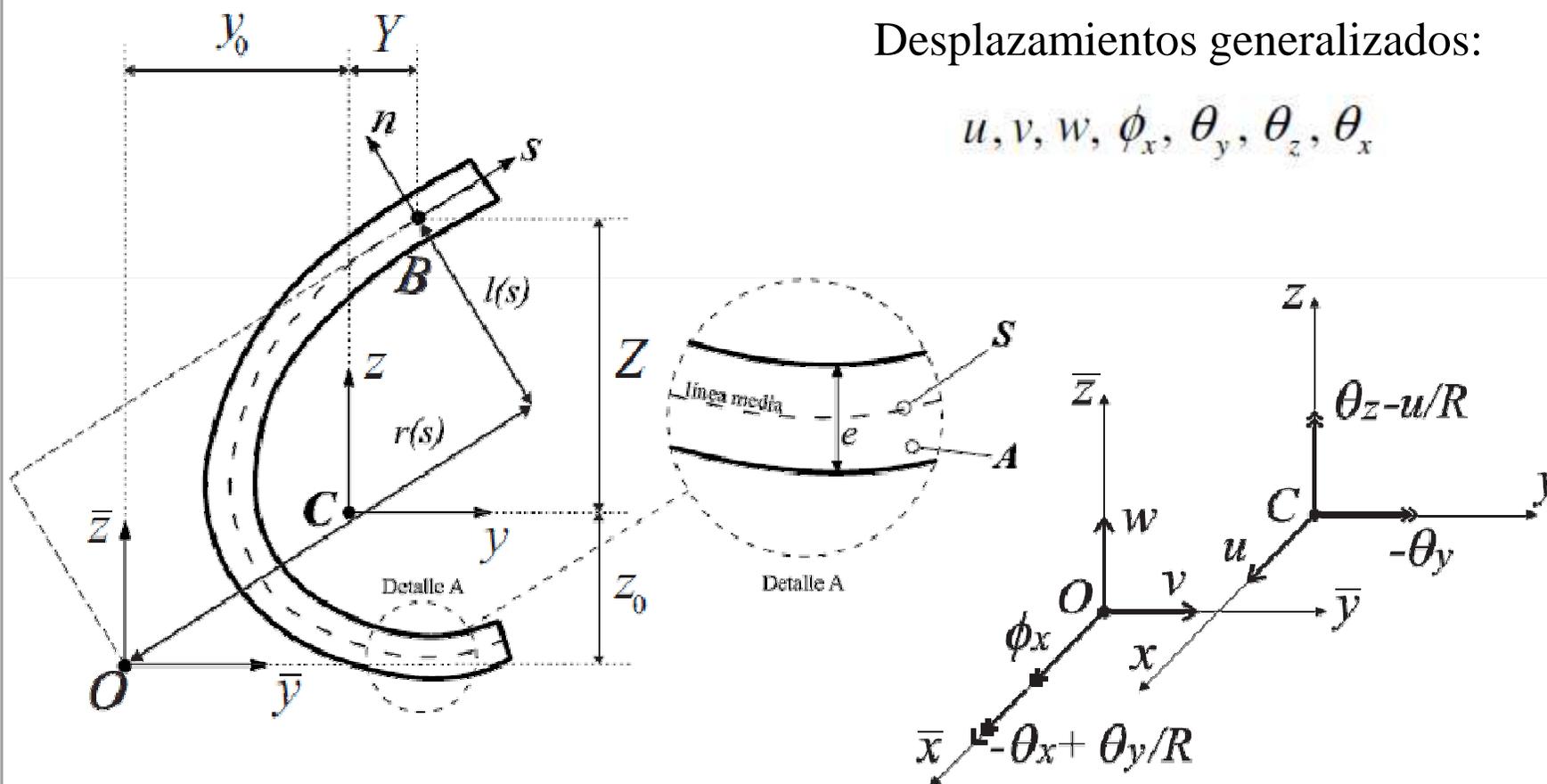
$$u_z^{NL} = \frac{Z}{2} (\phi_x^2 + \theta_y^2) - \frac{y}{2} \left(\theta_z - \frac{u}{R} \right) \theta_y,$$

Teoría de VPD

Campo de desplazamientos

Desplazamientos generalizados:

$$u, v, w, \phi_x, \theta_y, \theta_z, \theta_x$$

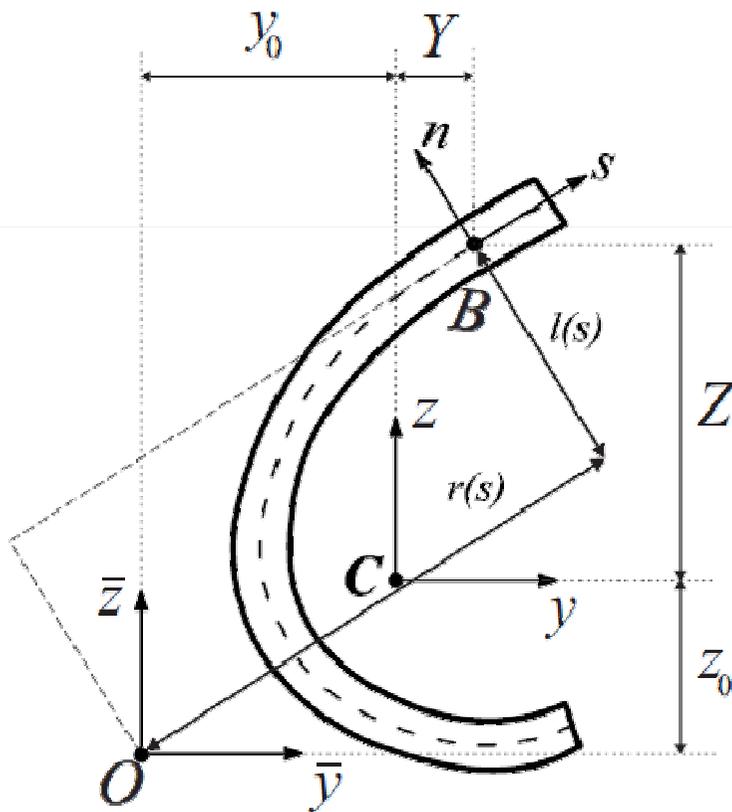




Teoría de VPD

Campo de desplazamientos

Campo de desplazamientos en el sistema intrínseco ($B: x, s, n$):



$$U^L = u_x, \quad V^L = u_y \frac{dY}{ds} + u_z \frac{dZ}{ds},$$

$$W^L = -u_y \frac{dZ}{ds} + u_z \frac{dY}{ds},$$

$$U^{NL} = u_x^{NL}, \quad V^{NL} = u_y^{NL} \frac{dY}{ds} + u_z^{NL} \frac{dZ}{ds},$$

$$W^{NL} = -u_y^{NL} \frac{dZ}{ds} + u_z^{NL} \frac{dY}{ds},$$

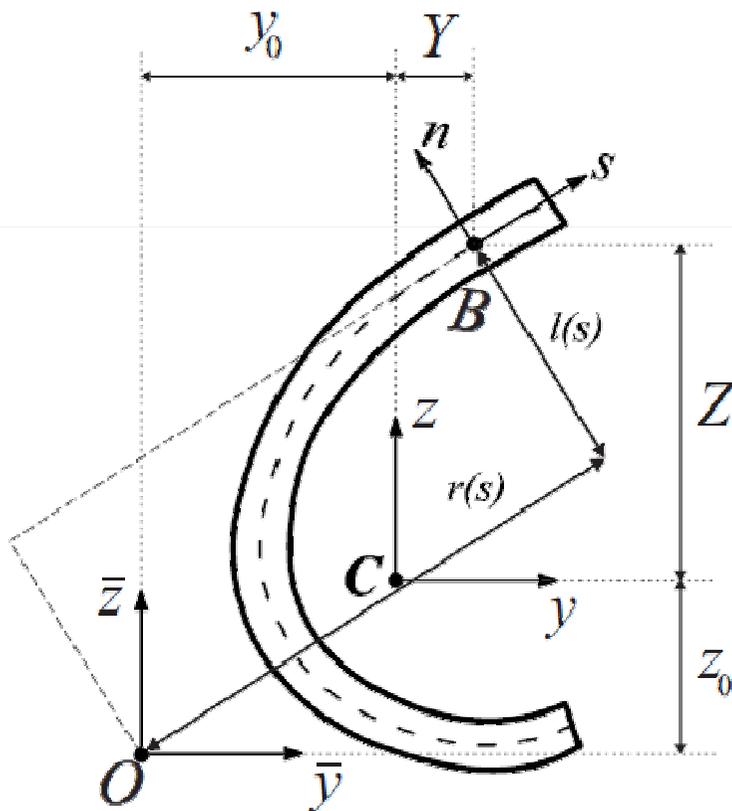
$$\Phi_x = -\frac{\partial u_x}{\partial n}, \quad \Phi_s = \frac{\partial}{\partial n} \left(u_y \frac{dY}{ds} + u_z \frac{dZ}{ds} \right),$$



Teoría de VPD

Campo de deformaciones

- Deformaciones de primer orden debidas a desplazamientos lineales:



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U^L}{\partial x} + \frac{u_y}{R},$$

$$\varepsilon_{xs} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^L}{\partial s} + \frac{\partial V^L}{\partial x} - \frac{u_x}{R} \frac{dY}{ds} \right],$$

$$\varepsilon_{xn} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^L}{\partial n} + \frac{\partial W^L}{\partial x} + \frac{u_x}{R} \frac{dZ}{ds} \right],$$



Teoría de VPD

Campo de deformaciones

- Deformaciones de primer y segundo orden debidas a desplazamientos no-lineales y lineales, respectivamente:

$$\eta_{xx} = \frac{\partial U^{NL}}{\partial x} + \frac{u_y^{NL}}{R} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U^L}{\partial x} + \frac{u_y}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^L}{\partial x} - \frac{u_x}{R} \frac{dY}{ds} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^L}{\partial x} + \frac{u_x}{R} \frac{dZ}{ds} \right)^2 \right],$$

$$\eta_{xs} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^{NL}}{\partial s} + \frac{\partial V^{NL}}{\partial x} - \frac{u_x^{NL}}{R} \frac{dY}{ds} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^L}{\partial s} \left(\frac{\partial U^L}{\partial x} + \frac{u_y}{R} \right) + \frac{\partial V^L}{\partial s} \left(\frac{\partial V^L}{\partial x} - \frac{u_x}{R} \frac{dY}{ds} \right) + \frac{\partial W^L}{\partial s} \left(\frac{\partial W^L}{\partial x} + \frac{u_x}{R} \frac{dZ}{ds} \right) \right],$$

$$\eta_{xn} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^{NL}}{\partial n} + \frac{\partial W^{NL}}{\partial x} + \frac{u_x^{NL}}{R} \frac{dZ}{ds} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^L}{\partial n} \left(\frac{\partial U^L}{\partial x} + \frac{u_y}{R} \right) + \frac{\partial V^L}{\partial n} \left(\frac{\partial V^L}{\partial x} - \frac{u_x}{R} \frac{dY}{ds} \right) + \frac{\partial W^L}{\partial n} \left(\frac{\partial W^L}{\partial x} + \frac{u_x}{R} \frac{dZ}{ds} \right) \right],$$



Teoría de VPD

Campo de deformaciones (sistema intrínseco)

- Campo de deformaciones términos de deformaciones membranales y curvaturas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^L + n\kappa_{xx}^L, & \gamma_{xs} &\simeq 2\varepsilon_{xs}^L = \gamma_{xs}^L + n\kappa_{xs}^L, & \gamma_{xn} &\simeq 2\varepsilon_{xn}^L = \gamma_{xn}^L, \\ \eta_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{NL} + n\kappa_{xx}^{NL}, & \eta_{xs}^{NL} &\simeq 2\eta_{xs}^{NL} = \gamma_{xs}^{NL} + n\kappa_{xs}^{NL}, & \eta_{xn}^{NL} &\simeq 2\eta_{xn}^{NL} = \gamma_{xn}^{NL},\end{aligned}$$

siendo,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^L &= \varepsilon_{D1} - Y\varepsilon_{D3} - Z\varepsilon_{D2} - \omega_p\varepsilon_{D4}, & \kappa_{xx}^L &= \frac{dZ}{ds}\varepsilon_{D3} - \frac{dY}{ds}\varepsilon_{D2} - l\varepsilon_{D4}, \\ \gamma_{xs}^L &= \frac{dY}{ds}\varepsilon_{D5} + \frac{dZ}{ds}\varepsilon_{D6} - (r+\psi)\varepsilon_{D7} + \psi\varepsilon_{D8}, & \kappa_{xs}^L &= \varepsilon_{D7} - 2\varepsilon_{D8}, \\ \gamma_{xn}^L &= -\frac{dZ}{ds}\varepsilon_{D5} + \frac{dY}{ds}\varepsilon_{D6} + l\varepsilon_{D7},\end{aligned}$$



Teoría de VPD

Campo de deformaciones (sistema intrínseco)

- Campo de deformaciones términos de deformaciones membranales y curvaturas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^L + n\kappa_{xx}^L, & \gamma_{xs} &\simeq 2\varepsilon_{xs}^L = \gamma_{xs}^L + n\kappa_{xs}^L, & \gamma_{xn} &\simeq 2\varepsilon_{xn}^L = \gamma_{xn}^L, \\ \eta_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{NL} + n\kappa_{xx}^{NL}, & \eta_{xs}^{NL} &\simeq 2\eta_{xs}^{NL} = \gamma_{xs}^{NL} + n\kappa_{xs}^{NL}, & \eta_{xn}^{NL} &\simeq 2\eta_{xn}^{NL} = \gamma_{xn}^{NL},\end{aligned}$$

siendo,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{NL} &= \frac{1}{2} \left\{ Z \frac{\partial(\varepsilon_{B2}\varepsilon_{B3})}{\partial X} - (Z + z_0) \frac{\varepsilon_{B1}\varepsilon_{B3}}{R} - Y \frac{\partial(\varepsilon_{B1}\varepsilon_{B2})}{\partial X} - (Y + y_0) \frac{\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2}{R} \right. \\ &\quad + \left(\varepsilon_{D1} - Y\varepsilon_{D3} - Z\varepsilon_{D2} - z_0 \frac{\varepsilon_{B2}}{R} - \omega_p \varepsilon_{D4} \right)^2 + \left(\varepsilon_{B6} + (Y + y_0) \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial X} \right)^2 \\ &\quad \left. + \left(\varepsilon_{B5} + Y \frac{\varepsilon_{B3}}{R} - Z\varepsilon_{D6} - z_0 \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial X} + \omega_p \frac{\varepsilon_{B4}}{R} \right)^2 \right\},\end{aligned}$$



Teoría de VPD

Campo de deformaciones (sistema intrínseco)

$$\begin{aligned} K_{xx}^{NL} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{dY}{ds} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{B2}\varepsilon_{B3})}{\partial x} - \frac{\varepsilon_{B1}\varepsilon_{B3}}{R} \right] + \frac{dZ}{ds} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{B1}\varepsilon_{B2})}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2}{R} \right] \right\} \\ & + \left(\varepsilon_{D1} - Y\varepsilon_{D3} - Z\varepsilon_{D2} - z_0 \frac{\varepsilon_{B2}}{R} - \omega_p \varepsilon_{D4} \right) \left(\frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D3} - \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D2} - l\varepsilon_{D4} \right) \\ & - \left(\varepsilon_{B6} + (Y + y_0) \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right) \frac{dZ}{ds} \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \\ & - \left(\varepsilon_{B5} + Y \frac{\varepsilon_{B3}}{R} - Z\varepsilon_{D8} - z_0 \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} + \omega_p \frac{\varepsilon_{B4}}{R} \right) \left(\frac{dZ}{ds} \frac{\varepsilon_{B3}}{R} - \frac{dY}{ds} \frac{\varepsilon_{B1}}{R} - l \frac{\varepsilon_{B4}}{R} - \frac{dY}{ds} \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right), \end{aligned}$$



Teoría de VPD

Campo de deformaciones (sistema intrínseco)

$$\begin{aligned} \gamma_{xs}^{NL} = & \frac{1}{2} \left\{ -(Z + z_0) \left[\frac{dY}{ds} \frac{\partial(\epsilon_{B1}\epsilon_{B3})}{\partial X} + \frac{dZ}{ds} \frac{\partial(\epsilon_{B2}^2 + \epsilon_{B1}^2)}{\partial X} \right] \right. \\ & \left. -(Y + y_0) \left[\frac{dY}{ds} \frac{\partial(\epsilon_{B2}^2 + \epsilon_{B3}^2)}{\partial X} + \frac{dZ}{ds} \frac{\partial(\epsilon_{B1}\epsilon_{B3})}{\partial X} \right] \right\} \\ & + \left(\epsilon_{D1} - Y\epsilon_{D3} - Z\epsilon_{D2} - z_0 \frac{\epsilon_{B2}}{R} - \omega_p \epsilon_{D4} \right) \left(-\frac{dY}{ds} \epsilon_{B3} - \frac{dZ}{ds} \epsilon_{B1} + (r + \psi) \epsilon_{B4} \right) \\ & + \epsilon_{B2} \left\{ \frac{dZ}{ds} \left[\frac{\epsilon_{B3}}{2} - \epsilon_{B5} - \omega_p \frac{\epsilon_{B4}}{R} - Z \frac{\epsilon_{B1}}{R} - Y \frac{\epsilon_{B3}}{R} + (Z + z_0) \frac{\partial \epsilon_{B2}}{\partial X} \right] \right. \\ & \left. + \frac{dY}{ds} \left[-\frac{\epsilon_{B1}}{2} + \epsilon_{B6} - Z \frac{\epsilon_{B3}}{2R} + Y \frac{\epsilon_{B1}}{2R} + (Y + y_0) \frac{\partial \epsilon_{B2}}{\partial X} \right] \right\}, \end{aligned}$$



Teoría de VPD

Campo de deformaciones (sistema intrínseco)

$$\begin{aligned} K_{xs}^{NL} = & \left(\frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D3} - \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D2} - l \varepsilon_{D1} \right) \left(-\frac{dY}{ds} \varepsilon_{B3} - \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{B1} + (r + \psi) \varepsilon_{B4} \right) \\ & - \varepsilon_{B1} \left(\varepsilon_{D1} - Y \varepsilon_{D3} - Z \varepsilon_{D2} - \frac{\varepsilon_{B2}}{R} \left(z_0 - l \frac{dZ}{ds} \right) - \omega_p \varepsilon_{D1} \right) \\ & \left(\frac{dZ}{ds} \right)^2 \left[\frac{\partial(\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3})}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B3}}{R} \right] - \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 \left[\frac{\partial(\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3})}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B3}}{2R} \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} \left[\frac{\partial(\varepsilon_{B3}^2 - \varepsilon_{B1}^2)}{\partial x} - 2 \frac{\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B1}}{R} \right], \end{aligned}$$



Teoría de VPD

Campo de deformaciones (sistema intrínseco)

$$\begin{aligned} \gamma_{xn}^{NL} = & \frac{1}{2} \left\{ (Z + z_0) \left[\frac{dZ}{ds} \frac{\partial(\epsilon_{B1}\epsilon_{B3})}{\partial X} - \frac{dY}{ds} \frac{\partial(\epsilon_{B2}^2 + \epsilon_{B1}^2)}{\partial X} \right] \right. \\ & \left. + (Y + y_0) \left[\frac{dZ}{ds} \frac{\partial(\epsilon_{B2}^2 + \epsilon_{B3}^2)}{\partial X} - \frac{dY}{ds} \frac{\partial(\epsilon_{B1}\epsilon_{B3})}{\partial X} \right] \right\} \\ & + \left(\epsilon_{D1} - Y\epsilon_{D3} - Z\epsilon_{D2} - z_0 \frac{\epsilon_{B2}}{R} - \omega_p \epsilon_{D4} \right) \left(\frac{dZ}{ds} \epsilon_{B3} - \frac{dY}{ds} \epsilon_{B1} - l\epsilon_{B4} \right) \\ & + \epsilon_{B2} \left\{ \frac{dY}{ds} \left[\frac{\epsilon_{B3}}{2} - \epsilon_{B5} - \omega_p \frac{\epsilon_{B4}}{R} - Z \frac{\epsilon_{B1}}{R} - Y \frac{\epsilon_{B3}}{R} + (Z + z_0) \frac{\partial \epsilon_{B2}}{\partial X} \right] \right. \\ & \left. - \frac{dZ}{ds} \left[-\frac{\epsilon_{B1}}{2} + \epsilon_{B6} - Z \frac{\epsilon_{B3}}{2R} + Y \frac{\epsilon_{B1}}{2R} + (Y + y_0) \frac{\partial \epsilon_{B2}}{\partial X} \right] \right\}, \end{aligned}$$



Teoría de VPD

Deformaciones generalizadas

$$\begin{aligned}\varepsilon_{D1} &= \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{v}{R}, & \varepsilon_{D2} &= \frac{\partial \theta_y}{\partial X} + \frac{\phi_x}{R}, & \varepsilon_{D3} &= \frac{\partial \theta_z}{\partial X} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial X}, \\ \varepsilon_{D4} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial X} - \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_y}{\partial X}, & \varepsilon_{D5} &= \frac{\partial v}{\partial X} - \theta_z, & \varepsilon_{D6} &= \frac{\partial w}{\partial X} - \theta_y, \\ \varepsilon_{D7} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial X} - \theta_x, & \varepsilon_{D8} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial X} - \frac{\theta_y}{R}, \\ \varepsilon_{B1} &= \theta_y, & \varepsilon_{B2} &= \phi_x, & \varepsilon_{B3} &= \theta_z - \frac{u}{R}, \\ \varepsilon_{B4} &= \theta_x - \frac{\theta_y}{R}, & \varepsilon_{B5} &= \frac{\partial v}{\partial X} - \frac{u}{R}, & \varepsilon_{B6} &= \frac{\partial w}{\partial X}.\end{aligned}$$



Teoría de VPD

Formulación variacional: Principio de Hellinger-Reissner

Principio de Trabajos Virtuales (PTV)

$$L_S + L_S^0 + (L_T + L_T^0) + (L_F + L_F^0) + L_R = 0,$$

Trabajo Virtual Complementario

$$\begin{aligned} \iint \left[\left(\varepsilon_{xx}^L - \frac{N_{xx}}{A_{11}} \right) \delta N_{xx} + \left(\gamma_{xs}^L - \frac{N_{xs}}{A_{66}} \right) \delta N_{xs} + \left(\kappa_{xs}^L - \frac{M_{xs}}{D_{66}} \right) \delta M_{xs} \right] ds dx \\ + \iint \left[\left(\kappa_{xx}^L - \frac{M_{xx}}{D_{11}} \right) \delta M_{xx} + \left(\gamma_{xn}^L - \frac{N_{xn}}{A_{55}^{(H)}} \right) \delta N_{xn} \right] ds dx = 0, \end{aligned}$$



Teoría de VPD

Principio de Trabajos Virtuales (PTV)

$$L_S + L_S^0 + (L_T + L_T^0) + (L_F + L_F^0) + L_R = 0,$$

- TV de los desplazamientos debido a las fuerzas de inercia
- TV de los desplazamientos debido a las fuerzas volumétricas actuantes e iniciales
- TV de los desplazamientos debido a las fuerzas actuantes e iniciales en los extremos
- TV de las deformaciones no lineales debido a las tensiones iniciales
- TV de las deformaciones de primer orden debido a las tensiones incrementales



Teoría de VPD

Principio de Trabajos Virtuales (PTV) Unidimensional

$$L_S = \int_0^L \left(N \delta \varepsilon_{D1} - M_y \delta \varepsilon_{D2} - M_z \delta \varepsilon_{D3} - B \delta \varepsilon_{D4} + Q_y \delta \varepsilon_{D5} \right. \\ \left. + Q_z \delta \varepsilon_{D6} + T_w \delta \varepsilon_{D7} + T_{sv} \delta \varepsilon_{D8} \right) dx,$$

donde los esfuerzos viga generalizados están definidos por

$$N = \int_S N_{xx} ds, \quad M_y = \int_S \left(N_{xx} Z + M_{xx} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad M_z = \int_S \left(N_{xx} Y - M_{xx} \frac{dZ}{ds} \right) ds,$$

$$Q_y = \int_S \left(N_{xs} \frac{dY}{ds} - N_{xn} \frac{dZ}{ds} \right) ds, \quad Q_z = \int_S \left(N_{xs} \frac{dZ}{ds} + N_{xn} \frac{dY}{ds} \right) ds,$$

$$B = \int_S \left(N_{xx} \omega_p + M_{xx} l \right) ds, \quad M_x = T_w + T_{sv},$$

$$T_w = \int_S \left[-N_{xs} (r + \psi) + M_{xs} + N_{xn} l \right] ds, \quad T_{sv} = \int_S \left(N_{xs} \psi - 2M_{xs} \right) ds,$$



Teoría de VPD

Principio de Trabajos Virtuales (PTV) Unidimensional

$$\begin{aligned} L_S^0 = & \int_0^L \frac{N^0}{2} \left\{ \delta \varepsilon_{B5}^2 + \delta \varepsilon_{B6}^2 + \delta \varepsilon_{D1}^2 - z_0 \left(2\delta \varepsilon_{B5} \varepsilon'_{B2} + \frac{\delta \varepsilon_{B3} \varepsilon_{B1}}{R} + 2 \frac{\delta \varepsilon_{B2} \varepsilon_{D1}}{R} \right) \right. \\ & \left. - y_0 \left[-2\delta \varepsilon_{B6} \varepsilon'_{B2} + \frac{\delta (\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2)}{R} \right] \right\} dx \\ & + \int_0^L \frac{M_y^0}{2} (\delta \varepsilon_{D8} \varepsilon_{B3} + \delta \varepsilon_{B2} \varepsilon_{D3} - 2\delta \varepsilon_{D1} \varepsilon_{D2} - 2\delta \varepsilon_{D8} \varepsilon_{B5}) dx \\ & + \int_0^L \frac{M_z^0}{2} \left[2\delta \varepsilon_{B6} \varepsilon'_{B2} - \delta (\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B2})' - 2\delta \varepsilon_{D1} \varepsilon_{D3} - \frac{\delta (\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2)}{R} + \frac{2\delta \varepsilon_{B3} \varepsilon_{B5}}{R} \right] dx \dots \end{aligned}$$



Teoría de VPD

Principio de Trabajos Virtuales (PTV) Unidimensional

$$\begin{aligned} L_S^0 = & \dots + \int_0^L B^0 \left(\frac{\delta \epsilon_{B4} \epsilon_{B5}}{R} - \delta \epsilon_{D1} \epsilon_{D4} \right) dx \\ & + \int_0^L Q_y^0 \left(\delta \epsilon_{B2} \epsilon_{B6} - \delta \epsilon_{D1} \epsilon_{B3} - \frac{\delta \epsilon_{B2} \epsilon_{B1}}{2} \right) dx \\ & + \int_0^L Q_z^0 \left(-\delta \epsilon_{B2} \epsilon_{B5} - \delta \epsilon_{D1} \epsilon_{B1} + \frac{\delta \epsilon_{B2} \epsilon_{B3}}{2} \right) dx \\ & + \int_0^L T_w^0 (-\delta \epsilon_{B4} \epsilon_{D1}) dx + \int_0^L \frac{M_x^0}{2} (\delta \epsilon_{B1} \epsilon_{D3} - \delta \epsilon_{D2} \epsilon_{B3}) dx \\ & + \int_0^L Q_{yw}^0 (\delta \epsilon_{B3} \epsilon_{D4}) dx + \int_0^L Q_{zw}^0 (\delta \epsilon_{B1} \epsilon_{D4} - \delta \epsilon_{B2} \epsilon_{B4}) dx \\ & + \int_0^L T_{wz}^0 (\delta \epsilon_{B4} \epsilon_{D2}) dx + \int_0^L T_{wy}^0 (\delta \epsilon_{B4} \epsilon_{D3}) dx + \int_0^L T_{ww}^0 (\delta \epsilon_{B4} \epsilon_{D4}) dx, \end{aligned}$$



Teoría de VPD

Principio de Trabajos Virtuales (PTV) Unidimensional

$$\begin{aligned} L_F + L_F^0 = & -\int_0^L \left[\left(q_x + \frac{m_z}{R} \right) \delta u - m_z \delta \theta_z - \left(m_y + \frac{b}{R} \right) \delta \theta_y - b \delta \theta_x \right. \\ & \left. + q_y \delta v + q_z \delta w + m_x \delta \phi_x \right] dx \\ & - \int_0^L \left[q_1^0 \delta u + q_2^0 \delta \theta_z + q_3^0 \delta \theta_y + q_4^0 \delta \phi_x \right] dx, \\ L_T + L_T^0 = & - \left[\left(\bar{N} + \frac{\bar{M}_z}{R} \right) \delta u - \bar{M}_z \delta \theta_z - \left(\bar{M}_y + \frac{\bar{B}}{R} \right) \delta \theta_y + \bar{B} \delta \theta_x \right. \\ & \left. + \bar{Q}_y \delta v + \bar{Q}_z \delta w + \bar{M}_x \delta \phi_x \right]_{x=0}^{x=L} \\ & - \left[\bar{N}_1^0 \delta u + \bar{N}_2^0 \delta \theta_z + \bar{N}_3^0 \delta \theta_y + \bar{N}_4^0 \delta \phi_x \right], \end{aligned}$$



Teoría de VPD

Principio de Trabajos Virtuales (PTV) Unidimensional

$$\begin{aligned}
 L_R = \int_0^L \rho \left\{ \left[A\ddot{u} - I_z \frac{\ddot{\theta}_z}{R} - I_{yz} \frac{\ddot{\theta}_y}{R} - I_{z\omega} \frac{\ddot{\theta}_x}{R} \right] \delta u \right. \\
 + \left[I_z \left(\ddot{\theta}_z - \frac{\ddot{u}}{R} \right) + I_{yz} \ddot{\theta}_y - I_{z\omega} \left(\ddot{\theta}_x - \frac{\ddot{\theta}_y}{R} \right) \right] \delta \theta_z \\
 + \left[I_{yz} \left(\ddot{\theta}_z - \frac{\ddot{u}}{R} \right) - I_{z\omega} \frac{\ddot{\theta}_z}{R} + I_y \ddot{\theta}_y + I_{y\omega} \left(\ddot{\theta}_x - \frac{2\ddot{\theta}_y}{R} \right) - C_w \frac{\ddot{\theta}_x}{R} \right] \delta \theta_y \\
 + \left[I_{z\omega} \left(\ddot{\theta}_z - \frac{\ddot{u}}{R} \right) + I_{y\omega} \ddot{\theta}_y + C_w \left(\ddot{\theta}_x - \frac{\ddot{\theta}_y}{R} \right) \right] \delta \theta_x \\
 \left. + A\ddot{v} \delta v + A\ddot{w} \delta w + \left(I_{y\phi_x} \ddot{\phi}_x + I_{z\phi_x} \ddot{\phi}_x \right) \delta \phi_x \right\} dx,
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned}
 A &= \int_A dA, \\
 I_y &= \int_A Z^2 dA, \\
 I_z &= \int_A Y^2 dA, \\
 I_{yz} &= \int_A YZ dA, \\
 I_{y\omega} &= \int_A Z \omega_p dA, \\
 I_{z\omega} &= \int_A Y \omega_p dA, \\
 C_w &= \int_A \omega_p^2 dA.
 \end{aligned} \right.$$



Teoría de VPD

Ecuaciones constitutivas

Hipótesis constitutiva:
 $N_{ss} = N_{sn} = M_{ss} = 0.$ \longrightarrow

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^L \\ \gamma_{xs}^L \\ \gamma_{xn}^L \\ \kappa_{xx}^L \\ \kappa_{xs}^L \end{Bmatrix},$$

siendo,

$$\bar{A}_{11} = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}, \quad \bar{A}_{66} = A_{66},$$
$$\bar{D}_{11} = D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}, \quad \bar{D}_{66} = D_{66} - \frac{D_{26}^2}{D_{22}}, \quad \bar{D}_{16} = D_{16} - \frac{D_{26} D_{12}}{D_{22}},$$
$$\bar{A}_{55}^{(H)} = A_{55}^{(H)} - \frac{(A_{45}^{(H)})^2}{A_{44}^{(H)}}.$$



Teoría de VPD

Ecuaciones constitutivas

- Campo de las resultantes de tensión

$$N_{xx} = e \left[\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} Z + \frac{M_z}{I_z} Y + \frac{B}{C_w} \omega_p \right],$$

$$M_{xx} \cong \frac{e^3}{12} \left[\frac{M_y}{I_y} \frac{dY}{ds} - \frac{M_z}{I_z} \frac{dZ}{ds} - \frac{B}{C_w} l \right],$$

$$M_{xs} = -\frac{e^3}{6J} T_{sv},$$

$$N_{xs} = -e \left[\frac{Q_z}{I_y} \lambda_y + \frac{Q_y}{I_z} \lambda_z + \frac{T_w}{C_w} \lambda_\omega \right] + \frac{e \psi}{J} T_{sv},$$

$$N_{xs} = \frac{e^3}{12} \left[\frac{Q_z}{I_y} \frac{dY}{ds} - \frac{Q_y}{I_z} \frac{dZ}{ds} - \frac{T_w}{C_w} l \right],$$



Teoría de VPD

Ecuaciones constitutivas

- Para hallar las ecuaciones constitutivas se sustituyen el campo de resultantes de tensión y las expresiones de las componentes lineales de deformación en el segundo funcional de Reissner.

Trabajo Virtual Complementario

$$\iint \left[\left(\varepsilon_{xx}^L - \frac{N_{xx}}{A_{11}} \right) \delta N_{xx} + \left(\gamma_{xs}^L - \frac{N_{xs}}{A_{66}} \right) \delta N_{xs} + \left(\kappa_{xs}^L - \frac{M_{xs}}{D_{66}} \right) \delta M_{xs} \right] ds dx$$
$$+ \iint \left[\left(\kappa_{xx}^L - \frac{M_{xx}}{D_{11}} \right) \delta M_{xx} + \left(\gamma_{xn}^L - \frac{N_{xn}}{A_{55}^{(H)}} \right) \delta N_{xn} \right] ds dx = 0,$$

- Integrando con respecto a s y tomando variaciones con respecto a los esfuerzos viga generalizados, se obtienen las ecuaciones constitutivas.



Teoría de VPD

Ecuaciones constitutivas

$$Q = J \cdot \Delta,$$

$$Q = \{N, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}^T,$$

$$\Delta = \{\varepsilon_{D1}, -\varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, -\varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T,$$

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & J_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & J_{55} & J_{56} & J_{57} & 0 \\ & & & & & J_{66} & J_{67} & 0 \\ & & & & & & J_{77} & 0 \\ & & & & & & & J_{88} \end{bmatrix}$$



Teoría de VPD

Ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J} \cdot \Delta,$$

$$\mathbf{Q} = \{N, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}^T,$$

$$\Delta = \{\varepsilon_{D1}, -\varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, -\varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T,$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & J_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & J_{55} & J_{56} & J_{57} & 0 \\ & & & & & J_{66} & J_{67} & 0 \\ & & & & & & J_{77} & 0 \\ & & & & & & & J_{88} \end{bmatrix}$$



Teoría de VPD

$$\begin{bmatrix} \widehat{GS}_y & \widehat{GS}_{yz} & \widehat{GS}_{y\omega} \\ & \widehat{GS}_z & \widehat{GS}_{z\omega} \\ \text{sim} & & \widehat{GS}_\omega \end{bmatrix} = \frac{e}{A_{66}} \begin{bmatrix} \int_S \left(\frac{\lambda_z}{I_z} \right)^2 ds & \int_S \frac{\lambda_z \lambda_y}{I_y I_z} ds & - \int_S \frac{\lambda_z \lambda_\omega}{I_z C_w} ds \\ & \int_S \left(\frac{\lambda_y}{I_y} \right)^2 ds & - \int_S \frac{\lambda_\omega \lambda_y}{I_y C_w} ds \\ \text{sim} & & \int_S \left(\frac{\lambda_\omega}{C_w} \right)^2 ds \end{bmatrix} \\
 + \frac{e^4}{144 \bar{A}_{55}^{(H)}} \begin{bmatrix} \int_S \left(\frac{dZ}{ds} \frac{1}{I_z} \right)^2 ds & \int_S \left(\frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} \frac{1}{I_y I_z} \right) ds & - \int_S \left(\frac{\partial \omega_p}{\partial n} \frac{dZ}{ds} \frac{1}{I_z C_w} \right) ds \\ & \int_S \left(\frac{dY}{ds} \frac{1}{I_y} \right)^2 ds & - \int_S \left(\frac{dY}{ds} \frac{\partial \omega_p}{\partial n} \frac{1}{I_y C_w} \right) ds \\ \text{sim} & & \int_S \left(\frac{\partial \omega_p}{\partial n} \frac{1}{C_w} \right)^2 ds \end{bmatrix}^{-1} .$$



Tópicos

I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

- TEORÍA DE VIGAS FRP DE PARED DELGADA
 - IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA
 - SOLUCIONES ANALÍTICAS
- ANÁLISIS DEL PANDEO LOCAL



Implementación numérica

Modelo de elementos finitos unidimensional

- La teoría de vigas es implementada numéricamente empleando un modelo de elementos finitos unidimensional.
- La eficacia del modelo ha sido probada por otros autores (Cortínez y Piovan, 2006).
- Para el caso de **vigas rectas** se emplea un elemento finito que consta de dos nodos y siete grados de libertad por cada nodo. Este modelo evita el fenómeno de bloqueo por corte mediante deformación por corte constante.
- Para **vigas curvas** se emplea un elemento finito isoparamétrico de cinco nodos y siete grados de libertad por cada nodo. En este caso, el bloqueo por corte se evita empleando integración reducida.



Tópicos

I Introducción

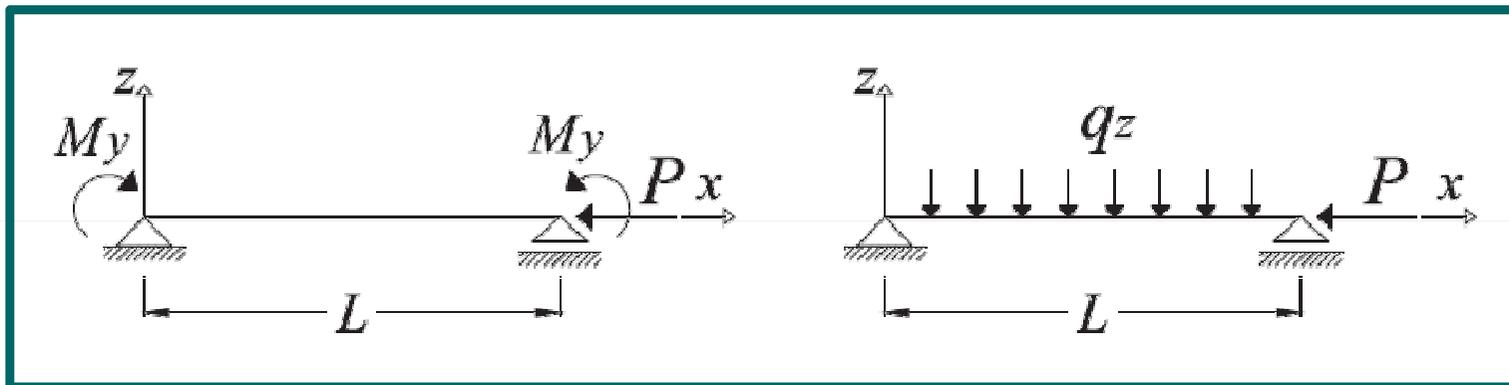
II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

- TEORÍA DE VIGAS FRP DE PARED DELGADA
 - IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA
 - SOLUCIONES ANALÍTICAS
- ANÁLISIS DEL PANDEO LOCAL

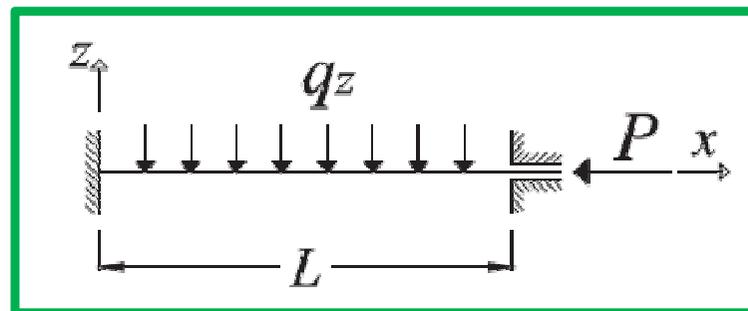


Soluciones analíticas

- Se consideran las siguientes condiciones de borde:



SAP



EE



Soluciones analíticas

- Desplazamientos máximos

$$\begin{aligned}(\delta_{\max}^B)^{SAP} &= \frac{M_y L^2}{8 \widehat{EI}_y}, & (\delta_{\max}^B)^{SAP} &= \frac{5q_z L^4}{384 \widehat{EI}_y}, \\ (\delta_{\max}^B)^{EE} &= \frac{q_z L^4}{384 \widehat{EI}_y}.\end{aligned}$$

- Desplazamientos máximos corregidos
(Kollár y Springer, 2003)

$$\delta = \left(\frac{\alpha_p}{1 - \alpha_c} \right) \delta_{\max}^B$$

Factores de amplificación:

$$\alpha_p = \frac{1}{1 - \frac{(KL)^2 P}{\pi^2 \widehat{EI}_y}}, \quad \alpha_c = \frac{1}{1 + \frac{(KL)^2 \widehat{GS}_z}{\pi^2 \widehat{EI}_y}},$$



Soluciones analíticas

- Desplazamientos máximos

$$\left(\delta_{\max}^B\right)^{SAP} = \frac{M_y L^2}{8\widehat{EI}_y}, \quad \left(\delta_{\max}^B\right)^{SAP} = \frac{5q_z L^4}{384\widehat{EI}_y},$$
$$\left(\delta_{\max}^B\right)^{EE} = \frac{q_z L^4}{384\widehat{EI}_y}.$$

- Desplazamientos máximos corregidos
(Kollár y Springer, 2003)

$$\delta = \left(\frac{\alpha_p}{1 - \alpha_c}\right) \delta_{\max}^B$$

- Tensiones máximas aproximadas

$$\sigma_x = \frac{M_{y,\max}}{I_y} z + \frac{P}{A}, \quad \tau_{xy} = \frac{Q_{z,\max} S_z}{eI_y}$$

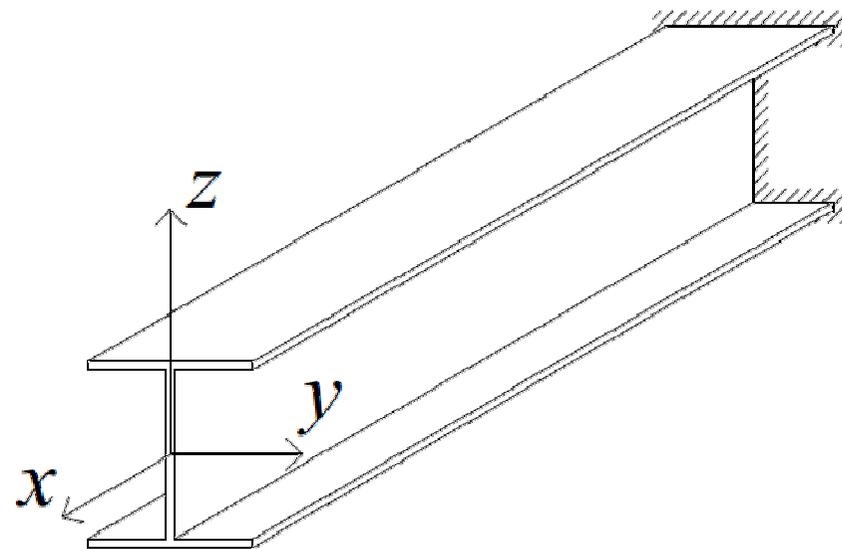


Soluciones analíticas

Pandeo flexo-torsional

- Hipótesis

- ✓ Se considera una viga de eje recto con doble simetría seccional.





Soluciones analíticas

Pandeo flexo-torsional

- Hipótesis

- ✓ Se considera una viga de eje recto con doble simetría seccional.



Ecuaciones constitutivas de esfuerzos viga resultantes:

$$\begin{aligned} N &= \widehat{E}A u', & M_y &= -\widehat{E}I_y \theta'_y, & M_z &= -\widehat{E}I_z \theta'_z, & B &= -\widehat{E}C_w \theta'_x, \\ Q_y &= \widehat{G}S_y (v' - \theta'_z), & Q_z &= \widehat{G}S_z (w' - \theta'_y), \\ T_w &= \widehat{G}S_\omega (\phi'_x - \theta'_x), & T_{sv} &= \widehat{G}J \phi'_x. \end{aligned}$$



Soluciones analíticas

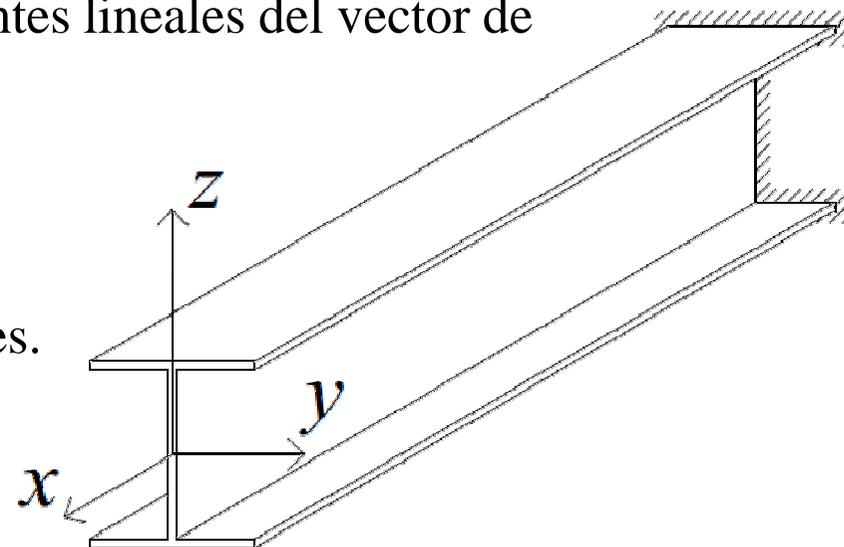
Pandeo flexo-torsional

• Hipótesis

✓ Se considera una viga de eje recto con doble simetría seccional.

✓ Se consideran solo las componentes lineales del vector de desplazamientos.

✓ Se considera únicamente la presencia de tensiones iniciales relacionadas con esfuerzos normales.





Soluciones analíticas

Pandeo flexo-torsional

- Primer funcional de Reissner en términos de los desplazamientos generalizados:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}) = & -\int_0^L \frac{1}{2} \left[\widehat{EA}u'^2 + \widehat{EI}_z\theta'_z{}^2 + \widehat{EI}_y\theta'_y{}^2 + \widehat{EC}_w\theta'_x{}^2 + \widehat{GS}_y(v' - \theta'_z)^2 + \widehat{GS}_z(w' - \theta'_y)^2 \right. \\ & \left. + \widehat{GS}_\omega(\phi'_x + \theta'_x)^2 + \widehat{GJ}\phi'_x{}^2 \right] dx \\ & - \int_0^L \left[\frac{N^0}{2} \left(w'^2 + v'^2 + \frac{I_s}{A} \phi'_x{}^2 \right) + M_z^0 \phi'_x w' - M_y^0 \phi'_x v' \right] dx \\ & + \int_0^L (q_x u + q_y v + q_z w - m_z \theta_z - m_y \theta_y - b \theta_x + m_x \phi_x) dx \\ & + \left[\bar{N}u - \bar{M}_z \theta_z - \bar{M}_y \theta_y - \bar{B} \theta + \bar{Q}_y v + \bar{Q}_z w + (\bar{T}_w + \bar{T}_{sv}) \phi_x \right]_{x=0}^{x=L}, \end{aligned}$$



Soluciones analíticas

Pandeo flexo-torsional

- El vector de desplazamientos generalizados es representado por:

$$\mathbf{u} = \{u, v, w, \theta_y, \theta_z, \theta_x, \phi_x\} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v}_h = \{b_1\psi_1, b_2\psi_2, \dots, b_j\psi_j, \dots, b_7\psi_7\}, \quad j=1, 2, \dots, 7$$

- Reemplazando \mathbf{v}_h en el funcional se obtiene una función $f(b_j)$ de siete variables. El mínimo de dicha función esta dado por la siguiente condición:

$$\left. \frac{\partial f(b_j)}{\partial b_j} \right|_{b_j=a_j} = 0$$

- Esto conduce a un sistema de siete ecuaciones que puede ser expresado en forma matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}_t \cdot \mathbf{a},$$



Soluciones analíticas

Pandeo flexo-torsional

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}_t \cdot \mathbf{a},$$

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}^T,$$

$$\mathbf{q} = \int_0^L \{q_x \psi_1, q_y \psi_2, q_z \psi_3, -m_y \psi_4, -m_z \psi_5, b \psi_6, m_x \psi_7\}^T dx,$$

Desacoplamiento flexional en el plano xz

$$\mathbf{K}_t^{xz} = \begin{bmatrix} \int \psi_3'^2 (\widehat{GS}_z + P) dx & -\int \widehat{GS}_z \psi_5 \psi_3' dx \\ -\int \widehat{GS}_z \psi_5 \psi_3' dx & \int (\widehat{EI}_y \psi_5'^2 + \widehat{GS}_z \psi_5'^2) dx \end{bmatrix},$$



Soluciones analíticas

Acoplamiento flexo-torsional en el plano xy

$$\mathbf{K}_t^{xy} = \begin{bmatrix} \int \psi_2'^2 (\widehat{GS}_y + P) dx & -\int M_y \psi_4' \psi_2' dx \\ -\int M_y \psi_4' \psi_2' dx & \int \psi_4'^2 (\widehat{GS}_\omega + \widehat{GJ} + PI_0) dx \\ -\int \widehat{GS}_y \psi_6 \psi_2' dx & 0 \\ 0 & -\int \widehat{GS}_\omega \psi_7 \psi_4' dx \\ -\int \widehat{GS}_y \psi_6 \psi_2' dx & 0 \\ 0 & -\int \widehat{GS}_\omega \psi_7 \psi_4' dx \\ \int (\widehat{EI}_z \psi_6'^2 + \widehat{GS}_y \psi_6'^2) dx & 0 \\ 0 & \int (\widehat{EC}_\omega \psi_7'^2 + \widehat{GS}_\omega \psi_7'^2) dx \end{bmatrix}$$



Soluciones analíticas

$$\det(\mathbf{K}_t^{xy}) = 0$$

$$M_{cx} = \sqrt{\eta_0 I_0 (P - P_z)(P - P_\phi)}$$

$$P_z = -\widehat{GS}_y \left(1 - \frac{1}{\frac{\widehat{EI}_z}{\widehat{GS}_y L^2} \eta_1 + \eta_2} \right)$$

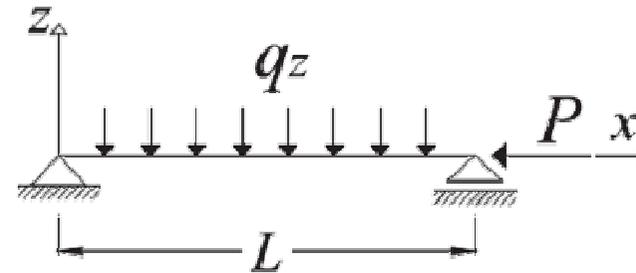
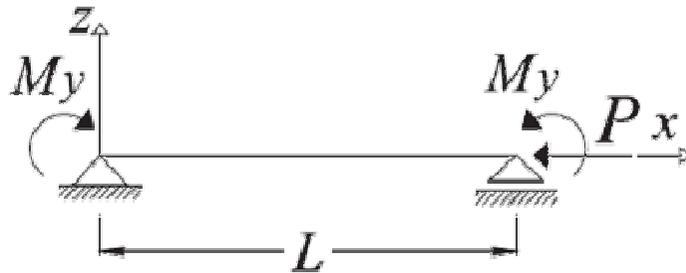
$$P_\phi = -\frac{\widehat{GS}_\omega}{I_0} \left(1 + \frac{\widehat{GJ}}{\widehat{GS}_\omega} - \frac{1}{\frac{\widehat{EC}_w}{\widehat{GS}_\omega L^2} \eta_3 + \eta_4} \right)$$

$$\det(\mathbf{K}_t^{xz}) = 0$$

$$P_y = -\widehat{GS}_z \left(1 - \frac{1}{\frac{\widehat{EI}_y}{\widehat{GS}_z L^2} \eta_5 + \eta_6} \right)$$



Soluciones analíticas



- Soluciones de los desplazamientos:

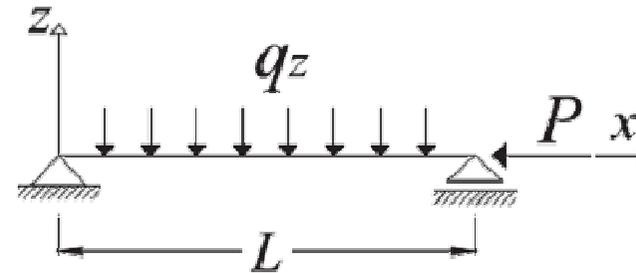
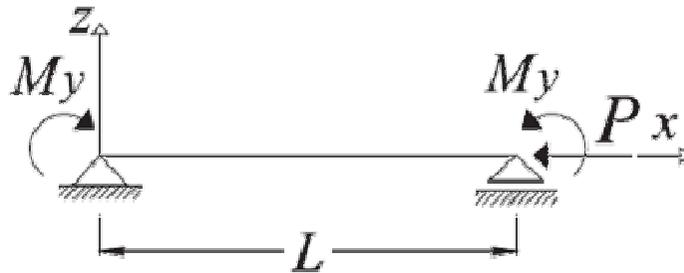
$$v = b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad w = b_3 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad \theta_y = b_4 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$
$$\theta_z = b_5 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad \theta_x = b_6 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad \phi_x = b_7 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$



$$\eta_0 = \eta_2 = \eta_4 = \eta_6 = 1,$$
$$\eta_1 = \eta_3 = \eta_5 = \pi^2,$$



Soluciones analíticas



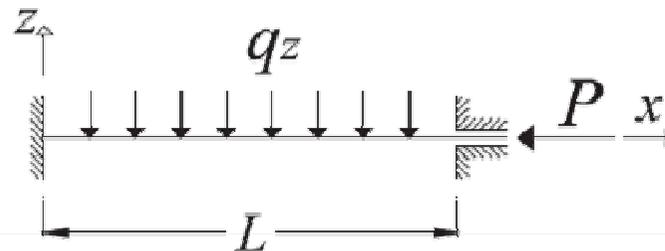
$$P_z = -\frac{\widehat{EI}_z \widehat{GS}_y \pi^2}{\widehat{EI}_z \pi^2 + \widehat{GS}_y L^2}, \quad P_\phi = -\frac{\widehat{GS}_\omega \widehat{EC}_w \pi^2 + \widehat{GJ} \widehat{EC}_w \pi^2 + \widehat{GJ} \widehat{GS}_\omega L^2}{I_0 (\widehat{EC}_w \pi^2 + \widehat{GS}_\omega L^2)},$$
$$P_y = -\frac{\widehat{EI}_y \widehat{GS}_z \pi^2}{\widehat{EI}_y \pi^2 + \widehat{GS}_z L^2}, \quad M_{cr} = \sqrt{I_0 (P - P_z)(P - P_\phi)}.$$

SAP



Soluciones analíticas

- Soluciones de los desplazamientos para una viga EE:



$$v = b_2 \left(\frac{Lx}{2\widehat{GS}_y} - \frac{x^2}{2\widehat{GS}_y} + \frac{L^2 x^2}{24\widehat{EI}_z} - \frac{Lx^3}{12\widehat{EI}_z} + \frac{x^4}{24\widehat{EI}_z} \right),$$

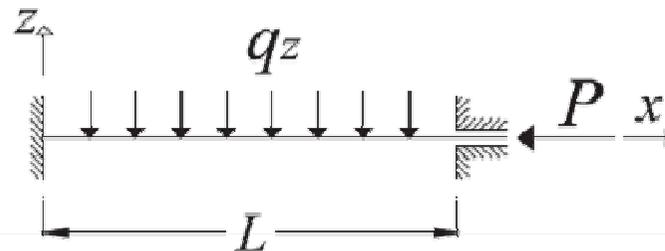
$$w = b_3 \left(\frac{Lx}{2\widehat{GS}_z} - \frac{x^2}{2\widehat{GS}_z} + \frac{L^2 x^2}{24\widehat{EI}_y} - \frac{Lx^3}{12\widehat{EI}_y} + \frac{x^4}{24\widehat{EI}_y} \right),$$

$$\theta_y = b_4 \left(\frac{L^2 x}{12\widehat{EI}_y} - \frac{Lx^2}{4\widehat{EI}_y} + \frac{x^3}{6\widehat{EI}_y} \right), \quad \theta_z = b_5 \left(\frac{L^2 x}{12\widehat{EI}_z} - \frac{Lx^2}{4\widehat{EI}_z} + \frac{x^3}{6\widehat{EI}_z} \right),$$



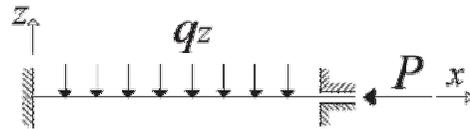
Soluciones analíticas

- Soluciones de los desplazamientos para una viga EE:



$$\theta_x = b_6 \left(\frac{L(e^{Lk_1} - e^{(L-x)k_1} + e^{xk_1} - 1) - 2x(e^{Lk_1} - 1)}{2\widehat{GJ}(e^{Lk_1} - 1)} \right),$$

$$\phi_x = b_7 \left(\frac{e^{-xk_1} \left[-\widehat{GJ}xe^{xk_1} (e^{Lk_1} - 1)(x - L) - \widehat{EC}_w Lk_1 (e^{Lk_1} - e^{xk_1})(e^{xk_1} - 1) \right]}{2\widehat{GJ}^2 (e^{Lk_1} - 1)} \right),$$



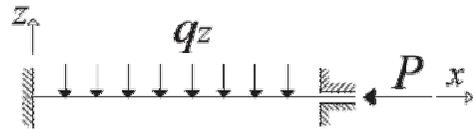
Soluciones analíticas

$$\eta_0 = \bar{\eta}_0 \left[1 - 0.8 \frac{e}{h} + 37 \left(\frac{e}{h} \right)^2 - 176 \left(\frac{e}{h} \right)^3 \right]$$

$$\eta_1 = \frac{\bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_2} (42\eta_2), \quad \eta_2 = \bar{\eta}_2 \left[\frac{2520 \widehat{EI}_z^2 + 84 \widehat{EI}_z \widehat{GS}_y L^2 + \widehat{GS}_y^2 L^4}{(42 \widehat{EI}_z + \widehat{GS}_y L^2)^2} \right],$$

$$\eta_3 = \frac{\bar{\eta}_3}{\bar{\eta}_4} (42\eta_4), \quad \eta_4 = \bar{\eta}_4 \left[\frac{2520 \widehat{EC}_w^2 + 84 \widehat{EC}_w \widehat{GS}_\omega L^2 + \widehat{GS}_\omega^2 L^4}{(42 \widehat{EC}_w + \widehat{GS}_\omega L^2)^2} \right],$$

$$\eta_5 = \frac{\bar{\eta}_5}{\bar{\eta}_6} (42\eta_6), \quad \eta_6 = \bar{\eta}_6 \left[\frac{2520 \widehat{EI}_y^2 + 84 \widehat{EI}_y \widehat{GS}_z L^2 + \widehat{GS}_z^2 L^4}{(42 \widehat{EI}_y + \widehat{GS}_z L^2)^2} \right].$$



Soluciones analíticas

$$\eta_0 = \bar{\eta}_0 \left[1 - 0.8 \frac{e}{h} + 37 \left(\frac{e}{h} \right)^2 - 176 \left(\frac{e}{h} \right)^3 \right]$$
$$\eta_1 = \frac{\bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_2} (42\eta_2), \quad \eta_2 = \bar{\eta}_2 \left[\frac{2520 \widehat{EI}_z^2 + 84 \widehat{EI}_z \widehat{GS}_y L^2 + \widehat{GS}_y^2 L^4}{(42 \widehat{EI}_z + \widehat{GS}_y L^2)^2} \right],$$
$$\eta_3 = \frac{\bar{\eta}_3}{\bar{\eta}_4} (42\eta_4), \quad \eta_4 = \bar{\eta}_4 \left[\frac{2520 \widehat{EC}_w^2 + 84 \widehat{EC}_w \widehat{GS}_\omega L^2 + \widehat{GS}_\omega^2 L^4}{(42 \widehat{EC}_w + \widehat{GS}_\omega L^2)^2} \right],$$
$$\eta_5 = \frac{\bar{\eta}_5}{\bar{\eta}_6} (42\eta_6), \quad \eta_6 = \bar{\eta}_6 \left[\frac{2520 \widehat{EI}_y^2 + 84 \widehat{EI}_y \widehat{GS}_z L^2 + \widehat{GS}_z^2 L^4}{(42 \widehat{EI}_y + \widehat{GS}_z L^2)^2} \right].$$



Tópicos

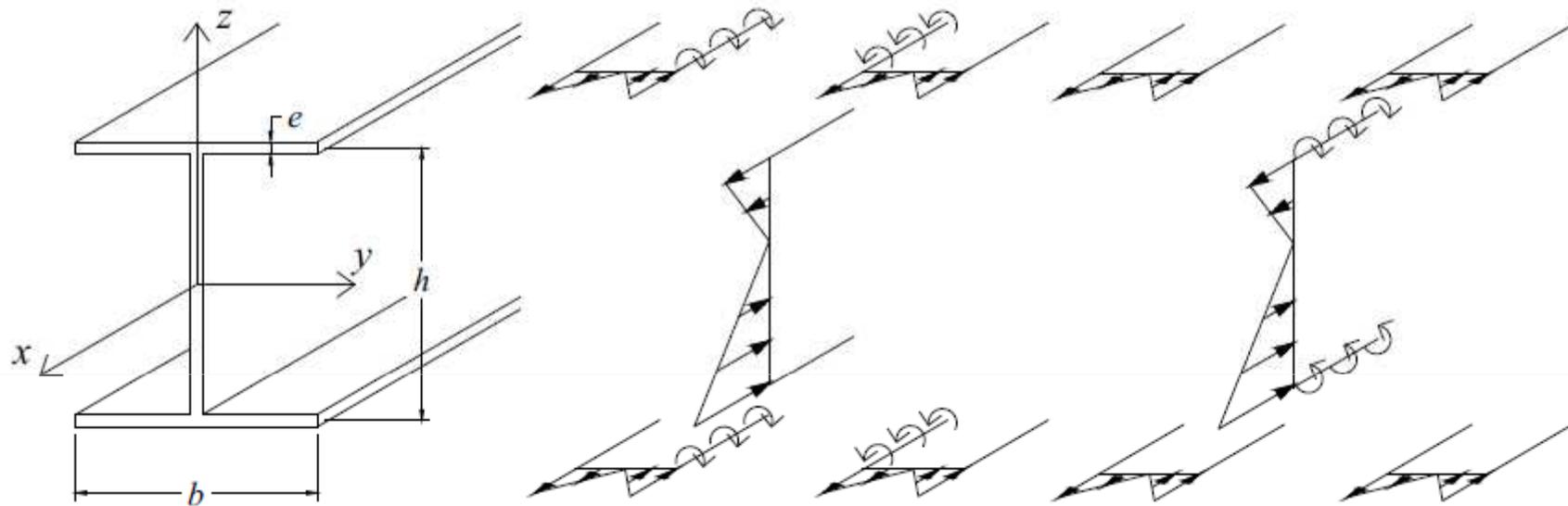
I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

- TEORÍA DE VIGAS FRP DE PARED DELGADA
 - IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA
 - SOLUCIONES ANALÍTICAS
- ANÁLISIS DEL PANDEO LOCAL



Pandeo local

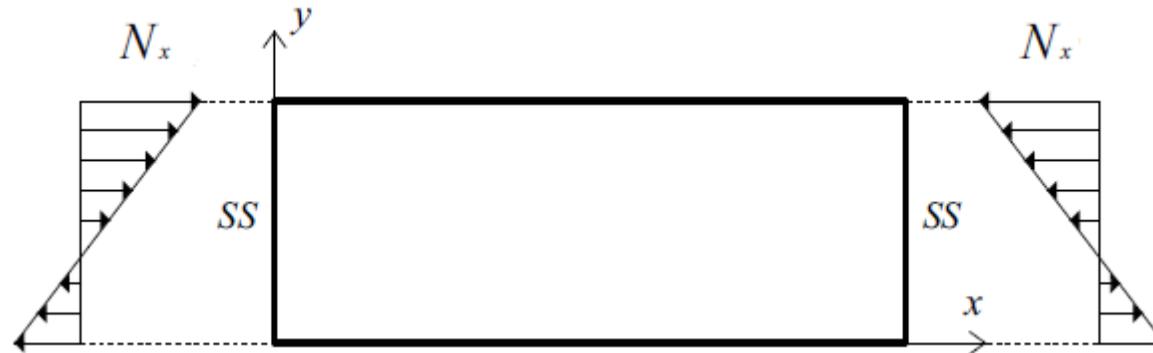


• Hipótesis

- ✓ Se modela cada segmento de la sección como una placa de gran longitud.
- ✓ Se asume que los ejes comunes a dos o más placas permanecen rectos.
- ✓ Se considera que cada segmento está restringido rotacionalmente por el segmento adyacente.



Pandeo local



- El esfuerzo por unidad de longitud solicitante se considera linealmente distribuido en los bordes simplemente apoyados:

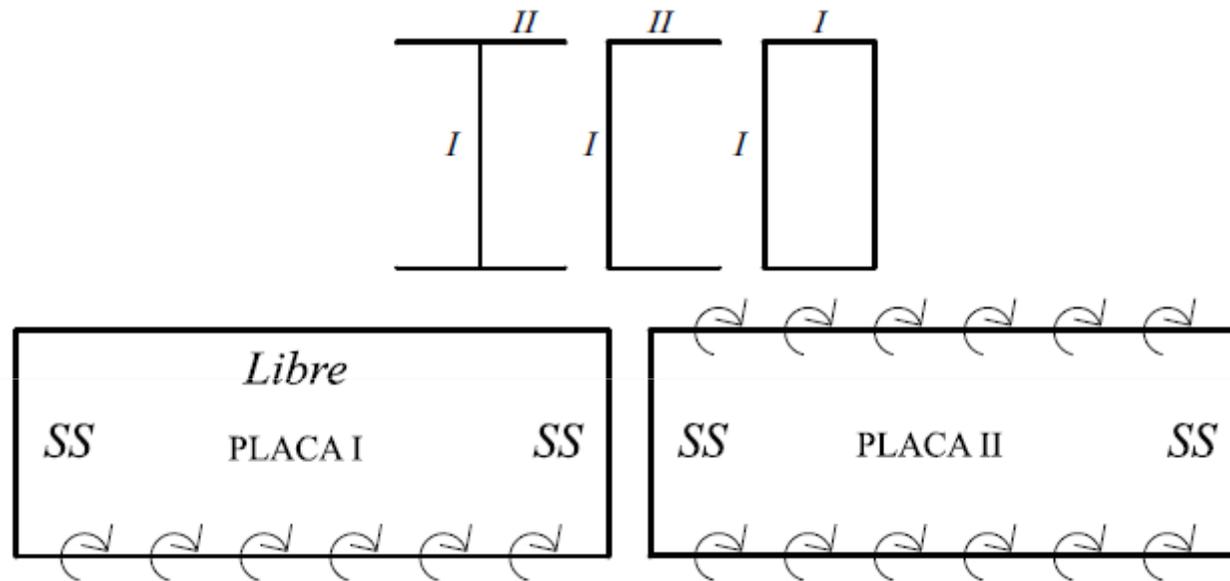
$$N_x = N_{x0} \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right)$$

- Energía total de deformación de una placa ortótropa:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_R \left(\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_L \left(\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy, \end{aligned}$$



Pandeo local

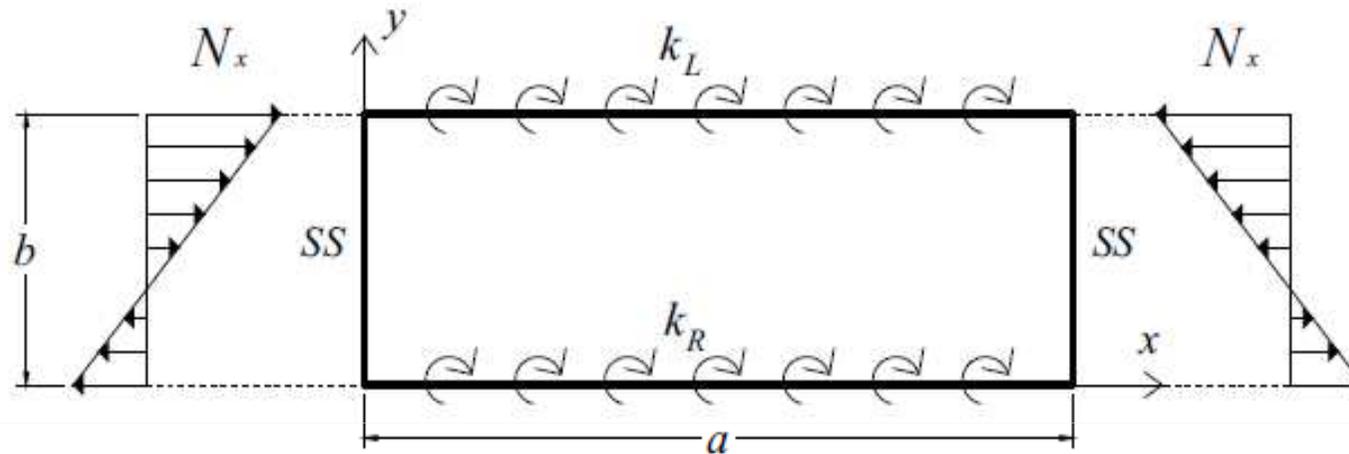


- Función de desplazamiento general en el estado de pandeo:

$$w(x, y) = \phi(y) \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$



Pandeo local



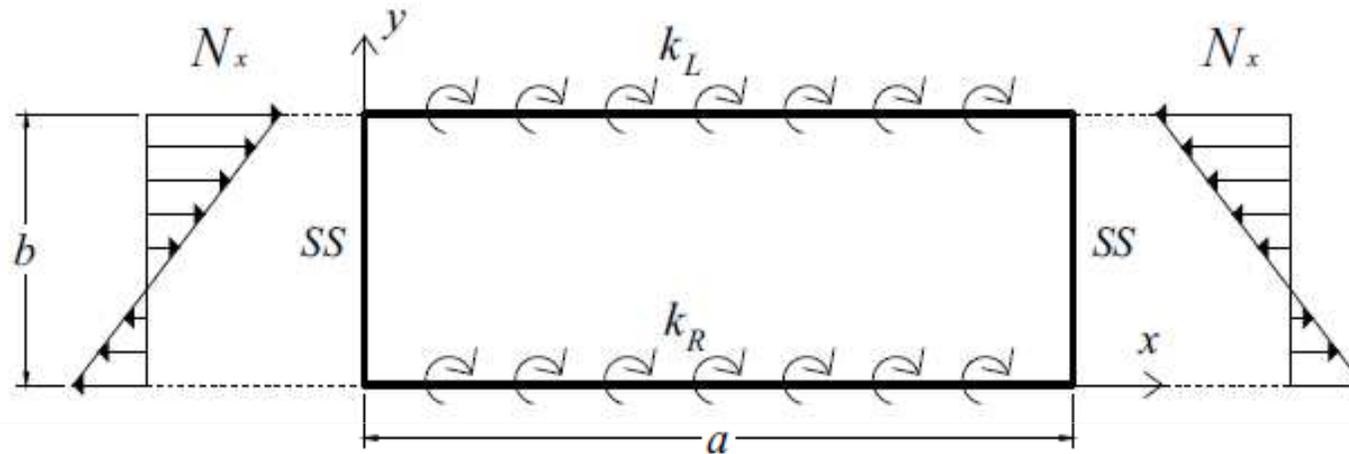
- Soluciones para una **placa RR**:

$$\text{si } \alpha \leq 1.5, \quad \phi(y) = \frac{y}{b} + \psi_1 \frac{y^2}{b^2} + \psi_2 \frac{y^3}{b^3} + \psi_3 \frac{y^4}{b^4},$$

$$\text{si } \alpha > 1.5, \quad \phi(y) = \frac{y}{b} + \psi_1 \frac{y^2}{b^2} + \psi_2 \frac{y^3}{b^3} + \psi_3 \frac{y^4}{b^4} + \psi_4 \frac{y^5}{b^5}.$$



Pandeo local



- Condiciones de borde para una placa RR:

si $\alpha \leq 1.5$

$$\left[\begin{array}{l} w(x,0) = 0, \\ w(x,b) = 0, \\ M_y(x,0) = -D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -k_R \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0}, \\ M_y(x,b) = -D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = k_L \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b}. \end{array} \right.$$

si $1.5 < \alpha < 2.0$

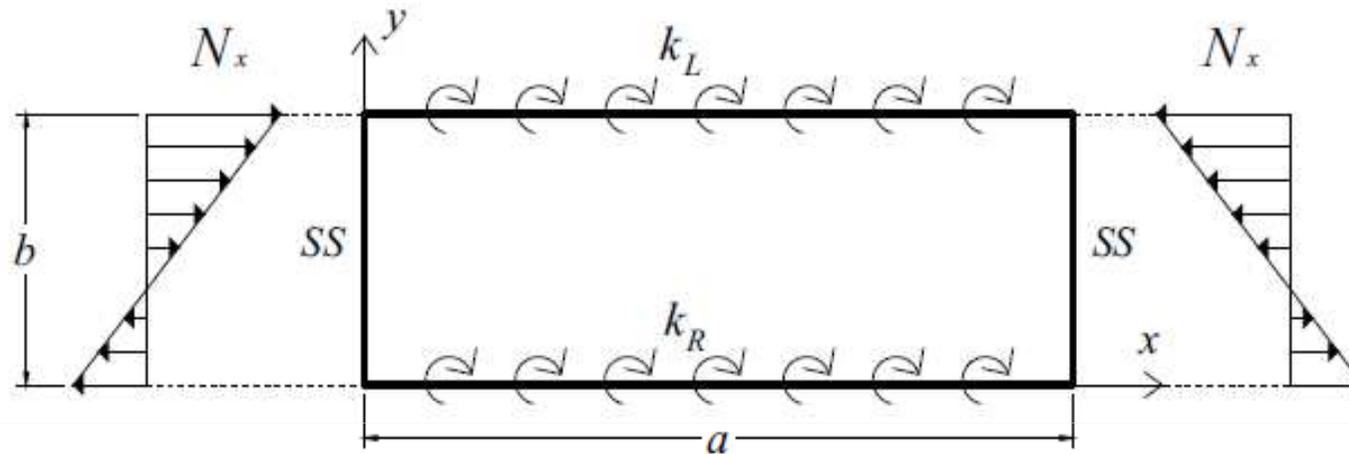
$$w(x,0.7b) = 0$$

si $\alpha \geq 2.0$

$$w(x,0.3b) = 0$$



Pandeo local



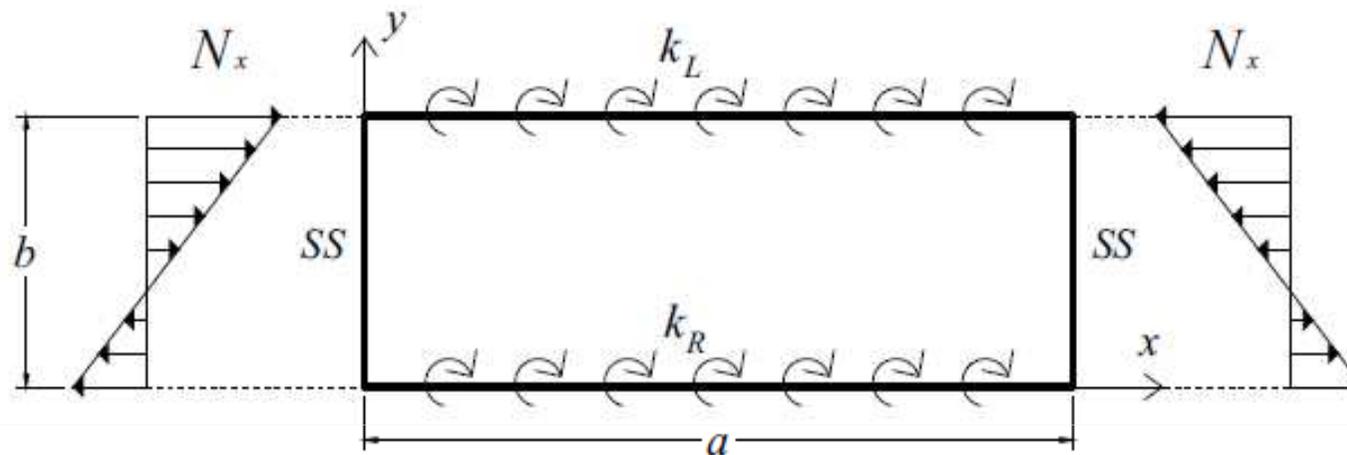
- Funciones de desplazamiento para una **placa RR** que satisfacen las condiciones de borde enumeradas

si $\alpha \leq 1.5$ →

$$\phi(y) = \frac{y}{b} + \frac{kb}{2D_{22}} \frac{y^2}{b^2} - \frac{12D_{22}^2 + 8D_{22}kb + k^2b^2}{D_{22}(6D_{22} + kb)} \frac{y^3}{b^3} + \frac{12D_{22}^2 + 8D_{22}kb + k^2b^2}{2D_{22}(6D_{22} + kb)} \frac{y^4}{b^4},$$



Pandeo local



- Funciones de desplazamiento para una **placa RR** que satisfacen las condiciones de borde enumeradas

$$\phi(y) = \frac{y}{b} + \frac{kb}{2D_{22}} \frac{y^2}{b^2} - \frac{3(4468D_{22}^2 + 1402D_{22}kb + 84k^2b^2)}{49D_{22}(38D_{22} + 3kb)} \frac{y^3}{b^3}$$

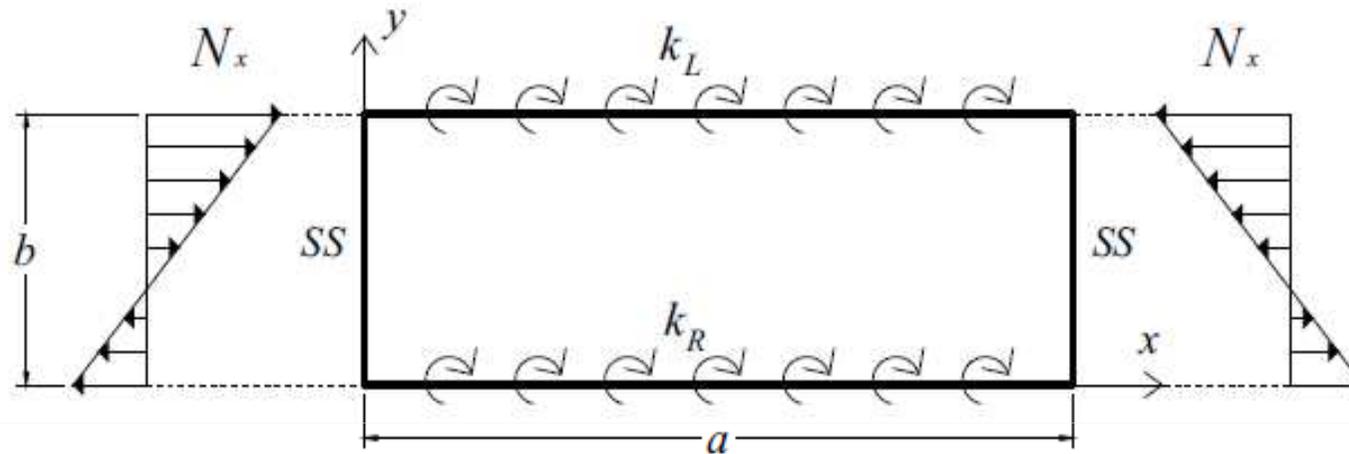
si $1.5 < \alpha < 2.0$ →

$$- \frac{37604D_{22}^2 + 9936D_{22}kb + 567k^2b^2}{98D_{22}(38D_{22} + 3kb)} \frac{y^4}{b^4}$$

$$- \frac{5(1452D_{22}^2 + 368D_{22}kb + 21k^2b^2)}{49D_{22}(38D_{22} + 3kb)} \frac{y^5}{b^5},$$



Pandeo local



- Funciones de desplazamiento para una **placa RR** que satisfacen las condiciones de borde enumeradas

$$\phi(y) = \frac{y}{b} + \frac{kb}{2D_{22}} \frac{y^2}{b^2} - \frac{(10796D_{22}^2 + 2734D_{22}kb + 168k^2b^2)}{9D_{22}(62D_{22} + 7kb)} \frac{y^3}{b^3}$$

si $\alpha \geq 2.0$

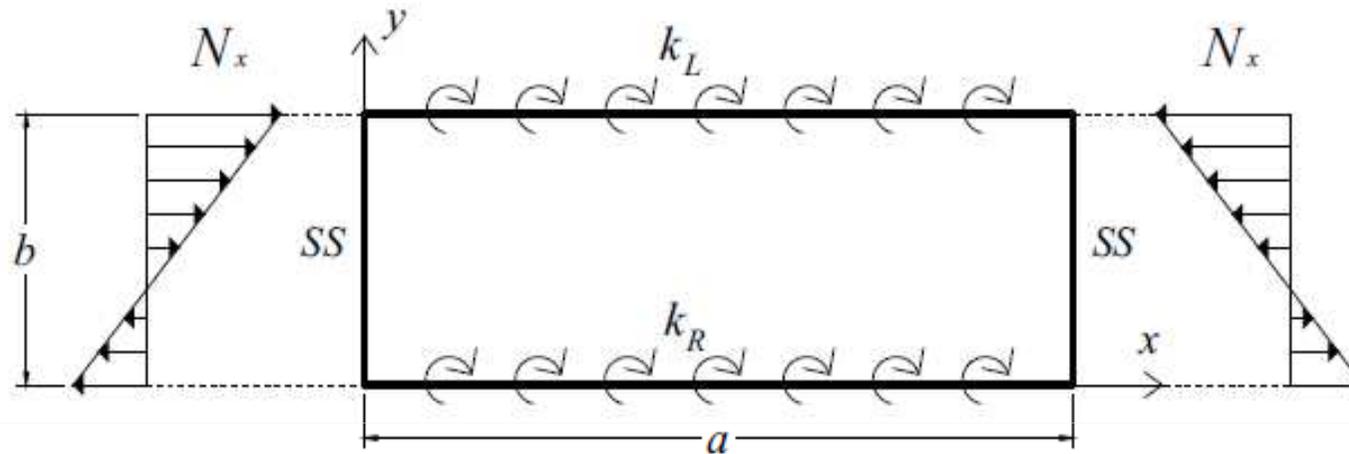


$$+ \frac{34996D_{22}^2 + 8464D_{22}kb + 483k^2b^2}{18D_{22}(62D_{22} + 7kb)} \frac{y^4}{b^4}$$

$$- \frac{5(1452D_{22}^2 + 368D_{22}kb + 21k^2b^2)}{9D_{22}(62D_{22} + 7kb)} \frac{y^5}{b^5}$$



Pandeo local

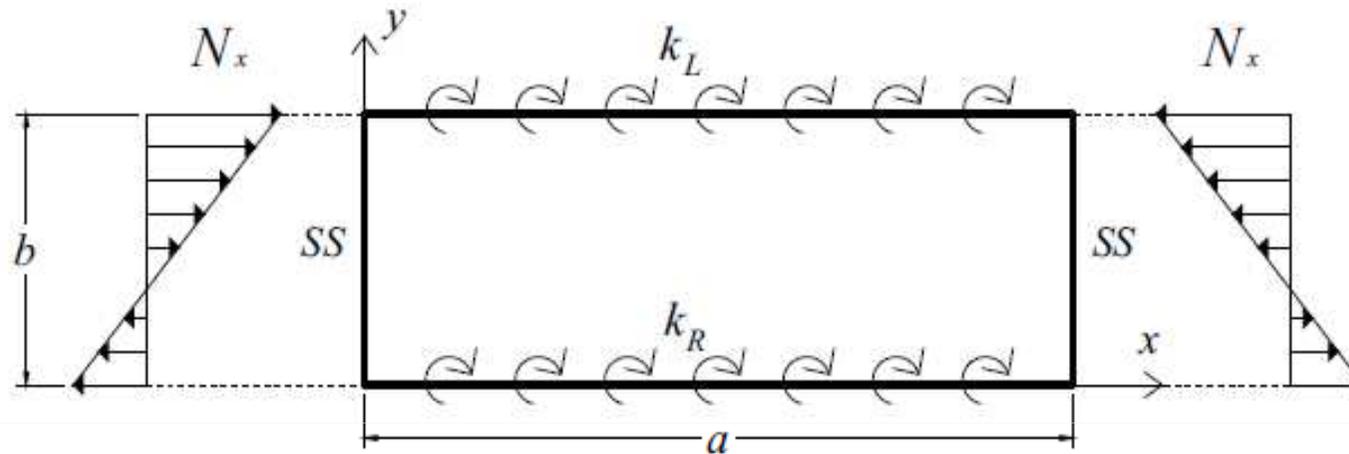


Cargas críticas para una placa RR

$$\boxed{\text{si } \alpha \leq 1.5} \rightarrow N_{x,cr}^{RR01} = \frac{48}{b^2(2-\alpha)} \left(\frac{(D_{12} + 2D_{66})(10D_{22} + kb)^2}{(11.13D_{22} + kb)^2} + \dots \right. \\ \left. \frac{\sqrt{D_{11}D_{22}} \sqrt{3.5(2D_{22} + kb)(12D_{22} + kb)}}{(11.13D_{22} + kb)} \right)$$



Pandeo local



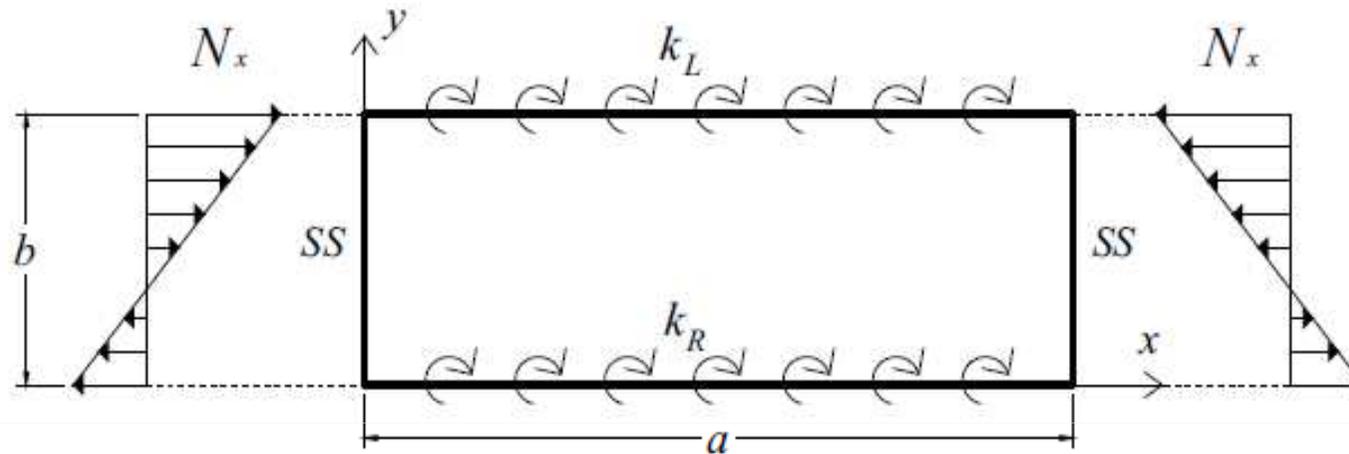
Cargas críticas para una placa RR

si $1.5 < \alpha < 2.0$

$$N_{x,cr}^{RR02} = \frac{132.9}{b^2 (3 - \alpha)} \left(\frac{\left((D_{12} + 2D_{66}) + \dots \right) 1.77 \sqrt{D_{11} D_{22}} (10.89 D_{22} + kb)^2 (13.53 D_{22} + kb)^2}{(13.22 D_{22} + kb)^4} \right)$$



Pandeo local



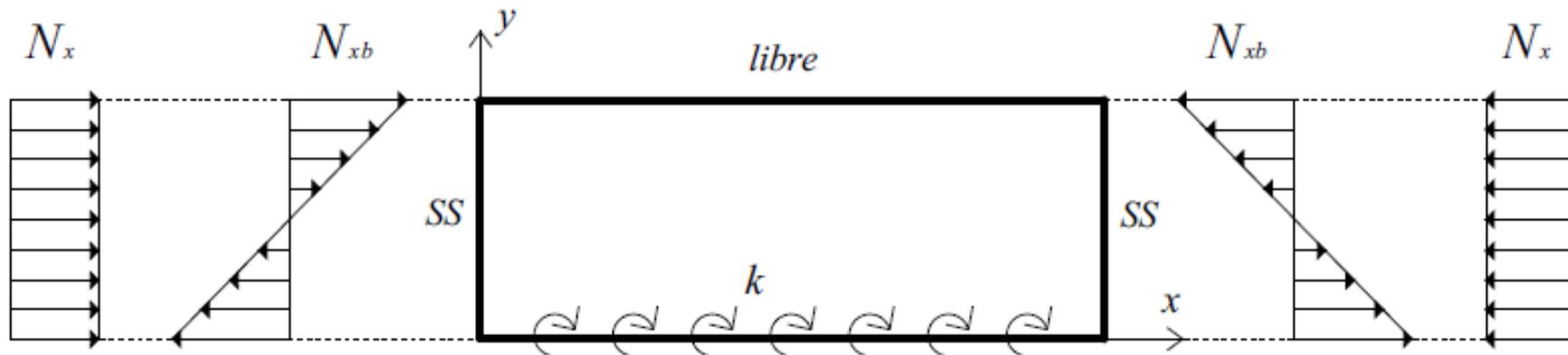
Cargas críticas para una placa RR

si $\alpha \geq 2.0$

$$N_{x,cr}^{RR03} = \frac{73.17}{b^2 (1.51 - \alpha)} \left(\frac{\left((D_{12} + 2D_{66}) + \dots \right) 1.77 \sqrt{D_{11} D_{22}} (13.52 D_{22} + kb)^2 (10.89 D_{22} + kb)^2}{(13.71 D_{22} + kb)^4} \right)$$



Pandeo local



- Solución para una **placa RF**:

$$\phi(y) = (1 - \omega_1) \frac{y}{b} + \omega_1 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right]$$

- Condiciones de borde para una **placa RF**:

Empotramiento
elástico ($y = 0$)

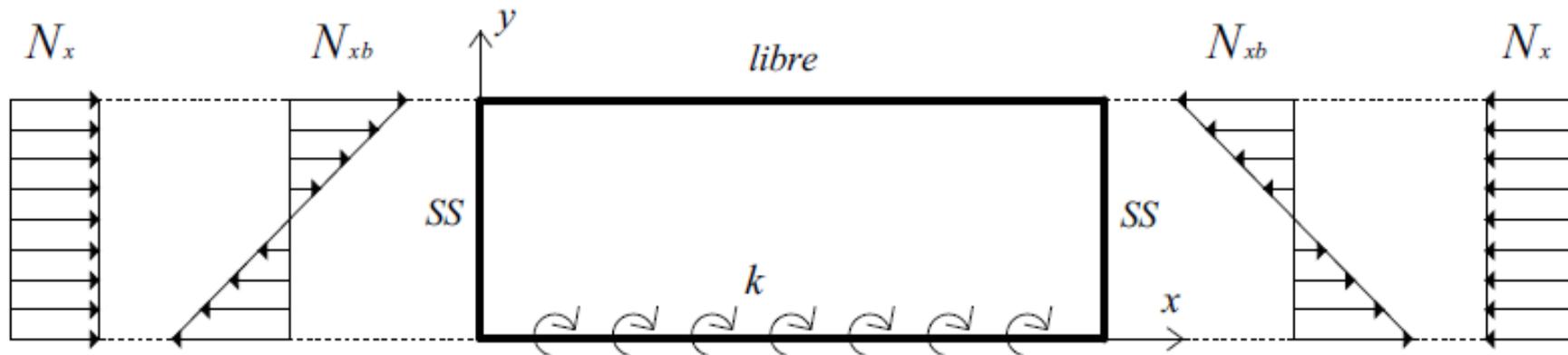


$$w(x, 0) = 0$$

$$M_y(x, 0) = -D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -k \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0}$$



Pandeo local



- Solución para una **placa RF**:

$$\phi(y) = (1 - \omega_1) \frac{y}{b} + \omega_1 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right]$$

- Condiciones de borde para una **placa RF**:

Borde libre
($y = b$)

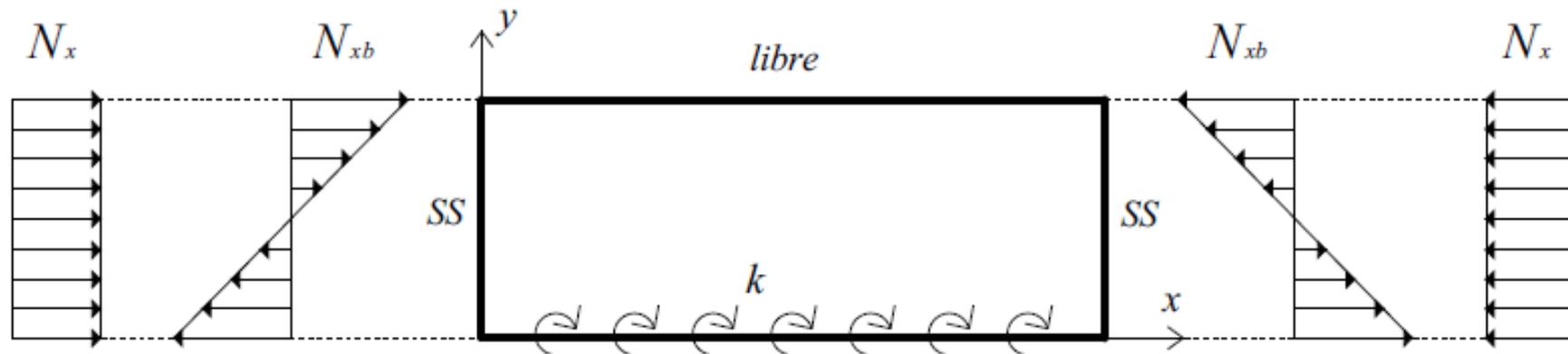


$$V_y(x, b) = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right]_{y=b} = 0$$

$$M_y(x, b) = \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0$$



Pandeo local



- Función de desplazamiento para una **placa RF** que satisfacen las condiciones de borde enumeradas

$$\phi(y) = \left(1 - \frac{kb}{3D_{22} + kb}\right) \frac{y}{b} + \frac{kb}{3D_{22} + kb} \left(\frac{3y^2}{2b^2} - \frac{y^3}{2b^3}\right)$$

Carga crítica para una placa RF

$$N_{x,cr}^{RF} = 3.12 \frac{\left(\begin{array}{l} 60D_{22}^2 D_{66} + kb(5D_{22} + kb)(8D_{66} - D_{12}) + \dots \\ 2.80\sqrt{D_{11} D_{22} kb} (3.37 D_{22} + kb)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right)}{b^2 \left(11.72 D_{22}^2 (1.33 - \alpha) + 6.77 D_{22} kb (1.27 - \alpha) + k^2 b^2 (1.23 - \alpha) \right)}$$



Pandeo local

Evaluación de la carga crítica local en vigas

1. *Calcular las resultantes de tensión axiales de todas las paredes de la sección: $(N_x)_I$, $(N_{xb})_{II}$, $(N_x)_{II}$.*
2. *Calcular el parámetro de carga crítica para una placa RR, asumiendo sus bordes descargados como simplemente apoyados:*

$$\lambda_I^{SS} = \frac{N_{x,cr}^{SS0I}}{(N_x)_I}, \quad i = 1, 2, 3$$

3. *Calcular el parámetro de carga crítica para una placa RF, asumiendo uno de sus bordes como simplemente apoyado y el otro borde libre:*

$$\left(\lambda_{II}^{SF}\right)^2 \left(\frac{(N_{xb})_{II}}{N_{xb,cr}^{SF}}\right)^2 + \lambda_{II}^{SF} \left(\frac{(N_x)_{II}}{N_{x,cr}^{SF}}\right) = 1$$



Pandeo local

Evaluación de la carga crítica local en vigas

4. *Chequear qué placa pandea primero.*

5. *Hallar la rigidez rotacional correspondiente a la placa adyacente:*

$$k_I = \frac{2D_{22}}{b_I} \left(1 - \frac{\lambda_I^{SS}}{\lambda_{II}^{SF}} \right),$$

$$k_I = 4D_{66}b_{II} \left(1 - \frac{\lambda_I^{SS}}{\lambda_{II}^{SF}} \right),$$

$$\lambda_I^{SS} < \lambda_{II}^{SF}$$

6. *Calcular el parámetro de carga crítica de una placa tipo I asumiendo restringidos rotacionalmente sus bordes descargados:*

$$\lambda_I^{RR} = \frac{N_{x,cr}^{RR0i}}{(N_x)_I}, \quad i = 1, 2, 3$$



Pandeo local

Evaluación de la carga crítica local en vigas

4. *Chequear qué tipo de placa pandea primero.*

5. *Hallar la rigidez rotacional correspondiente a la placa tipo II:*

$$k_{II} = \frac{2D_{22}}{b_I} \left(1 - \frac{\lambda_{II}^{SF}}{\lambda_I^{SS}} \right)$$

$$\lambda_{II}^{SF} < \lambda_I^{SS}$$

6. *Calcular el parámetro de carga crítica de una placa tipo II asumiendo restringido rotacionalmente uno de sus bordes y el otro libre:*

$$\left(\lambda_{II}^{RF} \right)^2 \left(\frac{(N_{xb})_{II}}{N_{xb,cr}^{RF}} \right)^2 + \lambda_{II}^{RF} \left(\frac{(N_x)_{II}}{N_{x,cr}^{RF}} \right) = 1$$



Tópicos

I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

III Validación del modelo estructural

IV Modelo computacional de optimización

V Diferentes esquemas de diseño óptimo

VI Conclusiones



Validación del modelo estructural

Teoría de VPD

Desplazamientos

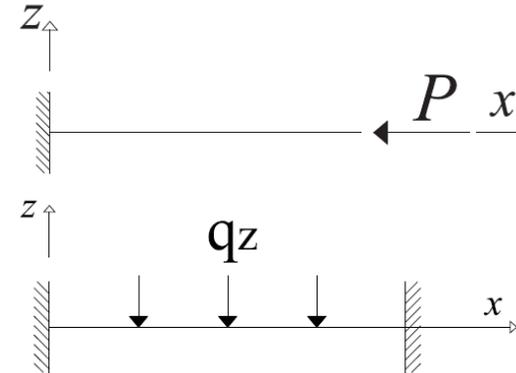
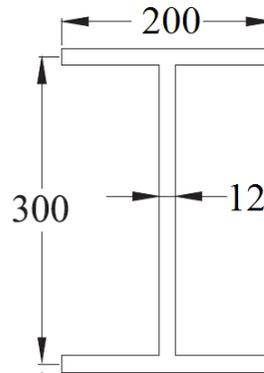
- Datos:

$$P = 1 \text{ kN}$$

$$q_z = 1 \text{ kN/m}$$

$$R \rightarrow \infty$$

$$L = 4 \text{ m}$$



DESPLAZAMIENTOS (mm)

Material: Vidrio-E/Vinilester

		ABAQUS	PTV	H-R	ϵ^{PTV}	ϵ^{H-R}
EL	$[0_4]$ u_{Tmax}	2.7E-02	2.7E-02	2.7E-02	-0.04	-0.05
	$[0/90]_s$ u_{Tmax}	3.8E-02	3.8E-02	3.8E-02	-0.02	-0.03
	$[45/-45]_s$ u_{Tmax}	2.5E-02	2.5E-02	2.5E-02	-0.04	-0.04
EE	$[0_4]$ u_{Tmax}	3.2E-01	3.2E-01	3.2E-01	0.93	-0.12
	$[0/90]_s$ u_{Tmax}	4.4E-01	4.4E-01	4.4E-01	0.72	-0.04
	$[45/-45]_s$ u_{Tmax}	3.7E-01	3.6E-01	3.7E-01	1.91	-0.32



Validación del modelo estructural

Teoría de VPD

Tensiones

		TENSIONES (Pa)					
		ABAQUS	PTV	H-R	ϵ^{PTV}	ϵ^{H-R}	
	[0 ₄]	σ_1	1468.00	1487.10	1487.10	-1.30	-1.30
		σ_2	72.79	81.09	81.09	-11.41	-11.41
		σ_3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		τ_{12}	568.90	537.0	579.03	5.60	-1.78
EE	[0/90] _s	σ_1	2103.00	2191.50	2191.50	-4.21	-4.21
		σ_2	251.90	252.75	252.75	-0.34	-0.34
		σ_3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		τ_{12}	577.40	537.0	579.03	6.99	-0.28
	[45/-45] _s	σ_1	1671.00	1901.6	1967.60	-13.80	-17.75
		σ_2	646.40	764.5	782.69	-18.27	-21.08
		σ_3	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00
		τ_{12}	615.50	694.8	694.75	-12.88	-12.88



Validación del modelo estructural

Teoría de VPD

Frecuencias

- Datos: $R = 4 \text{ m}$, $\beta = 90^\circ$,
 $L = 6.28 \text{ m}$

Vidrio-E/Vinilester

FRECUENCIAS (Hz)

		ABAQUS®	PTV	H-R	ϵ^{PTV}	ϵ^{H-R}
EE	[0 ₄]	65.54	66.12	65.81	-0.88	-0.41
		82.73	85.09	84.83	-2.85	-2.54
		132.84	133.92	133.37	-0.81	-0.40
	[90/0] _s	56.21	56.33	56.14	-0.21	0.12
		70.52	71.41	71.26	-1.27	-1.05
		114.93	114.66	114.33	0.23	0.52
	[45/-45] _s	62.76	63.62	62.93	-1.36	-0.27
		82.54	86.01	85.36	-4.20	-3.42
		125.81	127.66	126.42	-1.47	-0.48
	[(45/-45) ₂ /0 ₄ /(45/-45) ₂]	65.44	66.13	65.61	-1.06	-0.26
		84.65	87.68	87.21	-3.57	-3.03
			131.55	132.93	132.01	-1.05

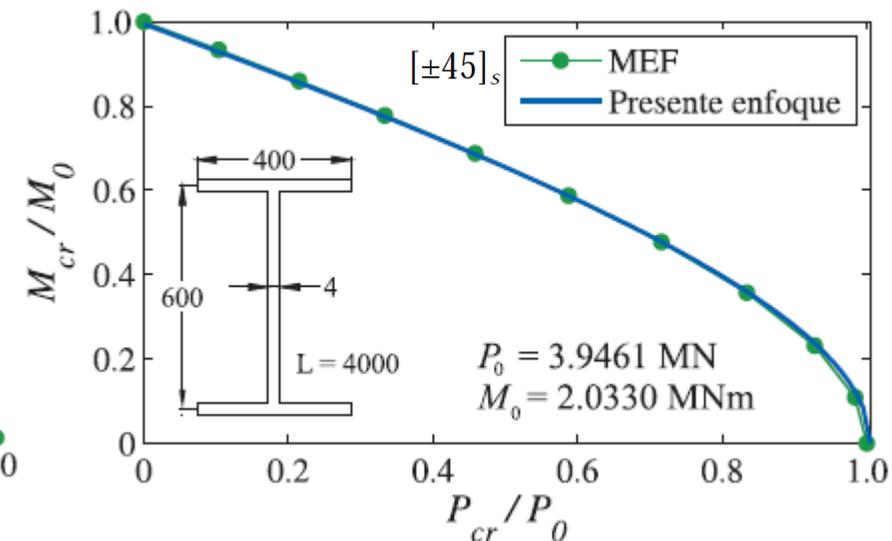
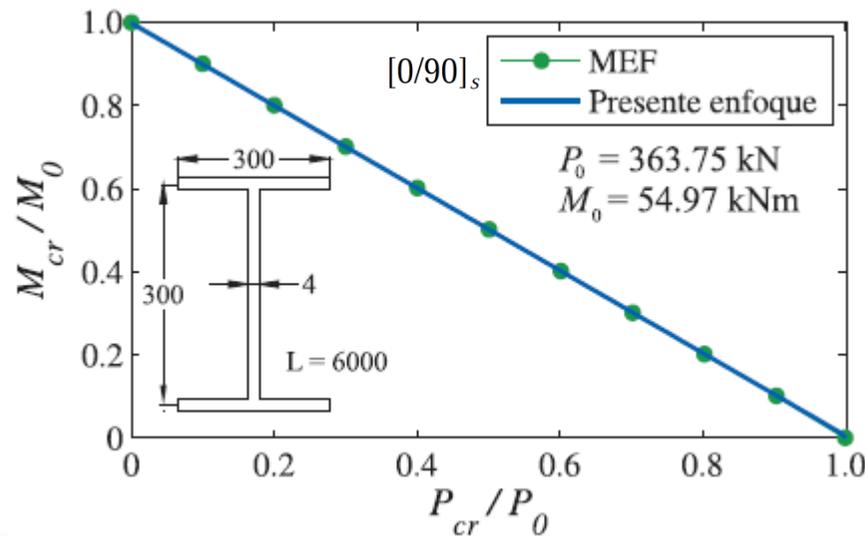
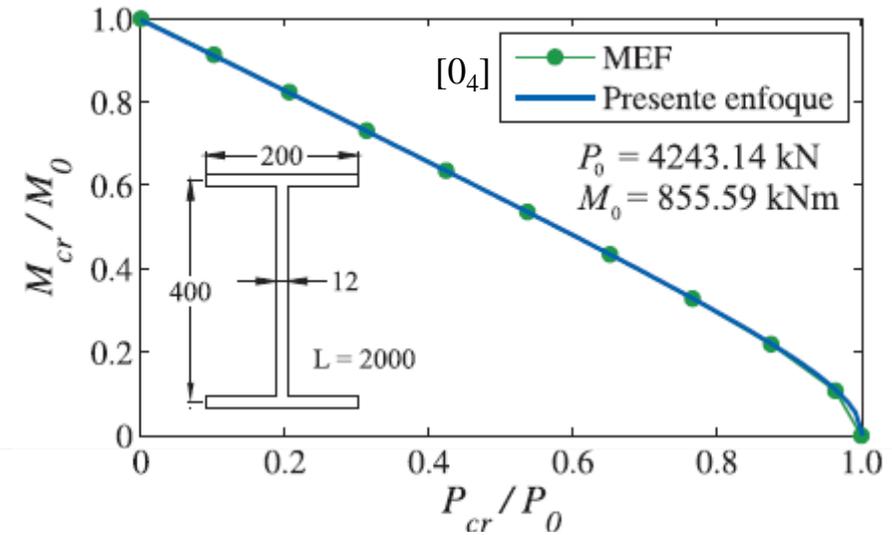


Validación del modelo estructural

Soluciones analíticas aproximadas

Pandeo global

Grafito AS4/Epoxi3501



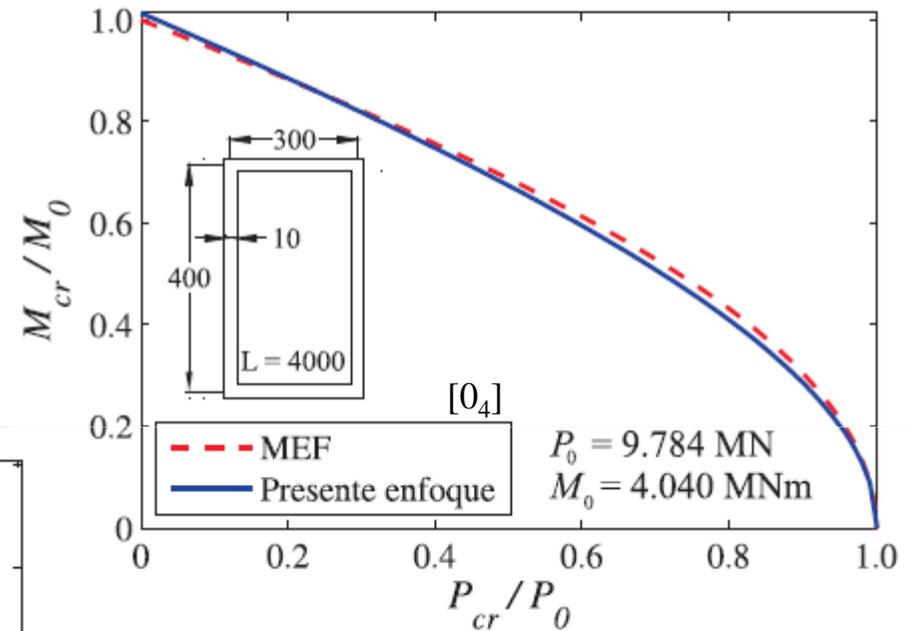
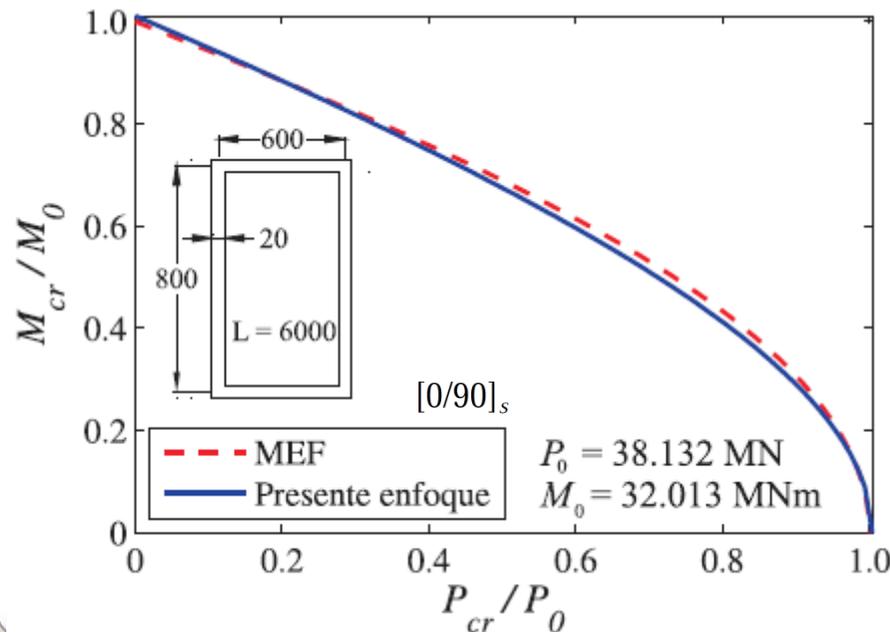
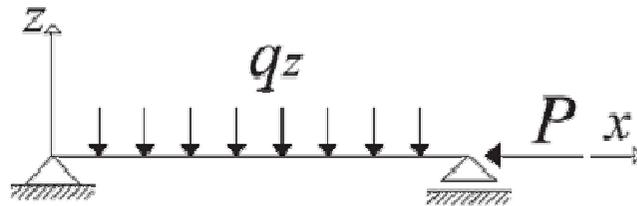


Validación del modelo estructural

Soluciones analíticas aproximadas

Pandeo global

Grafito AS4/Epoxi3501

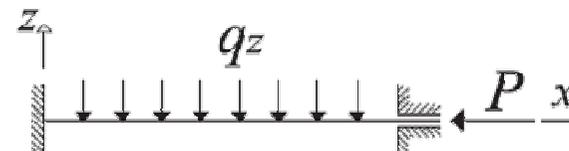




Validación del modelo estructural

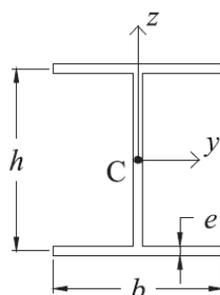
Soluciones analíticas aproximadas

Pandeo global



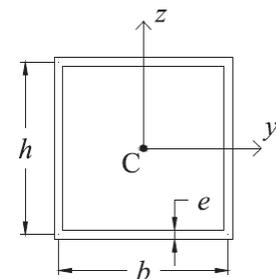
Parámetros de ajuste

	$\bar{\eta}_1$	$\bar{\eta}_2$	$\bar{\eta}_3$	$\bar{\eta}_4$	$\bar{\eta}_5$	$\bar{\eta}_6$
Perfil I	0.818	1.001	0.817	1.000	0.757	1.008
Perfil Cajón	0.720	1.024	0.481	1.216	0.753	1.008



$$\bar{\eta}_0 = 0.59 \frac{b}{h} - 0.03 \frac{L}{h} + 0.06 \frac{L}{b} - 0.47 \frac{e}{h}, \quad \text{si } \theta_k = 0^\circ,$$

$$\bar{\eta}_0 = 0.81 \frac{b}{h} - 0.06 \frac{L}{h} + 0.07 \frac{L}{b} + 0.12 \frac{e}{h}, \quad \text{si } \theta_k = (0^\circ, 90^\circ).$$



$$\bar{\eta}_0 = 1.33 \frac{b}{h} - 0.07 \frac{L}{h} + 0.07 \frac{L}{b} - 1.57 \frac{e}{h}, \quad \text{si } \theta_k = 0^\circ,$$

$$\bar{\eta}_0 = 1.27 \frac{b}{h} - 0.07 \frac{L}{h} + 0.08 \frac{L}{b} - 1.99 \frac{e}{h}, \quad \text{si } \theta_k = (0^\circ, 90^\circ).$$

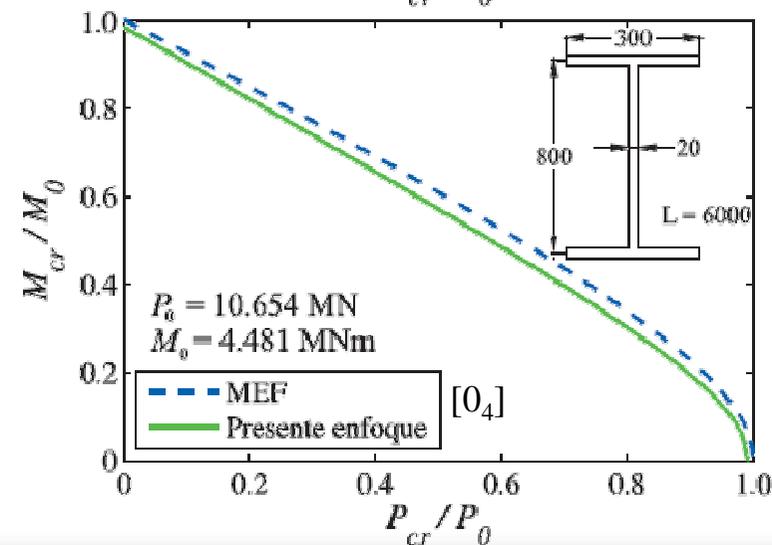
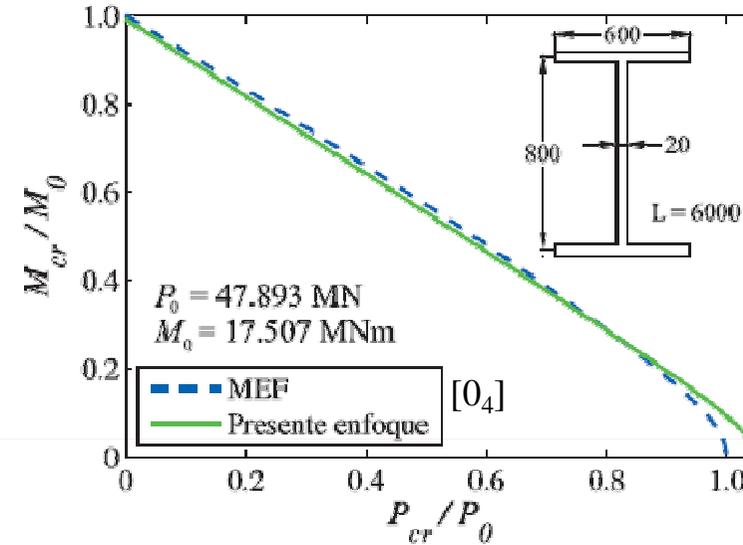
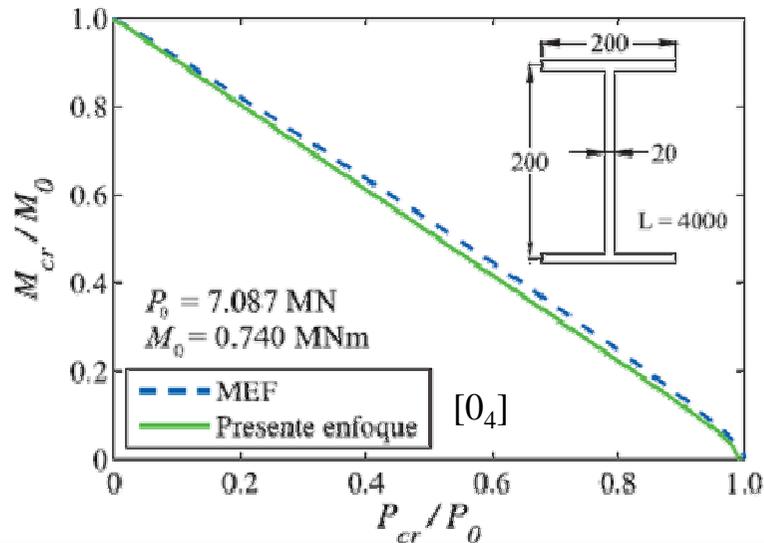
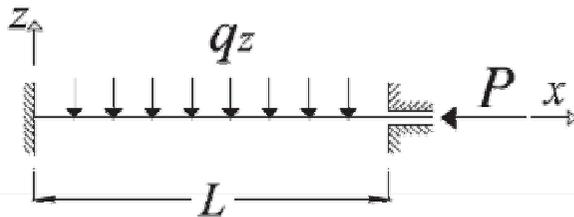


Validación del modelo estructural

Soluciones analíticas aproximadas

Pandeo global

Grafito AS4/Epoxi3501



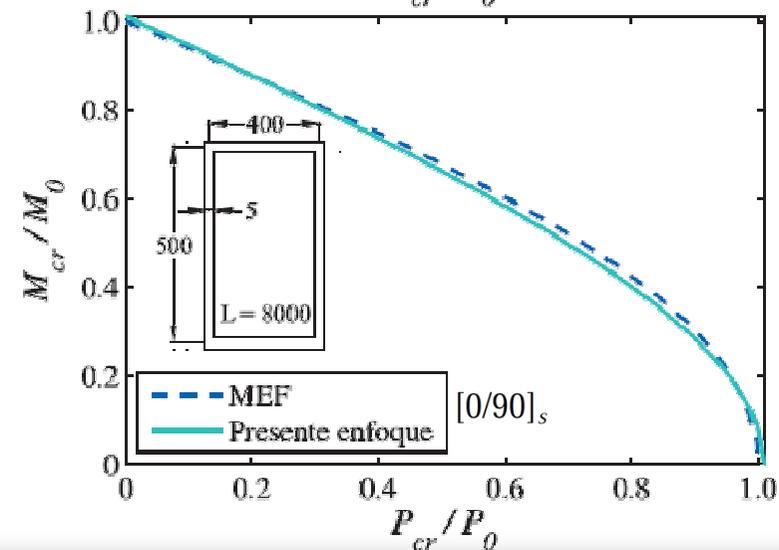
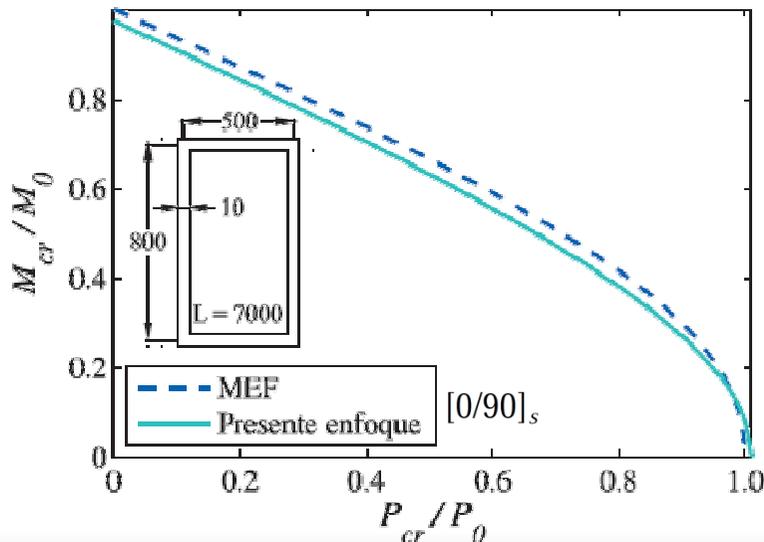
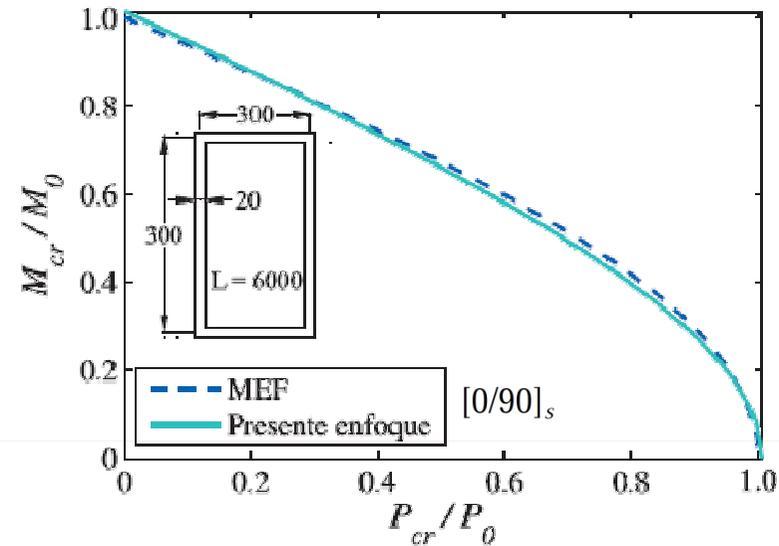
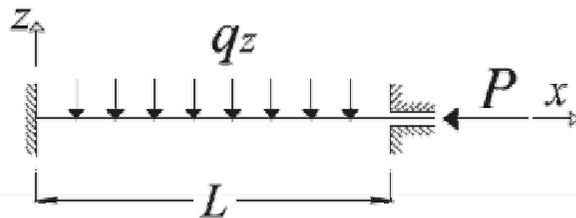


Validación del modelo estructural

Soluciones analíticas aproximadas

Pandeo global

Grafito AS4/Epoxi3501





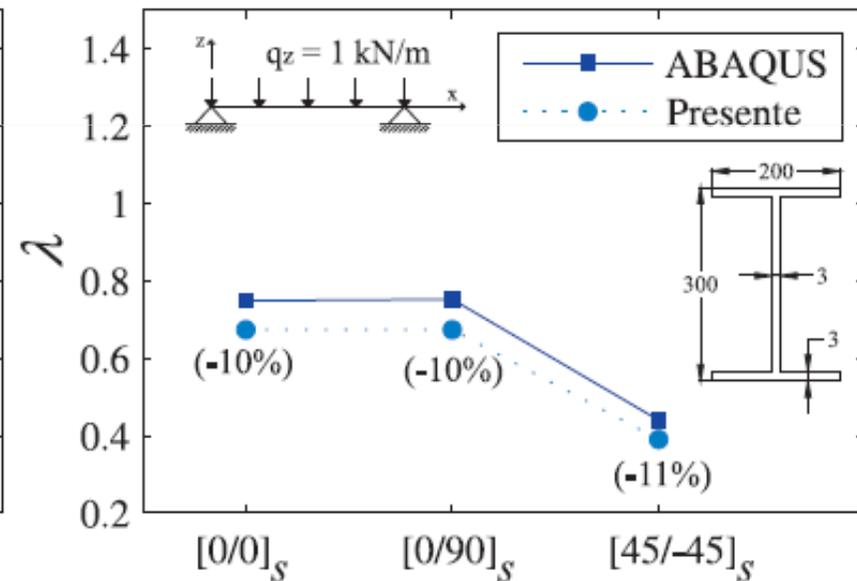
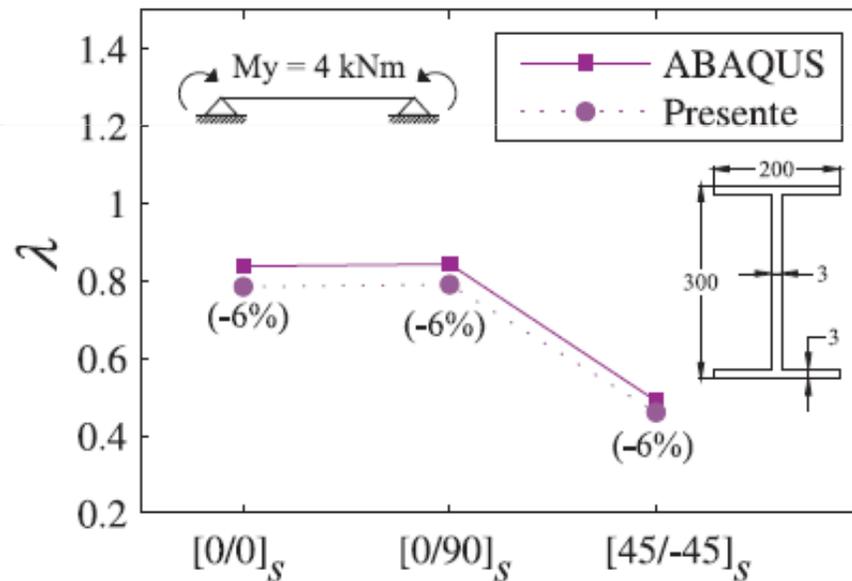
Validación del modelo estructural

Soluciones analíticas aproximadas

Pandeo local

Vidrio E/Vinilester

$L = 6\text{m}$





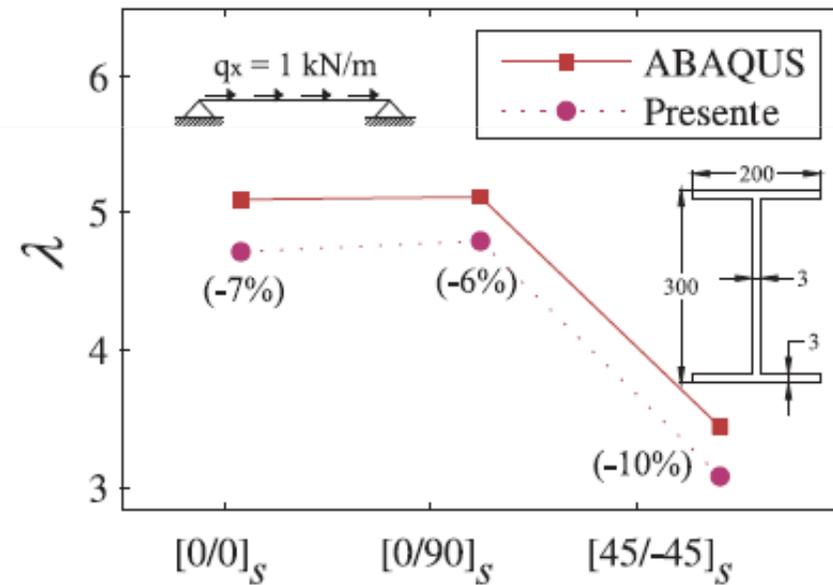
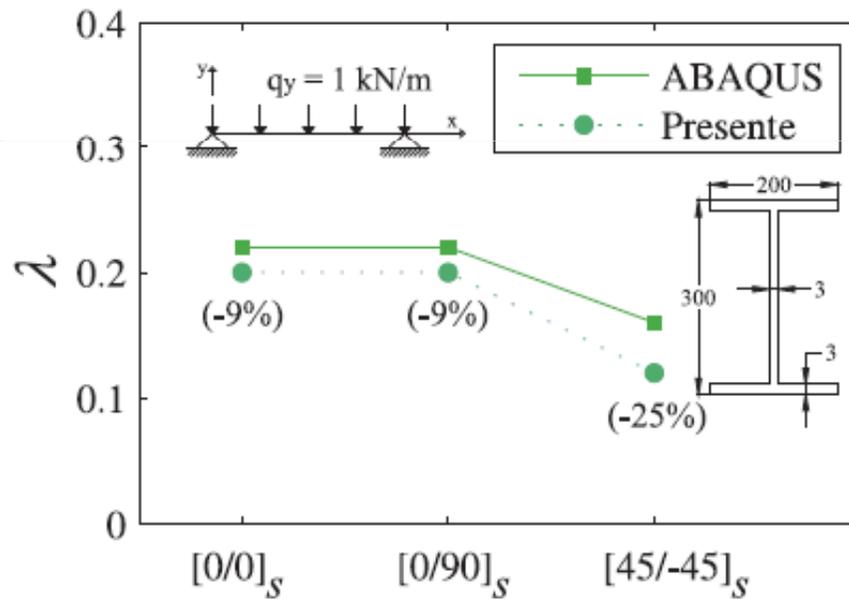
Validación del modelo estructural

Soluciones analíticas aproximadas

Pandeo local

Vidrio E/Vinilester

$L = 6\text{m}$





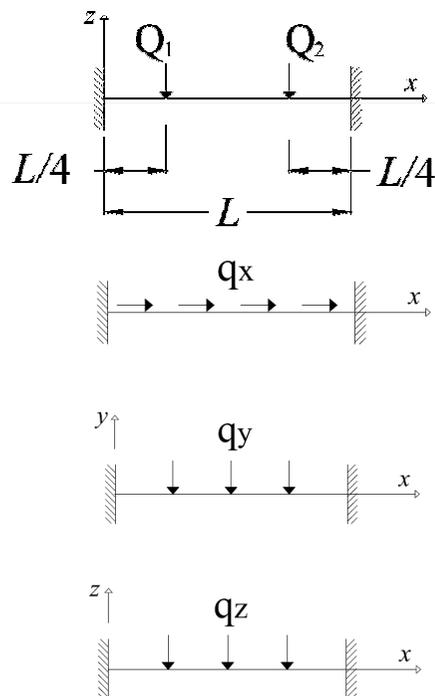
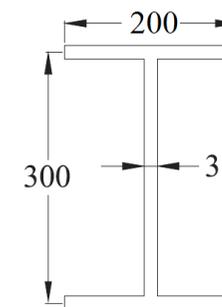
Validación del modelo estructural

Soluciones analíticas aproximadas

Pandeo local

Vidrio E/Vinilester

$L = 4 \text{ m}$



Tipo de carga	Laminado	Pared	λ^{Pe}	λ^{AB}	ε^{Pe}
$Q_1 = Q_2 = 8 \text{ kN}$	$[0_3]$	Ala	0.60	0.67	-10%
	$[0/90]_s$	Ala	0.61	0.74	-17%
$q_x = 1 \text{ kN/m}$	$[0_3]$	Alma	7.20	10.69	-33%
	$[0/90]_s$	Alma	7.30	10.87	-33%
$q_y = 1 \text{ kN/m}$	$[0_3]$	Ala	0.79	0.95	-17%
	$[0/90]_s$	Ala	0.81	0.99	-18%
$q_z = 1 \text{ kN/m}$	$[0_3]$	Ala	2.75	3.36	-18%
	$[0/90]_s$	Ala	2.77	3.39	-18%



Validación del modelo estructural

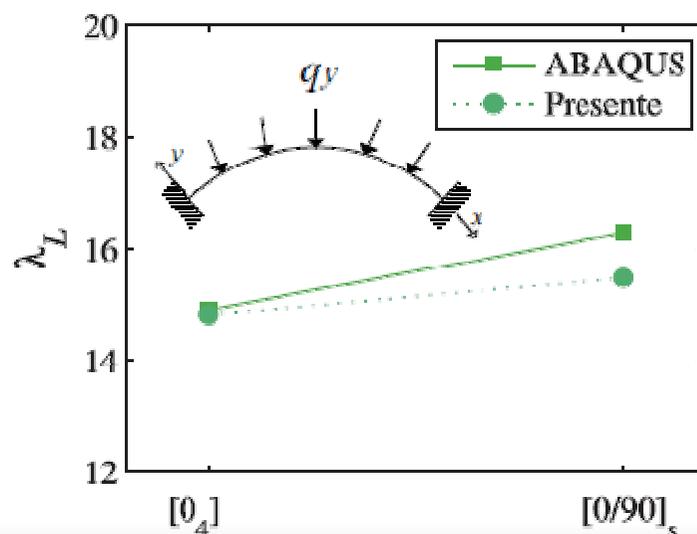
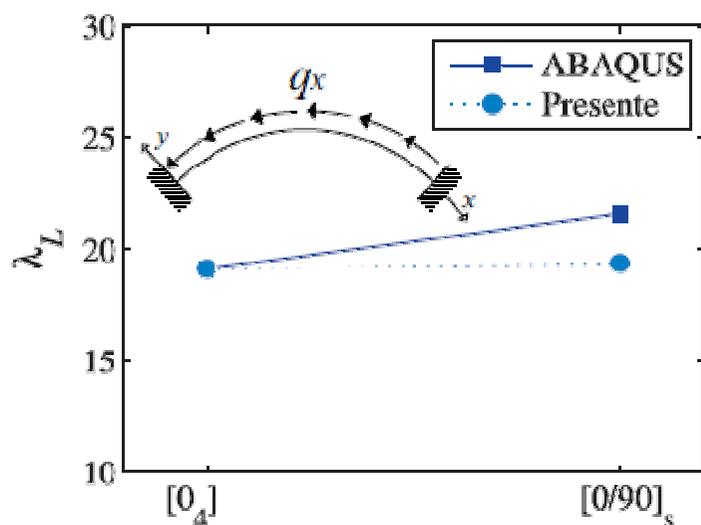
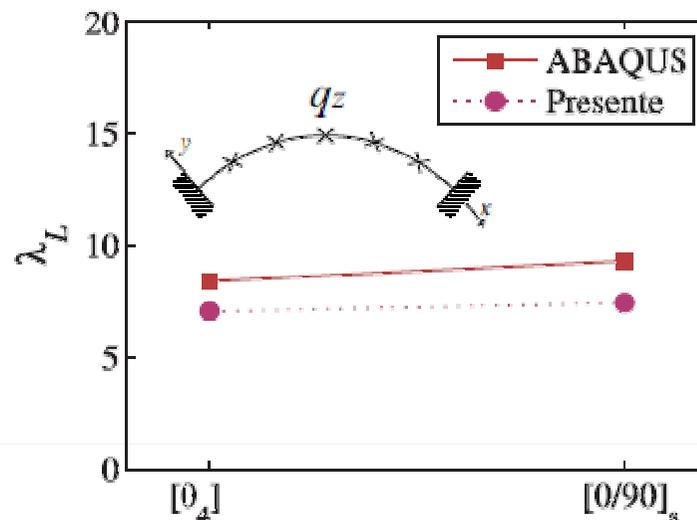
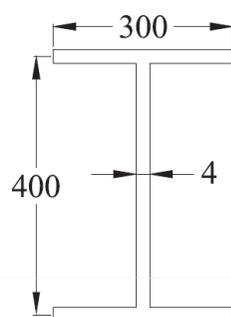
Soluciones analíticas aproximadas

Pandeo local

Vidrio E/Vinilester

$\beta = 90^\circ$, $R = 1.71$ m

$L = 3$ m





Tópicos

I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

III Validación del modelo estructural

IV Modelo computacional de optimización

V Diferentes esquemas de diseño óptimo

VI Conclusiones

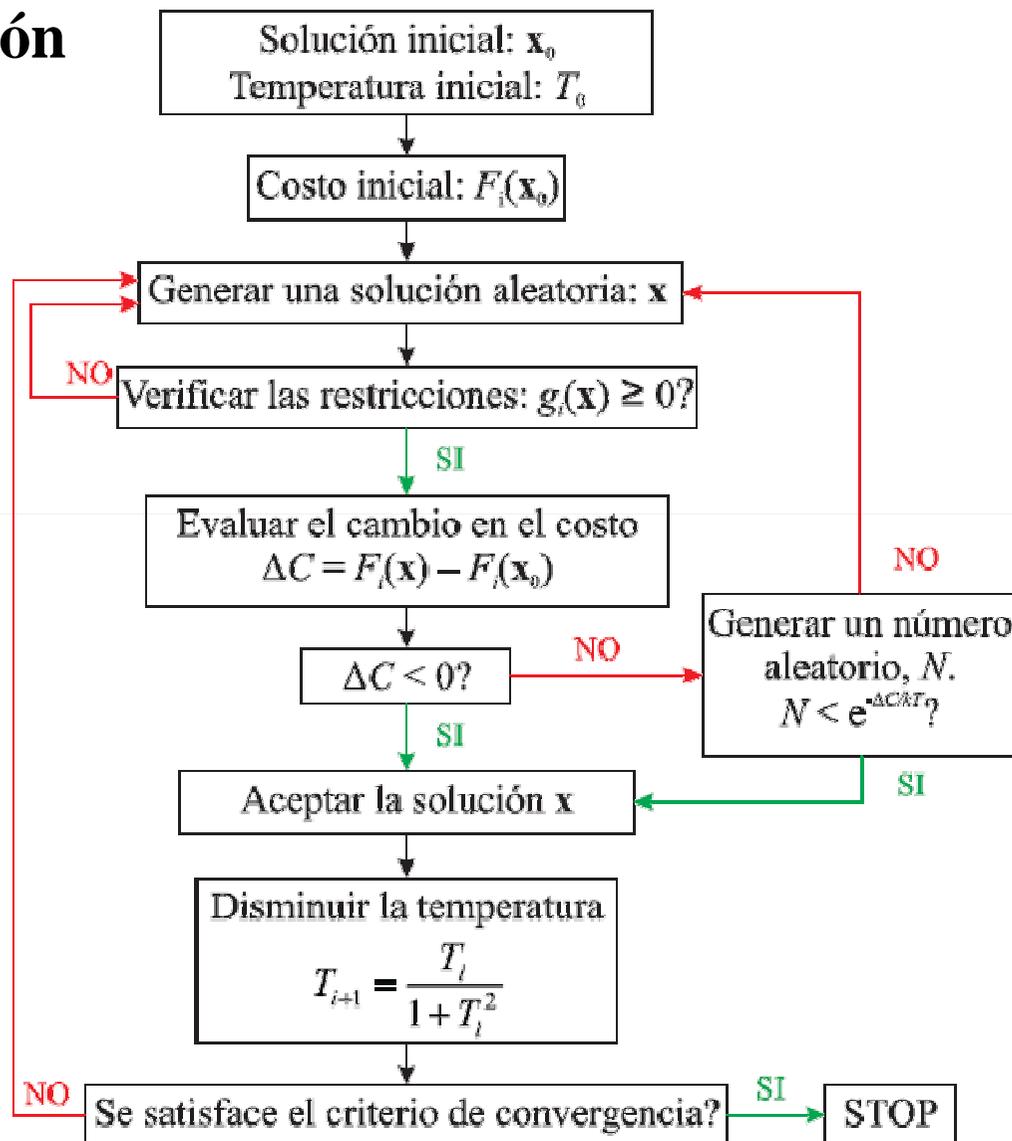


Técnicas de optimización

- Simulated Annealing (SA)

Generación:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \text{rnd} \left(\frac{\mathbf{x}^U - \mathbf{x}^L}{m} \right)$$





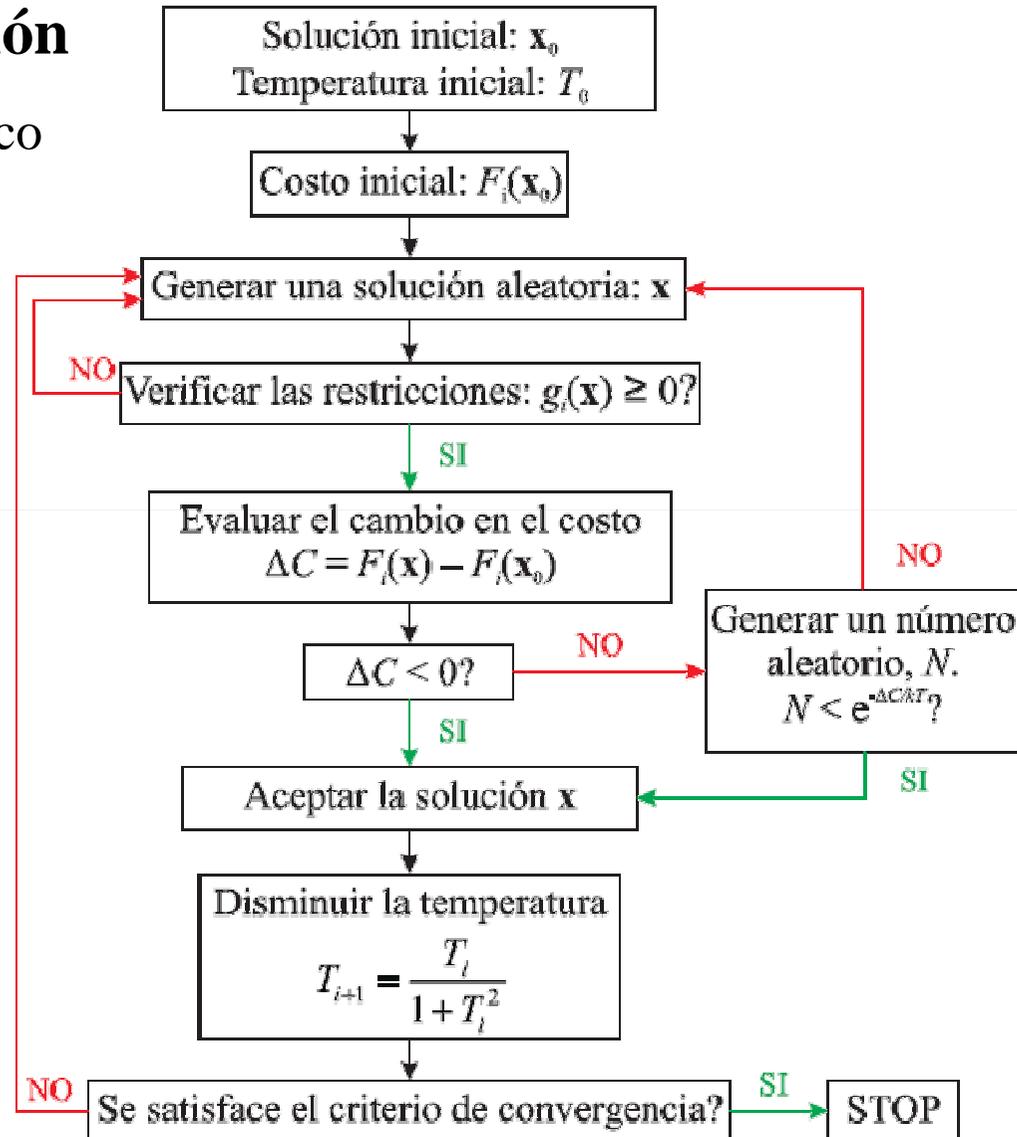
Técnicas de optimización

- Simulated Annealing Caótico (SAC)

Generación:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}^L + z_{i+1} (\mathbf{x}^U - \mathbf{x}^L)$$

$$z_{i+1} = \mu z_i (1 - z_i),$$





Tópicos

I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

III Validación del modelo estructural

IV Modelo computacional de optimización

V Diferentes esquemas de diseño óptimo

VI Conclusiones



Esquemas de diseño óptimo

• Esquema de diseño DO1

$$\min F(\mathbf{x}) = (1-W) \frac{A(\mathbf{x})}{A_0} + W \frac{\delta(\mathbf{x})}{\delta_0},$$

$$\mathbf{x} = \{h, b, e, \theta_k\},$$

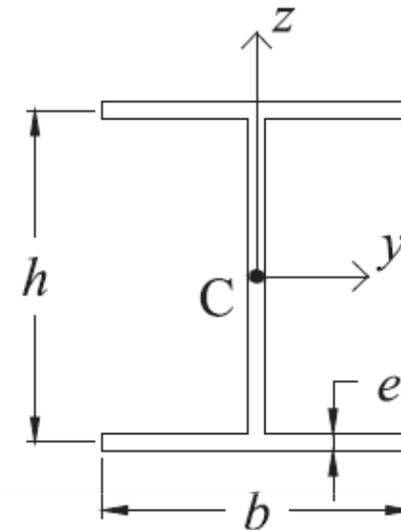
s.a:

$$R_{\min}(\mathbf{x}) > 1, \quad \lambda(\mathbf{x}) > 1, \quad \delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{\max},$$

$$\max(b/e, h/e) \leq 16,$$

$$\mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \quad (h, b, e) > 0,$$

$$-90^\circ \leq \theta_k \leq 90^\circ \quad \text{tq} \quad [\pm\theta_k]_s, \quad \min(b/e, h/e) \geq 10.$$

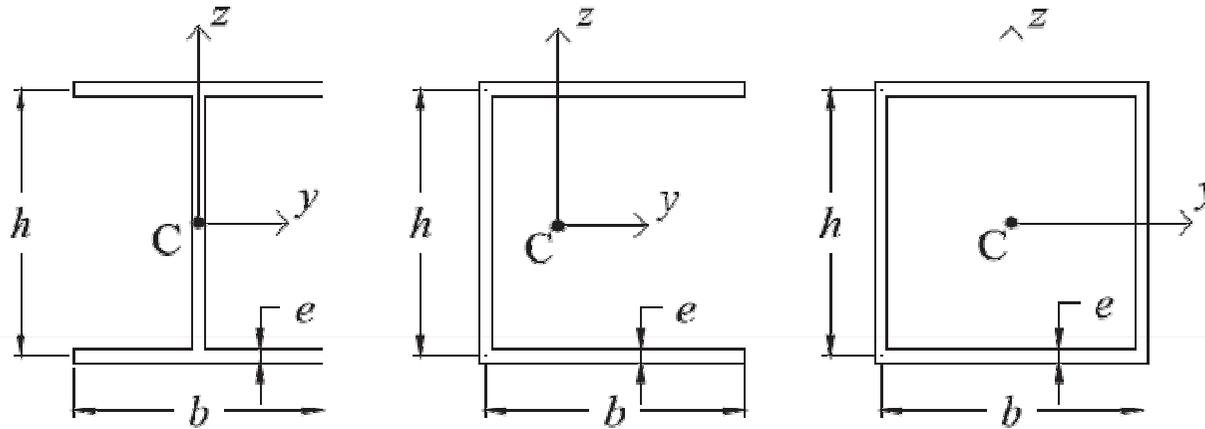


$$\delta_{\max} = \frac{L}{400}$$



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO1



Caso N°	Magnitud de las cargas			
	q_z [N/m]	M_x [Nm]	M_y [Nm]	M_z [Nm]
1	-1000	0	0	0
2	0	1000	0	0
3	0	0	1000	0
4	0	0	0	1000
5	0	1000	500	500
6	0	500	1000	500
7	0	500	500	1000



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO1

SA, $L = 6$ m, material Kevlar49/Epoxi

Soluciones óptimas considerando $W = 0$

Estado de Carga	Tipo de Perfil	h [cm]	b [cm]	e [cm]	Laminado	$F(\mathbf{x}^*) = A$ [cm ²]	δ [cm]
1	Perfil I	6.00	5.00	0.50	$[0_2]_s$	8.00	0.70
	Perfil U	11.00	8.00	0.80	$[0_2]_s$	21.60	0.69
	Perfil Cajón	6.00	4.50	0.40	$[0_2]_s$	8.40	0.71
2	Perfil I	18.00	19.00	1.30	$[0_2]_s$	72.80	0.31
	Perfil U	19.00	17.00	1.30	$[0_2]_s$	68.90	0.50
	Perfil Cajón	3.00	4.50	0.30	$[45/-45]_s$	4.50	0.70
3	Perfil I	5.50	6.50	0.50	$[0_2]_s$	9.25	0.12
	Perfil U	11.00	7.50	0.70	$[0_2]_s$	18.20	0.15
	Perfil Cajón	5.50	6.00	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
4	Perfil I	7.50	9.00	0.70	$[0_2]_s$	17.85	0.07
	Perfil U	6.50	8.00	0.60	$[0_2]_s$	13.50	0.06
	Perfil Cajón	6.00	5.50	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
5	Perfil I	18.50	19.50	1.30	$[0_2]_s$	74.75	0.29
	Perfil U	19.00	17.50	1.20	$[0_2]_s$	64.80	0.53
	Perfil Cajón	7.00	6.00	0.50	$[0_2]_s$	13.00	0.39



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO1

$L = 6$ m, material Kevlar49/Epoxi

Soluciones óptimas considerando $W = 0$

Estado de Carga	Tipo de Perfil	h [cm]	b [cm]	e [cm]	Laminado	$F(\mathbf{x}^*) = A$ [cm ²]	δ [cm]
1	Perfil I	6.00	5.00	0.50	$[0_2]_s$	8.00	0.70
	Perfil U	11.00	8.00	0.80	$[0_2]_s$	21.60	0.69
	Perfil Cajón	6.00	4.50	0.40	$[0_2]_s$	8.40	0.71
2	Perfil I	18.00	19.00	1.30	$[0_2]_s$	72.80	0.31
	Perfil U	19.00	17.00	1.30	$[0_2]_s$	68.90	0.50
	Perfil Cajón	3.00	4.50	0.30	$[45/-45]_s$	4.50	0.70
3	Perfil I	5.50	6.50	0.50	$[0_2]_s$	9.25	0.12
	Perfil U	11.00	7.50	0.70	$[0_2]_s$	18.20	0.15
	Perfil Cajón	5.50	6.00	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
4	Perfil I	7.50	9.00	0.70	$[0_2]_s$	17.85	0.07
	Perfil U	6.50	8.00	0.60	$[0_2]_s$	13.50	0.06
	Perfil Cajón	6.00	5.50	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
5	Perfil I	18.50	19.50	1.30	$[0_2]_s$	74.75	0.29
	Perfil U	19.00	17.50	1.20	$[0_2]_s$	64.80	0.53
	Perfil Cajón	7.00	6.00	0.50	$[0_2]_s$	13.00	0.39



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO1

$L = 6$ m, material Kevlar49/Epoxi

Soluciones óptimas considerando $W = 0$

Estado de Carga	Tipo de Perfil	h [cm]	b [cm]	e [cm]	Laminado	$F(\mathbf{x}^*) = A$ [cm ²]	δ [cm]
1	Perfil I	6.00	5.00	0.50	$[0_2]_s$	8.00	0.70
	Perfil U	11.00	8.00	0.80	$[0_2]_s$	21.60	0.69
	Perfil Cajón	6.00	4.50	0.40	$[0_2]_s$	8.40	0.71
2	Perfil I	18.00	19.00	1.30	$[0_2]_s$	72.80	0.31
	Perfil U	19.00	17.00	1.30	$[0_2]_s$	68.90	0.50
	Perfil Cajón	3.00	4.50	0.30	$[45/-45]_s$	4.50	0.70
3	Perfil I	5.50	6.50	0.50	$[0_2]_s$	9.25	0.12
	Perfil U	11.00	7.50	0.70	$[0_2]_s$	18.20	0.15
	Perfil Cajón	5.50	6.00	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
4	Perfil I	7.50	9.00	0.70	$[0_2]_s$	17.85	0.07
	Perfil U	6.50	8.00	0.60	$[0_2]_s$	13.50	0.06
	Perfil Cajón	6.00	5.50	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
5	Perfil I	18.50	19.50	1.30	$[0_2]_s$	74.75	0.29
	Perfil U	19.00	17.50	1.20	$[0_2]_s$	64.80	0.53
	Perfil Cajón	7.00	6.00	0.50	$[0_2]_s$	13.00	0.39



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO1

$L = 6$ m, material Kevlar49/Epoxi

Soluciones óptimas considerando $W = 0$

Estado de Carga	Tipo de Perfil	h [cm]	b [cm]	e [cm]	Laminado	$F(\mathbf{x}^*) = A$ [cm ²]	δ [cm]
1	Perfil I	6.00	5.00	0.50	$[0_2]_s$	8.00	0.70
	Perfil U	11.00	8.00	0.80	$[0_2]_s$	21.60	0.69
	Perfil Cajón	6.00	4.50	0.40	$[0_2]_s$	8.40	0.71
2	Perfil I	18.00	19.00	1.30	$[0_2]_s$	72.80	0.31
	Perfil U	19.00	17.00	1.30	$[0_2]_s$	68.90	0.50
	Perfil Cajón	3.00	4.50	0.30	$[45/-45]_s$	4.50	0.70
3	Perfil I	5.50	6.50	0.50	$[0_2]_s$	9.25	0.12
	Perfil U	11.00	7.50	0.70	$[0_2]_s$	18.20	0.15
	Perfil Cajón	5.50	6.00	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
4	Perfil I	7.50	9.00	0.70	$[0_2]_s$	17.85	0.07
	Perfil U	6.50	8.00	0.60	$[0_2]_s$	13.50	0.06
	Perfil Cajón	6.00	5.50	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
5	Perfil I	18.50	19.50	1.30	$[0_2]_s$	74.75	0.29
	Perfil U	19.00	17.50	1.20	$[0_2]_s$	64.80	0.53
	Perfil Cajón	7.00	6.00	0.50	$[0_2]_s$	13.00	0.39



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO1

$L = 6$ m, material Kevlar49/Epoxi

Soluciones óptimas considerando $W = 0$

Estado de Carga	Tipo de Perfil	h [cm]	b [cm]	e [cm]	Laminado	$F(\mathbf{x}^*) = A$ [cm ²]	δ [cm]
1	Perfil I	6.00	5.00	0.50	$[0_2]_s$	8.00	0.70
	Perfil U	11.00	8.00	0.80	$[0_2]_s$	21.60	0.69
	Perfil Cajón	6.00	4.50	0.40	$[0_2]_s$	8.40	0.71
2	Perfil I	18.00	19.00	1.30	$[0_2]_s$	72.80	0.31
	Perfil U	19.00	17.00	1.30	$[0_2]_s$	68.90	0.50
	Perfil Cajón	3.00	4.50	0.30	$[45/-45]_s$	4.50	0.70
3	Perfil I	5.50	6.50	0.50	$[0_2]_s$	9.25	0.12
	Perfil U	11.00	7.50	0.70	$[0_2]_s$	18.20	0.15
	Perfil Cajón	5.50	6.00	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
4	Perfil I	7.50	9.00	0.70	$[0_2]_s$	17.85	0.07
	Perfil U	6.50	8.00	0.60	$[0_2]_s$	13.50	0.06
	Perfil Cajón	6.00	5.50	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
5	Perfil I	18.50	19.50	1.30	$[0_2]_s$	74.75	0.29
	Perfil U	19.00	17.50	1.20	$[0_2]_s$	64.80	0.53
	Perfil Cajón	7.00	6.00	0.50	$[0_2]_s$	13.00	0.39



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO1

$L = 6$ m, material Kevlar49/Epoxi

Soluciones óptimas considerando $W = 0$

Estado de Carga	Tipo de Perfil	h [cm]	b [cm]	e [cm]	Laminado	$F(\mathbf{x}^*) = A$ [cm ²]	δ [cm]
1	Perfil I	6.00	5.00	0.50	$[0_2]_s$	8.00	0.70
	Perfil U	11.00	8.00	0.80	$[0_2]_s$	21.60	0.69
	Perfil Cajón	6.00	4.50	0.40	$[0_2]_s$	8.40	0.71
2	Perfil I	18.00	19.00	1.30	$[0_2]_s$	72.80	0.31
	Perfil U	19.00	17.00	1.30	$[0_2]_s$	68.90	0.50
	Perfil Cajón	3.00	4.50	0.30	$[45/-45]_s$	4.50	0.70
3	Perfil I	5.50	6.50	0.50	$[0_2]_s$	9.25	0.12
	Perfil U	11.00	7.50	0.70	$[0_2]_s$	18.20	0.15
	Perfil Cajón	5.50	6.00	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
4	Perfil I	7.50	9.00	0.70	$[0_2]_s$	17.85	0.07
	Perfil U	6.50	8.00	0.60	$[0_2]_s$	13.50	0.06
	Perfil Cajón	6.00	5.50	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
5	Perfil I	18.50	19.50	1.30	$[0_2]_s$	74.75	0.29
	Perfil U	19.00	17.50	1.20	$[0_2]_s$	64.80	0.53
	Perfil Cajón	7.00	6.00	0.50	$[0_2]_s$	13.00	0.39



Esquemas de diseño óptimo

- Esquema de diseño DO2

$$\min F(\mathbf{x}) = 0.5 \frac{A(\mathbf{x})}{A_0} + 0.5 \frac{\delta(\mathbf{x})}{\delta_0},$$

$\mathbf{x} = \{h, b, n_c, \theta_k\},$

s.a:

$$R_{min}(\mathbf{x}) > 1, \quad \lambda(\mathbf{x}) > 1, \quad \delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{m\acute{a}x},$$
$$\lambda_L(\mathbf{x}) > 1, \quad CT-HE(\mathbf{x}) < 1,$$
$$\mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \quad (h, b, e) > 0, \quad \theta_k = (0^\circ, 90^\circ),$$
$$\min(b/e, h/e) \geq 10.$$

$W = 0.5$

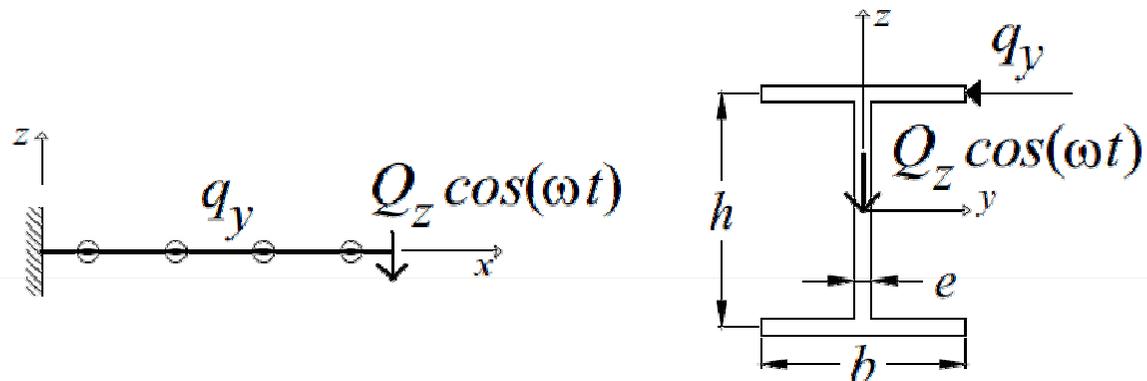
$\delta_{m\acute{a}x} = \frac{L}{800}$



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO2

SA, $L = 4$ m, material CarbonoAS4/Peek



Soluciones óptimas y restricciones estructurales.

b^* [m]	h^* [m]	n_c^*	e^* [m]	Laminado	$F(\mathbf{x}^*)$	$A(\mathbf{x}^*)$ [m ²]	$\delta(\mathbf{x}^*)$ [m]
0.80	0.57	8	0.016	[0 ₈]	0.604	0.035	0.003

Esquemas de diseño óptimo

- Esquema de diseño DO3

$$\min F(\mathbf{x}) = \frac{E_1 A(\mathbf{x})^{3/2}}{M_{cr}(\mathbf{x})}$$

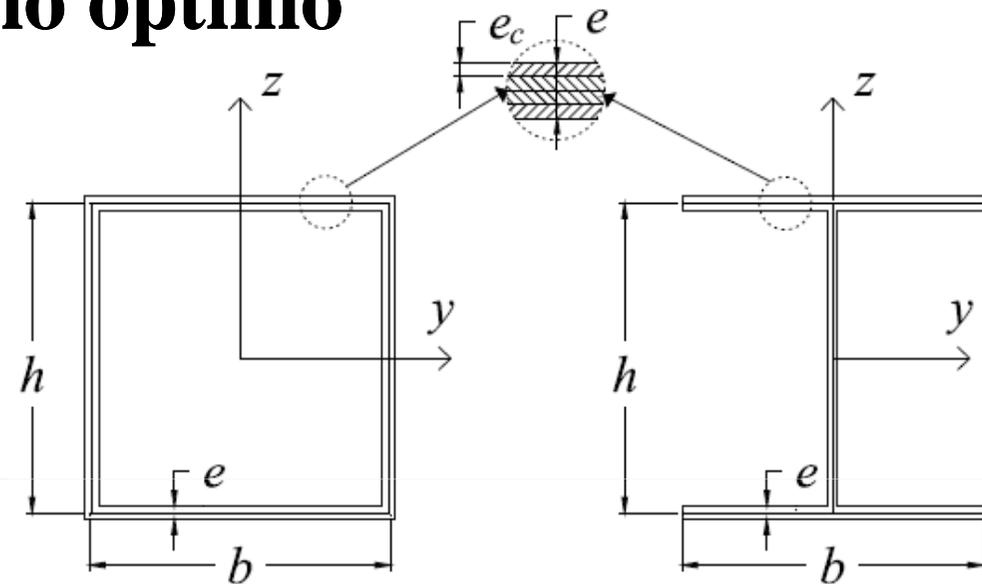
$$\mathbf{x} = \{h, b, e_c, n_c, \theta_k\},$$

s.a:

$$R_{min}(\mathbf{x}) > 1, \quad \lambda(\mathbf{x}) > 1, \quad \delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{m\acute{a}x}, \quad \lambda_L(\mathbf{x}) > 1,$$

$$\mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \quad (h, b, e_c, n_c) > 0, \quad \theta_k = (0^\circ, 90^\circ),$$

$$A(\mathbf{x}) \leq A_{max}, \quad \min(b/e, h/e) \geq 10,$$



$$\delta_{m\acute{a}x} = \frac{L}{400}$$



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO3

SA, SAC, $L = 4$ m, $R = 5$ m, material Vidrio E/Vinilester

Dominios factibles de las variables de diseño.

Dominios	b [m]	h [m]	e_c [mm]	n_c	θ_k [°]
D1	0.2:0.1:0.6	0.2:0.1:0.6	1:1:5	2:2:60	0 - 90
D2	0.1:0.05:0.6	0.1:0.05:0.6	0.5:0.5:5	2:2:60	0 - 90
D3	0.1:0.01:0.6	0.1:0.01:0.6	0.5:0.5:5	2:2:60	0 - 90

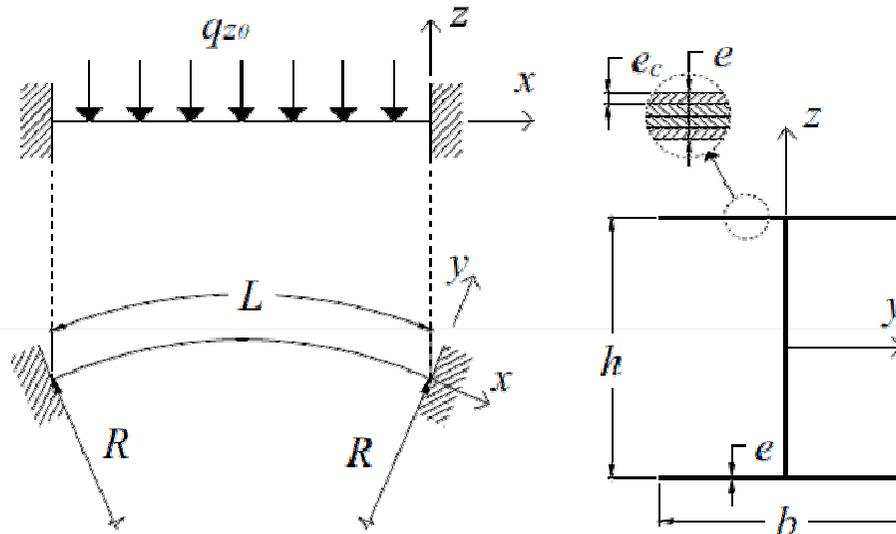
Parámetros de optimización.

Diseño	R	T_{min}	μ
PO1	10	10^{-10}	4
PO2	10	10^{-8}	4
PO3	100	10^{-10}	4
PO4	100	10^{-15}	4



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO3

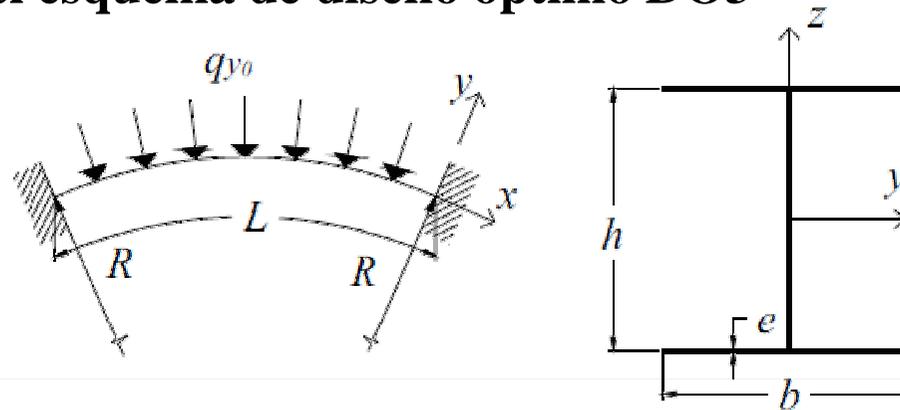


Diseño	b^* [m]	h^* [m]	e_c^* [m]	n_c^*	Laminado	$F(\mathbf{x}^*)$	M_{cr} [MNm]	A [m ²]	Iteraciones
D1/PO1/SAC	0.40	0.60	0.005	2	[0 ₂]	11.180	3.61	0.014	700
D1/PO1/SA	0.40	0.60	0.005	2	[0 ₂]	11.180	3.61	0.014	700
D2/PO1/SAC	0.45	0.60	0.0045	2	[0 ₂]	10.551	3.63	0.0135	700
D2/PO1/SA	0.40	0.60	0.0005	18	[0 ₁₈]	10.607	3.25	0.0126	700



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO3

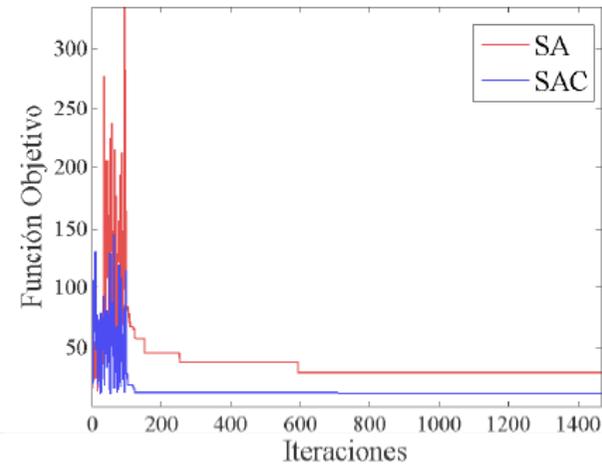


Diseño	b^* [m]	h^* [m]	e_c^* [m]	n_c^*	Laminado	M_{cr} [MNm]	A [m ²]	$F(\mathbf{x}^*)$	Iteraciones
D1/PO2/SAC	0.50	0.60	0.004	2	[0 ₂]	2.98	0.0128	11.819	400
D1/PO2/SA	0.50	0.50	0.004	2	[0 ₂]	2.40	0.0120	13.363	400
D1/PO1/SA	0.60	0.60	0.001	8	[0 ₈]	3.55	0.0144	11.868	700
D2/PO3/SAC	0.55	0.60	0.004	2	[0 ₂]	3.27	0.0136	11.800	360
D2/PO3/SA	0.45	0.50	0.0025	4	[0 ₄]	2.70	0.0140	14.952	360
D3/PO4/SAC	0.53	0.60	0.004	2	[0 ₂]	3.16	0.0133	11.795	1500
D3/PO4/SA	0.25	0.46	0.001	10	[0 ₁₀]	0.79	0.0096	28.703	1500



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO3



Diseño	b^* [m]	h^* [m]	e_c^* [m]	n_c^*	Laminado	M_{cr} [MNm]	A [m ²]	$F(\mathbf{x}^*)$	Iteraciones
D1/PO2/SAC	0.50	0.60	0.004	2	[0 ₂]	2.98	0.0128	11.819	400
D1/PO2/SA	0.50	0.50	0.004	2	[0 ₂]	2.40	0.0120	13.363	400
D1/PO1/SA	0.60	0.60	0.001	8	[0 ₈]	3.55	0.0144	11.868	700
D2/PO3/SAC	0.55	0.60	0.004	2	[0 ₂]	3.27	0.0136	11.800	360
D2/PO3/SA	0.45	0.50	0.0025	4	[0 ₄]	2.70	0.0140	14.952	360
D3/PO4/SAC	0.53	0.60	0.004	2	[0 ₂]	3.16	0.0133	11.795	1500
D3/PO4/SA	0.25	0.46	0.001	10	[0 ₁₀]	0.79	0.0096	28.703	1500



Esquemas de diseño óptimo

- Esquema de diseño DO4

$$\min F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left(\frac{f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_j^*)}{f_j(\mathbf{x}_j^*)} \right)^2,$$

$$f_1(\mathbf{x}) = 1/M_{cr}(\mathbf{x}), \quad f_2(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \quad f_3(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = \{b, h, e, \theta_k\},$$

s.a.:

$$\delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{\max}, \quad \min(FS_{xt}(\mathbf{x}), FS_{xc}(\mathbf{x}), FS_{xy}(\mathbf{x})) > 1,$$

$$P(\mathbf{x}) < P_{cr}, \quad M_{y,\max}(\mathbf{x}) < M_{cr}, \quad \lambda_L(\mathbf{x}) > 1,$$

$$\mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \quad (b, h, e) > 0, \quad \theta_k = (0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ),$$

$$A(\mathbf{x}) \leq A_{\max}, \quad \min(b/e, h/e) \geq 10.$$



Esquemas de diseño óptimo

• Esquema de diseño DO4

$$\min F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left(\frac{f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_j^*)}{f_j(\mathbf{x}_j^*)} \right)^2,$$

$$\min f_j(\mathbf{x}),$$

s.a :

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U.$$

$$f_1(\mathbf{x}) = 1/M_{cr}(\mathbf{x}), \quad f_2(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \quad f_3(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = \{b, h, e, \theta_k\},$$

s.a.:

$$\delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{\max}, \quad \min(FS_{xt}(\mathbf{x}), FS_{xc}(\mathbf{x}), FS_{xy}(\mathbf{x})) > 1,$$

$$P(\mathbf{x}) < P_{cr}, \quad M_{y,\max}(\mathbf{x}) < M_{cr}, \quad \lambda_L(\mathbf{x}) > 1,$$

$$\mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \quad (b, h, e) > 0, \quad \theta_k = (0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ),$$

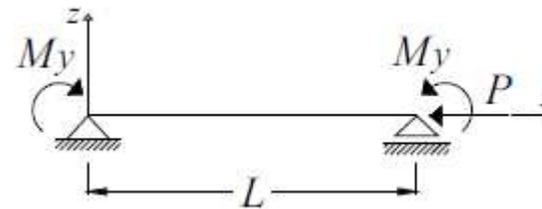
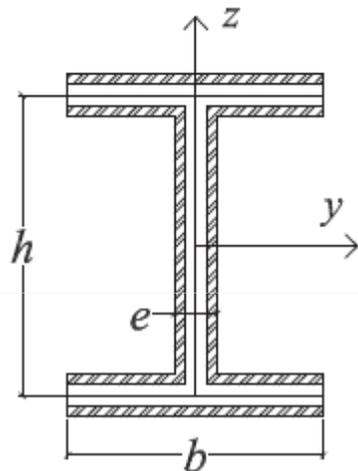
$$A(\mathbf{x}) \leq A_{\max}, \quad \min(b/e, h/e) \geq 10.$$



Esquemas de diseño óptimo

- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO4

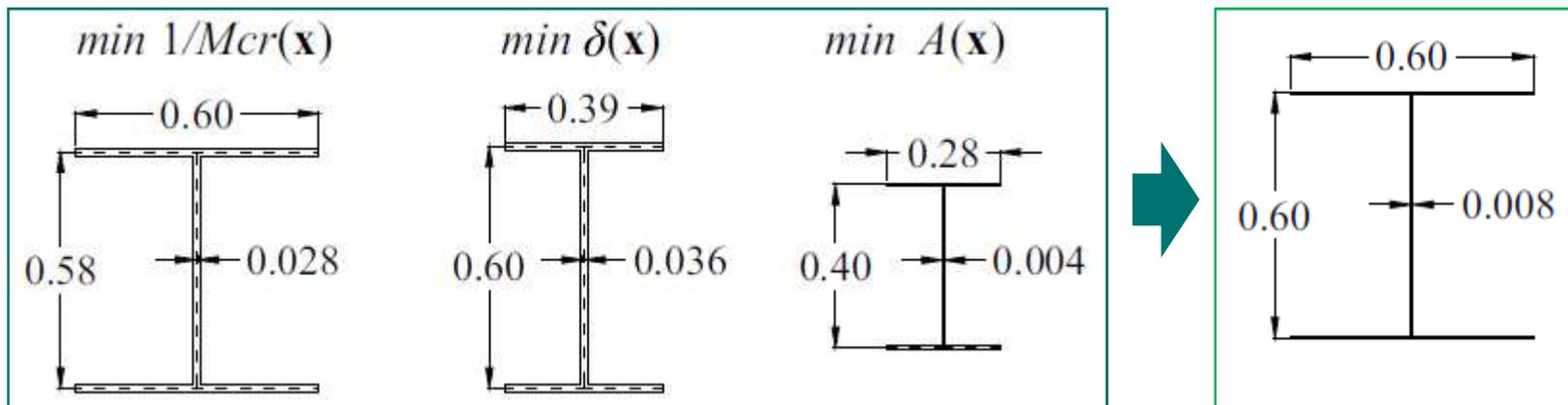
SA, $L = 6$ m, material Vidrio E/Poliester



Caso SAP

Laminados: $[0/0]_s$, $[0/90]_s$, $[45/-45]_s$

$h = [0.1:0.01:0.6]$ m, $b = [0.1:0.01:0.6]$ m, $e = [0.004:0.004:0.06]$ m





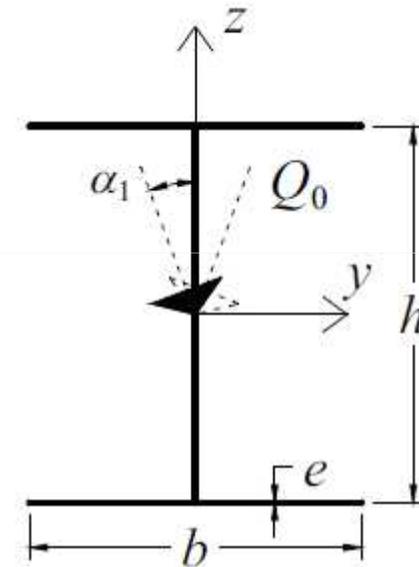
Esquemas de diseño óptimo

- Esquema de diseño DO5 – Diseño óptimo bajo incertidumbre

$$\min_{\mathbf{x}=\{b,h,e,\theta_k\}} \left(\max_{\mathbf{N}=\{N_z,N_y\}} \frac{a_{11}A(\mathbf{x})^{3/2}}{M_{cr}(\mathbf{x},\mathbf{N})} \right),$$

s.a:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x},\mathbf{N}) &> 1, & \lambda_L(\mathbf{x},\mathbf{N}) &> 1, \\ R_{min}(\mathbf{x},\mathbf{N}) &> 1, & \delta(\mathbf{x},\mathbf{N}) &\leq \delta_{max}, \\ \mathbf{x}^L &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, & \mathbf{N}^L &\leq \mathbf{N} \leq \mathbf{N}^U, \\ (b,h,e) &> 0, & \theta_k &= (0^\circ, 90^\circ), \\ A(\mathbf{x}) &\leq A_{max}, & \min(b,h)/e &\geq 10. \end{aligned}$$



$$C1: \begin{cases} N_z = Q_0 \cos(\alpha_1) \\ N_y = Q_0 \sin(\alpha_1) \end{cases}$$



Esquemas de diseño óptimo

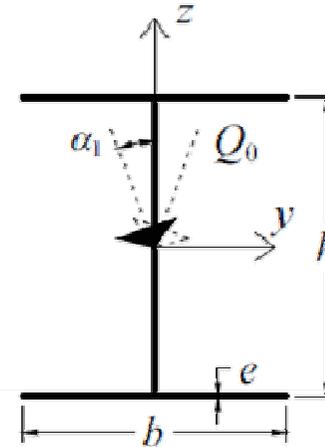
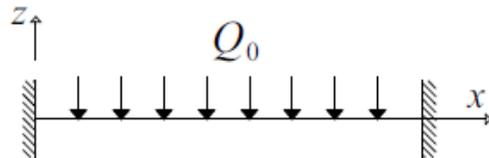
- Aplicación del esquema de diseño óptimo DO5

SA, $L = 6$ m, material Grafito T300/Epoxi 5208

- Intervalos de variación de α_1 :

$$I_{10} = [-10^\circ:5^\circ:10^\circ], I_{20} = [-20^\circ:10^\circ:20^\circ],$$

$$I_{30} = [-30^\circ:15^\circ:30^\circ]$$



$$C1: \begin{cases} N_z = Q_0 \cos(\alpha_1) \\ N_y = Q_0 \sin(\alpha_1) \end{cases}$$

Casos	N^* [kN]	b^* [m]	h^* [m]	e^* [m]	Laminado	Costo Mínimo
Nominal	-	0.36	0.68	0.007	$[0/90]_s$	31.08
C1 - I_{10}	(-20,0)	0.36	0.68	0.007	$[0/90]_s$	31.08
C1 - I_{20}	(-20,0)	0.36	0.68	0.007	$[0/90]_s$	31.08
C1 - I_{30}	(-20,0)	0.38	0.46	0.008	$[0/90]_s$	34.74



Tópicos

I Introducción

II Análisis estructural de vigas FRP de pared delgada

III Validación del modelo estructural

IV Modelo computacional de optimización

V Diferentes esquemas de diseño óptimo

VI Conclusiones



Sumario y contribuciones

• Esquema global de diseño

- ✓ Se formularon diferentes **esquemas de diseño óptimo** de vigas de pared delgada construidas con materiales FRP.
- ✓ Tales esquemas fueron empleados para el **diseño de vigas rectas y curvas** sometidas a diferentes situaciones hipotéticas de carga y vinculación.
- ✓ En los diferentes esquemas de diseño óptimo se consideraron **diferentes objetivos** (la carga de pandeo global de la estructura, el desplazamiento máximo y el peso total de la misma).
- ✓ Se propusieron distintas alternativas a fin de contemplar los objetivos en forma conjunta e individual.
- ✓ Todos los diseños fueron condicionados por **restricciones geométricas y estructurales**.
- ✓ Se incorporó el concepto de **incertidumbre en la carga** al modelo de diseño, empleando un esquema mini-max.



Sumario y contribuciones

• Modelo estructural

- ✓ Se desarrolló un **modelo teórico** basado en el principio de Hellinger-Reissner para el análisis de vigas curvas de pared delgada con laminación simétrica y balanceada.
- ✓ Se obtuvieron soluciones explícitas aproximadas que permiten determinar las cargas críticas de **pandeo global** de vigas rectas FRP.
- ✓ Dichas soluciones son aplicables a vigas de sección transversal doblemente simétricas sometidas a distintos estados de flexo-compresión bajo determinadas condiciones de vinculación.
- ✓ Se desarrollaron fórmulas explícitas aproximadas para evaluar las **cargas críticas locales** en vigas FRP rectas y curvas de pared delgada con laminación ortótropa.



Sumario y contribuciones

• Técnicas de optimización

- ✓ Se emplearon las técnicas de optimización **Simulated Annealing** y **Simulated Annealing Caótico** para la obtención de los diseños óptimos.
- ✓ Se realizó una comparación entre ellas, evaluando la performance de cada una de ellas en diferentes aplicaciones.
- ✓ Se destaca la convergencia de la técnica **Simulated Annealing Caótico** en la resolución de problemas de gran escala.



Trabajo a futuro

- ✓ La teoría de vigas empleada puede ser sustituida por el enfoque de trabajos virtuales para analizar laminaciones genéricas.
- ✓ Desarrollar expresiones generales que permitan verificar la estabilidad local de la estructura para el caso de laminaciones generales.
- ✓ Implementar computacionalmente el modelo estructural para el diseño de vigas de sección transversal genérica. Esto representaría una importante extensión en cuanto al diseño óptimo de vigas, dado que podría realizarse la optimización de forma.
- ✓ En investigaciones futuras se estudiará la formulación de diseños óptimos basados en confiabilidad (RBDO) en vigas de pared delgada compuestas.



Agradecimientos

- ✓ A mis directores: **Víctor Hugo Cortínez** y **Marcelo Tulio Piovan**.
- ✓ A mis padres, **Carmen** y **Héctor Hugo**, a mis hermanos **Guadalupe** y **Juan**, y a **Franco**, por haberme acompañado en este camino.
- ✓ A mis compañeros y amigos del Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos.
- ✓ Al Departamento de Ingeniería de la UNS, a la Facultad Regional Bahía Blanca de la UTN y al CONICET.



**TESIS DOCTOR EN INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS DE PARED DELGADA COMPUESTAS

FLORENCIA REGUERA

DIRECTOR: Dr. Ing. Víctor H. Cortínez

CO-DIRECTOR: Dr. Ing. Marcelo T. Piovan

Abril 2013 – Bahía Blanca, Argentina