



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

TESIS DE DOCTOR EN INGENIERÍA

DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS DE PARED  
DELGADA COMPUESTAS

FLORENCIA REGUERA

BAHIA BLANCA

ARGENTINA

AÑO 2013



## PREFACIO

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur y en el Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca (UTN-FRBB) durante el período comprendido entre el 22 de diciembre de 2009 y el 13 de febrero de 2013, bajo la dirección del Dr. Ing. Víctor Hugo Cortínez, Profesor Titular de la cátedra Estabilidad II de la carrera de Ingeniería Mecánica de la Facultad Regional Bahía Blanca de la UTN, Profesor Asociado de la cátedra Estabilidad IV de la carrera de Ingeniería Civil de la UNS e Investigador Independiente del CONICET, y la codirección del Dr. Ing. Marcelo Tulio Piovan, Profesor Titular de la cátedra Elementos de Máquinas, de la carrera Ingeniería Mecánica de la UTN-FRBB e Investigador Adjunto del CONICET.

13 de Febrero de 2013

Florencia Reguera

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
Secretaría General de Posgrado y Educación  
Continua

La presente tesis ha sido aprobada el .../.../....., mereciendo la calificación de ....(.....)



## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo agradecer en primer lugar al Dr. Ing. Víctor Hugo Cortínez, por ser la persona que me inició en el camino de la investigación, quien con esfuerzo y dedicación fue el principal responsable de mi formación académica. Le agradezco también por convencerme con su entusiasmo de realizar mis estudios doctorales y por sugerirme las ideas de los desarrollos expuestos en esta tesis.

Al Dr. Ing. Marcelo Tulio Piovan, por su valiosa dedicación y consejos en la discusión de los temas expuestos en esta tesis.

Al Departamento de Ingeniería de la UNS y a la Facultad Regional Bahía Blanca de la UTN por haberme brindado sus recursos para realizar esta tesis, y al CONICET por el fundamental soporte económico.

A mis compañeros y amigos del Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos, por su continuo aliento, su predisposición y ayuda desinteresada, en especial a Sebastián Machado, Martín Sequeira, Martín Saravia, José Ramírez, Julia Martorana, Patricia Domínguez, Mariano Tonini, Adrián Azzurro, Cecilia Stoklas, Sebastián Domini, Marta Vidal, Pablo Girón y Carlos Vera.

A mis padres, Carmen y Héctor Hugo, y a mis hermanos, Guadalupe y Juan Ignacio, sin cuyo apoyo incondicional nunca habría logrado este objetivo. Y por último, pero no por eso menos importante, a mi novio Franco: gracias por creer siempre en mí y transitar este camino a mi lado con paciencia y tolerancia.



## RESUMEN

La implementación de técnicas de optimización es de fundamental importancia en el diseño de estructuras construidas con materiales compuestos. Esto se debe a que dicho diseño involucra una gran cantidad de variables que generan problemas de optimización multimodales sujetos a restricciones de diversa índole. Además, hay situaciones de diseño en las que, por distintas razones, es necesario abordar la minimización de distintos objetivos en forma conjunta. Esto conduce a la aplicación de formulaciones multiobjetivo.

Asimismo, existen situaciones en las cuales los datos iniciales del problema de diseño no son totalmente precisos, o bien, es de interés conocer el comportamiento de la estructura ante pequeños cambios en dichos datos. Esta incertidumbre en las condiciones iniciales del problema puede ser considerada en el esquema de diseño mediante la aplicación de modelos específicos desarrollados a tal efecto.

Desde el punto de vista estructural, la esbeltez que en muchos casos posee este tipo de estructuras genera la necesidad de conocer su comportamiento en lo que respecta a la estabilidad global y local de las mismas.

En esta tesis se presentan distintos esquemas destinados al diseño óptimo multiobjetivo de vigas de pared delgada de eje recto o curvo, construidas con materiales del tipo Plástico Reforzado con Fibras (FRP, por sus siglas en inglés). El análisis estructural se realiza mediante la aplicación de un modelo teórico de tipo viga que considera flexibilidad por corte debida a flexión y alabeo. En base a esta teoría y con el interés de formular un problema de diseño analítico, se obtienen soluciones explícitas aproximadas para evaluar distintos parámetros estructurales, tales como cargas críticas de pandeo global, desplazamientos máximos y tensiones.

Por otra parte, se aplica una estrategia para el análisis del pandeo local en base a la teoría de placas para verificar la estabilidad local de vigas rectas y curvas construidas con materiales isótropos o compuestos de configuración ortótropa. Para obtener diseños que contemplen la posibilidad de alcanzar diferentes objetivos, se implementan distintos métodos que consideran conjuntamente aspectos de estabilidad, desplazamiento y peso propio de la estructura como objetivos principales. Se analiza el efecto producido por variaciones en las cargas aplicadas a la estructura mediante un modelo matemático de incertidumbre. Este modelo se basa en el análisis del peor escenario posible, aplicándose el método de anti-optimización. Se consideran restricciones estructurales, geométricas y

operativas que contemplan condiciones de resistencia, inestabilidad local y geometría de la sección, entre otras.

Los esquemas de diseño óptimo propuestos se resuelven mediante la aplicación de distintos métodos heurísticos que permiten obtener soluciones óptimas de carácter global. Se utilizan las técnicas *Simulated Annealing*, *Simulated Annealing* Caótico y Algoritmo Genético.



# ABSTRACT

The implementation of optimization techniques is of fundamental importance in the design of structures built with composite materials. This is because the design involves a lot of variables that generate multimodal optimization problems, subject to constraints of diverse nature. In addition, there are design situations in which for various reasons, it is necessary to address different minimization objectives jointly. This leads to the application of multiobjective formulations.

There are also situations in which the initial data of the design problem is not entirely accurate, or is of interest to know the behavior of the structure against small changes in data. This uncertainty of the initial conditions can be considered in the design scheme by applying specific models developed for such purpose.

From a structural standpoint, the slenderness that in many cases these structures have generates the need to understand their behavior with respect to global and local stability.

This thesis presents different schemes for multiobjective optimal design of thin-walled beams, with straight or curved axis, built with materials of the type Fiber Reinforced Plastics (FRP). The structural analysis is performed by applying a theoretical beam model allowing shear flexibility due to bending and warping. Based on this theory, and with the interest to develop an analytical design problem, approximate explicit solutions are obtained in order to evaluate various structural parameters such as global critical buckling loads, maximum displacements and stresses.

On the other hand, a strategy based on the plate theory is applied to analyze local buckling in order to verify the local stability of straight and curved beams made with isotropic materials or composites with orthotropic configuration. In order to obtain designs which consider the possibility of achieving various targets, different methods are implemented to jointly regard issues of stability, displacement and weight of the structure as main targets. The effect of variations in the loads applied to the structure is analyzed by applying a mathematical model of uncertainty. This model is based on the analysis of the worst feasible scenario, applying the anti-optimization method. Structural, geometric and operational constraints are considered which contemplate conditions of strength, local instability and sectional geometry, among others.

The proposed optimal design schemes are solved by the application of different heuristic methods that allow obtaining global optimal solutions. The techniques employed are Simulated Annealing, Chaotic Simulated Annealing and Genetic Algorithm.



# ÍNDICE

<b>PREFACIO</b> .....	i
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	iii
<b>RESUMEN - ABSTRACT</b> .....	v
<b>ÍNDICE</b> .....	ix
<b>LISTA DE FIGURAS Y TABLAS</b> .....	xiii

## **1 INTRODUCCIÓN**

1.1. Motivación.....	1
1.2. Objetivos.....	3
1.3. Alcance del estudio.....	4
1.4. Metodología.....	5
1.5. Contenidos.....	6

## **2 ESTADO DEL ARTE**

2.1. Introducción.....	9
2.2. Diseño óptimo de estructuras.....	9
2.3. Análisis estructural de vigas de pared delgada.....	12

## **3 GENERALIDADES DEL DISEÑO DE VIGAS COMPUESTAS DE PARED DELGADA**

3.1. Introducción.....	15
3.2. Generalidades.....	15
3.3. Materiales compuestos.....	17
3.3.1. Ecuaciones constitutivas de una lámina de material compuesto.....	18
3.3.2. Ecuaciones constitutivas de un laminado FRP.....	21
3.3.3. Criterios de falla estática.....	22
3.3.4. Criterios de falla por fatiga (CT-HE).....	25
3.4. Vigas de pared delgada: comportamiento estructural.....	27

## **4 ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS COMPUESTAS DE PARED DELGADA**

4.1. Introducción.....	31
------------------------	----

4.2.	Teoría.....	32
4.2.1.	Cinemática general.....	33
4.2.2.	Estado de deformaciones.....	38
4.2.3.	Formulación variacional.....	40
4.2.4.	Ecuaciones de movimiento.....	42
4.2.5.	Ecuaciones constitutivas.....	46
4.3.	Algunas soluciones analíticas aproximadas para vigas bisimétricas sometidas a flexo-compresión.....	54
4.3.1.	Análisis estático simplificado.....	55
4.3.2.	Pandeo flexo-torsional.....	57
4.4.	Análisis del pandeo local.....	66
4.4.1.	Formulación variacional.....	67
4.4.2.	Soluciones explícitas para el pandeo de placas ortótropas.....	71
4.4.3.	Aplicación de las expresiones de placas al pandeo local de vigas.....	73
<b>5</b>	<b>DISEÑO ÓPTIMO DE VIGAS DE PARED DELGADA</b>	
5.1.	Introducción.....	77
5.2.	Esquema global de diseño óptimo.....	78
5.3.	Diseño óptimo.....	80
5.3.1.	Diseño óptimo 1 (DO1).....	81
5.3.2.	Diseño óptimo 2 (DO2).....	84
5.3.3.	Diseño óptimo 3 (DO3).....	86
5.3.4.	Diseño óptimo 4 (DO4).....	88
5.4.	Diseño óptimo bajo incertidumbre.....	91
5.4.1.	Diseño óptimo 5 (DO5).....	92
<b>6</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA</b>	
6.1.	Introducción.....	95
6.2.	Técnicas de optimización.....	96
6.2.1.	Simulated annealing (SA).....	96
6.2.2.	Simulated annealing caótico (SAC).....	98
6.2.3.	Algoritmo genético (AG).....	100
6.3.	Modelo de elementos finitos unidimensional.....	103

6.3.1. Vectores de desplazamientos y deformaciones nodales.....	103
6.3.2. Discretización de la expresión unidimensional de trabajos virtuales.....	105
6.3.3. Ecuación de movimiento de elementos finitos.....	107
6.3.4. Ecuación de elementos finitos con movimiento armónico impuesto....	107
6.3.5. Elemento de viga recta - viga curva: deformación por corte constante.....	108
6.3.6. Elemento curvo isoparamétrico.....	110
6.4 Esquema de implementación del problema global de diseño.....	111
<b>7 VALIDACIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL. CÁLCULO DE PANDEO GLOBAL Y LOCAL</b>	
7.1. Introducción.....	113
7.2. Pandeo flexo-torsional de vigas FRP con sección transversal bi-simétrica....	114
7.2.1. Vigas simplemente apoyadas.....	115
7.2.2. Vigas doblemente empotradas.....	118
7.3. Pandeo local de vigas FRP de pared delgada.....	137
7.3.1. Vigas de eje recto.....	138
7.3.2. Vigas de eje curvo.....	143
<b>8 APLICACIONES: DISEÑO ÓPTIMO DE VIGAS FRP</b>	
8.1. Introducción.....	149
8.2. Aplicaciones del esquema de diseño DO1.....	150
8.3. Aplicaciones del esquema de diseño DO2.....	155
8.4. Aplicaciones del esquema de diseño DO3.....	156
8.5. Aplicaciones del esquema de diseño DO4.....	164
8.6. Aplicaciones del esquema de diseño bajo incertidumbre DO5.....	169
<b>9 SUMARIO, CONTRIBUCIONES, PUBLICACIONES Y TRABAJO A FUTURO</b>	
9.1. Sumario.....	173
9.2. Contribuciones.....	176
9.3. Publicaciones realizadas.....	177

9.4. Sugerencias de trabajo a futuro.....	178
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>181</b>
<b>APÉNDICE I – PROPIEDADES DE MATERIALES COMPUESTOS.....</b>	<b>189</b>

# LISTA DE FIGURAS

3.1	(a) Lámina con fibras unidireccionales. (b) Lámina con fibras bidireccionales. (c) Laminado multicapa.....	18
3.2	Descripción de los sistemas de referencia de una lámina con ortotropía general. (a) Tensiones expresadas en el sistema $(B: x, s, n)$ . (b) Relación entre el sistema $(B: x, s, n)$ y el sistema propio de la lámina $(B: x_1, x_2, x_3)$ .....	20
3.3	Esquema de los puntos en los que se evalúa el factor de seguridad $R$ .....	24
3.4	Esquema de la configuración de pandeo lateral.....	28
3.5	Configuraciones de pandeo local e hipótesis para su análisis.....	29
4.1	Esquema de viga de pared delgada genérica de eje curvo de sección abierta.....	33
4.2	Esquema de viga de pared delgada genérica de eje curvo de sección cerrada.....	33
4.3	Esquema de viga de pared delgada genérica de eje recto.....	34
4.4	Descripción de las entidades geométricas de una sección transversal genérica. Sistemas de referencia y esquema de los desplazamientos generalizados.....	34
4.5	Condiciones de borde y estados de carga considerados.....	54
4.6	Esquema de análisis del pandeo local en una viga tipo I.....	67
4.7	Geometría de placas ortótropas con diferentes condiciones de borde: (a) placa RR; (b) placa RF; (c) identificación de las placas en las secciones transversales de vigas de pared delgada.....	67
5.1	Síntesis del procedimiento general de diseño.....	79
5.2	Secciones transversales de vigas de pared delgada.....	82
5.3	Detalle de las dimensiones de la sección transversal de perfiles I y cajón.....	87
5.4	Resultantes de tensión axiales en el ala y en el alma de un perfil bi-simétrico bajo un estado de flexo-compresión.....	90
5.5	Condiciones de borde y estados de carga considerados en el esquema de diseño DO5.....	93
6.1	Esquema del algoritmo <i>simulated annealing</i> .....	97
6.2	Operadores de cruce de AG. (a) Cruce uniforme. (b) Cruce por un punto.....	101
6.3	Esquema de resolución del problema de optimización.....	111
7.1	Condiciones de vinculación y estados de carga empleados en la validación de las fórmulas de pandeo global.....	115
7.2	Cargas críticas flexo-torsionales para una viga tipo I, SAP, con laminación $[0_2]_s$ .....	116
7.3	Cargas críticas flexo-torsionales para una viga tipo I, SAP, con laminación $[0/90]_s$ .....	116
7.4	Cargas críticas flexo-torsionales para una viga tipo I, SAP, con laminación $[\pm 45]_s$ .....	117
7.5	Cargas críticas flexo-torsionales para una viga tipo cajón, SAP, con laminación: (a) $[0_2]_s$ , (b) $[0/90]_s$ .....	117
7.6	Cargas críticas axiales $P_2$ , $[0_2]_s$ , (a) variación de $L$ ; (b) variación de $b$ , $L = 6m$ ; (c) variación de $e$ , $L = 6m$ .....	120

7.7	Cargas críticas axiales $P_y$ , $[0_2]_s$ , (a) variación de $L$ ; (b) variación de $h$ , $L = 6\text{m}$ .....	121
7.8	Cargas críticas axiales $P_\phi$ , $[0_2]_s$ , (a) y (b) variación de $L$ .....	121
7.9	Carga crítica axial mínima variando $h$ , $[0_2]_s$ , $L = 6\text{m}$ .....	122
7.10	Carga crítica axial mínima variando $b$ , $[0_2]_s$ , (a) $L = 6\text{m}$ ; (b) $L = 7\text{m}$ .....	122
7.11	Carga crítica axial mínima variando $e$ , $[0_2]_s$ , (a) $L = 4\text{m}$ ; (b) $L = 6\text{m}$ .....	123
7.12	Carga crítica axial mínima variando $L$ , $[0_2]_s$ , .....	123
7.13	Carga crítica axial mínima, $[0/90]_s$ , (a) y (b) variación de $h$ , $L = 6\text{m}$ ; (c) y (d) variación de $b$ , $L = 6\text{m}$ y $L = 4\text{m}$ , respectivamente .....	124
7.14	Carga crítica axial mínima, $[0/90]_s$ , (a) y (b) variación de $e$ , $L = 4\text{m}$ y $L = 6\text{m}$ ; (c) y (d) variación de $L$ .....	124
7.15	Carga crítica axial mínima, $[0_2]_s$ , variación de $h$ .....	125
7.16	Carga crítica axial mínima, $[0_2]_s$ , variación de $b$ .....	125
7.17	Carga crítica axial mínima, $[0_2]_s$ , variación de $e$ .....	125
7.18	Carga crítica axial mínima, $[0_2]_s$ , variación de $L$ .....	126
7.19	Carga crítica axial mínima, $[0/90]_s$ , variación de $h$ .....	126
7.20	Carga crítica axial mínima, $[0/90]_s$ , variación de $b$ .....	126
7.21	Carga crítica axial mínima, $[0/90]_s$ , variación de $e$ .....	126
7.22	Carga crítica axial mínima, $[0/90]_s$ , variación de $L$ .....	127
7.23	Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo I con laminación $[0_2]_s$ .....	128
7.24	Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo I con laminación $[0/90]_s$ .....	131
7.25	Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo cajón con laminación $[0_2]_s$ .....	134
7.26	Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo cajón con laminación $[0/90]_s$ .....	136
7.27	Estados de carga y condiciones de borde consideradas en el análisis de pandeo local.....	138
7.28	Parámetro de carga crítica para una viga I de 6 m de longitud.....	138
7.29	Parámetro de carga para una viga cajón de 2 m de longitud.....	139
7.30	Condiciones de borde empleadas en el análisis de inestabilidad de placas.....	144
7.31	Parámetros de carga críticos locales para una viga tipo I de eje recto y curvo, siendo $P = -1\text{kN}$ , $q_x = -1\text{kN/m}$ , $q_y = -1\text{kN}$ y $q_z = -1\text{kN/m}$ .....	145
7.32	Parámetros de carga críticos locales para una viga tipo I de eje curvo, siendo $q_x = -1\text{kN/m}$ , $q_y = -1\text{kN}$ y $q_z = -1\text{kN/m}$ .....	146
8.1	Secciones transversales analizadas en el esquema de diseño DO1.....	151
8.2	Secciones y laminaciones óptimas para los distintos estados de carga evaluados ( $W = 0$ ).....	153
8.3	Soluciones óptimas correspondientes a diferentes valores de $W$ .....	153
8.4	Comparación de resultados para distintos valores de $W$ , correspondientes a: (a) un perfil I, (b) un perfil U y (c) un perfil rectangular bajo la condición de carga número 7.....	155
8.5	Condiciones de carga y de vinculación consideradas en la aplicación del esquema DO2.....	156
8.6	Condiciones de borde y estados de carga correspondientes al diseño Dqz.....	157
8.7	Condiciones de borde y estados de carga correspondientes al diseño Dqy.....	157
8.8	Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño Dqz, correspondiente a D1/PO1.....	159



8.9	Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño Dqz, correspondiente a D2/PO1.....	160
8.10	Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño Dqy, correspondiente a D1/PO2.....	160
8.11	Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño Dqy, correspondiente a D2/PO3.....	161
8.12	Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño Dqy, correspondiente a D3/PO4.....	161
8.13	Distribución de la función objetivo vs. las variables: (a) $e_c$ y $n_c$ para el diseño Dqz, dominio D2, $h = 0.6$ m, $b = 0.45$ m, $[0_{nc}]$ , (b) $b$ y $h$ para el diseño Dqz, dominio D2, $e_c = 0.0045$ m, $n_c = 2$ , $[0_{nc}]$ .....	162
8.14	Distribución de la función objetivo vs. las variables: (a) $e_c$ y $n_c$ para el diseño Dqy, dominio D3, $h = 0.6$ m, $b = 0.53$ m, $[0_{nc}]$ , (b) $b$ y $h$ para el diseño Dqy, dominio D3, $e_c = 0.004$ m, $n_c = 2$ , $[0_{nc}]$ .....	162
8.15	Distribución de puntos de: (a) distribución normal estándar; (b) mapa logístico ( $\mu = 4$ ).....	163
8.16	Generación de las variables $b$ , $h$ , $e_c$ y $n_c$ utilizando el mapa logístico, siendo $\mu = 4$ .....	163
8.17	Condiciones de borde analizadas en el esquema DO4: (a) viga simplemente apoyada (SA), (b) viga doblemente empotrada (EE). (c) Sección transversal.....	165
8.18	Esquemas de las secciones óptimas (viga SAP).....	168
8.19	Esquemas de las secciones óptimas (viga EE).....	168
8.20	Condiciones de borde y estados de carga considerados en el esquema DO5.....	169
AI.1	<i>Carpet plot</i> para hallar la resistencia a la tracción de laminados de Vidrio- $E^2$ /Poliéster.....	191
AI.2	<i>Carpet plot</i> para hallar la resistencia a la compresión de laminados de Vidrio- $E^2$ /Poliéster.....	191
AI.3	<i>Carpet plot</i> para hallar la resistencia al corte de laminados de Vidrio- $E^2$ /Poliéster.....	192



# LISTA DE TABLAS

7.1	Parámetros de ajuste.....	119
7.2	Parámetros críticos de una viga simplemente apoyada (SAP) tipo cajón, siendo $h = 225\text{mm}$ , $b = 147\text{mm}$ , $e = 3\text{mm}$ y $L = 2\text{m}$ .....	140
7.3	Parámetros críticos de una viga doblemente apoyada (SS) tipo I, siendo $h = 300\text{ mm}$ , $b = 200\text{mm}$ , $L = 6\text{m}$ , $e = 3\text{mm}$ .....	141
7.4	Parámetros críticos de una viga simplemente apoyada (SAP) tipo I, siendo $h = 300\text{ mm}$ , $b = 200\text{mm}$ , $L = 2\text{m}$ , $e = 3\text{mm}$ en el laminado $[0]_3$ y $e = 4\text{mm}$ en el laminado $[0/90]_s$ .....	141
7.5	Parámetros críticos de una viga tipo cajón, EE, siendo $h = 225\text{mm}$ , $b = 147\text{mm}$ , $e = 3\text{mm}$ y $L = 4\text{m}$ ....	142
7.6	Parámetros críticos de una viga tipo I, EE, siendo $h = 300\text{ mm}$ , $b = 200\text{mm}$ , $L = 4\text{m}$ , $e = 3\text{mm}$ .....	142
7.7	Parámetros críticos de una viga tipo I, EE, siendo $h = 300\text{ mm}$ , $b = 200\text{mm}$ , $e = 3\text{mm}$ .....	143
7.8	Parámetros críticos de una viga tipo cajón, EE, siendo $h = 225\text{ mm}$ , $b = 147\text{ mm}$ , $e = 3\text{ mm}$ .....	143
7.9	Parámetros críticos de placas, siendo $L_y = 0.3\text{ m}$ , $L_x = 6.28\text{ m}$ , $e = 10\text{ mm}$ , $R = 4\text{ m}$ .....	144
7.10	Parámetros críticos de pandeo local de vigas SS rectas y curvas.....	145
7.11	Parámetros críticos de pandeo local de vigas curvas bi-empotradas.....	146
8.1	Detalle de los estados de carga analizados.....	151
8.2	Soluciones óptimas y valores mínimos de las funciones objetivo para $W = 0$ .....	152
8.3	Soluciones óptimas para valores de $W = [0:0.25:1]$ , correspondientes a un perfil I, un perfil U y un perfil rectangular bajo la condición de carga número 7.....	154
8.4	Soluciones óptimas y restricciones estructurales.....	156
8.5	Dominios de factibilidad de las variables de diseño.....	158
8.6	Parámetros empleados en los algoritmos.....	158
8.7	Soluciones óptimas del diseño Dqz.....	159
8.8	Soluciones óptimas del diseño Dqy.....	160
8.9	Diseños óptimos obtenidos en la aplicación del esquema DO4.....	167
8.10	Costos computacionales en el diseño de la viga simplemente apoyada.....	167
8.11	Costos computacionales en el diseño de la viga doblemente empotrada.....	168
8.12	Diseños óptimos para el caso C1.....	170
8.13	Diseños óptimos para el caso C2.....	170
AI.1	Propiedades de las fibras empleadas.....	190
AI.2	Propiedades de las matrices empleadas.....	190
AI.3	Propiedades de las láminas unidireccionales.....	190



# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Motivación

Recientemente, se ha incrementado la implementación de métodos de diseño basados en optimización matemática para el cálculo y análisis de estructuras compuestas. En efecto, tradicionalmente el diseño estructural se concibe como un procedimiento de prueba y error, en el cual la configuración original del diseño se establece de acuerdo a recomendaciones prácticas establecidas en códigos o siguiendo experiencias similares. Posteriormente, este prediseño debe ser analizado desde el punto de vista estructural a los efectos de definir su aptitud en términos de seguridad estructural y economía. Si éstos no se cumplieran, la configuración original debe ser modificada y el proceso debe repetirse. En los últimos años, el diseño mediante un enfoque denominado optimización estructural ha cobrado gran interés.

Esencialmente, el diseño estructural óptimo consiste en obtener una solución que verifique todas las restricciones impuestas y que a la vez sea la mejor de acuerdo a criterios previamente establecidos. Se basa en una combinación de las teorías de mecánica estructural y optimización matemática desde un enfoque computacional. Por lo tanto, el diseño de estructuras compuestas está ligado a dos aspectos fundamentales: el modelo estructural mediante el cual se obtiene la respuesta del sistema y las técnicas de optimización que permiten obtener la solución óptima del problema de diseño.

Los materiales compuestos se presentan estructuralmente como elementos tipo placa o como vigas de pared delgada. Estos materiales poseen ciertas características especiales tales como anisotropía mecánica que deben ser consideradas en la modelización estructural. Esto ha llevado a una gran cantidad de investigación dirigida a la formulación de modelos estructurales adecuados para dichos materiales. Estos elementos estructurales aparecen en innumerables aplicaciones tecnológicas, desde vigas formando parte de grandes sistemas estructurales (estructura de edificios, sistema de tuberías, rigidizadores de estructuras laminares) hasta estructuras especiales cuya respuesta mecánica fundamental puede ser concebida como una viga (puentes, cascos de barcos, alas de avión, álabes de turbinas y tuberías submarinas). Dichas estructuras necesitan condiciones adecuadas de rigidez y

resistencia. Estas características fueron potenciadas por la aparición de los materiales compuestos (por ejemplo, matrices poliméricas reforzadas por fibras de vidrio o carbono). En efecto, estos materiales poseen mejoradas propiedades de rigidez y resistencia en relación con el peso así como resistencia a la fatiga y a la corrosión. Por tal motivo, una importante labor de investigación fue dirigida al desarrollo de modelos estructurales refinados (teorías de placas así como de vigas de pared delgada) que permiten analizar de manera precisa el comportamiento estructural ante diversas condiciones de operación.

La creciente utilización en los últimos años de perfiles de pared delgada en los distintos sectores de la ingeniería, hace indispensable el cálculo de las inestabilidades globales y locales. Por lo tanto, el uso de elementos esbeltos para soportar cargas de compresión requiere un buen conocimiento del fenómeno de inestabilidad por pandeo, ya que es uno de los factores más importantes a tener en cuenta cuando se calcula la capacidad resistente de este tipo de perfiles. Además, muchas veces es necesario diseñar la viga de tal manera que contemple conjuntamente la rigidez a flexión y la inestabilidad global por flexión o flexo-torsión.

En términos generales, cuando se desea establecer un criterio de diseño, deben conocerse las exigencias que debe cumplir la estructura a diseñar (condiciones de vinculación, condiciones de carga, materiales que pueden emplearse y sus configuraciones de acuerdo al tipo de fabricación, etc.). En base a toda esta información, definir un criterio adecuado de diseño implica: definir la o las funciones objetivo a optimizar (funciones que serán maximizadas o minimizadas mediante técnicas de optimización), adoptar variables de diseño (cuyos valores óptimos constituyen la solución del problema y producen el máximo o el mínimo de la función objetivo) y establecer las restricciones estructurales, geométricas y operativas del problema (las cuales definen el dominio factible de las variables de diseño).

Por otra parte, para la formulación de un problema de optimización estructural muchas veces es necesario desarrollar esquemas robustos que contemplen diferentes situaciones posibles. Existen varios modelos matemáticos de incertidumbre en este tipo de formulaciones que se pueden clasificar en modelos probabilísticos y no-probabilísticos, entre éstos últimos se encuentran la lógica difusa y el modelo de intervalos, entre otros. En particular, el modelo de intervalos asume a la incertidumbre limitada dentro de un intervalo específico y las pequeñas variaciones del parámetro de incertidumbre son tratadas como una perturbación alrededor del punto medio del intervalo. Luego, utilizando las llamadas técnicas de anti-optimización, se obtiene la respuesta más desfavorable bajo la hipótesis de pequeñas

variaciones. El término anti-optimización se refiere a la tarea de encontrar el peor escenario de un problema dado.

Las técnicas de optimización empleadas en la resolución del problema de diseño cumplen un papel fundamental cuando se trata de estructuras constituidas por materiales compuestos. El empleo de tales materiales genera un problema de diseño complejo debido a la versatilidad de forma y disposición de estas estructuras. Esto permite adoptar una gran cantidad de variables que hacen al diseño más versátil, aunque más complejo. Las funciones objetivo resultantes son funciones multimodales y el esquema de optimización final que debe resolverse suele ser complejo. Todo esto hace necesaria la aplicación de técnicas heurísticas que no queden atrapadas en mínimos locales y que permitan definir en forma discreta a las variables de diseño. En este último tiempo, distintas técnicas han sido empleadas en diseños de este tipo. Entre ellas se incluyen los Algoritmos Evolutivos, la Búsqueda Tabú, Recocido Simulado (*Simulated Annealing*), la optimización basada en colonia de hormigas (*Ant Colony Optimization*) y la optimización basada en el enjambre de partículas (*Particle Swarm Optimization*). Recientemente, se han propuesto distintas alternativas para mejorar los tiempos de cálculo y/o la convergencia de estos algoritmos, obteniéndose muy buenos resultados.

## 1.2 Objetivos

El objetivo central de esta tesis es desarrollar formulaciones adecuadas para el diseño óptimo de estructuras esbeltas concebidas como vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos. Los esquemas de diseño son formulados e implementados computacionalmente combinando métodos de optimización con modelos estructurales necesarios para su análisis. Se propone aplicar distintas técnicas de optimización que permitan realizar comparaciones entre sí, respecto a su performance. La teoría de vigas empleada es válida para vigas rectas y curvas de secciones transversales arbitrarias (ya sean abiertas o cerradas), admite cualquier tipo de condición de carga y permite utilizar diferentes tipos de secuencias de laminados compuestos. Como aspecto fundamental, en dicho modelo estructural se contempla el efecto de deformación por corte en forma completa: tanto flexional como torsional por alabeo no uniforme. Adicionalmente, se contempla en el modelo estructural la evaluación de efectos de pandeo local.

A continuación se enumeran los objetivos específicos de esta tesis que permiten lograr el objetivo principal:

- Formulación y aplicación de un modelo estructural destinado al análisis de vigas de pared delgada compuestas.
- Implementación numérica y analítica del modelo estructural. Aplicación del método de elementos finitos unidimensional para el análisis estático y dinámico de la estructura. Obtención de fórmulas analíticas explícitas para el análisis de pandeo global de vigas de pared delgada compuestas, sometidas a estados de flexo-compresión bajo distintas condiciones de vinculación.
- Extensión del modelo estructural a fin de considerar efectos adicionales, tal como el pandeo local de la sección. Obtención de fórmulas analíticas destinadas al análisis del pandeo local en vigas de pared delgada ortótropas, mediante el empleo de la teoría de placas de gran longitud.
- Formulación de diferentes alternativas de diseño que incluyen problemas de optimización multiobjetivo y optimización multinivel, considerando restricciones de desigualdad.
- Incorporación de incertidumbre al problema de diseño, contemplando posibles variaciones en las condiciones operativas del diseño óptimo.
- Estudio e implementación de métodos de optimización globales (técnicas heurísticas clásicas y modificadas).

### **1.3 Alcance del estudio**

La teoría de vigas empleada en el diseño es válida tanto para vigas rectas como curvas. Los materiales empleados pueden ser isótropos o compuestos plásticos reforzados con fibras (FRP). En el caso de materiales FRP, la formulación teórica empleada es válida para laminaciones completamente generales, aunque en esta tesis se describe sólo para laminaciones simétricas y balanceadas. Consecuentemente, las fórmulas analíticas propuestas para el análisis de la inestabilidad global de vigas poseen la misma aplicabilidad. Este tipo de laminación es ampliamente utilizada debido a que, en su proceso de fabricación, no se generan esfuerzos térmicos al no experimentar sus láminas acoplamiento flexional-extensional (Barbero, 1998). Las fórmulas analíticas desarrolladas para el análisis de



inestabilidad, tanto global como local, son validadas mediante comparaciones con experimentaciones numéricas.

Los esquemas de diseño propuestos están destinados específicamente al diseño de vigas de pared delgada. En particular, aquellos esquemas de diseño en los que se empleen las fórmulas desarrolladas para el análisis de inestabilidad global o local, sólo son aplicables a laminaciones simétricas y balanceadas u ortótropas, respectivamente. Se contemplan estados de carga combinados, estáticos y dinámicos.

## **1.4 Metodología**

En esta tesis se proponen distintos problemas de optimización que permiten diseñar vigas de pared delgada compuestas. La formulación de tales esquemas contempla la minimización de múltiples objetivos y el cumplimiento de restricciones de tipo geométricas, estructurales y operativas. Para la implementación de estos esquemas de diseño es necesario modelar el comportamiento de la estructura y, para obtener una solución óptima para el diseño, es indispensable el empleo de técnicas de optimización apropiadas. Por ello, la implementación numérica del diseño en su totalidad se realiza en un entorno de programación que permite realizar cálculos iterativos hasta obtener un diseño óptimo, empleando el software MATLAB<sup>®</sup> a tal efecto.

En cuanto al análisis estructural de vigas, los esquemas de diseño propuestos se basan en el modelo teórico unidimensional desarrollado aquí, el cual tiene en cuenta efectos de flexibilidad de corte en forma completa y es una extensión del modelo propuesto por Cortínez y Piovan (Cortínez y Piovan, 2002, 2006; Piovan y Cortínez, 2007a, 2007b). Desde el punto de vista de su implementación, se presentan dos enfoques diferentes. Uno de ellos se basa en la implementación de expresiones analíticas que permiten predecir en forma aproximada el comportamiento estructural de este tipo de estructuras para ciertas situaciones de interés y realizar un pre-diseño a muy bajo costo computacional. El otro enfoque, mucho más general, se basa en la implementación numérica de la teoría mencionada aplicando el método de elementos finitos. Para ello, se formula un modelo de elementos finitos unidimensional en base al modelo desarrollado por Piovan (2003). Dicho modelo es implementado computacionalmente para el tratamiento de la presente formulación. Se utilizan distintos elementos para el caso de vigas rectas y curvas que evitan el bloqueo por corte. En ambos enfoques se incorpora el análisis del pandeo local de la estructura mediante la aplicación de

fórmulas analíticas desarrolladas en esta tesis. Dichas expresiones se obtienen a partir de considerar a la sección de la viga conformada por placas de gran longitud.

Los algoritmos de optimización utilizados, los cuales permiten hallar la solución óptima de diseño, engloban los cálculos estructurales mencionados anteriormente y se realizan de manera iterativa. Tales estrategias corresponden a técnicas heurísticas que, aunque no aseguran la convergencia a un mínimo global, presentan un mejor comportamiento que los métodos de optimización determinísticos. Se emplean las técnicas: *simulated annealing* (SA), *simulated annealing caótico* (SAC) y algoritmo genético (AG). Se realizan algunas comparaciones entre ellas, en base a tiempos de cálculo y convergencia, a fin de conocer estimativamente la performance de cada una de ellas.

## 1.5 Contenidos

A continuación, se presenta una descripción resumida de los nueve capítulos que componen esta tesis.

En este primer capítulo se exponen las características principales de la investigación, describiendo la motivación que originó el estudio, importancia del tema, alcance de la tesis, objetivos, metodología y contenidos.

En el Capítulo 2 se presenta una revisión de las contribuciones más importantes relacionadas con la presente investigación. En primer término, se resumen los aportes realizados en lo que se refiere al diseño de estructuras esbeltas construidas con materiales compuestos. Se presentan además las principales contribuciones en relación a las técnicas de optimización empleadas en la resolución de tales esquemas de diseño. Por último, se presenta una revisión de los desarrollos relacionados a modelos estructurales de vigas de pared delgada.

En el Capítulo 3 se exponen conceptos fundamentales referentes al diseño de vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos. Se presenta una breve descripción del comportamiento mecánico de tales materiales y se describen someramente los criterios de falla desarrollados para su análisis. Por último, se describen los aspectos estructurales específicos a considerar en el diseño óptimo de vigas de pared delgada.

En el Capítulo 4 se describe el modelo teórico unidimensional empleado en el análisis de vigas compuestas de pared delgada de eje curvo o recto. El modelo está basado en el Principio de Hellinger-Reissner y tiene en cuenta efectos de flexibilidad por corte debidos a deformaciones flexionales así como al alabeo torsional no uniforme. En base a esta formulación, se desarrollan algunas expresiones analíticas para el análisis de pandeo global de vigas de pared delgada de sección transversal bi-simétrica sometidas a un estado de carga de flexo-compresión, bajo distintas condiciones de vinculación. Para esas mismas condiciones de borde, se expone un breve resumen de fórmulas analíticas que permiten evaluar otros aspectos estructurales, como la deflexión y la resistencia de la estructura.

Se adiciona al modelo estructural, el análisis de inestabilidad local mediante el desarrollo de fórmulas aproximadas que predicen los modos de pandeo localizados en vigas FRP de pared delgada con laminación ortótropa. Se adoptan ciertas hipótesis que permiten modelar la sección transversal de la viga como un conjunto de placas individuales vinculadas entre sí. Finalmente, se describe la manera en que deben emplearse dichas expresiones en el análisis de inestabilidad local de vigas.

En el Capítulo 5 se proponen y desarrollan detalladamente distintos problemas de optimización matemática que permiten diseñar vigas de pared delgada. Todos ellos contemplan la minimización de múltiples objetivos y están sujetos a restricciones geométricas y estructurales. En términos generales se tienen en cuenta los siguientes objetivos: estabilidad (maximización de cargas de pandeo para modos globales), desplazamientos (minimización de los desplazamientos máximos de la estructura) y peso propio (minimización de la sección transversal). En las distintas formulaciones, estos objetivos son relacionados entre sí mediante técnicas de optimización multiobjetivo. Para ello, se emplean el método de las funciones de peso y el método de criterio global. Como aspecto distintivo, se propone obtener un diseño óptimo de la estructura que considere la existencia de incertidumbre en las condiciones de carga, formulando el problema de optimización como un problema minimax.

En el Capítulo 6 se describen los métodos que permiten implementar computacionalmente los esquemas de diseño propuestos en el Capítulo 5. En primer lugar, se exponen los conceptos fundamentales acerca de la implementación de los métodos de optimización heurísticos empleados en esta tesis. En segundo lugar, se describe el modelo de elementos finitos unidimensional utilizado para el análisis estructural, en base a la teoría de vigas expuesta en el Capítulo 4, en condiciones generales de carga y de vinculación. Se describen

aspectos generales de la formulación, se obtienen las ecuaciones de equilibrio dinámico y se describen los procedimientos empleados en la resolución de dichas ecuaciones, para el análisis de vibraciones libres y forzadas y de inestabilidad. Por último, se introducen brevemente los elementos finitos empleados extensivamente en el tratamiento numérico de los capítulos posteriores.

En el Capítulo 7 se muestran comparaciones entre las fórmulas analíticas desarrolladas en el Capítulo 4 y los resultados de experimentaciones numéricas realizadas con diferentes modelos: un modelo unidimensional de elementos finitos programado en MATLAB<sup>®</sup> y modelos tridimensionales de elementos lámina implementados en ABAQUS 6.7<sup>®</sup>.

En el Capítulo 8 se presentan diseños óptimos encontrados para estructuras sometidas a diferentes condiciones de uso. Se aplican las distintas técnicas de optimización propuestas en el Capítulo 6 para hallar los mejores diseños que cumplan con los diferentes objetivos y que verifiquen las condiciones geométricas y estructurales impuestas, según los esquemas presentados en el Capítulo 5.

Finalmente, en el Capítulo 9, se presentan las conclusiones que incluyen un resumen de los estudios realizados, los aportes fundamentales de la presente tesis junto a las publicaciones derivadas de la misma y las recomendaciones para trabajo futuro.

## CAPÍTULO 2

### ESTADO DEL ARTE

#### 2.1 Introducción

En este capítulo se presenta una revisión de las contribuciones más importantes relacionadas con la presente investigación.

En primer lugar, se realiza una descripción general del tema central de esta tesis que es el diseño óptimo estructural. Para ello, en primer término se presentan un resumen acerca de las principales contribuciones realizadas en lo que respecta al diseño óptimo determinístico de estructuras esbeltas isótropas y compuestas. Se expone luego una breve descripción de los aportes realizados en los últimos años al diseño óptimo probabilístico de estructuras compuestas, haciendo referencia a los distintos modelos que pueden considerar la incertidumbre en las variables del problema. Posteriormente, se resumen los métodos que han sido más frecuentemente empleados en la resolución de los problemas de optimización que definen el diseño estructural.

Se resumen luego las contribuciones en cuanto a un aspecto importante del diseño, que es el análisis de vigas de pared delgada, isótropas y compuestas. En particular, se hace referencia a los aportes realizados sobre la inestabilidad tanto global como local de este tipo de estructuras.

En todos los casos, se efectúa una descripción somera de los lineamientos generales de cada trabajo.

#### 2.2 Diseño óptimo de estructuras

En los últimos años, se ha realizado un gran aporte en lo que respecta al diseño óptimo de vigas construidas tanto con materiales isótropos como compuestos. Los procedimientos de diseño estructural convencionales se basan en modelos y parámetros de diseño determinísticos. Entre las contribuciones realizadas en esta área para estructuras isótropas, se pueden mencionar los trabajos de Magnucki *et al.* (2006), Tian *et al.* (2004), Manevich *et al.* (2007) y Karperska *et al.* (2007), entre otros. En dichos trabajos se proponen distintos problemas de optimización multiobjetivo que contempla la minimización de diferentes

funciones mediante la aplicación de diversas técnicas de optimización multiobjetivo. En particular, Manevich *et al.* (2007) y Kasperska *et al.* (2007) propusieron esquemas de diseño basados en la minimización de múltiples objetivos a través de una función global expresada en términos de coeficientes de peso arbitrarios.

Desde el punto de vista del diseño de estructuras esbeltas construidas con laminados compuestos, Savic *et al.* (2001) estudiaron la maximización de las rigideces equivalentes flexionales y axiales de vigas de sección transversal tipo I, utilizando los ángulos de orientación de las fibras como variables de diseño. Kathiravan y Ganguli (2006) formularon un problema de diseño óptimo de una viga compuesta tipo cajón, considerando la maximización de la resistencia de acuerdo al criterio de falla de Tsai-Wu–Hahn como objetivo principal. Erdal y Sonmez (2005) utilizaron la máxima capacidad de carga de pandeo como objetivo principal en el diseño de placas compuestas. Por su parte, Dávalos y Qiao (1999) formularon un diseño multiobjetivo de vigas FRP (plástico reforzado con fibras) de sección abierta o cerrada. Para ello, se basaron en el diseño multiobjetivo propuesto con anterioridad por los autores (Dávalos *et al.*, 1996) para el diseño de láminas compuestas. En dicho trabajo consideraron simultáneamente la optimización de la rigidez, resistencia y seguridad frente al pandeo.

Otro tópico de interés en la actualidad es la aplicación de diferentes enfoques de optimización bajo incertidumbre. En los últimos años, se han incorporado formulaciones sofisticadas al diseño óptimo de sistemas estructurales sobre la base de distintos modelos matemáticos de incertidumbre. Una revisión concisa y descriptiva de tales modelos fue realizada por Kang (2005). Entre los modelos más empleados de incertidumbre se pueden mencionar: el diseño óptimo basado en confiabilidad (RBDO), el diseño óptimo robusto (RDO) y el diseño óptimo basado en el peor escenario posible. RDO y RBDO son formulaciones de optimización no-determinísticas que incorporan variaciones aleatorias al proceso de optimización. En términos generales, el modelo RBDO satisface requerimientos de confiabilidad basado en distribuciones probabilísticas impuestas que evalúan la falla del sistema, mientras que el diseño robusto reduce la variabilidad del sistema ante eventos de fluctuación diaria. El modelo RDO fue extensamente investigado por Kang (2005), Zang *et al.* (2005) y Schüeller y Jensen (2008). Por su parte, se han realizado numerosas aplicaciones del modelo RBDO, entre las cuales se destacan los trabajos de Schüeller (2001), Papadrakakis y Lagaros (2002), Tsompanakis y Papadrakakis (2004), Youn y Choi (2004), Lagaros y Papadopoulus (2006) y Beck y Santana Gomes (2012). El diseño óptimo basado en el peor escenario posible considera las incertezas presentes en el sistema

empleando un modelo convexo o de intervalos y analiza la falla estructural en base a la ocurrencia de la peor situación posible, aplicando estrategias de anti-optimización. Una manera de formular este tipo de problemas es plantear un problema de optimización mini-max. Se han realizado varias investigaciones acerca de la aplicación de este tipo de técnicas, entre ellos se pueden mencionar los trabajos de Lombardi y Hatfka (1998), McWilliam (2001) y Adali *et al.* (2003). En particular, Adali *et al.* (2003) propusieron diseñar placas laminadas maximizando la carga de pandeo considerando además incertidumbre en las cargas aplicadas.

Es evidente que ha habido, en los últimos años, un notable interés por el diseño de estructuras esbeltas compuestas desde el punto de vista de la optimización matemática y, por lo tanto, el avance en las investigaciones sobre las técnicas de optimización empleadas para su resolución también ha crecido considerablemente. La mayoría de los trabajos citados anteriormente hace uso de técnicas de optimización heurísticas. En éstas no es necesario obtener el gradiente de la función objetivo con respecto a las variables de diseño, lo que las hace muy convenientes para analizar problemas de diseño estructurales ya que en estos casos las variables son, en general, discretas. Además, dichos enfoques presentan un buen comportamiento aún cuando se trata de funciones multimodales. Entre las técnicas heurísticas de optimización más empleadas se pueden citar: *Simulated Annealing* (SA), Técnicas Evolutivas (en particular, Algoritmo Genético, AG), Colonia de Hormigas, Enjambres de Partículas (*Particle Swarm Optimization*) y Búsqueda Tabú, entre otras. El método SA fue introducido originalmente por Kirkpatrick *et al.* (1983). Respecto a los trabajos referenciados anteriormente, Erdal y Sonmez (2005) emplearon el método SA para hallar el laminado óptimo que genere la máxima resistencia al pandeo. Por su parte, el método AG fue presentado por Holland en 1975 (Holland, 1992). En los últimos años se ha publicado una gran cantidad de trabajos que emplean esta técnica para resolver diversos problemas de optimización, incluso en el diseño estructural (Narayana Naik *et al.*, 2008; Almeida y Awruch, 2009). En particular, Paluch *et al.* (2008) implementaron AG para determinar el espesor de la sección y la secuencia de laminación óptimos que maximicen la resistencia, evaluada con el criterio de falla de Tsai-Hill, en palas de perfil alar. Existe además interés en desarrollar estrategias de optimización híbridas que permitan mejorar la solución y/o disminuir el costo computacional. Para ello, diferentes técnicas de optimización son combinadas entre sí, o bien, son mejoradas modificando alguno de sus operadores. Tal es el caso de los algoritmos que toman ventaja de las características propias

de los sistemas caóticos (Tokuda *et al.*, 1998; Yang *et al.* 2007), incorporando por ejemplo sistemas caóticos en los métodos de búsqueda (Mingjun y Huanwen, 2004).

### **2.3 Análisis estructural de vigas de pared delgada**

Los modelos unidimensionales de tipo viga han sido aplicados con éxito en diversas construcciones de las industrias aeronáutica, espacial, mecánica, civil y naval. Teniendo en cuenta que las vigas de pared delgada representan un aspecto central de esta tesis, se expone a continuación una síntesis de las principales contribuciones.

Las primeras contribuciones realizadas en lo que respecta a torsión no uniforme y acoplamiento flexo-torsionales fueron realizadas durante los primeros años del Siglo XX por Timoshenko, Maillart y Bleich entre otros (Timoshenko, 1953). En base a estas primeras contribuciones, Vlasov presentó una teoría integral para el tratamiento de flexión y torsión combinadas de vigas isótropas de pared delgada en los años 1930s y fue traducido al inglés en los años 1960s (Vlasov, 1961). También Goodier (1941) y Timoshenko (1945) desarrollaron teorías generales independientes.

La teoría de Vlasov tiene en cuenta el efecto de alabeo, el cual es de gran importancia en este tipo de estructuras. Desde entonces, se han propuesto nuevas aplicaciones y extensiones de la misma que contemplan, entre otros aspectos, la flexibilidad por corte debido a deformaciones flexionales y al alabeo torsional no uniforme. Para el caso de vigas isótropas de pared delgada el efecto de corte flexional, junto a otros efectos secundarios, fue tenido en cuenta en los trabajos de Aggarwal y Cranch (1967), Bishop y Price (1977) y Ambrosini *et al.* (1995), entre otros. Existen algunos modelos matemáticos que contemplan además la flexibilidad por corte debida a alabeo torsional no uniforme para vigas rectas isótropas de pared delgada, entre ellos se pueden mencionar los trabajos de Muller (1983), Capuani *et al.* (1992) y Cortínez y Rossi (1998a, 1998b).

Por otro lado, Bauld y Tzeng (1984) desarrollaron un modelo matemático de vigas rectas de pared delgada extendiendo la Teoría de Vlasov para materiales laminados compuestos, sin considerar la deformabilidad por corte. Song y Librescu (1993) desarrollaron una teoría para el análisis dinámico de vigas de pared delgada compuestas de sección cerrada, teniendo en cuenta la flexibilidad por corte debida a flexión y considerando efectos de alabeo primarios y secundarios. Cabe destacar que estos autores han presentado aplicaciones interesantes y extensiones de esta teoría en diversos artículos (Bhaskar y Librescu, 1995; Song y Librescu, 1997a; Song y Librescu, 1997b). Modelos similares han



sido desarrollados por Smith y Chopra (1991), Pollock *et al.* (1995), Rand (1998), Massa y Barbero (1998) y Chen (2000), entre otros. La mayoría de estos trabajos tiene en cuenta la flexibilidad por corte debida a los aportes flexionales únicamente. Sin embargo, la flexibilidad por corte debida al alabeo torsional no uniforme influye en la respuesta estructural para ciertas configuraciones seccionales. En tal sentido, Wu y Sun (1990) estudiaron la flexibilidad por corte en forma completa para el análisis de frecuencias naturales en vigas rectas de pared delgada construidas con materiales compuestos. Cortínez y Piovan (2002) presentaron un modelo teórico para el análisis dinámico de vigas rectas de pared delgada en base al principio de Hellinger-Reissner considerando la flexibilidad por corte en forma completa y teniendo en cuenta la existencia de tensiones iniciales, aplicable al caso de laminados simétricos balanceados o especialmente ortótropos. Este trabajo fue generalizado por Cortínez y Piovan (2006) al considerar la existencia de un estado arbitrario de tensiones iniciales y más tarde por Piovan y Cortínez (2007a) para una arquitectura general de laminado. En este contexto, Cortínez *et al.* (2002) y Machado y Cortínez (2005a, 2005b, 2007) estudiaron la estabilidad y vibraciones libres de vigas compuestas de sección bisimétrica sujetas a un estado de tensiones iniciales, considerando una teoría geoméricamente no lineal, que admite grandes desplazamientos y rotaciones. Esta teoría fue extendida para considerar el problema de estabilidad dinámica por Machado y Cortínez (2009).

En el caso de vigas curvas de pared delgada construidas con materiales isotropos los artículos de Gendy y Saleeb (1994), Cortínez *et al.* (1999), Piovan *et al.* (2000) y Hu *et al.* (1999) consideran la deformabilidad por corte en forma completa. Son pocos los trabajos que han considerado la mecánica de vigas curvas de pared delgada construidas con materiales compuestos teniendo en cuenta la flexibilidad por corte debida al alabeo. Entre dichos trabajos, se destacan los artículos presentados por Cortínez *et al.* (2000) y Cortínez *et al.* (2001), en los cuales se presentó un modelo que considera la flexibilidad por corte en forma completa en vigas curvas construidas con materiales compuestos, que permite evaluar la mecánica del movimiento fuera del plano. Sin embargo, dichos modelos son válidos para los casos de laminación simétrica balanceada o especialmente ortótropa. Estos trabajos se generalizan para el caso de vigas anisótropas en los trabajos de Piovan y Cortínez (2002, 2003, 2007b) para el análisis de estabilidad dinámica.

Tales modelos permiten considerar el análisis de inestabilidad global de la estructura, el cual tiene una gran importancia en estructuras esbeltas y es por eso que una importante cantidad de trabajo fue dirigido al desarrollo de modelos adecuados y métodos de cálculo

precisos para la determinación de cargas críticas de pandeo global para diferentes configuraciones de uso habitual. En el caso de vigas metálicas se han realizado aplicaciones exitosas de la teoría de Vlasov, obteniéndose soluciones analíticas simples de gran valor práctico (Timoshenko y Gere (1961), Bleich (1952), Vlasov (1961), Goodier (1941)). Luego, dicha teoría ha sido extendida al caso de materiales compuestos en diferentes libros y publicaciones (Lee *et al* (2002), Sapkás y Kollár (2002) y Kollár y Springer (2003), Machado y Cortínez (2005a, 2005b)). Por su parte, el mencionado modelo estructural ha sido empleado para el análisis de inestabilidad dinámica, vibraciones en estructuras fisuradas e identificación de daño. Dichas aplicaciones fueron presentadas en los trabajos de Machado (2006, 2008, 2010), Cortínez *et al.* (2009) y Cortínez y Dotti (2010, 2012).

En cuanto a la inestabilidad local de vigas de pared delgada se han publicado varios trabajos en los que se obtienen fórmulas explícitas que definen la carga crítica de pandeo local. En lo que se refiere a vigas construidas con materiales compuestos se pueden mencionar los trabajos de Kollár y Springer (2003) y de Qiao y Shan (2005). En ellos, se consideran hipótesis simplificativas que permiten modelar la sección transversal de la viga constituida por placas de gran longitud vinculadas entre sí, considerando sólo cargas de distribución uniforme. Por su parte, Tarján *et al.* (2009) propusieron un análisis de pandeo de placas sometidas a cargas de compresión con distribución lineal por medio de una superposición de estados (axial y flexional puro). Luego, la carga crítica se obtiene a través de la curva de interacción desarrollada por Bleich (1952), siendo aplicable únicamente a placas restringidas rotacionalmente en dos de sus bordes.

## **CAPÍTULO 3**

# **GENERALIDADES DEL DISEÑO DE VIGAS COMPUESTAS DE PARED DELGADA**

### **3.1 Introducción**

El diseño de estructuras esbeltas construidas con materiales compuestos constituye un problema complejo que involucra una gran cantidad de variables debido a las características de tales materiales. Por su parte, las vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos son elementos estructurales muy versátiles y, a pesar de que las formas de la sección de tales estructuras son similares a las empleadas en construcciones metálicas, su comportamiento estructural suele ser diferente. Por todo ello, en este capítulo se realiza una descripción de los diferentes aspectos que deben ser tenidos en cuenta en el diseño de vigas compuestas de pared delgada.

En primer lugar, se mencionan las ventajas fundamentales del empleo de materiales compuestos en obras de ingeniería y se describen las principales dificultades que suelen presentarse en el diseño de tales estructuras. En segundo lugar, se realiza un breve resumen de las características mecánicas de los materiales compuestos y de los criterios que serán utilizados para evaluar su resistencia. Por último, se describen aspectos específicos que deben considerarse al analizar el comportamiento estructural de vigas de pared delgada compuestas.

### **3.2 Generalidades**

Las vigas de pared delgada se utilizan habitualmente en diversas aplicaciones tecnológicas en las cuales el ahorro de peso resulta una propiedad determinante en el diseño. Dicha propiedad se ve incrementada cuando tales estructuras se construyen con materiales compuestos, los que a su vez presentan importantes ventajas tales como alta resistencia a la corrosión y a la fatiga. Por otra parte, las relaciones de rigidez (longitudinal y transversal) son, en general, muy diferentes a las de materiales isótropos. Las ventajas de los materiales compuestos con respecto a los convencionales ha motivado un importante

trabajo de investigación dirigido hacia este nuevo tipo de materiales, que presentan dos características distintivas: complejidad y versatilidad. Son complejos debido a la naturaleza de los componentes utilizados y la forma en que se los dispone, y por el comportamiento mecánico resultante. Son versátiles, pues pueden ser diseñados exclusivamente para cumplir con un rol determinado o bien con propiedades previamente especificadas. De esta manera, el diseñador puede controlar el rango de variación de las propiedades del material (rigidez, resistencias, expansión térmica, etc.). Por su parte, los adelantos en la ciencia y en la tecnología de materiales compuestos con grandes capacidades elásticas, y la necesidad de estructuras con miembros estructurales de grandes luces, livianos, y esbeltos, ha generado un gran interés por el análisis de estructuras de alta flexibilidad. Las aplicaciones de estos materiales van desde estructuras de vigas simples hasta el análisis de hélices de helicópteros, alas de aviones, álabes de turbina y subsistemas de estructuras más complejas como las aeroespaciales.

Consecuentemente, el diseño de piezas de materiales compuestos es considerablemente más complejo que el diseño de piezas de materiales convencionales. No sólo se debe idear la geometría del elemento sino también se debe diseñar el propio material con la finalidad de obtener rigideces y resistencias que cumplan con los requisitos deseados en la estructura. El diseño de una pieza compuesta implica además aprovechar de la mejor manera posible las cualidades del material, reforzando las direcciones sometidas a mayores esfuerzos. Para ello, se debe definir a cada uno de los materiales constituyentes y, en el caso de materiales laminados, se deben determinar la orientación de las fibras en cada lámina, el espesor de cada una de ellas y la secuencia de apilamiento óptima. Asimismo y a pesar de no ser objeto de estudio en esta tesis, es importante la elección de un proceso de fabricación que garantice la buena calidad final del elemento.

Debido a las complejidades que trae aparejadas el uso de materiales compuestos, las herramientas de diseño y de análisis estructural desarrolladas para materiales convencionales no pueden aplicarse directamente en estructuras compuestas. El diseño de tales estructuras requiere de un primer paso de definición del problema y de las especificaciones que deberá cumplir el elemento a diseñar. Luego, debe encontrarse la manera de diseñar la estructura. Tradicionalmente, los diseños se han llevado a cabo aplicando métodos basados en el conocimiento empírico. Sin embargo, cuando el diseño involucra el análisis de materiales compuestos, el número de combinaciones posibles es prácticamente ilimitado y la caracterización mediante experimentación se hace muy costosa. Actualmente, el uso de modelos matemáticos de optimización y métodos

numéricos, para predecir y simular su comportamiento, parecen ser las herramientas más adecuadas para realizar el diseño de tales estructuras.

Sin embargo, más allá del método de resolución empleado, para formular correctamente el diseño y poder determinar los aspectos fundamentales a considerar, primero es importante conocer el comportamiento estructural que presentan las vigas compuestas de pared delgada y sus limitaciones, acorde a las solicitaciones a las que están sometidas. Este tipo de análisis da las pautas a seguir en el diseño en lo que respecta a la elección del objetivo del diseño y de las restricciones estructurales que deben ser verificadas. Los desplazamientos que se producen en la estructura, la resistencia del material, el pandeo global y el pandeo local son aspectos de igual importancia en vigas FRP. Por ello, en la última sección de este capítulo se realizan algunas consideraciones sobre estos aspectos.

### **3.3 Materiales compuestos**

Los materiales compuestos poseen principalmente dos constituyentes: la matriz y las fibras. Entre las matrices más usadas se encuentran las matrices cerámicas y las resinas poliméricas (poliéster, viniléster y epoxi, entre otras), mientras que las fibras comúnmente utilizadas son las fibras de vidrio, grafito y carbono. En particular, los materiales compuestos de matriz polimérica presentan excelentes relaciones rigidez/peso y resistencia/peso que los hace idóneos para ciertos sectores productivos. Otras de sus ventajas, que dan origen a muchas de sus aplicaciones son su resistencia a la fatiga, su alta resistencia a la corrosión, su resistencia a distintos agentes de origen medioambiental y químico, su baja expansión térmica, su baja o alta conductividad térmica, etc.

Las fibras poseen una gran resistencia a las tensiones longitudinales, mientras que la matriz es la encargada de redistribuir las cargas que actúan en direcciones distintas a la dirección de las fibras, unir las y protegerlas de factores mecánicos y ambientales. La falta de contribución en la resistencia en dirección transversal por parte de las fibras y la escasa resistencia de la matriz, generan la necesidad de adicionar láminas unidireccionales (Figura 3.1(a)) con distintas orientaciones de fibras, creando una estructura laminada (Figura 3.1(c)). Otra solución para soportar cargas multidireccionales es incorporar en una misma lámina refuerzos bidireccionales (Figura 3.1(b)), o bien, utilizar un refuerzo distribuido en forma aleatoria (CSM).

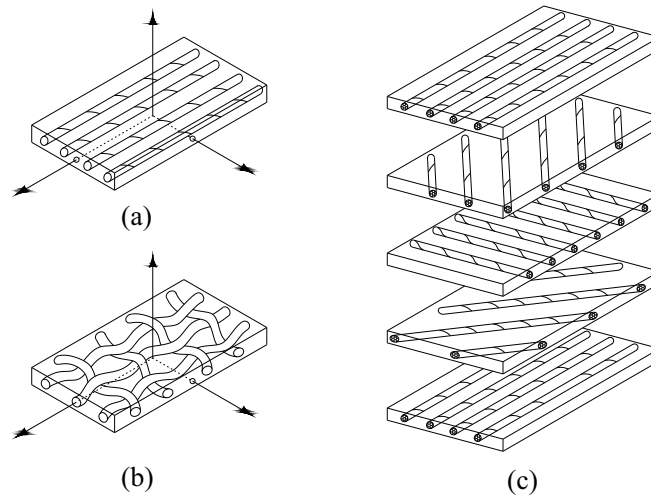


Figura 3.1. (a) Lámina con fibras unidireccionales. (b) Lámina con fibras bidireccionales. (c) Laminado multicapa.

Las propiedades mecánicas y estructurales globales de un material compuesto dependen, tanto de las propias propiedades de sus constituyentes, como de la disposición geométrica de éstos. Luego, la combinación de diferentes matrices con fibras de distintos materiales o con diversas disposiciones permite obtener materiales con propiedades mecánicas particulares que se adaptan a los distintos aspectos que requiere un determinado diseño. Existe, pues, una gran cantidad de combinaciones posibles y, por lo tanto, muchos tipos de materiales compuestos. Estos se pueden distinguir en función de su tipología (fibras cortas o largas, continuas o discontinuas, orientadas o con disposición aleatoria, una sola capa o laminados multicapa, etc.), o bien en función del tipo de sus componentes. En esta tesis el diseño se focaliza en el empleo de compuestos FRP, los cuales consisten en láminas delgadas unidireccionales ensambladas constituidas por polímeros reforzados con fibras continuas. En cuanto a las fibras suelen ser de vidrio, que dan lugar a los GFRP (*glass fiber reinforced polymer*), o bien de carbono, que dan lugar a los CFRP (*carbon fiber reinforced polymer*).

### 3.3.1. Ecuaciones constitutivas de una lámina de material compuesto

Uno de los primeros pasos del diseño es conocer el comportamiento del material. Una de las dificultades en su análisis es la determinación de las propiedades efectivas del material compuesto a partir de las propiedades de sus constituyentes. Los materiales compuestos son anisótropos, lo que causa que sus propiedades varíen de acuerdo a la posición y a la dirección consideradas. Para modelar el comportamiento mecánico de estos materiales, primero deben estudiarse los mecanismos microestructurales que se establecen entre los diferentes constituyentes. Esto da lugar a modelos micromecánicos que representan al

material como uno homogéneo equivalente, permitiendo conocer las propiedades elásticas de una lámina. Luego, los llamados modelos macromecánicos establecen relaciones entre tensiones y deformaciones que describen las propiedades constitutivas del laminado a partir de tales propiedades efectivas mencionadas. Luego, las relaciones constitutivas entre tensiones y deformaciones para una lámina de material anisótropo vienen dadas por la expresión

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53} & Q_{54} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & Q_{64} & Q_{65} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (3.1)$$

donde se comprueba el requerimiento de veintiuna constantes  $Q_{ij}$  para definir completamente la relación constitutiva entre tensiones y deformaciones.

Sin embargo, se asume que los laminados multicapa FRP están formados por varias láminas ortótropas, en las que se verifica la existencia de dos planos de simetría del material, siendo éstos ortogonales entre sí y simultáneamente perpendiculares a un tercer plano. En la Figura 3.2(b) se muestra una lámina ortótropa con su sistema de referencia propio ( $B$ :  $x_1, x_2, x_3$ ), alineado con las direcciones principales de la lámina, es decir: la dirección  $x_1$  está alineada con la dirección de las fibras y las restantes dos direcciones, normales a la anterior y perpendiculares entre sí. En una lámina de material ortótropo no hay acoplamiento entre las tensiones normales y las deformaciones tangenciales, ni tampoco entre las distintas componentes de tensión y deformación transversales. Debido a esto, se requiere únicamente el conocimiento de nueve constantes elásticas independientes, quedando las relaciones constitutivas entre tensiones y deformaciones reducidas a la siguiente expresión

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

La expresión (3.2) corresponde entonces a una lámina unidireccional como la de la

Figura 3.2(b), es decir, con ejes orientados en la dirección del refuerzo.

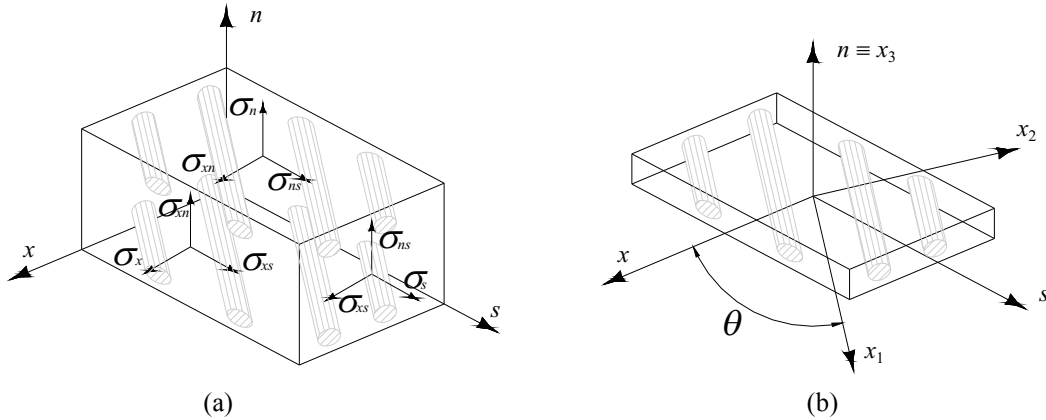


Figura 3.2. Descripción de los sistemas de referencia de una lámina con ortotropía general. (a) Tensiones expresadas en el sistema  $(B: x, s, n)$ . (b) Relación entre el sistema  $(B: x, s, n)$  y el sistema propio de la lámina  $(B: x_1, x_2, x_3)$ .

Las láminas que forman un laminado multicapa tienen sus fibras orientadas en distintas direcciones, otorgándole al material mejores propiedades estructurales. La disposición de fibras en otras direcciones que no sean las principales de la lámina, exige efectuar una transformación de los tensores de deformaciones y de tensiones, transformando a su vez la expresión constitutiva (3.2). Observando la Figura 3.2(b) puede establecerse la siguiente relación de transformación entre los sistemas de referencia del laminado,  $(B: x, s, n)$  y de la lámina,  $(B: x_1, x_2, x_3)$ , de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ s \\ n \end{Bmatrix}. \quad (3.3)$$

Así, la ley constitutiva (3.2) puede expresarse como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{sn} \\ \sigma_{xn} \\ \sigma_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{nn} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

donde



$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta, \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta), \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta, \quad \bar{Q}_{33} = Q_{33}, \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta), \\
\bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta, \quad \bar{Q}_{55} = Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta, \\
\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta, \quad \bar{Q}_{13} = Q_{13} \cos^2 \theta + Q_{23} \sin^2 \theta, \\
\bar{Q}_{23} &= Q_{23} \cos^2 \theta + Q_{13} \sin^2 \theta, \quad \bar{Q}_{36} = (Q_{13} - Q_{23}) \sin \theta \cos \theta,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

siendo  $\theta$  el ángulo de orientación de la fibra, como se muestra en la Figura 3.2(b), medido en sentido antihorario desde el eje  $x$  hasta el eje  $x_1$ .

### 3.3.2. Ecuaciones constitutivas de un laminado FRP

Como se mencionó, los laminados FRP están formados por láminas unidireccionales apiladas, con fibras orientadas en distintas direcciones. Luego, un laminado se identifica a partir de su secuencia de laminación y a partir de allí se puede conocer su comportamiento mecánico. La relación constitutiva entre las resultantes de tensión en el espesor y las deformaciones de placa pueden expresarse de la siguiente forma

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{ss} \\ N_{xs} \\ N_{sn} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{ss} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}^{(H)} & A_{45}^{(H)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45}^{(H)} & A_{55}^{(H)} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{ss} \\ \gamma_{xs} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{xn} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{ss} \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix}, \tag{3.6}$$

donde las constantes de rigidez del laminado  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  y  $A_{ij}^{(H)}$  se obtienen integrando los coeficientes  $\bar{Q}_{ij}$  en el espesor de la siguiente manera

$$A_{ij} = \int_{-e/2}^{e/2} (\bar{Q}_{ij}) \, dn = \sum_{k=1}^{N_L} (\bar{Q}_{ij})_k (n_k - n_{k-1}) = e \sum_{k=1}^{N_L} (\bar{Q}_{ij})_k (\tilde{n}_k - \tilde{n}_{k-1}), \quad \dots \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
\dots B_{ij} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\bar{Q}_{ij}) n \, dn = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_L} (\bar{Q}_{ij})_k (n_k^2 - n_{k-1}^2) = \frac{e^2}{2} \sum_{k=1}^{N_L} (\bar{Q}_{ij})_k (\tilde{n}_k^2 - \tilde{n}_{k-1}^2), \\
D_{ij} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\bar{Q}_{ij}) n^2 \, dn = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} (\bar{Q}_{ij})_k (n_k^3 - n_{k-1}^3) = \frac{e^3}{3} \sum_{k=1}^{N_L} (\bar{Q}_{ij})_k (\tilde{n}_k^3 - \tilde{n}_{k-1}^3), \quad (3.7) \\
A_{ij}^{(H)} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\bar{Q}_{ij}) \, dn = \frac{5}{4} e \sum_{k=1}^{N_L} (\bar{Q}_{ij})_k (\tilde{n}_k - \tilde{n}_{k-1}) - \frac{5}{3} e \sum_{k=1}^{N_L} (\bar{Q}_{ij})_k (\tilde{n}_k^3 - \tilde{n}_{k-1}^3),
\end{aligned}$$

siendo  $\tilde{n} = n/e$ . Las constantes  $B_{ij}$  corresponden al acoplamiento extensional-flexional, mientras que las constantes  $A_{ij}$  corresponden al comportamiento extensional y de corte en el plano de la placa, y las constantes  $D_{ij}$  corresponden al comportamiento fuera del plano de la placa, es decir flexional y torsional.

Un laminado es balanceado si para cada capa con fibras en dirección  $+\theta$  existe una capa idéntica con fibras en dirección  $-\theta$ . Para que un laminado sea simétrico la capa ubicada en la posición  $+n$  debe ser idéntica a la capa ubicada en la posición  $-n$ . Por su parte, un laminado *cross-ply* tiene fibras orientadas sólo en las direcciones  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , y, por lo tanto, es balanceado, pudiendo ser simétrico o asimétrico.

En el caso de laminados simétricos no hay acoplamiento extensional-flexional y, por lo tanto, los coeficientes  $B_{ij}$  son nulos. Si, además, el laminado es balanceado no existe acoplamiento extensional-corte y, por lo tanto, se anulan las constantes de rigidez  $A_{16}$  y  $A_{26}$ . En base a estas hipótesis, en el caso de laminados simétricos y balanceados la ley constitutiva dada por la expresión (3.6) queda expresada de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{ss} \\ N_{xs} \\ N_{sn} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{ss} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}^{(H)} & A_{45}^{(H)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45}^{(H)} & A_{55}^{(H)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{xs} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{xn} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{ss} \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix}, \quad (3.8)$$

### 3.3.3. Criterios de falla estática

Los criterios de falla para materiales compuestos, al igual que para los materiales homogéneos, se utilizan para determinar el estado límite de tensión a partir del cual el compuesto sufre un daño o una falla. En particular, los criterios de falla polinomiales utilizan expresiones matemáticas para describir la superficie de falla para un material de comportamiento anisótropo. Estos criterios no distinguen el tipo de falla, ni cuál es la fase

dominante en la fractura. En consecuencia no pueden tener en cuenta fenómenos que puedan pasar en la interfase, entre la matriz y la fibra.

El criterio de falla polinomial más utilizado para predecir la falla de una lámina es el criterio propuesto por Tsai y Wu (1971). Este criterio se puede expresar de la siguiente manera

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\tau_{23}^2 + F_{55}\tau_{31}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 < 1, \quad (3.9)$$

donde  $F_1, F_2, F_{11}, \dots, F_{66}, F_{12}$  y  $F_{23}$  son parámetros de resistencia que dependen de las propiedades mecánicas del material y están dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{s_1^+} - \frac{1}{s_1^-}, & F_2 &= \frac{1}{s_2^+} - \frac{1}{s_2^-}, & F_3 &= \frac{1}{s_3^+} - \frac{1}{s_3^-}, \\ F_{11} &= \frac{1}{s_1^+ s_1^-}, & F_{22} &= \frac{1}{s_2^+ s_2^-}, & F_{33} &= \frac{1}{s_3^+ s_3^-}, \\ F_{44} &= \frac{1}{(s_{23})^2}, & F_{55} &= \frac{1}{(s_{13})^2}, & F_{66} &= \frac{1}{(s_{12})^2}, \\ F_{12} &= -\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}F_{22}}, & F_{13} &= -\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}F_{33}}, & F_{23} &= -\frac{1}{2}\sqrt{F_{33}F_{22}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

siendo  $s_1^+$  y  $s_1^-$  las resistencias a tracción y a compresión en la dirección de la fibra,  $s_2^+$  y  $s_2^-$  las resistencias a tracción y compresión en la dirección transversal a la fibra,  $s_3^+$  y  $s_3^-$  las resistencias a tracción y compresión en la dirección normal,  $s_{12}$  es la resistencia al corte en el plano y  $s_{13}$  y  $s_{23}$  son las resistencias al corte interlaminares.

En el caso particular de materiales transversalmente isótropos se asumen válidas las siguientes expresiones (Kollár y Springer, 2003)

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2, & F_{33} &= F_{22}, & F_{44} &= 2(F_{22} - F_{23}), & F_{55} &= F_{66}, \\ F_{12} &= F_{13}, & F_{23} &= -\frac{F_{22}}{2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Luego, para este caso particular, la condición (3.9) es expresada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} F_1\sigma_1 + F_2(\sigma_2 + \sigma_3) + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \\ 2(F_{22} - F_{23})\tau_{23}^2 + F_{66}(\tau_{31}^2 + \tau_{12}^2) + 2F_{12}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3) + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 < 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Con cierta aproximación, se puede asumir que la falla del laminado está asociada con la falla de la primera lámina (FPF, por sus siglas en inglés: *First Ply Failure*), la cual,

generalmente, se corresponde con la fractura de la matriz. Luego, la falla del laminado no se produce si se satisface la desigualdad (3.9).

Para definir la superficie de falla de la lámina y obtener un factor de comparación, se define el factor de relación de tensiones (o factor de seguridad,  $R$ ) como el valor por el cual debe ser multiplicada la carga (y por lo tanto las componentes de tensión) para alcanzar la falla del laminado. Luego, si se iguala a 1 la condición (3.12) y se reemplazan las componentes de tensión en la superficie de falla ( $\sigma_{ij}^f = R\sigma_{ij}$ ), el criterio de Tsai-Wu puede expresarse en términos de  $R$  de la siguiente manera

$$aR^2 + 2bR - 1 = 0. \quad (3.13)$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene la siguiente expresión de  $R$

$$R = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2a}, \quad (3.14)$$

donde,

$$\begin{aligned} a &= F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + F_{66}(\tau_{12}^2 + \tau_{31}^2) + 2(F_{22} - F_{23})\tau_{23}^2 + \\ & 2F_{12}\sigma_1(\sigma_2 + \sigma_3) + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3, \\ b &= F_1\sigma_1 + F_2(\sigma_2 + \sigma_3). \end{aligned} \quad (3.15)$$

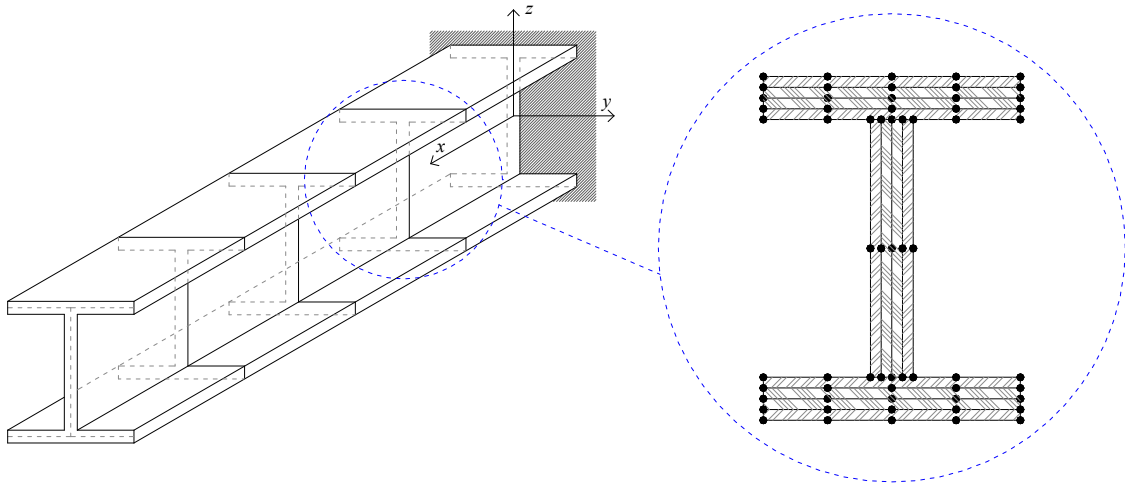


Figura 3.3. Esquema de los puntos en los que se evalúa el factor de seguridad  $R$ .

La expresión (3.15) hace referencia a las componentes del tensor de tensiones ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{31}$ , y  $\tau_{23}$ ) expresadas en el sistema de coordenadas propio de la lámina ( $B: x_1, x_2, x_3$ ). Tales componentes se determinan en función de las deformaciones principales mediante la expresión (3.2), la cual, para el caso de materiales transversalmente isótropos, puede

escribirse como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{D}(1-\nu_{23}^2) & \frac{E_2\nu_{12}}{D}(1+\nu_{23}) & \frac{E_3\nu_{12}}{D}(1+\nu_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E_2}{D}\left(1-\frac{E_2\nu_{12}^2}{E_1}\right) & \frac{E_2}{D}\left(\nu_{23}+\frac{E_2\nu_{12}^2}{E_1}\right) & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{E_2}{D}\left(1-\frac{E_2\nu_{12}^2}{E_1}\right) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} & 0 & 0 \\ & & & & G_{12} & 0 \\ & & & & & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

siendo,

$$D = 1 - \nu_{23} - 2(1 + \nu_{23}) \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2. \quad (3.17)$$

En la expresión (3.16) se introduce el vector de deformaciones expresado en el sistema de la lámina ( $B: x_1, x_2, x_3$ ), el cual puede definirse en términos de las deformaciones expresadas en el sistema curvilíneo de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{nn} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix}, \quad (3.18)$$

donde  $c = \cos\theta_k$  y  $s = \sin\theta_k$ .

Las tensiones en el sistema principal del laminado, y por lo tanto los distintos factores de seguridad  $R$ , se evalúan en diferentes puntos de la sección transversal, en las zonas superior e inferior de cada capa del laminado y en distintas secciones a lo largo de la longitud de la viga, tal como se muestra en la Figura 3.3 para el caso particular de una viga cantiléver de sección transversal tipo I. Luego, el valor de  $R$  que se considera como indicador de la falla del laminado es el mínimo valor encontrado.

### 3.3.4. Criterio de falla por fatiga (CT-HE)

En los diseños de vigas compuestas sometidas a estados de carga dinámicos, resulta conveniente verificar la resistencia a fatiga del laminado. Son muchos los modelos que se

han desarrollado para predecir la resistencia a fatiga y el tiempo de vida de laminados constituidos por polímeros reforzados con fibras. Al respecto, una completa revisión fue publicada por Degrieck y Van Paepegem (2001). Los autores proponen clasificar tales modelos en las siguientes categorías: modelos de vida a fatiga, modelos fenomenológicos para la rigidez o la resistencia residual y modelos de daño progresivo. Los modelos de vida a fatiga no consideran los mecanismos de degradación y los criterios de falla son formulados utilizando curvas S-N, por lo cual requieren un gran trabajo experimental. Los criterios basados en modelos fenomenológicos para la rigidez y la resistencia residuales proponen una ley evolutiva que describe el deterioro gradual de la rigidez o de la resistencia del laminado en términos de las propiedades macroscópicas, mientras que los modelos de daño progresivo proponen la ley evolutiva de degradación en referencia a un daño específico.

Para predecir la resistencia a fatiga de laminados FRP, en esta tesis se hace uso del criterio de falla de Tsai-Hill extendido propuesto por Jen y Lee (1998a; 1998b). Dentro de las clasificaciones enumeradas anteriormente, este criterio se encuadra dentro de los modelos de vida a fatiga. Jen y Lee (1998b) extienden el conocido criterio de falla de Tsai-Hill (Tsai, 1965) para predecir las características a fatiga de láminas unidireccionales. Demuestran además que el criterio puede ser empleado satisfactoriamente para el análisis de laminados cuasi-isótropos y laminados *cross-ply*. Aquí se asume, al igual que en el análisis estático, que la falla de un laminado multi-direccional puede ser representada por la falla de la primera lámina.

Para establecer el criterio CT-HE, primeramente se definen las relaciones de tensión según las siguientes expresiones

$$R_1 = \frac{(\sigma_1)_{\min}}{(\sigma_1)_{\max}}, \quad R_2 = \frac{(\sigma_2)_{\min}}{(\sigma_2)_{\max}}, \quad R_{12} = \frac{(\tau_{12})_{\min}}{(\tau_{12})_{\max}}. \quad (3.19)$$

Luego, omitiendo el efecto de la frecuencia de carga, el criterio de falla por fatiga del laminado se establece de la siguiente manera

$$\left(\frac{\sigma_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{T}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau}\right)^2 = 1, \quad \text{si } |R_1| \leq 1, \quad |R_2| \leq 1, \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{T}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{l^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau}\right)^2 = 1, \quad \text{si } |R_1| \geq 1, \quad |R_2| \leq 1, \quad (3.21)$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{t}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{l^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau}\right)^2 = 1, \quad \text{si } |R_1| \geq 1, \quad |R_2| \geq 1, \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{t}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau}\right)^2 = 1, \quad \text{si } |R_1| \leq 1, \quad |R_2| \geq 1, \quad (3.23)$$

donde  $L(N, R_1)$  y  $l(N, R_1)$  son las resistencias a fatiga de tracción y compresión, respectivamente, en la dirección de la fibra,  $T(N, R_2)$  y  $t(N, R_2)$  son las resistencias a fatiga de tracción y compresión, respectivamente, en la dirección transversal a la fibra y  $\tau(N, R_{12})$  es la resistencia a fatiga por corte, siendo  $N$  el número de ciclos. Estas resistencias deben ser determinadas experimentalmente (Jen y Lee, 1998a) y dependen del número de ciclos y de las relaciones entre tensiones definidas en (3.19). Los valores de tales resistencias para láminas compuestas por carbono AS4/PEEK se muestran en el Apéndice I. Éstos se dan para diferentes relaciones  $R$  y para un número crítico de ciclos. En particular, cuando  $R_i$  es igual a la unidad se hace referencia a las resistencias estáticas de la lámina.

En este caso, el cálculo de las componentes de tensión máximas y mínimas se realiza de manera análoga a lo explicado anteriormente para la aplicación del criterio de falla de Tsai-Wu.

### 3.4 Vigas de pared delgada: comportamiento estructural

En comparación con las vigas de pared delgada metálicas, las compuestas son mucho más complejas en el sentido que involucran varios efectos no-clásicos importantes como la deformación por corte. Es decir, en el modelo de viga clásico Bernoulli-Euler se asume que la rigidez de corte transversal es infinita. Sin embargo, en vigas construidas con materiales compuestos el efecto de corte debe ser tenido en cuenta. Por lo tanto, es importante utilizar un modelo estructural que capture efectivamente estos efectos para poder investigar la respuesta de dichos elementos estructurales. En esta tesis se emplea a tal fin un modelo teórico que considera deformabilidad por corte debida a flexión y a alabeo por torsión no uniforme. El mismo es una extensión de la teoría desarrollada por Piovan en su tesis doctoral (Piovan, 2003) y publicada en los trabajos de Cortínez y Piovan (2002; 2005; 2006).

Las inestabilidades pueden producirse fácilmente en algunos casos y provocar daños severos en una estructura. El pandeo bajo carga representa un ejemplo típico de pérdida de estabilidad en estructuras de pared delgada y muchas veces su diseño es gobernado por este tipo de análisis. En consecuencia, tanto la inestabilidad global como la inestabilidad local

resultan ser aspectos fundamentales en el diseño de vigas de pared delgada. En general, ambos análisis suelen incluirse en el problema de optimización como restricciones estructurales y, muchas veces, la estabilidad global es considerada una medida de resistencia de la estructura y, por ello, se incluye en los objetivos del problema de optimización.

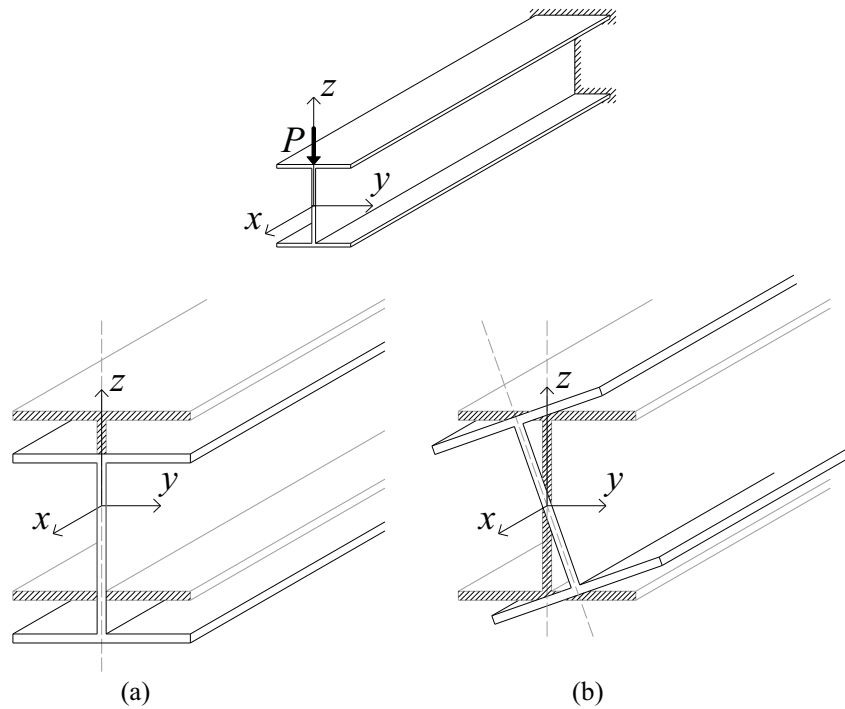


Figura 3.4. Esquema de la configuración de pandeo lateral.

Cuando una viga es cargada en su plano de simetría, inicialmente flexiona en dicho plano (Figura 3.4(a)). Sin embargo, para un cierto nivel de carga, la viga pandea lateralmente, es decir, simultáneamente la viga rota respecto a su eje longitudinal (Figura 3.4(b)). Este fenómeno es llamado pandeo lateral-torsional (o simplemente, pandeo lateral) y el valor de la carga para la cual ocurre se denomina carga crítica o carga de pandeo.

La inestabilidad local en vigas de pared delgada se presenta principalmente debido al pequeño espesor de las paredes que conforman su sección transversal y, en especial cuando se trata de vigas de poca longitud, la inestabilidad local suele producirse antes que la inestabilidad global. Por lo tanto, en vigas y columnas de pared delgada el pandeo local debe ser considerado. La falla por inestabilidad de una parte de la sección transversal es importante debido a que indica el inicio de un proceso que lleva al colapso de la membrana y, por lo tanto, su predicción es fundamental para conocer la resistencia de la estructura. Se han desarrollado diferentes metodologías para determinar el estado límite de inestabilidad local. Sin embargo, una de las estrategias más empleadas consiste en modelar las alas y las



almas de la sección en forma individual considerando las conexiones que existen entre ellas. En la Figura 3.5 se esquematizan posibles configuraciones de pandeo de la sección y la forma en que se modelan las paredes de la misma.

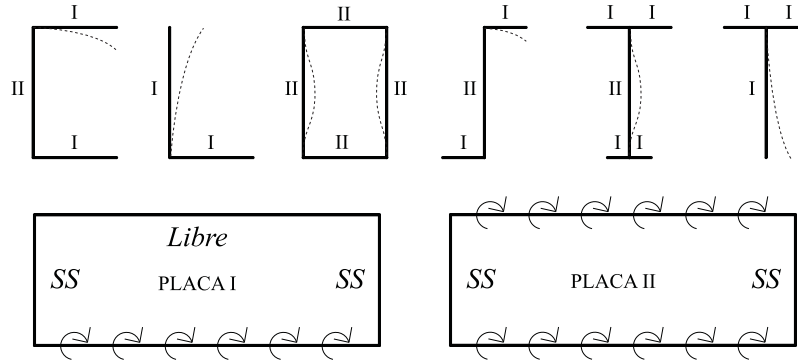


Figura 3.5. Configuraciones de pandeo local e hipótesis para su análisis.



## **CAPÍTULO 4**

# **ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS COMPUESTAS DE PARED DELGADA**

### **4.1 Introducción**

En este capítulo se presenta el modelo estructural empleado en esta tesis para evaluar el comportamiento de vigas FRP de pared delgada. Primeramente, se presenta un modelo teórico que permite realizar estudios estáticos, dinámicos y de inestabilidad en vigas FRP rectas y curvas de pared delgada. En el diseño óptimo de tales estructuras, este modelo será implementado numérica y analíticamente. La implementación numérica se realiza mediante la aplicación de un modelo de elementos finitos unidimensional que será detallado en el Capítulo 6. Tal implementación permite conocer todos los parámetros estructurales que intervienen en el diseño. Asimismo, para el análisis de algunas situaciones particulares se desarrollan fórmulas explícitas que permiten realizar el diseño óptimo de vigas rectas FRP de sección transversal bisimétrica y bajo condiciones de borde específicas. El modelo de vigas mencionado no considera efectos locales que puedan producirse en la sección de la viga. Para tener en cuenta dichos efectos, se desarrollan fórmulas analíticas que permiten evaluar la estabilidad local de la misma a partir de un modelo de placas ortótropas.

La teoría de vigas FRP que se presenta en la primera sección de este capítulo considera flexibilidad por corte en forma completa, es decir, considera deformabilidad por corte debida a flexión y a alabeo por torsión no uniforme. Se contempla en forma unificada el tratamiento de secciones genéricas tanto abiertas como cerradas en vigas con laminación simétrica y balanceada o especialmente ortótropa. Su formulación está basada en el principio de Hellinger-Reissner. El campo de desplazamientos se considera representado por componentes lineales y no lineales y es formulado a partir de dos sistemas de referencia. Se contemplan las componentes de primer y segundo orden del vector de deformaciones de Green-Lagrange, omitiendo las componentes de segundo orden debidas a desplazamientos no lineales. Se contempla la presencia de un estado arbitrario de tensiones iniciales. Cabe destacar que los desarrollos realizados aquí conforman una extensión, para el análisis de vigas curvas, de los trabajos de Cortínez y Piovan (2002; 2006). Las

ecuaciones constitutivas que relacionan las resultantes de tensión con las deformaciones generalizadas surgen a partir del principio de Hellinger-Reissner. Por su parte, se ha demostrado que para el caso particular de vigas rectas este enfoque constitutivo arroja mejores resultados, tanto en el cálculo de frecuencias naturales como de inestabilidad. Sin embargo, la metodología empleada para su obtención resulta más difícil de implementar en el caso de laminaciones generales. Por ello, adicionalmente, se exponen las ecuaciones constitutivas que surgen del principio de trabajos virtuales.

En una segunda sección, mediante el empleo de las ecuaciones planteadas, se desarrollan fórmulas explícitas que permiten realizar el análisis estructural desde un punto de vista completamente analítico en vigas rectas FRP simplemente apoyadas y bi-empotradas, sometidas a estados de carga de flexo-compresión. Primeramente, se expone un resumen de las fórmulas analíticas convencionales destinadas al cálculo de desplazamientos estáticos, esfuerzos y tensiones producidos en la viga. Luego, empleando la teoría de vigas mencionada en el párrafo anterior, se desarrollan fórmulas analíticas que permiten obtener las cargas críticas de pandeo global de vigas rectas FRP con laminación simétrica y balanceada, contemplando únicamente secciones transversales doblemente simétricas.

Por último, se desarrolla una metodología para evaluar las cargas críticas locales en vigas FRP rectas y curvas de pared delgada con laminación ortótropa. Para realizar el análisis de inestabilidad local se asumen válidas las hipótesis propuestas por Kollár y Springer (2003), quienes modelan cada segmento de la sección transversal como una placa de gran longitud y asumen que los ejes comunes a dos o más placas permanecen rectos. Luego, la carga de pandeo local se determina considerando a cada pared como una placa individual de gran longitud restringida rotacionalmente por el segmento adyacente.

## 4.2 Teoría

En esta sección se desarrolla el modelo estructural empleado en esta tesis para analizar el comportamiento de vigas curvas y rectas de pared delgada construidas con materiales FRP. La formulación propuesta está basada en el principio de Hellinger-Reissner y considera la deformación por corte debida a flexión y a alabeo no uniforme en vigas rectas y curvas de pared delgada. Tal modelo constituye una extensión de la teoría desarrollada por Cortínez y Piovan (2002, 2006) para la consideración de vigas curvas de pared delgada sujetas a un estado arbitrario de tensiones iniciales, siendo estrictamente válida para laminaciones simétricas y balanceadas, ortótropas y *cross-ply*. Adicionalmente, al final de

esta sección se exponen las ecuaciones constitutivas en términos de las resultantes de tensión derivadas de la formulación basada en trabajos virtuales, las cuales pueden ser empleadas para el análisis de vigas FRP con laminación general (Piovan y Cortínez, 2007a, 2007b).

#### 4.2.1 Cinemática general

Se considera una viga genérica de paredes delgadas curvada en el plano. La sección transversal de la viga es constante a tramos y puede ser abierta o cerrada, como se muestra en las Figuras 4.1 y 4.2, respectivamente. Téngase presente que el modelo general de viga curva se puede reducir al modelo de viga recta, cuya representación se muestra para un perfil genérico de sección abierta en la Figura 4.3.

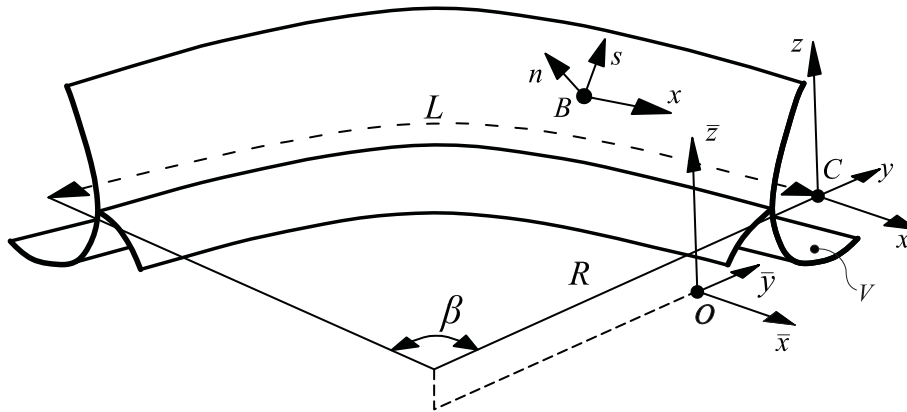


Figura 4.1. Esquema de viga de pared delgada genérica de eje curvo de sección abierta.

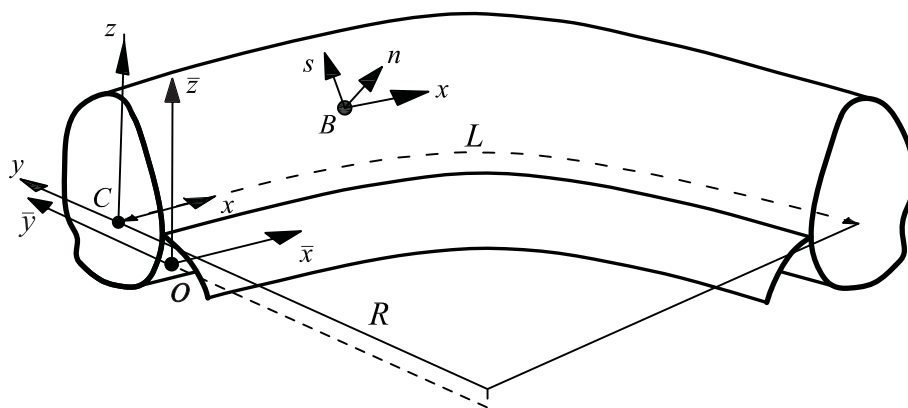


Figura 4.2. Esquema de viga de pared delgada genérica de eje curvo de sección cerrada.

La viga se asocia a las magnitudes  $V$ ,  $A$ ,  $L$ ,  $S$ , y  $e$ , que representan respectivamente los dominios del espacio (volumen), área seccional, longitud (en dirección axial de la viga), perímetro en la línea media de la pared seccional y espesor de la pared seccional, tal como se puede apreciar para una viga de sección abierta en la Figura 4.1 y en la Figura 4.4 y su

detalle.

Los puntos del elemento estructural son referidos a dos sistemas de referencia: un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales ( $C: x, y, z$ ), donde el punto de referencia  $C$  coincide con el centro de gravedad de la sección transversal, y otro sistema con origen en el centro de corte ( $O: \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ), siendo los ejes  $x$  y  $\bar{x}$  tangenciales al eje longitudinal de la viga.

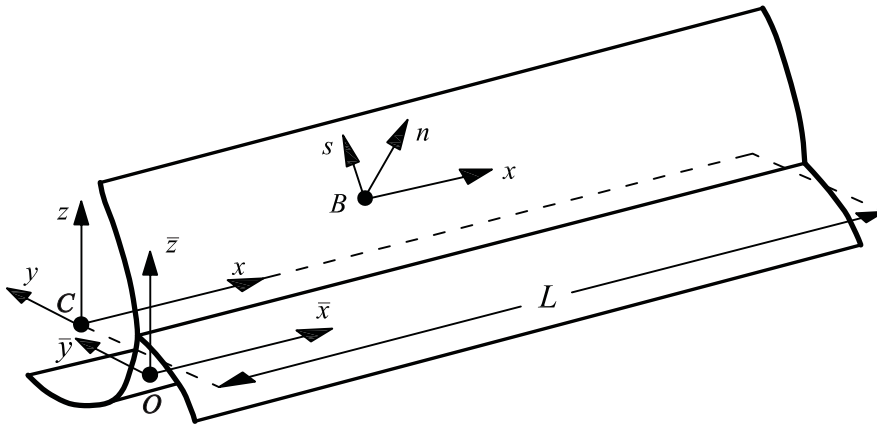


Figura 4.3. Esquema de viga de pared delgada genérica de eje recto.

Adicionalmente, se define un sistema de referencia intrínseco ( $B: x, s, n$ ), siendo  $B$  un punto genérico ubicado en la línea media de la sección transversal. El plano  $sn$  coincide con el de la sección transversal y las coordenadas curvilíneas  $s$  y  $n$  corresponden a coordenadas circunferencial y normal, respectivamente. Las coordenadas correspondientes a puntos ubicados sobre la línea media de la sección transversal se denotan mediante las letras mayúsculas  $Y$  y  $Z$  (o bien,  $\bar{Y}$  y  $\bar{Z}$ ).

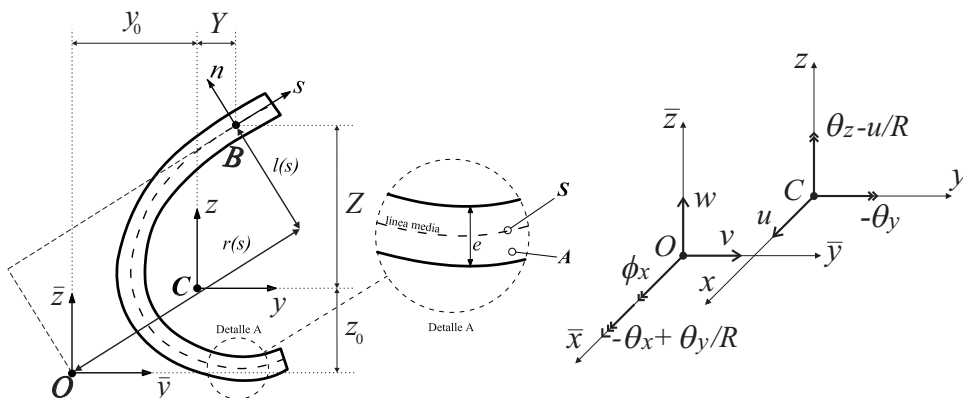


Figura 4.4. Descripción de las entidades geométricas de una sección transversal genérica. Sistemas de referencia y esquema de los desplazamientos generalizados.

El modelo estructural utilizado en la presente tesis está basado en las siguientes hipótesis:

- i) La sección es indeformable en su propio plano, aunque el alabeo se considera permitido fuera del mismo.
- ii) La distribución de alabeo se representa mediante la función de Saint-Venant de vigas isótropas.
- iii) La teoría del presente Capítulo se considera válida para vigas de pared delgada de eje curvo y recto, de sección transversal genérica. El material de construcción debe ser compuesto del tipo matriz reforzada con fibras y la laminación ortótropa general, lo cual incluye al material isótropo, compuesto especialmente ortótropo y compuesto con laminación simétrico-balanceada.
- iv) La curvatura de la línea media de la sección transversal es despreciable. Se idealiza la sección de la viga, formada por una secuencia de placas de espesor constante.
- v) Se admite que la curvatura torsional  $\kappa_{xs}$  de la placa se puede expresar de acuerdo con la teoría clásica de placas, mientras que la curvatura flexional  $\kappa_{xx}$  de la misma se expresa de acuerdo con una teoría placas con deformación de corte de primer orden.
- vi) Los esfuerzos placa ( $N_{ss}$ ) y los momentos ( $M_{ss}$ ) resultantes sobre el espesor de la pared, correspondientes a la tensión circunferencial  $\sigma_{ss}$  se suponen despreciables. Asimismo se desprecia la fuerza resultante sobre el espesor ( $N_{sn}$ ) relacionada con la deformación interlaminar  $\gamma_{ns}$ .
- vii) El campo de desplazamientos se considera representado por una componente lineal y una componente de segundo orden, sobre la base de dos sistemas de referencia, ( $C: x, y, z$ ) y ( $O: \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ).
- viii) Se admiten como las deformaciones más representativas: deformaciones de primer orden debidas a desplazamientos lineales ( $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xs}, \epsilon_{xn}$ ), deformaciones de primer orden debidas a desplazamientos no lineales ( $\epsilon_{xx}^{NL}, \epsilon_{xs}^{NL}, \epsilon_{xn}^{NL}$ ) y deformaciones de segundo orden debidas a desplazamientos lineales ( $\eta_{xx}^L, \eta_{xy}^L, \eta_{xz}^L$ ).
- ix) Se desprecian las componentes de deformación de orden superior debidas a desplazamientos no lineales ( $\eta_{ij}^{NL}$ ).
- x) Se desprecian las resultantes de tensión de alto orden dependientes de  $n^k$  ( $k > 1$ ).
- xi) Se considera que las componentes más representativas del tensor de tensiones son  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}$  y  $\sigma_{xz}$  y se contempla adicionalmente un estado arbitrario de tensiones iniciales ( $\sigma_{xx}^0, \sigma_{xy}^0, \sigma_{xz}^0$ ) incluyendo desplazamientos de segundo orden dependientes

de las rotaciones finitas semitangenciales.

- xii)** El campo de tensiones se deduce a partir de considerar las relaciones constitutivas de las resultantes de tensión en el espesor y de las ecuaciones de equilibrio en una placa.

Las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario de la sección transversal, expresadas en el sistema de referencia baricéntrico ( $C$ :  $x, y, z$ ) y en el sistema respecto al centro de corte ( $O$ :  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ), pueden relacionarse entre sí y con las correspondientes coordenadas curvilíneas  $s$  y  $n$  mediante las expresiones

$$\begin{aligned} y(s, n) &= \bar{y} - y_0, & z(s, n) &= \bar{z} - z_0, \\ y(s, n) &= Y - n \frac{dZ}{ds}, & z(s, n) &= Z + n \frac{dY}{ds}, \\ \bar{y}(s, n) &= \bar{Y} - n \frac{dZ}{ds}, & \bar{z}(s, n) &= \bar{Z} + n \frac{dY}{ds}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Por su parte, de acuerdo a las hipótesis enunciadas, el campo de desplazamientos adoptado se expresa, respecto a ambos sistemas de referencia ( $C$  y  $O$ ), de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u_x &= u - y \left( \theta_z - \frac{u}{R} \right) - z \theta_y - \omega \left( \theta_x - \frac{\theta_y}{R} \right), \\ u_y &= v - \bar{z} \phi_x, \quad u_z = w + \bar{y} \phi_x, \\ u_x^{NL} &= \frac{1}{2} \left[ z \phi_x \left( \theta_z - \frac{u}{R} \right) - y \phi_x \theta_y \right], \\ u_y^{NL} &= \frac{y}{2} \left[ \phi_x^2 + \left( \theta_z - \frac{u}{R} \right)^2 \right] - \frac{z}{2} \left( \theta_z - \frac{u}{R} \right) \theta_y, \\ u_z^{NL} &= \frac{z}{2} (\phi_x^2 + \theta_y^2) - \frac{y}{2} \left( \theta_z - \frac{u}{R} \right) \theta_y, \end{aligned} \quad (4.2)$$

siendo válido para vigas curvas y también rectas, caso que se cumple en el límite en que el radio  $R$  tiende a infinito. Los desplazamientos lineales ( $u_x, u_y$  y  $u_z$ ) y no lineales ( $u_x^{NL}, u_y^{NL}, u_z^{NL}$ ) de un punto genérico de la viga se expresan en términos de las coordenadas de la sección transversal y de los *desplazamientos generalizados*. Estos representan los desplazamientos y rotaciones del centro de referencia  $C$  y del centro de corte  $O$ , como se indica en la Figura 4.4. Corresponden a tres corrimientos:  $u, v$  y  $w$ , tres rotaciones:  $\theta_z, \theta_y, \phi_x$  y a una magnitud  $\theta_x$  ponderativa del alabeo no uniforme a lo largo del eje de la viga. Los desplazamientos generalizados, que corresponden a siete grados de libertad, se asocian a



los cuatro movimientos desacoplados básicos de una viga recta: extensional ( $u$ ), flexional lateral ( $v, \theta_z$ ), flexional transversal ( $w, \theta_y$ ) y torsional ( $\phi_x, \theta_x$ ). El campo de desplazamientos considera flexibilidad por corte en forma completa.

La función de alabeo  $\omega$  de la sección transversal se define mediante la expresión

$$\omega = \omega_p(s) + \omega_s(s, n), \quad (4.3)$$

donde  $\omega_p$  y  $\omega_s$  son las funciones de alabeo en el contorno y en el espesor respectivamente, las cuales se definen de la misma manera en que lo hicieron Cortínez y Piovan (2002; 2006), esto es

$$\omega_p(s) = D_C - \int_s [r(s) + \psi(s)] ds, \quad \omega_s(s, n) = nl(s), \quad (4.4)$$

donde se han utilizado las siguientes magnitudes

$$r(s) = (Z(s) + z_0) \frac{dY}{ds} - (Y(s) + y_0) \frac{dZ}{ds}, \quad l(s) = (Y(s) + y_0) \frac{dY}{ds} + (Z(s) + z_0) \frac{dZ}{ds}. \quad (4.5)$$

Las entidades  $r$  y  $l$  fueron definidas en la Figura 4.4;  $r(s)$  representa la distancia desde el origen de coordenadas  $O$  a la tangente a cualquier punto de la superficie media, mientras que  $l(s)$  representa la distancia desde dicho origen a la normal a la superficie media.

En la expresión (4.4), la función  $\psi$  es una medida de la deformación de corte en la superficie media obtenida mediante la teoría de torsión pura de Saint-Venant y normalizada con respecto a  $d\phi_x/dx$ . Para secciones abiertas se tiene que  $\psi = 0$ . La constante  $D_C$  se utiliza para normalizar la función de alabeo respecto del origen  $O$ . Las funciones  $\psi$  y  $D_C$  se pueden obtener a partir de las siguientes expresiones

$$\psi(s) = \frac{1}{\bar{A}_{66}(s)} \frac{\int_s r(s) ds}{\int_s \frac{1}{\bar{A}_{66}(s)} ds}, \quad (4.6)$$

$$D_C = \frac{1}{S} \left[ \int_0^S \left( \int_{s_0}^s [r(s) + \psi(s)] ds \right) ds \right], \quad (4.7)$$

donde  $S$  debe interpretarse como el dominio de definición de la coordenada  $s$  y  $\bar{A}_{66}$  es el coeficiente de rigidez del laminado (Barbero, 1998), cuyo tratamiento será abordado en la sección 4.2.5.

Por otra parte, los desplazamientos pueden también expresarse en el sistema intrínseco ( $B: x, s, n$ ) de la siguiente manera

$$U^L = u_x, \quad V^L = u_y \frac{dY}{ds} + u_z \frac{dZ}{ds}, \quad W^L = -u_y \frac{dZ}{ds} + u_z \frac{dY}{ds}, \dots \quad (4.8)$$

$$\dots U^{NL} = u_x^{NL}, \quad V^{NL} = u_y^{NL} \frac{dY}{ds} + u_z^{NL} \frac{dZ}{ds}, \quad W^{NL} = -u_y^{NL} \frac{dZ}{ds} + u_z^{NL} \frac{dY}{ds}, \quad (4.8)$$

$$\Phi_x = -\frac{\partial u_x}{\partial n}, \quad \Phi_s = \frac{\partial}{\partial n} \left( u_y \frac{dY}{ds} + u_z \frac{dZ}{ds} \right), \quad (4.9)$$

donde  $U^L$ ,  $V^L$ ,  $W^L$ ,  $U^{NL}$ ,  $V^{NL}$  y  $W^{NL}$  son los desplazamientos placa lineales ( $L$ ) y no-lineales ( $NL$ ) en las direcciones  $x$ ,  $s$  y  $n$ , respectivamente, y  $\Phi_x$  y  $\Phi_s$  son rotaciones flexionales con respecto a las direcciones  $s$  y  $n$ , respectivamente (Cortínez y Piovan, 2002).

#### 4.2.2 Estado de deformaciones

En virtud de las hipótesis **viii** y **ix**, las componentes lineales y no lineales del tensor de deformaciones de Green-Lagrange están dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U^L}{\partial x} + \frac{u_y}{R}, \quad \varepsilon_{xs} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U^L}{\partial s} + \frac{\partial V^L}{\partial x} - \frac{u_x}{R} \frac{dY}{ds} \right], \\ \varepsilon_{xn} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U^L}{\partial n} + \frac{\partial W^L}{\partial x} + \frac{u_x}{R} \frac{dZ}{ds} \right], \\ \eta_{xx} &= \frac{\partial U^{NL}}{\partial x} + \frac{u_y^{NL}}{R} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial U^L}{\partial x} + \frac{u_y}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial V^L}{\partial x} - \frac{u_x}{R} \frac{dY}{ds} \right)^2 + \left( \frac{\partial W^L}{\partial x} + \frac{u_x}{R} \frac{dZ}{ds} \right)^2 \right], \\ \eta_{xs} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U^{NL}}{\partial s} + \frac{\partial V^{NL}}{\partial x} - \frac{u_x^{NL}}{R} \frac{dY}{ds} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U^L}{\partial s} \left( \frac{\partial U^L}{\partial x} + \frac{u_y}{R} \right) + \frac{\partial V^L}{\partial s} \left( \frac{\partial V^L}{\partial x} - \frac{u_x}{R} \frac{dY}{ds} \right) + \frac{\partial W^L}{\partial s} \left( \frac{\partial W^L}{\partial x} + \frac{u_x}{R} \frac{dZ}{ds} \right) \right], \\ \eta_{xn} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U^{NL}}{\partial n} + \frac{\partial W^{NL}}{\partial x} + \frac{u_x^{NL}}{R} \frac{dZ}{ds} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U^L}{\partial n} \left( \frac{\partial U^L}{\partial x} + \frac{u_y}{R} \right) + \frac{\partial V^L}{\partial n} \left( \frac{\partial V^L}{\partial x} - \frac{u_x}{R} \frac{dY}{ds} \right) + \frac{\partial W^L}{\partial n} \left( \frac{\partial W^L}{\partial x} + \frac{u_x}{R} \frac{dZ}{ds} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

Así pues, reemplazando las expresiones del campo de desplazamientos (4.2) en las ecuaciones (4.8) y su resultado en las ecuaciones (4.10), se obtienen las componentes del tensor de deformaciones en función de los desplazamientos generalizados. El mismo puede ser expresado en términos de deformaciones membranales y curvaturas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^L + n\kappa_{xx}^L, \quad \gamma_{xs} \approx 2\varepsilon_{xs}^L = \gamma_{xs}^L + n\kappa_{xs}^L, \quad \gamma_{xn} \approx 2\varepsilon_{xn}^L = \gamma_{xn}^L, \\ \eta_{xx}^{NL} &= \varepsilon_{xx}^{NL} + n\kappa_{xx}^{NL}, \quad \eta_{xs}^{NL} \approx 2\eta_{xs}^{NL} = \gamma_{xs}^{NL} + n\kappa_{xs}^{NL}, \quad \eta_{xn}^{NL} \approx 2\eta_{xn}^{NL} = \gamma_{xn}^{NL}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

siendo,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^L &= \varepsilon_{D1} - Y\varepsilon_{D3} - Z\varepsilon_{D2} - \omega_p \varepsilon_{D4}, & \kappa_{xx}^L &= \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D3} - \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D2} - l\varepsilon_{D4}, \\ \gamma_{xs}^L &= \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D5} + \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D6} - (r + \psi) \varepsilon_{D7} + \psi \varepsilon_{D8}, & \kappa_{xs}^L &= \varepsilon_{D7} - 2\varepsilon_{D8}, \\ \gamma_{xn}^L &= -\frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D5} + \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D6} + l\varepsilon_{D7},\end{aligned}\quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{NL} &= \frac{1}{2} \left\{ Z \frac{\partial(\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B3})}{\partial x} - (Z + z_0) \frac{\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3}}{R} - Y \frac{\partial(\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B2})}{\partial x} - (Y + y_0) \frac{\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2}{R} \right. \\ &+ \left( \varepsilon_{D1} - Y\varepsilon_{D3} - Z\varepsilon_{D2} - z_0 \frac{\varepsilon_{B2}}{R} - \omega_p \varepsilon_{D4} \right)^2 + \left( \varepsilon_{B6} + (Y + y_0) \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right)^2 \\ &\left. + \left( \varepsilon_{B5} + Y \frac{\varepsilon_{B3}}{R} - Z\varepsilon_{D8} - z_0 \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} + \omega_p \frac{\varepsilon_{B4}}{R} \right)^2 \right\},\end{aligned}\quad (4.13-a)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{xx}^{NL} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{dY}{ds} \left[ \frac{\partial(\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B3})}{\partial x} - \frac{\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3}}{R} \right] + \frac{dZ}{ds} \left[ \frac{\partial(\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B2})}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2}{R} \right] \right\} \\ &+ \left( \varepsilon_{D1} - Y\varepsilon_{D3} - Z\varepsilon_{D2} - z_0 \frac{\varepsilon_{B2}}{R} - \omega_p \varepsilon_{D4} \right) \left( \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D3} - \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D2} - l\varepsilon_{D4} \right) \\ &- \left( \varepsilon_{B6} + (Y + y_0) \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right) \frac{dZ}{ds} \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \\ &- \left( \varepsilon_{B5} + Y \frac{\varepsilon_{B3}}{R} - Z\varepsilon_{D8} - z_0 \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} + \omega_p \frac{\varepsilon_{B4}}{R} \right) \left( \frac{dZ}{ds} \frac{\varepsilon_{B3}}{R} - \frac{dY}{ds} \frac{\varepsilon_{B1}}{R} - l \frac{\varepsilon_{B4}}{R} - \frac{dY}{ds} \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (4.13-b)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xs}^{NL} &= \frac{1}{2} \left\{ -(Z + z_0) \left[ \frac{dY}{ds} \frac{\partial(\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3})}{\partial x} + \frac{dZ}{ds} \frac{\partial(\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B1}^2)}{\partial x} \right] \right. \\ &\left. - (Y + y_0) \left[ \frac{dY}{ds} \frac{\partial(\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2)}{\partial x} + \frac{dZ}{ds} \frac{\partial(\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3})}{\partial x} \right] \right\} \\ &+ \left( \varepsilon_{D1} - Y\varepsilon_{D3} - Z\varepsilon_{D2} - z_0 \frac{\varepsilon_{B2}}{R} - \omega_p \varepsilon_{D4} \right) \left( -\frac{dY}{ds} \varepsilon_{B3} - \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{B1} + (r + \psi) \varepsilon_{B4} \right) \\ &+ \varepsilon_{B2} \left\{ \frac{dZ}{ds} \left[ \frac{\varepsilon_{B3}}{2} - \varepsilon_{B5} - \omega_p \frac{\varepsilon_{B4}}{R} - Z \frac{\varepsilon_{B1}}{R} - Y \frac{\varepsilon_{B3}}{R} + (Z + z_0) \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right] \right. \\ &\left. + \frac{dY}{ds} \left[ -\frac{\varepsilon_{B1}}{2} + \varepsilon_{B6} - Z \frac{\varepsilon_{B3}}{2R} + Y \frac{\varepsilon_{B1}}{2R} + (Y + y_0) \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right] \right\},\end{aligned}\quad (4.13-c)$$

$$\kappa_{xs}^{NL} = \left( \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D3} - \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D2} - l\varepsilon_{D4} \right) \left( -\frac{dY}{ds} \varepsilon_{B3} - \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{B1} + (r + \psi) \varepsilon_{B4} \right) \dots \quad (4.13-d)$$

$$\begin{aligned}
& \dots - \varepsilon_{B4} \left( \varepsilon_{D1} - Y\varepsilon_{D3} - Z\varepsilon_{D2} - \frac{\varepsilon_{B2}}{R} \left( z_0 - l \frac{dZ}{ds} \right) - \omega_p \varepsilon_{D4} \right) \\
& \left( \frac{dZ}{ds} \right)^2 \left[ \frac{\partial(\varepsilon_{B1}\varepsilon_{B3})}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{B2}\varepsilon_{B3}}{R} \right] - \left( \frac{dY}{ds} \right)^2 \left[ \frac{\partial(\varepsilon_{B1}\varepsilon_{B3})}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{B2}\varepsilon_{B3}}{2R} \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} \left[ \frac{\partial(\varepsilon_{B3}^2 - \varepsilon_{B1}^2)}{\partial x} - 2 \frac{\varepsilon_{B2}\varepsilon_{B1}}{R} \right],
\end{aligned} \tag{4.13-d}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xn}^{NL} &= \frac{1}{2} \left\{ (Z + z_0) \left[ \frac{dZ}{ds} \frac{\partial(\varepsilon_{B1}\varepsilon_{B3})}{\partial x} - \frac{dY}{ds} \frac{\partial(\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B1}^2)}{\partial x} \right] \right. \\
& \left. + (Y + y_0) \left[ \frac{dZ}{ds} \frac{\partial(\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2)}{\partial x} - \frac{dY}{ds} \frac{\partial(\varepsilon_{B1}\varepsilon_{B3})}{\partial x} \right] \right\} \\
& + \left( \varepsilon_{D1} - Y\varepsilon_{D3} - Z\varepsilon_{D2} - z_0 \frac{\varepsilon_{B2}}{R} - \omega_p \varepsilon_{D4} \right) \left( \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{B3} - \frac{dY}{ds} \varepsilon_{B1} - l\varepsilon_{B4} \right) \\
& + \varepsilon_{B2} \left\{ \frac{dY}{ds} \left[ \frac{\varepsilon_{B3}}{2} - \varepsilon_{B5} - \omega_p \frac{\varepsilon_{B4}}{R} - Z \frac{\varepsilon_{B1}}{R} - Y \frac{\varepsilon_{B3}}{R} + (Z + z_0) \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right] \right. \\
& \left. - \frac{dZ}{ds} \left[ -\frac{\varepsilon_{B1}}{2} + \varepsilon_{B6} - Z \frac{\varepsilon_{B3}}{2R} + Y \frac{\varepsilon_{B1}}{2R} + (Y + y_0) \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.13-e}$$

donde, para condensar la notación, se han definido las siguientes magnitudes

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{D1} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R}, & \varepsilon_{D2} &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\phi_x}{R}, & \varepsilon_{D3} &= \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{D4} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \\
\varepsilon_{D5} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z, & \varepsilon_{D6} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y, & \varepsilon_{D7} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x, & \varepsilon_{D8} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\theta_y}{R}, \\
\varepsilon_{B1} &= \theta_y, & \varepsilon_{B2} &= \phi_x, & \varepsilon_{B3} &= \theta_z - \frac{u}{R}, & \varepsilon_{B4} &= \theta_x - \frac{\theta_y}{R}, & \varepsilon_{B5} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{R}, & \varepsilon_{B6} &= \frac{\partial w}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Las entidades  $\varepsilon_{Di}$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) pueden interpretarse como *deformaciones generalizadas* para vigas curvas y corresponden a la deformación normal axial ( $\varepsilon_{D1}$ ), deformaciones normales flexionales ( $\varepsilon_{D2}$  y  $\varepsilon_{D3}$ ), deformación normal por alabeo ( $\varepsilon_{D4}$ ), deformaciones transversales por corte flexional ( $\varepsilon_{D5}$  y  $\varepsilon_{D6}$ ), deformación transversal por corte debida al alabeo ( $\varepsilon_{D7}$ ) y deformación transversal por torsión pura o de Saint Venant ( $\varepsilon_{D8}$ ).

### 4.2.3 Formulación variacional

Con el objetivo de desarrollar las expresiones que gobiernan la mecánica de las vigas bajo análisis, se emplea la formulación del principio de Hellinger-Reissner. El mismo consta de dos expresiones que se expondrán a continuación (Washizu, 1974; Piovan, 2003).

La primera de ellas es la representación del principio de trabajos virtuales para estructuras tipo placa, y la segunda corresponde al trabajo virtual complementario, el cual puede interpretarse como la representación variacional de las relaciones constitutivas.

$$L_S + L_S^0 + (L_T + L_T^0) + (L_F + L_F^0) + L_R = 0, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} & \iint \left[ \left( \epsilon_{xx}^L - \frac{N_{xx}}{A_{11}} \right) \delta N_{xx} + \left( \gamma_{xs}^L - \frac{N_{xs}}{A_{66}} \right) \delta N_{xs} + \left( \kappa_{xs}^L - \frac{M_{xs}}{D_{66}} \right) \delta M_{xs} \right] ds dx \\ & + \iint \left[ \left( \kappa_{xx}^L - \frac{M_{xx}}{D_{11}} \right) \delta M_{xx} + \left( \gamma_{xn}^L - \frac{N_{xn}}{A_{55}^{(H)}} \right) \delta N_{xn} \right] ds dx = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde,

$$L_S = \iint (N_{xx} \delta \epsilon_{xx}^L + M_{xx} \delta \kappa_{xx}^L + N_{xs} \delta \gamma_{xs}^L + M_{xs} \delta \kappa_{xs}^L + N_{xn} \delta \gamma_{xn}^L) ds dx, \quad (4.17)$$

$$L_S^0 = \iint (N_{xx}^0 \epsilon_{xx}^{NL} + M_{xx}^0 \delta \kappa_{xx}^{NL} + N_{xs}^0 \delta \gamma_{xs}^{NL} + M_{xs}^0 \delta \kappa_{xs}^{NL} + N_{xn}^0 \delta \gamma_{xn}^{NL}) ds dx, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} L_F + L_F^0 = & - \iint [\bar{q}_x \delta U^L + \bar{q}_s \delta V^L + \bar{q}_n \delta W^L + \bar{m}_x \delta \Phi_x + \bar{m}_s \delta \Phi_s] ds dx \\ & - \iint [\bar{q}_x^0 \delta U^{NL} + \bar{q}_s^0 \delta V^{NL} + \bar{q}_n^0 \delta W^{NL}] ds dx, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} L_T + L_T^0 = & - \left[ \iint (\bar{N}_{xx} \delta U^L + \bar{M}_{xx} \delta \Phi_x + \bar{N}_{xs} \delta V^L + \bar{M}_{xs} \delta \Phi_s + \bar{N}_{xn} \delta W^L) ds \right]_{x=0}^{x=L} \\ & - \left[ \iint (T_x^0 \delta U^{NL} + T_s^0 \delta V^{NL} + T_n^0 \delta W^{NL}) dnds \right]_{x=0}^{x=L}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$L_R = \iiint \bar{\rho} (\ddot{U}^L \delta U^L + \ddot{V}^L \delta V^L + \ddot{W}^L \delta W^L + \ddot{\Phi}_x \delta \Phi_x + \ddot{\Phi}_s \delta \Phi_s) ds dndx. \quad (4.21)$$

siendo  $L_S$  el trabajo virtual de las deformaciones de primer orden debido a las tensiones incrementales;  $L_S^0$ , el de las deformaciones no lineales debido a las tensiones iniciales;  $L_F$  y  $L_F^0$  el de los desplazamientos lineales y no lineales debido a las fuerzas volumétricas actuantes e iniciales, respectivamente;  $L_T$  y  $L_T^0$  el de los desplazamientos lineales y no lineales debido a las fuerzas superficiales actuantes e iniciales en los extremos, respectivamente;  $L_R$ , al de los desplazamientos debido a las fuerzas de inercia. En las expresiones anteriores se definen las siguientes magnitudes:  $N_{xx}$ ,  $N_{xs}$ ,  $M_{xx}$ ,  $M_{xs}$  y  $N_{xn}$  son las resultantes de tensión en el espesor,  $N_{xx}^0$ ,  $M_{xx}^0$ ,  $N_{xs}^0$ ,  $M_{xs}^0$  y  $N_{xn}^0$  son las resultantes de tensión en el espesor iniciales,  $\bar{q}_x$ ,  $\bar{q}_s$  y  $\bar{q}_n$  son las fuerzas por unidad de área en las direcciones  $x$ ,  $s$  y  $n$ , respectivamente,  $\bar{m}_x$  y  $\bar{m}_s$  representan momentos por unidad de área aplicados respecto a las direcciones  $x$  y  $s$ , respectivamente,  $\bar{q}_x^0$ ,  $\bar{q}_s^0$  y  $\bar{q}_n^0$  son las fuerzas por unidad de

área iniciales en las direcciones  $x$ ,  $s$  y  $n$ , respectivamente,  $\bar{N}_{xx}$ ,  $\bar{N}_{xs}$ ,  $\bar{N}_{xn}$ ,  $\bar{M}_{xx}$  y  $\bar{M}_{xs}$  son resultantes de tensiones y de momentos en el espesor aplicadas en los extremos de la viga,  $T_x^0$ ,  $T_s^0$  y  $T_n^0$  son las fuerzas externas iniciales por unidad de superficie aplicadas en los extremos de la viga en las direcciones  $x$ ,  $s$  y  $n$ , respectivamente y, por último,  $\rho$  es la densidad del material. Los dos puntos coronando a los desplazamientos en la expresión de  $L_R$  denotan, como es usual, derivada segunda con respecto al tiempo. Cabe aclarar que en las expresiones anteriores se omitió el trabajo virtual debido a fuerzas de superficie genéricas aplicadas fuera del eje de la viga. Un análisis detallado sobre este tipo de esfuerzos puede encontrarse en Piovan y Cortínez (2007a; 2007b).

Las resultantes de tensión en el espesor fueron definidas de acuerdo a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} \, dn, & M_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xx} n) \, dn, \\ N_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xs} \, dn, & M_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xs} n) \, dn, & N_{xn} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xn} \, dn. \end{aligned} \quad (4.22)$$

De manera análoga, se definen las resultantes iniciales de tensión en el espesor, referenciadas con el superíndice "0", como así también las resultantes de tensión en el espesor aplicadas en los extremos de la viga, indicadas con el superíndice "-".

#### 4.2.4 Ecuaciones de movimiento

Reemplazando las expresiones de deformaciones (4.12-4.13) en la primera variación del funcional de Reissner (4.15) e integrando adecuadamente con respecto a las variables  $s$  y  $n$ , se pueden obtener las siguientes expresiones unidimensionales de trabajos virtuales

$$\begin{aligned} L_S &= \int_0^L (N \delta \epsilon_{D1} - M_y \delta \epsilon_{D2} - M_z \delta \epsilon_{D3} - B \delta \epsilon_{D4} + Q_y \delta \epsilon_{D5} \\ &\quad + Q_z \delta \epsilon_{D6} + T_w \delta \epsilon_{D7} + T_{sv} \delta \epsilon_{D8}) \, dx, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} L_S^0 &= \int_0^L \frac{N^0}{2} \left\{ \delta \epsilon_{B5}^2 + \delta \epsilon_{B6}^2 + \delta \epsilon_{D1}^2 - z_0 \left( 2 \delta \epsilon_{B5} \epsilon'_{B2} + \frac{\delta \epsilon_{B3} \epsilon_{B1}}{R} + 2 \frac{\delta \epsilon_{B2} \epsilon_{D1}}{R} \right) \right. \\ &\quad \left. - y_0 \left[ -2 \delta \epsilon_{B6} \epsilon'_{B2} + \frac{\delta (\epsilon_{B2}^2 + \epsilon_{B3}^2)}{R} \right] \right\} dx \\ &\quad + \int_0^L \frac{M_y^0}{2} (\delta \epsilon_{D8} \epsilon_{B3} + \delta \epsilon_{B2} \epsilon_{D3} - 2 \delta \epsilon_{D1} \epsilon_{D2} - 2 \delta \epsilon_{D8} \epsilon_{B5}) \, dx \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \int_0^L \frac{M_z^0}{2} \left[ 2\delta\epsilon_{B6}\epsilon'_{B2} - \delta(\epsilon_{B1}\epsilon_{B2})' - 2\delta\epsilon_{D1}\epsilon_{D3} - \frac{\delta(\epsilon_{B2}^2 + \epsilon_{B3}^2)}{R} + \frac{2\delta\epsilon_{B3}\epsilon_{B5}}{R} \right] dx \\
& \quad + \int_0^L B^0 \left( \frac{\delta\epsilon_{B4}\epsilon_{B5}}{R} - \delta\epsilon_{D1}\epsilon_{D4} \right) dx \\
& + \int_0^L Q_y^0 \left( \delta\epsilon_{B2}\epsilon_{B6} - \delta\epsilon_{D1}\epsilon_{B3} - \frac{\delta\epsilon_{B2}\epsilon_{B1}}{2} \right) dx + \int_0^L Q_z^0 \left( -\delta\epsilon_{B2}\epsilon_{B5} - \delta\epsilon_{D1}\epsilon_{B1} + \frac{\delta\epsilon_{B2}\epsilon_{B3}}{2} \right) dx \quad (4.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^L T_w^0 (-\delta\epsilon_{B4}\epsilon_{D1}) dx + \int_0^L \frac{M_x^0}{2} (\delta\epsilon_{B1}\epsilon_{D3} - \delta\epsilon_{D2}\epsilon_{B3}) dx \\
& + \int_0^L Q_{yw}^0 (\delta\epsilon_{B3}\epsilon_{D4}) dx + \int_0^L Q_{zw}^0 (\delta\epsilon_{B1}\epsilon_{D4} - \delta\epsilon_{B2}\epsilon_{B4}) dx \\
& + \int_0^L T_{wz}^0 (\delta\epsilon_{B4}\epsilon_{D2}) dx + \int_0^L T_{wy}^0 (\delta\epsilon_{B4}\epsilon_{D3}) dx + \int_0^L T_{ww}^0 (\delta\epsilon_{B4}\epsilon_{D4}) dx, \\
L_F + L_F^0 = & -\int_0^L \left[ \left( q_x + \frac{m_z}{R} \right) \delta u - m_z \delta\theta_z - \left( m_y + \frac{b}{R} \right) \delta\theta_y - b \delta\theta_x \right. \\
& \left. + q_y \delta v + q_z \delta w + m_x \delta\phi_x \right] dx \quad (4.25)
\end{aligned}$$

$$-\int_0^L [q_1^0 \delta u + q_2^0 \delta\theta_z + q_3^0 \delta\theta_y + q_4^0 \delta\phi_x] dx,$$

$$\begin{aligned}
L_T + L_T^0 = & -\left[ \left( \bar{N} + \frac{\bar{M}_z}{R} \right) \delta u - \bar{M}_z \delta\theta_z - \left( \bar{M}_y + \frac{\bar{B}}{R} \right) \delta\theta_y + \bar{B} \delta\theta_x \right. \\
& \left. + \bar{Q}_y \delta v + \bar{Q}_z \delta w + \bar{M}_x \delta\phi_x \right]_{x=0}^{x=L} \quad (4.26) \\
& -\left[ \bar{N}_1^0 \delta u + \bar{N}_2^0 \delta\theta_z + \bar{N}_3^0 \delta\theta_y + \bar{N}_4^0 \delta\phi_x \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_R = & \int_0^L \rho \left\{ \left[ A\ddot{u} - I_z \frac{\ddot{\theta}_z}{R} - I_{yz} \frac{\ddot{\theta}_y}{R} - I_{z\omega} \frac{\ddot{\theta}_x}{R} \right] \delta u \right. \\
& + \left[ I_z \left( \ddot{\theta}_z - \frac{\ddot{u}}{R} \right) + I_{yz} \ddot{\theta}_y - I_{z\omega} \left( \ddot{\theta}_x - \frac{\ddot{\theta}_y}{R} \right) \right] \delta\theta_z \\
& + \left[ I_{yz} \left( \ddot{\theta}_z - \frac{\ddot{u}}{R} \right) - I_{z\omega} \frac{\ddot{\theta}_z}{R} + I_y \ddot{\theta}_y + I_{y\omega} \left( \ddot{\theta}_x - \frac{2\ddot{\theta}_y}{R} \right) - C_w \frac{\ddot{\theta}_x}{R} \right] \delta\theta_y \quad (4.27) \\
& + \left[ I_{z\omega} \left( \ddot{\theta}_z - \frac{\ddot{u}}{R} \right) + I_{y\omega} \ddot{\theta}_y + C_w \left( \ddot{\theta}_x - \frac{\ddot{\theta}_y}{R} \right) \right] \delta\theta_x \\
& \left. + A\dot{v} \delta v + A\dot{w} \delta w + (I_y \ddot{\phi}_x + I_z \ddot{\phi}_x) \delta\phi_x \right] dx,
\end{aligned}$$

En la expresión (4.23) se definen las resultantes tensionales en el área de la sección transversal de la siguiente manera

$$N = \int_S N_{xx} ds, \quad M_y = \int_S \left( N_{xx} Z + M_{xx} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad M_z = \int_S \left( N_{xx} Y - M_{xx} \frac{dZ}{ds} \right) ds, \quad \dots \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}
\cdots \quad Q_y &= \int_S \left( N_{xs} \frac{dY}{ds} - N_{xn} \frac{dZ}{ds} \right) ds, \quad Q_z = \int_S \left( N_{xs} \frac{dZ}{ds} + N_{xn} \frac{dY}{ds} \right) ds, \\
B &= \int_S \left( N_{xx} \omega_p + M_{xx} l \right) ds, \quad M_x = T_w + T_{sv}, \\
T_w &= \int_S \left[ -N_{xs} (r + \psi) + M_{xs} + N_{xn} l \right] ds, \quad T_{sv} = \int_S \left( N_{xs} \psi - 2M_{xs} \right) ds,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

siendo  $S$  un dominio representado por el perímetro en la línea media de la pared seccional. Estas resultantes se denominan *esfuerzos viga generalizados* y se identifican como: esfuerzo normal,  $N$ ; momentos flectores,  $M_y$  y  $M_z$ ; bimomento,  $B$ ; esfuerzos de corte  $Q_y$  y  $Q_z$ ; momento flexotorsor,  $T_w$ ; momento de torsión pura o de Saint Venant,  $T_{sv}$  y momento torsor total,  $M_x$ .

La expresión (4.24) describe los términos más representativos del trabajo virtual de las tensiones iniciales debido a deformaciones no lineales. Allí se denota a la derivada respecto de  $x$  con una comilla simple superior y se definen las resultantes tensionales iniciales en el área de la sección de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
N^0 &= \int_S N_{xx}^0 ds, \quad M_y^0 = \int_S \left( N_{xx}^0 Z + M_{xx}^0 \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad M_z^0 = \int_S \left( N_{xx}^0 Y - M_{xx}^0 \frac{dZ}{ds} \right) ds, \\
Q_y^0 &= \int_S \left( N_{xs}^0 \frac{dY}{ds} - N_{xn}^0 \frac{dZ}{ds} \right) ds, \quad Q_z^0 = \int_S \left( N_{xs}^0 \frac{dZ}{ds} + N_{xn}^0 \frac{dY}{ds} \right) ds, \\
B^0 &= \int_S \left( N_{xx}^0 \omega_p + M_{xx}^0 l \right) ds, \quad M_x^0 = T_w^0 + T_{sv}^0, \\
T_w^0 &= \int_S \left[ M_{xs}^0 + N_{xn}^0 l - N_{xs}^0 (r + \psi) \right] ds, \quad T_{sv}^0 = \int_S \left( N_{xs}^0 \psi - 2M_{xs}^0 \right) ds, \\
Q_{yw}^0 &= \int_S \left( N_{xs}^0 \frac{dY}{ds} - N_{xn}^0 \frac{dZ}{ds} \right) \omega_p ds, \quad Q_{zw}^0 = \int_S \left( N_{xs}^0 \frac{dZ}{ds} + N_{xn}^0 \frac{dY}{ds} \right) \omega_p ds, \\
T_{wz}^0 &= \int_S \left[ N_{xn}^0 l - N_{xs}^0 (r + \psi) \right] Z ds, \quad T_{wy}^0 = \int_S \left[ N_{xn}^0 l - N_{xs}^0 (r + \psi) \right] Y ds, \\
T_{ww}^0 &= \int_S \left[ N_{xn}^0 l - N_{xs}^0 (r + \psi) \right] \omega_p ds.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

En la expresión (4.25) se han definido los esfuerzos aplicados por unidad de longitud  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ ,  $m_z$ ,  $m_y$ ,  $m_x$  y  $b$  y las fuerzas y momentos iniciales por unidad de longitud, dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
q_1^0 &= \int_A \left[ -\frac{\bar{y}F_y^0}{R^2} u + \frac{\bar{y}F_y^0}{R} \theta_z + \frac{(\bar{y}F_z^0 + \bar{z}F_y^0)}{2R} \theta_y - \frac{\bar{z}F_x^0}{2R} \phi_x \right] dnds, \\
q_2^0 &= \int_A \left[ \frac{\bar{y}F_y^0}{R} u - \bar{y}F_y^0 \theta_z - \frac{(\bar{y}F_z^0 + \bar{z}F_y^0)}{2} \theta_y + \frac{\bar{z}F_x^0}{2} \phi_x \right] dnds, \dots
\end{aligned} \tag{4.30}$$



$$\begin{aligned}
\dots \quad q_3^0 &= \int_A \left[ \frac{(\bar{y}F_z^0 + \bar{z}F_y^0)}{2R} u - \frac{(\bar{y}F_z^0 + \bar{z}F_y^0)}{2} \theta_z - \bar{z}F_z^0 \theta_y - \frac{yF_x^0}{2} \phi_x \right] dndns, \\
q_4^0 &= \int_A \left[ -\frac{zF_x^0}{2R} u + \frac{zF_x^0}{2} \theta_z - \frac{yF_x^0}{2} \theta_y - (\bar{y}F_y^0 + \bar{z}F_z^0) \phi_x \right] dndns.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Por su parte, la viga puede estar sometida a esfuerzos aplicados en sus extremos. Estos se definen a partir de la expresión (4.26) como

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= \int_S N_{xx} ds, \quad \bar{M}_y = \int_S \left( N_{xx} Z + M_{xx} \frac{dY}{ds} \right) ds, \\
\bar{M}_z &= \int_S \left( N_{xx} Y - M_{xx} \frac{dZ}{ds} \right) ds, \quad \bar{B} = \int_S (N_{xx} \omega_p - M_{xx} l) ds, \\
\bar{Q}_y &= \int_S \left( N_{xs} \frac{dY}{ds} - N_{xn} \frac{dZ}{ds} \right) ds, \quad \bar{Q}_z = \int_S \left( N_{xs} \frac{dZ}{ds} + N_{xn} \frac{dY}{ds} \right) ds, \\
\bar{T}_w &= \int_S [N_{xs} (r - \psi) + M_{xs} + N_{xn} l] ds, \quad \bar{T}_{sv} = \int_S (N_{xs} \psi - 2M_{xs}) ds.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

A su vez, en la expresión (4.26) se especifican los esfuerzos iniciales aplicados en los extremos de la viga y están dados por

$$\begin{aligned}
N_1^0 &= \int_A \left[ -\frac{\bar{y}T_y^0}{R^2} u + \frac{\bar{y}T_y^0}{R} \theta_z + \frac{(\bar{y}T_z^0 + \bar{z}T_y^0)}{2R} \theta_y - \frac{zT_x^0}{2R} \phi_x \right] dsdn, \\
N_2^0 &= \int_A \left[ \frac{\bar{y}T_y^0}{R} u - \bar{y}T_y^0 \theta_z - \frac{(\bar{y}T_z^0 + \bar{z}T_y^0)}{2} \theta_y + \frac{zT_x^0}{2} \phi_x \right] dsdn, \\
N_3^0 &= \int_A \left[ \frac{(\bar{y}T_z^0 + \bar{z}T_y^0)}{2R} u - \frac{(\bar{y}T_z^0 + \bar{z}T_y^0)}{2} \theta_z - \bar{z}T_z^0 \theta_y - \frac{yT_x^0}{2} \phi_x \right] dsdn, \\
N_4^0 &= \int_A \left[ -\frac{zT_x^0}{2R} u + \frac{zT_x^0}{2} \theta_z - \frac{yT_x^0}{2} \theta_y - (\bar{y}T_y^0 + \bar{z}T_z^0) \phi_x \right] dsdn.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Es necesario aclarar que el trabajo virtual debido a fuerzas externas iniciales, definidas en (4.30) y (4.32), pierde significado si el campo de desplazamientos se reduce a la forma lineal. Sin embargo, su aporte es fundamental si se quieren resolver problemas de estabilidad con cargas genéricas, aplicadas fuera del eje de la viga.

Por último, en la expresión (4.27) se han definido las constantes seccionales genéricas de la viga como

$$A = \int_A dA, \quad I_y = \int_A Z^2 dA, \quad I_z = \int_A Y^2 dA, \quad I_{yz} = \int_A YZ dA, \quad \dots \tag{4.33}$$

$$\dots I_{y\omega} = \int_A Z \omega_p dA, \quad I_{z\omega} = \int_A Y \omega_p dA, \quad C_w = \int_A \omega_p^2 dA. \quad (4.33)$$

Estas constantes se identifican como: área seccional,  $A$ ; segundos momentos de área,  $I_y$  y  $I_z$ ; producto de inercia,  $I_{yz}$ ; productos de alabeo  $I_{y\omega}$  y  $I_{z\omega}$  y segundo momento de alabeo o constante de alabeo,  $C_w$ .

Las ecuaciones diferenciales de movimiento con sus respectivas condiciones de borde se pueden obtener aplicando los pasos elementales del cálculo variacional al funcional (4.15), sustituyendo previamente (4.14) en (4.23-4.27). Así, tomando variaciones con respecto a los desplazamientos generalizados  $u$ ,  $\theta_z$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_x$ ,  $v$ ,  $w$  y  $\phi_x$ , y operando algebraicamente, se obtiene un sistema de siete ecuaciones diferenciales.

#### 4.2.5 Ecuaciones constitutivas

En el Capítulo 3 se describió el comportamiento mecánico de laminados FRP y se expusieron las relaciones constitutivas consecuentes que serán empleadas a continuación. Asumiendo que cada laminado verifica un estado plano de tensiones, se puede aplicar la hipótesis **vi** considerando las siguientes condiciones

$$N_{ss} = N_{sn} = M_{ss} = 0. \quad (4.34)$$

Como es sabido, los laminados simétricos no presentan acoplamiento extensional-flexional ( $B_{ij} = 0$ ). Si además el laminado es balanceado, se anulan las constantes de rigidez  $A_{16}$  y  $A_{26}$  y, por lo tanto, no existe acoplamiento extensional-corte. En base a estas hipótesis, introduciendo la condición (4.34) en la ley constitutiva dada por la expresión (3.6) del Capítulo 3, se obtienen las siguientes expresiones de  $\varepsilon_{ss}$ ,  $\gamma_{sn}$  y  $\kappa_{ss}$  de la siguiente manera

$$\varepsilon_{ss} = -\frac{A_{12}}{A_{22}} \varepsilon_{xx}^L, \quad \kappa_{ss} = -\frac{D_{12} \kappa_{xx}^L + D_{26} \kappa_{xs}^L}{D_{22}}, \quad \gamma_{sn} = -\frac{A_{45}^{(H)}}{A_{44}^{(H)}} \gamma_{xn}^L. \quad (4.35)$$

Luego, si se reemplazan estas expresiones en la relación constitutiva (3.6) y se reordena algebraicamente, se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{xx} \\ N_{xs} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccc} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{16} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{16} & \bar{D}_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^L \\ \gamma_{xs}^L \\ \gamma_{xn}^L \\ \kappa_{xx}^L \\ \kappa_{xs}^L \end{array} \right\}, \quad (4.36)$$

donde los coeficientes de rigidez del laminado  $\bar{A}_{ij}$ ,  $\bar{D}_{ij}$  y  $\bar{A}_{ij}^{(H)}$  se han definido como

$$\bar{A}_{11} = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}, \quad \bar{A}_{66} = A_{66}, \quad (4.37)$$

$$\bar{D}_{11} = D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}, \quad \bar{D}_{66} = D_{66} - \frac{D_{26}^2}{D_{22}}, \quad \bar{D}_{16} = D_{16} - \frac{D_{26}D_{12}}{D_{22}}, \quad (4.38)$$

$$\bar{A}_{55}^{(H)} = A_{55}^{(H)} - \frac{(A_{45}^{(H)})^2}{A_{44}^{(H)}}. \quad (4.39)$$

Las ecuaciones constitutivas (4.36) se hallan expresadas en términos de las resultantes de tensión en el espesor y de las deformaciones expresadas en el sistema intrínseco ( $B$ :  $x$ ,  $s$ ,  $n$ ). Para representar las ecuaciones constitutivas en términos de los esfuerzos viga generalizados y de las deformaciones generalizadas, aquí se proponen dos caminos diferentes. Primero, se obtienen tales ecuaciones constitutivas a partir del segundo funcional del principio de Hellinger-Reissner, dado por la expresión (4.16). En segundo lugar, dichas ecuaciones se hallan en base a la imposición de la ley constitutiva (4.34) a la definición de las resultantes de tensión en el área. Una clara comparación entre ambos enfoques puede encontrarse en el trabajo de Piovan y Cortínez (2005) para vigas rectas de sección bi-simétricas y mono-simétricas. A continuación se exponen ambos enfoques para el caso particular de vigas de sección genérica construidas con laminados simétricos y balanceados.

A partir del funcional constitutivo de Reissner, (4.16), se pueden obtener las ecuaciones constitutivas en términos de los esfuerzos viga generalizados y de las deformaciones generalizadas. Para ello, previamente deben establecerse relaciones algebraicas entre las resultantes de tensión en el espesor ( $N_{xx}$ ,  $N_{xs}$ ,  $M_{xx}$ ,  $M_{xs}$ ,  $N_{xn}$ ) y dichos esfuerzos generalizados ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $T_w$ ,  $T_{sv}$ ,  $B$ ). A tal fin se exige que las resultantes de tensión en el espesor verifiquen la siguiente ecuación de equilibrio para una placa

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial s} - N_{xn} = 0. \quad (4.40)$$

Además, el campo de resultantes de tensión en el espesor debe satisfacer las ecuaciones constitutivas dadas por (4.36), asumiendo despreciable el coeficiente  $\bar{D}_{16}$ . Luego, en virtud de la hipótesis **xii**, el campo de las resultantes de tensión se asume expresado de la siguiente manera

$$N_{xx} = e \left[ \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} Z + \frac{M_z}{I_z} Y + \frac{B}{C_w} \omega_p \right], \quad (4.41)$$

$$M_{xx} \cong \frac{e^3}{12} \left[ \frac{M_y}{I_y} \frac{dY}{ds} - \frac{M_z}{I_z} \frac{dZ}{ds} - \frac{B}{C_w} l \right], \quad (4.42)$$

$$M_{xs} = -\frac{e^3}{6J} T_{sv}, \quad (4.43)$$

$$N_{xs} = -e \left[ \frac{Q_z}{I_y} \lambda_y + \frac{Q_y}{I_z} \lambda_z + \frac{T_w}{C_w} \lambda_\omega \right] + \frac{e}{J} \psi T_{sv}, \quad (4.44)$$

$$N_{xn} = \frac{e^3}{12} \left[ \frac{Q_z}{I_y} \frac{dY}{ds} - \frac{Q_y}{I_z} \frac{dZ}{ds} - \frac{T_w}{C_w} l \right], \quad (4.45)$$

donde  $A$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $C_w$  y  $J$  son el área de la sección transversal, los momentos de área, la constante de alabeo y el módulo de torsión, respectivamente. Además, en la expresión (4.44) se definieron las siguientes variables

$$\begin{aligned} \lambda_y(s) &= \int_0^s Z ds + \frac{\chi}{S} \oint \left( \int_0^s Z ds \right) ds, \\ \lambda_z(s) &= \int_0^s Y ds + \frac{\chi}{S} \oint \left( \int_0^s Y ds \right) ds, \\ \lambda_\omega(s) &= \int_0^s \omega_p ds + \frac{\chi}{S} \oint \left( \int_0^s \omega_p ds \right) ds, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde  $\chi$  vale 0 ó 1 dependiendo si la sección transversal es abierta o cerrada, respectivamente.

Luego, sustituyendo en el funcional (4.16) el campo de resultantes de tensión propuesto en las ecuaciones (4.41-4.45) y las expresiones de las deformaciones lineales en términos de las deformaciones generalizadas dadas por (4.12), integrando con respecto a  $s$  y tomando variaciones con respecto a los esfuerzos viga generalizados, se obtienen las siguientes ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta}, \quad (4.47)$$

donde  $\mathbf{Q}$  es el vector de esfuerzos viga generalizados,  $\mathbf{\Delta}$  es el vector de deformaciones generalizadas y  $\mathbf{J}$  es la matriz constitutiva de esfuerzos. Esto es:

$$\mathbf{Q} = \{N, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}^T, \quad (4.48)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_{D1}, -\boldsymbol{\varepsilon}_{D2}, -\boldsymbol{\varepsilon}_{D3}, -\boldsymbol{\varepsilon}_{D4}, \boldsymbol{\varepsilon}_{D5}, \boldsymbol{\varepsilon}_{D6}, \boldsymbol{\varepsilon}_{D7}, \boldsymbol{\varepsilon}_{D8}\}^T, \quad (4.49)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & J_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & J_{55} & J_{56} & J_{57} & 0 \\ & sim & & & & J_{66} & J_{67} & 0 \\ & & & & & & J_{77} & 0 \\ & & & & & & & J_{88} \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Los elementos de la matriz constitutiva de esfuerzos  $\mathbf{J}$  están dados por

$$J_{11} = \widehat{EA} = \bar{A}_{11} \int_S ds, \quad J_{22} = \widehat{EI}_y = \bar{A}_{11} \int_S Z^2 ds + \bar{D}_{11} \int_S \left( \frac{dY}{ds} \right)^2 ds, \quad (4.51)$$

$$J_{33} = \widehat{EI}_z = \bar{A}_{11} \int_S Y^2 ds + \bar{D}_{11} \int_S \left( \frac{dZ}{ds} \right)^2 ds, \quad J_{44} = \widehat{EC}_w = \bar{A}_{11} \int_S \omega_p^2 ds + \bar{D}_{11} \int_S l^2 ds,$$

$$J_{55} = \widehat{GS}_y, \quad J_{56} = \widehat{GS}_{yz}, \quad J_{57} = \widehat{GS}_{y\omega}, \quad J_{66} = \widehat{GS}_z, \quad J_{67} = \widehat{GS}_{z\omega}, \quad J_{77} = \widehat{GS}_\omega, \quad (4.52)$$

$$J_{88} = \widehat{GJ} = \bar{A}_{66} \int_S \psi^2 ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l^2 ds + 4\bar{D}_{66} \int_S ds. \quad (4.53)$$

siendo  $\widehat{GS}_y, \widehat{GS}_{yz}, \widehat{GS}_{y\omega}, \widehat{GS}_z, \widehat{GS}_{z\omega}$  y  $\widehat{GS}_\omega$  las rigideces al corte de la viga, definidas según el presente enfoque como

$$\begin{bmatrix} \widehat{GS}_y & \widehat{GS}_{yz} & \widehat{GS}_{y\omega} \\ & \widehat{GS}_z & \widehat{GS}_{z\omega} \\ sim & & \widehat{GS}_\omega \end{bmatrix} = \frac{e}{\bar{A}_{66}} \begin{bmatrix} \int_S \left( \frac{\lambda_z}{I_z} \right)^2 ds & \int_S \frac{\lambda_z \lambda_y}{I_y I_z} ds & -\int_S \frac{\lambda_z \lambda_\omega}{I_z C_w} ds \\ & \int_S \left( \frac{\lambda_y}{I_y} \right)^2 ds & -\int_S \frac{\lambda_\omega \lambda_y}{I_y C_w} ds \\ sim & & \int_S \left( \frac{\lambda_\omega}{C_w} \right)^2 ds \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$+ \frac{e^4}{144 \bar{A}_{55}^{(H)}} \begin{bmatrix} \int_S \left( \frac{dZ}{ds} \frac{1}{I_z} \right)^2 ds & \int_S \left( \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} \frac{1}{I_y I_z} \right) ds & -\int_S \left( \frac{\partial \omega_p}{\partial n} \frac{dZ}{ds} \frac{1}{I_z C_w} \right) ds \\ & \int_S \left( \frac{dY}{ds} \frac{1}{I_y} \right)^2 ds & -\int_S \left( \frac{dY}{ds} \frac{\partial \omega_p}{\partial n} \frac{1}{I_y C_w} \right) ds \\ sim & & \int_S \left( \frac{\partial \omega_p}{\partial n} \frac{1}{C_w} \right)^2 ds \end{bmatrix}^{-1}.$$

Cabe destacar que la ventaja fundamental del principio de Hellinger-Reissner es aportar coeficientes de corte en forma natural a la formulación del problema y, consecuentemente, la diferencia más significativa entre el enfoque constitutivo expuesto anteriormente y el que se expondrá a continuación radica en las expresiones que se obtienen para los coeficientes de corte de la matriz constitutiva ( $J_{55}$ ,  $J_{56}$ ,  $J_{57}$ ,  $J_{66}$ ,  $J_{67}$  y  $J_{77}$ ). Se demostró en diferentes trabajos (Cortínez y Piovan, 2002; Piovan, 2003; Piovan y Cortínez, 2005; Cortínez y Piovan, 2006) que el enfoque constitutivo de Reissner arroja mejores resultados, tanto en el cálculo de frecuencias naturales como de inestabilidad. Sin embargo, la metodología planteada hasta aquí necesita de consideraciones puntuales sobre el equilibrio de las resultantes de tensión en el espesor, expresadas en términos de los esfuerzos viga generalizados. Tales expresiones son fáciles de obtener en forma algebraica cuando se emplean laminados simétricos y balanceados y, además, si se desprecia el aporte del coeficiente de rigidez a flexión del laminado ( $\bar{D}_{16}$ ). Cuando se emplean laminaciones generales, resulta más complejo definir un campo de tensiones que verifique las ecuaciones de equilibrio (4.40). Por ello, en los trabajos de Piovan y Cortínez (2007a, 2007b) se emplea un enfoque constitutivo diferente, aunque ligeramente menos preciso, que puede ser aplicado en vigas FRP con laminaciones genéricas. A continuación se describe dicho enfoque para el caso particular de laminados simétricos y balanceados, el cual sí contempla el acoplamiento flexo-torsional generado por el coeficiente  $\bar{D}_{16}$  y, por lo tanto, los elementos de la matriz constitutiva  $J_{27}$ ,  $J_{28}$ ,  $J_{37}$ ,  $J_{38}$ ,  $J_{47}$  y  $J_{48}$  no son nulos.

Luego, según lo expuesto, las ecuaciones constitutivas en términos de los esfuerzos viga generalizados y de las deformaciones generalizadas pueden obtenerse reemplazando convenientemente las ecuaciones (4.36) en las expresiones de los esfuerzos dadas por (4.28). De esta manera, se obtiene la ecuación constitutiva (4.47), donde los elementos de la matriz  $\mathbf{J}$  descritos por las expresiones (4.51) y (4.53) no se modifican, mientras que los coeficientes de rigidez por corte ( $J_{55}$ ,  $J_{56}$ ,  $J_{57}$ ,  $J_{66}$ ,  $J_{67}$  y  $J_{77}$ , equivalentes a  $\widehat{GS}_y$ ,  $\widehat{GS}_{yz}$ ,  $\widehat{GS}_{y\omega}$ ,  $\widehat{GS}_z$ ,  $\widehat{GS}_{z\omega}$  y  $\widehat{GS}_\omega$ ) y los coeficientes adicionales ( $J_{27}$ ,  $J_{28}$ ,  $J_{37}$ ,  $J_{38}$ ,  $J_{47}$  y  $J_{48}$ ) debidos a la inclusión del coeficiente  $\bar{D}_{16}$ , se detallan a continuación

$$\begin{aligned}
 J_{23} &= \bar{A}_{11} \int_S YZ ds - \bar{D}_{11} \int_S \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} ds, & J_{24} &= \bar{A}_{11} \int_S Z \omega_p ds - \bar{D}_{11} \int_S l \frac{dY}{ds} ds, \\
 J_{27} &= \bar{D}_{16} \int_S \frac{dY}{ds} ds, & J_{28} &= -2\bar{D}_{16} \int_S \frac{dY}{ds} ds,
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$J_{34} = \bar{A}_{11} \int_S Y \omega_p ds + \bar{D}_{11} \int_S l \frac{dZ}{ds} ds, \quad J_{37} = -\bar{D}_{16} \int_S \frac{dZ}{ds} ds, \quad J_{38} = 2\bar{D}_{16} \int_S \frac{dZ}{ds} ds, \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} J_{47} &= -\bar{D}_{16} \int_S l ds, \quad J_{48} = 2\bar{D}_{16} \int_S l ds, \\ J_{58} &= \bar{A}_{66} \int_S \psi \frac{dY}{ds} ds, \quad J_{68} = \bar{A}_{66} \int_S \psi \frac{dZ}{ds} ds, \\ J_{78} &= \bar{A}_{66} \int_S (r\psi + \psi^2) ds - 2\bar{D}_{66} \int_S ds, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{GS}_y & \widehat{GS}_{yz} & \widehat{GS}_{y\omega} \\ & \widehat{GS}_z & \widehat{GS}_{z\omega} \\ sim & & \widehat{GS}_\omega \end{bmatrix} &= \bar{A}_{66} \begin{bmatrix} \int_S \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 ds & \int_S \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} ds & \int_S \frac{dY}{ds} (r + \psi) ds \\ & \int_S \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2 ds & \int_S \frac{dZ}{ds} (r + \psi) ds \\ sim & & \int_S (r + \psi)^2 ds \end{bmatrix} \\ &+ \bar{A}_{55}^{(H)} \begin{bmatrix} \int_S \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2 ds & -\int_S \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} ds & -\int_S l \frac{dZ}{ds} ds \\ & \int_S \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 ds & \int_S l \frac{dY}{ds} ds \\ sim & & \int_S l^2 ds \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por su parte, Piovan (2003) y Piovan y Cortínez (2005) determinaron que, para en el caso de vigas rectas, el efecto de corte sobre el espesor  $\gamma_{xn}^L$  aumentaba erróneamente la rigidez en vez de flexibilizar el comportamiento de la viga. Ellos encontraron que en ciertos casos de laminación, material y tipo de sección, los resultados de la formulación que contempla tal efecto no concordaban con valores experimentales, a medida que aumentaba el espesor de la sección de la viga. Por lo tanto, a fin de evitar resultados inexactos se recomienda considerar  $\bar{A}_{55}^{(H)} = 0$ .

Realizando un procedimiento análogo al explicado para la obtención de las ecuaciones constitutivas de los esfuerzos viga, empleando las expresiones (4.29) puede hallarse el vector de esfuerzos viga inicial,  $\mathbf{Q}^0$ , en términos de las deformaciones generalizadas. Para simplificar la notación, se supone a dicho vector compuesto por dos componentes,  $\mathbf{Q}_1^0$  y  $\mathbf{Q}_2^0$ , las cuales se expresan según las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{Q}_1^0 = \mathbf{J} \cdot \Delta^0, \quad \mathbf{Q}_2^0 = \mathbf{J}^0 \cdot \Delta^0, \quad (4.59)$$

donde la matriz  $\mathbf{J}$  está definida por los coeficientes (4.51), (4.53) y (4.55-4.58) y  $\Delta^0$  es el

vector de las deformaciones generalizadas inicial. Dicho vector, la matriz  $\mathbf{J}^0$  y los vectores  $\mathbf{Q}_1^0$  y  $\mathbf{Q}_2^0$  están dados por

$$\Delta^0 = \{ \boldsymbol{\varepsilon}_{D1}^0, -\boldsymbol{\varepsilon}_{D2}^0, -\boldsymbol{\varepsilon}_{D3}^0, -\boldsymbol{\varepsilon}_{D4}^0, \boldsymbol{\varepsilon}_{D5}^0, \boldsymbol{\varepsilon}_{D6}^0, \boldsymbol{\varepsilon}_{D7}^0, \boldsymbol{\varepsilon}_{D8}^0 \}^T, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{Q}_1^0 = \{ N^0, M_y^0, M_z^0, B^0, Q_y^0, Q_z^0, T_w^0, T_{sv}^0 \}^T, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{Q}_2^0 = \{ Q_{yw}^0, Q_{zw}^0, T_{wz}^0, T_{wy}^0, T_{ww}^0 \}^T, \quad (4.62)$$

$$\mathbf{J}^0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 & J_{12}^0 & J_{13}^0 & J_{14}^0 & J_{15}^0 & J_{16}^0 & J_{17}^0 & J_{18}^0 \\ J_{21}^0 & J_{22}^0 & J_{23}^0 & J_{24}^0 & J_{25}^0 & J_{26}^0 & J_{27}^0 & J_{28}^0 \\ J_{31}^0 & J_{32}^0 & J_{33}^0 & J_{34}^0 & J_{35}^0 & J_{36}^0 & J_{37}^0 & J_{38}^0 \\ J_{41}^0 & J_{42}^0 & J_{43}^0 & J_{44}^0 & J_{45}^0 & J_{46}^0 & J_{47}^0 & J_{48}^0 \\ J_{51}^0 & J_{52}^0 & J_{53}^0 & J_{54}^0 & J_{55}^0 & J_{56}^0 & J_{57}^0 & J_{58}^0 \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

donde,

$$\begin{aligned} J_{11}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S \omega_p \frac{dY}{ds} ds, & J_{12}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S \omega_p Z \frac{dY}{ds} ds + \bar{D}_{16} \int_S l \left( \frac{dY}{ds} \right)^2 ds, \\ J_{13}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S \omega_p Y \frac{dY}{ds} ds - \bar{D}_{16} \int_S l \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} ds, & J_{14}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S \omega_p^2 \frac{dY}{ds} ds + \bar{D}_{16} \int_S l^2 \frac{dY}{ds} ds, \\ J_{15}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S \omega_p \left( \frac{dY}{ds} \right)^2 ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S \omega_p \left( \frac{dZ}{ds} \right)^2 ds, & J_{16}^0 &= (\bar{A}_{66} - \bar{A}_{55}^{(H)}) \int_S \omega_p \frac{dZ}{ds} \frac{dY}{ds} ds, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$J_{17}^0 = \bar{A}_{66} \int_S \omega_p (r + \psi) \frac{dY}{ds} ds + \bar{D}_{66} \int_S l \frac{dY}{ds} ds - \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l \omega_p \frac{dZ}{ds} ds,$$

$$J_{18}^0 = \bar{A}_{66} \int_S \omega_p \psi \frac{dY}{ds} ds - 2\bar{D}_{66} \int_S l \frac{dY}{ds} ds,$$

$$J_{21}^0 = \bar{A}_{16} \int_S \omega_p \frac{dZ}{ds} ds, \quad J_{22}^0 = \bar{A}_{16} \int_S \omega_p Z \frac{dZ}{ds} ds + \bar{D}_{16} \int_S l \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} ds,$$

$$J_{23}^0 = \bar{A}_{16} \int_S \omega_p Y \frac{dZ}{ds} ds - \bar{D}_{16} \int_S l^2 \frac{dZ}{ds} ds, \quad J_{24}^0 = \bar{A}_{16} \int_S \omega_p^2 \frac{dZ}{ds} ds + \bar{D}_{16} \int_S l^2 \frac{dZ}{ds} ds,$$

$$J_{25}^0 = (\bar{A}_{66} - \bar{A}_{55}^{(H)}) \int_S \omega_p \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} ds, \quad J_{26}^0 = \bar{A}_{66} \int_S \omega_p \left( \frac{dZ}{ds} \right)^2 ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S \omega_p \left( \frac{dY}{ds} \right)^2 ds, \quad (4.65)$$

$$J_{27}^0 = \bar{A}_{66} \int_S \omega_p (r + \psi) \frac{dZ}{ds} ds + \bar{D}_{66} \int_S l \frac{dZ}{ds} ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l \omega_p \frac{dY}{ds} ds,$$

$$J_{28}^0 = \bar{A}_{66} \int_S \omega_p \psi \frac{dZ}{ds} ds - 2\bar{D}_{66} \int_S l \frac{dZ}{ds} ds,$$

$$J_{31}^0 = \bar{A}_{16} \int_S Z (r + \psi) ds, \quad J_{32}^0 = \bar{A}_{16} \int_S Z^2 (r + \psi) ds + \bar{D}_{16} \int_S Y^2 (r + \psi) ds,$$

$$J_{33}^0 = \bar{A}_{16} \int_S ZY (r + \psi) ds - \bar{D}_{16} \int_S (r + \psi) \frac{dZ}{ds} \frac{dY}{ds} ds, \dots \quad (4.66)$$



$$\begin{aligned}
\dots J_{34}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S \omega_p Z (r + \psi) ds + \bar{D}_{16} \int_S l \frac{dY}{ds} (r + \psi) ds, \\
J_{35}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S Z (r + \psi) ds - \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l Z \frac{dZ}{ds} ds, \\
J_{36}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S Z \frac{dZ}{ds} (r + \psi) ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l Z \frac{dY}{ds} ds, \\
J_{37}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S Z (r + \psi)^2 ds + \bar{D}_{66} \int_S (r + \psi) \frac{dY}{ds} ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l^2 Z ds, \\
J_{38}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S (r + \psi) Z \psi ds - 2\bar{D}_{66} \int_S \frac{dY}{ds} (r + \psi) ds,
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
J_{41}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S Y (r + \psi) ds, \quad J_{42}^0 = \bar{A}_{16} \int_S ZY (r + \psi) ds - \bar{D}_{16} \int_S \frac{dZ}{ds} \frac{dY}{ds} (r + \psi) ds, \\
J_{43}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S Y^2 (r + \psi) ds + \bar{D}_{16} \int_S (r + \psi) \left( \frac{dZ}{ds} \right)^2 ds, \\
J_{44}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S \omega_p Y (r + \psi) ds - \bar{D}_{16} \int_S l \frac{dZ}{ds} (r + \psi) ds, \\
J_{45}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S Y \frac{dY}{ds} (r + \psi) ds - \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l Y \frac{dZ}{ds} ds, \\
J_{46}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S Y \frac{dZ}{ds} (r + \psi) ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l Y \frac{dY}{ds} ds, \\
J_{47}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S Y (r + \psi)^2 ds - \bar{D}_{66} \int_S (r + \psi) \frac{dZ}{ds} ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l^2 Y ds, \\
J_{48}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S (r + \psi) Y \psi ds + 2\bar{D}_{66} \int_S \frac{dZ}{ds} (r + \psi) ds,
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
J_{51}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S \omega_p (r + \psi) ds, \quad J_{52}^0 = \bar{A}_{16} \int_S Z \omega_p (r + \psi) ds + \bar{D}_{16} \int_S l \frac{dY}{ds} (r + \psi) ds, \\
J_{53}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S Y \omega_p (r + \psi) ds - \bar{D}_{16} \int_S (r + \psi) l \frac{dZ}{ds} ds, \\
J_{54}^0 &= \bar{A}_{16} \int_S \omega_p^2 (r + \psi) ds + \bar{D}_{16} \int_S l^2 (r + \psi) ds, \\
J_{55}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S \omega_p \frac{dY}{ds} (r + \psi) ds - \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l \omega_p \frac{dZ}{ds} ds, \\
J_{56}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S \omega_p \frac{dZ}{ds} (r + \psi) ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l \omega_p \frac{dY}{ds} ds, \\
J_{57}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S \omega_p (r + \psi)^2 ds - \bar{D}_{66} \int_S l (r + \psi) ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l^2 \omega_p ds, \\
J_{58}^0 &= \bar{A}_{66} \int_S (r + \psi) \psi \omega_p ds - 2\bar{D}_{66} \int_S l (r + \psi) ds.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

En definitiva, el modelo tipo viga expuesto es gobernado por el funcional (4.15), cuyas componentes están dadas por (4.23-4.27), por las ecuaciones constitutivas (4.47) y las correspondientes condiciones de borde esenciales. El modelo permite realizar un estudio completo sobre el comportamiento estructural de vigas FRP rectas y curvas de sección

genérica. En esta tesis, con el fin de obtener la respuesta estructural de vigas bajo condiciones de borde genéricas, el modelo es implementado mediante la aplicación de un modelo de elementos finitos unidimensional, el cual será descrito en detalle en el Capítulo 6. Adicionalmente, el modelo es empleado para la obtención de soluciones analíticas que permitan conocer distintos parámetros estructurales. En la siguiente sección se exponen fórmulas analíticas para la determinación de desplazamientos, esfuerzos, tensiones y cargas críticas de pandeo flexo-torsional en vigas rectas bajo ciertas condiciones de carga y de vinculación.

### 4.3 Algunas soluciones analíticas aproximadas para el análisis de vigas bisimétricas bajo un estado de flexo-compresión

En esta sección se expone un resumen de las expresiones analíticas que definen ciertos parámetros estructurales de interés que luego serán empleados en la formulación de modelos destinados al diseño preliminar de vigas FRP. En particular, se consideran vigas rectas FRP de sección transversal doblemente simétrica sometida a dos condiciones de borde específicas: vigas simplemente apoyadas (SAP) y doblemente empotradas sin restricción del desplazamiento axial en uno de sus extremos (EE). En ambos casos, se contemplan cargas combinadas de flexión y compresión, como se indica en la Figura 4.5. Sin embargo, cabe destacar que si bien aquí sólo se contemplan tales configuraciones estructurales, la metodología expuesta en esta sección puede aplicarse, con igual aproximación, a otras condiciones de borde si se realizan los desarrollos correspondientes.

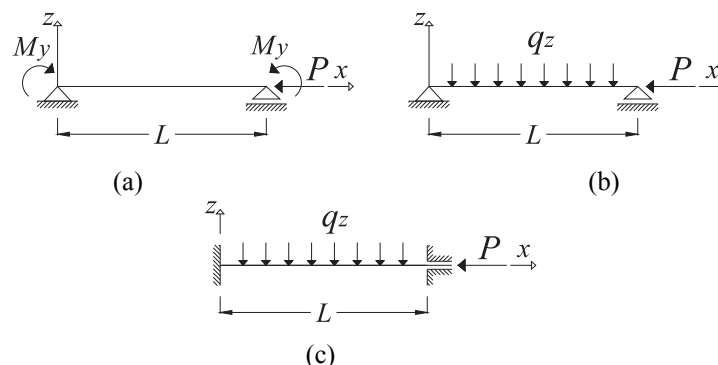


Figura 4.5. Condiciones de borde y estados de carga considerados.

Primeramente, se obtienen expresiones analíticas para determinar los desplazamientos, los esfuerzos y las tensiones que se producen en vigas rectas sometidas a flexo-compresión y se explica brevemente cómo evaluar la resistencia del laminado a partir de tales expresiones.

En segundo lugar, se proponen fórmulas analíticas que determinan, en forma aproximada, las cargas críticas de pandeo flexional y lateral-torsional en vigas rectas FRP construidas con laminados simétricos y balanceados. Este desarrollo se realiza en base al modelo estructural desarrollado en la sección 4.2, empleando el enfoque constitutivo de Reissner.

#### 4.3.1. Análisis estático simplificado

Uno de los primeros parámetros a determinar es el desplazamiento máximo que se produce en la viga, el cual depende de las condiciones de vinculación y de las cargas a las que está sometida la estructura. Asumiendo que únicamente actúan esfuerzos de flexión y despreciando los efectos de corte, la deflexión máxima en la estructura para las condiciones de vinculación propuestas en las Figuras 4.5 (a), (b) y (c), está dada, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (\delta_{\max}^B)^{SAP} &= \frac{M_y L^2}{8\widehat{EI}_y}, & (\delta_{\max}^B)^{SAP} &= \frac{5q_z L^4}{384\widehat{EI}_y}, \\ (\delta_{\max}^B)^{EE} &= \frac{q_z L^4}{384\widehat{EI}_y}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

donde  $L$  es la longitud total de la viga,  $M_y$  es el momento flector alrededor del eje  $y$  aplicado en los extremos de la viga,  $q_z$  es la carga por unidad de longitud en dirección del eje  $z$  y  $\widehat{EI}_y$  es la rigidez flexional de la viga, dada por la expresión (4.51). Se puede demostrar fácilmente que las expresiones dadas en (4.69) pueden ser obtenidas a partir de la teoría expuesta anteriormente si se desprecia la flexibilidad por corte.

Es sabido que las deformaciones por corte en las estructuras compuestas son importantes y, por lo tanto, el efecto de corte omitido en el cálculo de la deflexión máxima debe ser tenido en cuenta. Una forma simplificada de considerar dicho efecto fue propuesta por Kollár y Springer (2003) y consiste en multiplicar las expresiones anteriores por el parámetro de amplificación  $\alpha_c$ . Además, en la expresión (4.69) debe contemplarse la acción simultánea de la carga axial actuante y para ello se emplea el parámetro de amplificación  $\alpha_p$ , propuesto por Timoshenko y Gere (1961). Luego, la expresión analítica que permite hallar la deflexión máxima de una viga sometida a flexo-compresión considerando efectos de corte está dada por

$$\delta = \left( \frac{\alpha_p}{1 - \alpha_c} \right) \delta_{\max}^B, \quad (4.70)$$

donde

$$\alpha_p = \frac{1}{1 - \frac{(KL)^2 P}{\pi^2 \widehat{EI}_y}}, \quad \alpha_c = \frac{1}{1 + \frac{(KL)^2 \widehat{GS}_z}{\pi^2 \widehat{EI}_y}}, \quad (4.71)$$

siendo  $P$  la carga axial aplicada y  $\widehat{GS}_z$  el coeficiente de rigidez definido por (4.54). La constante  $K$  define la longitud de pandeo de la viga y su valor depende de la condición de borde analizada, siendo  $K^{SAP} = 1$  y  $K^{EE} = 0.5$ .

Un criterio similar puede emplearse si se quieren determinar los esfuerzos máximos que se producen en la viga. Según la condición de borde que se analice (en correspondencia con lo especificado en la Figura 4.5 (a), (b) y (c)), los valores máximos de los momentos flectores y de los esfuerzos de corte pueden ser obtenidos como se indica a continuación

$$\begin{aligned} (M_{y,\max})^{SAP} &= M_y^0 \left( \frac{\alpha_p}{1 - \alpha_c} \right), & (M_{y,\max})^{SAP} &= \frac{q_z L^2}{8} \left( \frac{\alpha_p}{1 - \alpha_c} \right), \\ (M_{y,\max})^{EE} &= -\frac{q_z L^2}{12} \left( \frac{\alpha_p}{1 - \alpha_c} \right), \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$(Q_z)^{SAP} = 0, \quad (Q_{z,\max})^{SAP} = (Q_{z,\max})^{EE} = \frac{q_z L}{2}. \quad (4.73)$$

Las tensiones máximas que se producen en la viga pueden hallarse en forma aproximada a partir de las fórmulas analíticas para vigas isótropas, asumiendo que el momento flector es soportado principalmente por las alas y el esfuerzo de corte por las almas de la sección transversal (Barbero, 1998). En tal caso, la tensión normal en una viga sometida a un estado de flexo-compresión puede ser determinada por la siguiente expresión

$$\sigma_x = \frac{M_{y,\max}}{I_y} z + \frac{P}{A}, \quad (4.74)$$

donde  $z$  es la distancia desde el baricentro al punto analizado,  $I_y$  es el momento de área alrededor del eje  $y$ ,  $A$  es el área de la sección transversal y  $M_{y,\max}$  es el momento máximo en la viga dado por (4.72). Luego, bajo las mismas hipótesis, la tensión de corte puede ser hallada a partir de la fórmula de Jourawski (Barbero, 1998)

$$\tau_{xy} = \frac{Q_{z,\max} S_z}{e I_y}. \quad (4.75)$$

siendo  $S_z$  el primer momento de área,  $e$  es el espesor total del alma y  $Q_{z,\max}$  es el esfuerzo de

corte máximo dado por (4.73).

Cabe aclarar que cuando se emplean las expresiones analíticas aquí expuestas para el cálculo de tensiones máximas, las mismas se evalúan en el espesor total del laminado. Por lo tanto, si se desea estimar la falla del laminado se deben realizar ciertas simplificaciones respecto a lo expuesto en la sección 3.3.3 del Capítulo 3. Aquí se propone comparar las tensiones máximas con las resistencias del laminado a través de los siguientes factores de seguridad, los cuales deben ser mayores a la unidad para que no se produzca la falla del laminado,

$$FS_{xt} = \frac{\sigma_{xt}^{\max}}{F_{xt}}, \quad FS_{xc} = \frac{\sigma_{xc}^{\max}}{F_{xc}}, \quad FS_{xy} = \frac{\tau_{xy}^{\max}}{F_{xy}}, \quad (4.76)$$

donde  $\sigma_{xt}^{\max}$  y  $\sigma_{xc}^{\max}$  son las tensiones normales máximas a tracción y a compresión, respectivamente, dadas por la expresión (4.74),  $\tau_{xy}^{\max}$  es la tensión de corte máxima dada por (4.75),  $F_{xt}$ ,  $F_{xc}$  y  $F_{xy}$  son las resistencias a tracción, a compresión y al corte del laminado. Para la obtención de estas resistencias, Barbero (1998) propone el empleo de gráficos, denominados *carpet plots*, los cuales surgen de aplicar el criterio de Tsai-Wu para una familia de laminados, para un material específico y asumiendo distintas solicitaciones. Algunos de estos gráficos son representados en el Apéndice I.

#### 4.3.2. Pandeo flexo-torsional

En esta sección se desarrollan expresiones analíticas que permiten obtener las cargas críticas de pandeo flexional y lateral-torsional en vigas rectas con doble simetría seccional sometidas a un estado inicial de tensiones. Para ello, se aplica el método de Rayleigh-Ritz sobre el primer funcional de Reissner, cuya variación está dada en forma unidimensional por las expresiones (4.23-4.26), si se desprecian los términos dinámicos. Luego, para el caso particular de vigas doblemente empotradas, se realiza un ajuste sobre las expresiones obtenidas.

Considerando doble simetría seccional en una viga de eje recto ( $R$  tendiendo a infinito) y empleando las definiciones (4.14), las ecuaciones constitutivas dadas por (4.47) pueden escribirse en términos de los desplazamientos generalizados de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
N &= \widehat{E}A u', & M_y &= -\widehat{E}I_y \theta_y', & M_z &= -\widehat{E}I_z \theta_z', & B &= -\widehat{E}C_w \theta_x', \\
Q_y &= \widehat{G}S_y (v' - \theta_z), & Q_z &= \widehat{G}S_z (w' - \theta_y), \\
T_w &= \widehat{G}S_\omega (\phi_x' - \theta_x), & T_{sv} &= \widehat{G}J \phi_x'.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Con el fin de obtener expresiones analíticas sencillas que puedan ser fácilmente implementadas, se modifican las hipótesis **vii** y **viii**, enunciadas en la sección 4.2.1, de la siguiente manera: se contemplan sólo las componentes lineales del vector de desplazamientos  $(u_x, u_y, u_z)$  y se considera únicamente la presencia de tensiones iniciales relacionadas con esfuerzos normales, por lo que sólo se tiene en cuenta la deformación axial de segundo orden debida a desplazamientos lineales  $(\eta_{xx}^L)$ . El desarrollo completo de la teoría bajo estas hipótesis puede encontrarse en Cortínez y Piovan (2002) y Piovan (2003).

En virtud de las hipótesis enunciadas y empleando las expresiones dadas en (4.77), el primer funcional de Reissner puede ser escrito en forma unidimensional, en términos de los desplazamientos, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) &= -\int_0^L \frac{1}{2} \left[ \widehat{E}A u'^2 + \widehat{E}I_z \theta_z'^2 + \widehat{E}I_y \theta_y'^2 + \widehat{E}C_w \theta_x'^2 + \widehat{G}S_y (v' - \theta_z)^2 + \widehat{G}S_z (w' - \theta_y)^2 \right. \\
&\quad \left. + \widehat{G}S_\omega (\phi_x' + \theta_x)^2 + \widehat{G}J \phi_x'^2 \right] dx \\
&\quad - \int_0^L \left[ \frac{N^0}{2} \left( w'^2 + v'^2 + \frac{I_s}{A} \phi_x'^2 \right) + M_z^0 \phi_x' w' - M_y^0 \phi_x' v' \right] dx \\
&\quad + \int_0^L (q_x u + q_y v + q_z w - m_z \theta_z - m_y \theta_y - b \theta_x + m_x \phi_x) dx \\
&\quad + \left[ \bar{N}u - \bar{M}_z \theta_z - \bar{M}_y \theta_y - \bar{B} \theta + \bar{Q}_y v + \bar{Q}_z w + (\bar{T}_w + \bar{T}_{sv}) \phi_x \right]_{x=0}^{x=L},
\end{aligned} \tag{4.78}$$

siendo  $\mathbf{u}$  el vector de desplazamientos generalizados definido como

$$\mathbf{u} = \{u, v, w, \theta_y, \theta_z, \theta_x, \phi_x\}. \tag{4.79}$$

Los desplazamientos son aproximados mediante funciones espaciales continuas y diferenciables en todo el dominio, que verifican las condiciones de borde esenciales. Luego, se adopta la siguiente base

$$\mathbf{v}_h = \{b_1 \psi_1, b_2 \psi_2, \dots, b_j \psi_j, \dots, b_7 \psi_7\}, \quad j = 1, 2, \dots, 7. \tag{4.80}$$

Se asume que cada función  $\psi_j$  se corresponde con las componentes del vector de desplazamientos generalizados (4.79) y las constantes  $b_j$  son las amplitudes de los

desplazamientos asociadas. Reemplazando  $\mathbf{v}_h$  en el funcional (4.78) se obtiene una función de siete variables,  $f(b_1, b_2, \dots, b_m) = I(b_j/\psi_j)$ , expresada como

$$\begin{aligned}
f(b_j) = & -\int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \left[ \widehat{EA} b_1^2 \psi_1'^2 + \widehat{EI}_z b_5^2 \psi_5'^2 + \widehat{EI}_y b_4^2 \psi_4'^2 + \widehat{EC}_w b_6^2 \psi_6'^2 + \widehat{GS}_y b_2^2 \psi_2'^2 \right. \right. \\
& - 2\widehat{GS}_y b_2 \psi_2' b_5 \psi_5 + \widehat{GS}_y b_5^2 \psi_5^2 + \widehat{GS}_z b_3^2 \psi_3'^2 - 2\widehat{GS}_z b_3 \psi_3' b_4 \psi_4 \\
& \left. \left. + \widehat{GS}_z b_4^2 \psi_4^2 + \widehat{GS}_\omega b_7^2 \psi_7'^2 - 2\widehat{GS}_\omega b_7 \psi_7' b_6 \psi_6 + \widehat{GS}_\omega b_6^2 \psi_6^2 + \widehat{GJ} b_7^2 \psi_7'^2 \right] \right. \\
& - \frac{N^0}{2} (b_3^2 \psi_3'^2 + b_2^2 \psi_2'^2 + I_0 b_7^2 \psi_7'^2) - M_z^0 b_7 \psi_7' b_3 \psi_3' - M_y^0 b_7 \psi_7' b_2 \psi_2' \\
& \left. + q_x b_1 \psi_1 + q_y b_2 \psi_2 + q_z b_3 \psi_3 - m_z b_5 \psi_5 - m_y b_4 \psi_4 + b b_6 \psi_6 + m_x b_7 \psi_7 \right\} dx.
\end{aligned} \quad (4.81)$$

donde  $I_0$  es el momento polar de inercia por unidad de área ( $I_S/A$ ), las rigideces de la sección transversal ( $\widehat{EA}$ ,  $\widehat{EI}_z$ ,  $\widehat{EI}_y$ ,  $\widehat{EC}_w$ ,  $\widehat{GS}_y$ ,  $\widehat{GS}_z$ ,  $\widehat{GS}_\omega$ ,  $\widehat{GJ}$ ) están definidas según las expresiones (4.51-4.54). Luego, si la función  $f$  posee un mínimo para  $b_j = a_j$  necesariamente debe verificarse la siguiente condición

$$\left. \frac{\partial f}{\partial b_j} \right|_{b_j=a_j} = 0. \quad (4.82)$$

Esto conduce al siguiente sistema de siete ecuaciones con siete incógnitas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial b_1} = 0 & \rightarrow a_1 \int_0^L \widehat{EA} \psi_1'^2 dx = \int_0^L q_x \psi_1 dx, \\
\frac{\partial f}{\partial b_2} = 0 & \rightarrow a_2 \int_0^L (\widehat{GS}_y \psi_2'^2 + N^0 \psi_2'^2) dx - a_5 \int_0^L \widehat{GS}_y \psi_2' \psi_5 dx, \\
& - a_7 \int_0^L M_y^0 \psi_7' \psi_2' dx = \int_0^L q_y \psi_2 dx, \\
\frac{\partial f}{\partial b_3} = 0 & \rightarrow a_3 \int_0^L (\widehat{GS}_z \psi_3'^2 + P^0 \psi_3'^2) dx - a_4 \int_0^L \widehat{GS}_z \psi_3' \psi_4 dx \\
& + a_7 \int_0^L M_z^0 \psi_7' \psi_3' dx = \int_0^L q_z \psi_3 dx, \\
\frac{\partial f}{\partial b_4} = 0 & \rightarrow a_4 \int_0^L (\widehat{EI}_y \psi_4'^2 + \widehat{GS}_z \psi_4'^2) dx - a_3 \int_0^L \widehat{GS}_z \psi_3' \psi_4 dx = -\int_0^L m_y \psi_4 dx, \\
\frac{\partial f}{\partial b_5} = 0 & \rightarrow a_5 \int_0^L (\widehat{EI}_z \psi_5'^2 + \widehat{GS}_y \psi_5'^2) dx - a_2 \int_0^L \widehat{GS}_y \psi_2' \psi_5 dx = -\int_0^L m_z \psi_5 dx, \\
\frac{\partial f}{\partial b_6} = 0 & \rightarrow a_6 \int_0^L (\widehat{EC}_w \psi_6'^2 + \widehat{GS}_\omega \psi_6'^2) dx - a_7 \int_0^L \widehat{GS}_\omega \psi_7' \psi_6 dx = \int_0^L b \psi_6 dx, \dots
\end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} \dots \frac{\partial f}{\partial b_7} = 0 \rightarrow a_7 \int_0^L \psi_7'^2 \left( \widehat{GS}_\omega + \widehat{GJ} + N^0 I_0 \right) dx - a_6 \int_0^L \widehat{GS}_\omega \psi_7' \psi_6 dx \\ + a_3 \int_0^L M_z^0 \psi_7' \psi_3' dx - a_2 \int_0^L M_y^0 \psi_7' \psi_2' dx = \int_0^L m_x \psi_7 dx. \end{aligned} \quad (4.83)$$

En forma matricial, el sistema resultante queda expresado de la siguiente manera

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}_t \cdot \mathbf{a}, \quad (4.84)$$

donde

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}^T, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{q} = \int_0^L \{q_x \psi_1, q_y \psi_2, q_z \psi_3, -m_y \psi_4, -m_z \psi_5, b \psi_6, m_x \psi_7\}^T dx, \quad (4.86)$$

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \int_0^L \widehat{EA} \psi_1'^2 dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^L \psi_2'^2 (\widehat{GS}_y + N^0) dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^L \psi_3'^2 (\widehat{GS}_z + N^0) dx & -\int_0^L \widehat{GS}_z \psi_3' \psi_4 dx \\ 0 & 0 & -\int_0^L \widehat{GS}_z \psi_3' \psi_4 dx & \int_0^L (\widehat{EI}_y \psi_4'^2 + \widehat{GS}_z \psi_4'^2) dx \\ 0 & -\int_0^L \widehat{GS}_y \psi_2' \psi_5 dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\int_0^L M_y^0 \psi_7' \psi_2' dx & \int_0^L M_z^0 \psi_7' \psi_3' dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\int_0^L \widehat{GS}_y \psi_2' \psi_5 dx & 0 & 0 & -\int_0^L M_y^0 \psi_7' \psi_2' dx \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^L M_z^0 \psi_7' \psi_3' dx \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \int_0^L (\widehat{EI}_z \psi_5'^2 + \widehat{GS}_y \psi_5'^2) dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^L (\widehat{EC}_w \psi_6'^2 + \widehat{GS}_\omega \psi_6'^2) dx & -\int_0^L \widehat{GS}_\omega \psi_7' \psi_6 dx \\ 0 & -\int_0^L \widehat{GS}_\omega \psi_7' \psi_6 dx & \int_0^L \psi_7'^2 (\widehat{GS}_\omega + \widehat{GJ} + N^0 I_0) dx \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Ahora bien, de acuerdo a los estados de carga propuestos en la Figura 4.5, sólo se considera un esfuerzo axial de compresión ( $N^0$ ) y un esfuerzo flexional en el plano  $xz$  ( $M_y^0 \neq 0, M_z^0 = 0$ ). La introducción de estas condiciones de carga en la matriz  $\mathbf{K}_t$  se traduce en un desacoplamiento flexional en el plano  $xz$  y un acoplamiento flexo-torsional en el plano  $xy$ . Para simplificar la notación, de aquí en adelante se llamará  $P$  a la carga axial inicial y  $M_y$  al momento flexional inicial. Luego, la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_t$ , dada por la expresión (4.87), se desacopla en las siguientes sub-matrices



$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_t^{xz} &= \begin{bmatrix} \int \psi_3'^2 (\widehat{GS}_z + P) dx & -\int \widehat{GS}_z \psi_5 \psi_3' dx \\ -\int \widehat{GS}_z \psi_5 \psi_3' dx & \int (\widehat{EI}_y \psi_5'^2 + \widehat{GS}_z \psi_5^2) dx \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_t^{xy} &= \begin{bmatrix} \int \psi_2'^2 (\widehat{GS}_y + P) dx & -\int M_y \psi_4' \psi_2' dx \\ -\int M_y \psi_4' \psi_2' dx & \int \psi_4'^2 (\widehat{GS}_\omega + \widehat{GJ} + PI_0) dx \\ -\int \widehat{GS}_y \psi_6 \psi_2' dx & 0 \\ 0 & -\int \widehat{GS}_\omega \psi_7 \psi_4' dx \\ -\int \widehat{GS}_y \psi_6 \psi_2' dx & 0 \\ 0 & -\int \widehat{GS}_\omega \psi_7 \psi_4' dx \\ \int (\widehat{EI}_z \psi_6'^2 + \widehat{GS}_y \psi_6^2) dx & 0 \\ 0 & \int (\widehat{EC}_\omega \psi_7'^2 + \widehat{GS}_\omega \psi_7^2) dx \end{bmatrix}. \tag{4.88}
\end{aligned}$$

Luego, el estado de pandeo está dado por la condición de singularidad de estas matrices, establecida como

$$\det(\mathbf{K}_t^{xy}) = 0, \tag{4.89}$$

$$\det(\mathbf{K}_t^{xz}) = 0. \tag{4.90}$$

Resolviendo (4.89) se obtiene una ecuación cuadrática que permite hallar el momento crítico, según la siguiente expresión

$$M_{cr} = \sqrt{\eta_0 I_0 (P - P_z)(P - P_\phi)}, \tag{4.91}$$

donde  $P_z$  y  $P_\phi$  coinciden con las cargas de pandeo flexo-torsional de una viga FRP sometida sólo a esfuerzo axial ( $M_y = 0$ ), definidas por las siguientes expresiones

$$P_z = -\widehat{GS}_y \left( 1 - \frac{1}{\frac{\widehat{EI}_z}{\widehat{GS}_y L^2} \eta_1 + \eta_2} \right), \tag{4.92}$$

$$P_\phi = -\frac{\widehat{GS}_\omega}{I_0} \left( 1 + \frac{\widehat{GJ}}{\widehat{GS}_\omega} - \frac{1}{\frac{\widehat{EC}_\omega}{\widehat{GS}_\omega L^2} \eta_3 + \eta_4} \right). \tag{4.93}$$

Resolviendo la expresión de (4.90) se obtiene la carga de pandeo flexional de una viga

FRP sometida sólo a esfuerzo axial ( $M_y = 0$ )

$$P_y = -\widehat{GS}_z \left( 1 - \frac{1}{\frac{\widehat{EI}_y}{\widehat{GS}_z L^2} \eta_5 + \eta_6} \right). \quad (4.94)$$

Debe tenerse en cuenta que tanto en las expresiones analíticas como en la formulación adoptada, el esfuerzo axial positivo es un esfuerzo de tracción, mientras que para diferenciar entre los estados de carga dados por las Figura 4.5 (a), (b) y (c),  $M_{cr}$  puede ser considerado como un momento equivalente definido por

$$M_{cr} = \begin{cases} M_y & \text{en el caso (a),} \\ \frac{q_z L^2}{8} & \text{en el caso (b),} \\ \frac{q_z L^2}{12} & \text{en el caso (c).} \end{cases} \quad (4.95)$$

En las expresiones (4.91-4.94)  $\eta_i$  son coeficientes adimensionales definidos por

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{\int \psi_2'^2 dx \int \psi_7'^2 dx}{\left( \int \psi_2' \psi_7' dx \right)^2}, & \eta_1 &= L^2 \frac{\int \psi_2'^2 dx \int \psi_5'^2 dx}{\left( \int \psi_2' \psi_5' dx \right)^2}, & \eta_2 &= \frac{\int \psi_2'^2 dx \int \psi_5'^2 dx}{\left( \int \psi_2' \psi_5' dx \right)^2}, \\ \eta_3 &= L^2 \frac{\int \psi_7'^2 dx \int \psi_6'^2 dx}{\left( \int \psi_7' \psi_6' dx \right)^2}, & \eta_4 &= \frac{\int \psi_7'^2 dx \int \psi_6'^2 dx}{\left( \int \psi_7' \psi_6' dx \right)^2}, & & \\ \eta_5 &= L^2 \frac{\int \psi_3'^2 dx \int \psi_4'^2 dx}{\left( \int \psi_3' \psi_4' dx \right)^2}, & \eta_6 &= \frac{\int \psi_3'^2 dx \int \psi_4'^2 dx}{\left( \int \psi_3' \psi_4' dx \right)^2}. & & \end{aligned} \quad (4.96)$$

Se observa que estos coeficientes dependen de las funciones  $\psi_i$ , las cuales fueron definidas en correspondencia con las componentes del vector de desplazamientos generalizados  $\mathbf{u}$  dado por (4.79). Tales desplazamientos pueden ser representados mediante soluciones analíticas dependientes de  $x$ , las cuales variarán su forma de acuerdo a la condición de borde analizada.

Luego, para el caso de vigas simplemente apoyadas se adoptan las siguientes soluciones exactas de los desplazamientos

$$\begin{aligned}
v &= b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), & w &= b_3 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), & \theta_y &= b_4 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \\
\theta_z &= b_5 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), & \theta_x &= b_6 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), & \phi_x &= b_7 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).
\end{aligned} \tag{4.97}$$

Luego, reemplazando estas soluciones en las expresiones (4.96) se obtienen los siguientes coeficientes

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \eta_2 = \eta_4 = \eta_6 = 1, \\
\eta_1 &= \eta_3 = \eta_5 = \pi^2,
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Reemplazando estos valores en (4.91-4.94), las cargas de pandeo de vigas FRP bi-simétricas simplemente apoyadas están dadas por

$$\begin{aligned}
P_z &= -\frac{\widehat{EI}_z \widehat{GS}_y \pi^2}{\widehat{EI}_z \pi^2 + \widehat{GS}_y L^2}, & P_\phi &= -\frac{\widehat{GS}_\omega \widehat{EC}_w \pi^2 + \widehat{GJ} \widehat{EC}_w \pi^2 + \widehat{GJ} \widehat{GS}_\omega L^2}{I_0 (\widehat{EC}_w \pi^2 + \widehat{GS}_\omega L^2)}, \\
P_y &= -\frac{\widehat{EI}_y \widehat{GS}_z \pi^2}{\widehat{EI}_y \pi^2 + \widehat{GS}_z L^2}, & M_{cr} &= \sqrt{I_0 (P - P_z)(P - P_\phi)}.
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Para hallar las expresiones de los coeficientes  $\eta_i$  que definen las cargas críticas en vigas bi-empotradas, deben proponerse nuevas funciones que definan a los desplazamientos para este tipo de vinculación. Tales soluciones se obtienen a partir de las ecuaciones de equilibrio, asumiendo distintos estados de carga actuando de manera independiente. Luego, teniendo en cuenta las hipótesis **vii** y **viii** tal como fueron definidas en esta sección, las ecuaciones diferenciales de equilibrio surgen del variacional (4.23-4.26), tomando variaciones con respecto a los desplazamientos generalizados. Para no entorpecer la lectura, tales ecuaciones no son escritas aquí, sin embargo, el desarrollo mediante el cual se obtienen puede encontrarse en Cortínez y Piovan (2002). De esta manera, los desplazamientos generalizados en una viga bi-empotrada se representan según las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
v &= b_2 \left( \frac{Lx}{2\widehat{GS}_y} - \frac{x^2}{2\widehat{GS}_y} + \frac{L^2 x^2}{24\widehat{EI}_z} - \frac{Lx^3}{12\widehat{EI}_z} + \frac{x^4}{24\widehat{EI}_z} \right), \\
w &= b_3 \left( \frac{Lx}{2\widehat{GS}_z} - \frac{x^2}{2\widehat{GS}_z} + \frac{L^2 x^2}{24\widehat{EI}_y} - \frac{Lx^3}{12\widehat{EI}_y} + \frac{x^4}{24\widehat{EI}_y} \right), \\
\theta_y &= b_4 \left( \frac{L^2 x}{12\widehat{EI}_y} - \frac{Lx^2}{4\widehat{EI}_y} + \frac{x^3}{6\widehat{EI}_y} \right), \dots
\end{aligned} \tag{4.100}$$

$$\begin{aligned}
\theta_z &= b_5 \left( \frac{L^2 x}{12 \widehat{EI}_z} - \frac{Lx^2}{4 \widehat{EI}_z} + \frac{x^3}{6 \widehat{EI}_z} \right), \\
\theta_x &= b_6 \left( \frac{L(e^{Lk_1} - e^{(L-x)k_1} + e^{xk_1} - 1) - 2x(e^{Lk_1} - 1)}{2 \widehat{GJ}(e^{Lk_1} - 1)} \right), \\
\phi_x &= b_7 \left( \frac{e^{-xk_1} \left[ -\widehat{GJ}x e^{xk_1} (e^{Lk_1} - 1)(x-L) - \widehat{EC}_w Lk_1 (e^{Lk_1} - e^{xk_1})(e^{xk_1} - 1) \right]}{2 \widehat{GJ}^2 (e^{Lk_1} - 1)} \right),
\end{aligned} \tag{4.100}$$

donde,

$$k_l = \sqrt{\frac{\widehat{GJ} \widehat{GS}_\omega}{\widehat{EC}_w (\widehat{GJ} + \widehat{GS}_\omega)}}. \tag{4.101}$$

Para hallar el coeficiente  $\eta_0$ , se reemplazan las expresiones de los desplazamientos  $v$  y  $\phi_x$  en la primera ecuación de (4.96). La expresión resultante no resulta adecuada a los fines prácticos dado que es muy extensa y, por ello, dicha expresión es aproximada por un polinomio de orden 3, en función del espesor  $e$  y de la altura  $h$  de la sección transversal de la viga. El polinomio propuesto está dado de la siguiente forma si se asume  $\bar{\eta}_0 = 1$

$$\eta_0 = \bar{\eta}_0 \left[ 1 - 0.8 \frac{e}{h} + 37 \left( \frac{e}{h} \right)^2 - 176 \left( \frac{e}{h} \right)^3 \right]. \tag{4.102}$$

En la expresión (4.102) se introduce el parámetro de ajuste  $\bar{\eta}_0$  con el fin de poder realizar un ajuste de los resultados obtenidos, en base a comparaciones con resultados de experimentaciones numéricas. Cabe aclarar que a su vez, en los siguientes desarrollos, se incorporarán otros parámetros de ajuste  $\bar{\eta}_i$  con el mismo objetivo.

Luego, reemplazando las expresiones de los desplazamientos  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$ , dadas por (4.100), en las ecuaciones de  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_5$  y  $\eta_6$ , dados por (4.96), se obtiene

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{\bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_2} (42\eta_2), & \eta_2 &= \bar{\eta}_2 \left[ \frac{2520 \widehat{EI}_z^2 + 84 \widehat{EI}_z \widehat{GS}_y L^2 + \widehat{GS}_y^2 L^4}{(42 \widehat{EI}_z + \widehat{GS}_y L^2)^2} \right], \\
\eta_5 &= \frac{\bar{\eta}_5}{\bar{\eta}_6} (42\eta_6), & \eta_6 &= \bar{\eta}_6 \left[ \frac{2520 \widehat{EI}_y^2 + 84 \widehat{EI}_y \widehat{GS}_z L^2 + \widehat{GS}_z^2 L^4}{(42 \widehat{EI}_y + \widehat{GS}_z L^2)^2} \right].
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Luego, se proponen los coeficientes  $\eta_3$  y  $\eta_4$ , correspondientes al movimiento torsional,

en analogía con las expresiones anteriores

$$\eta_3 = \frac{\bar{\eta}_3}{\bar{\eta}_4} (42\eta_4), \quad \eta_4 = \bar{\eta}_4 \left[ \frac{2520 \widehat{EC}_w^2 + 84 \widehat{EC}_w \widehat{GS}_\omega L^2 + \widehat{GS}_\omega^2 L^4}{(42 \widehat{EC}_w + \widehat{GS}_\omega L^2)^2} \right], \quad (4.104)$$

Cabe aclarar que reemplazando las soluciones propuestas para  $\theta_x$  y  $\phi_x$  en (4.96), se obtienen las siguientes ecuaciones que definen a los coeficientes  $\eta_3$  y  $\eta_4$

$$\eta_3 = - \frac{3k_1^4 k_2 L^2 (4 + k_1^2 L^2 - 4 \cosh(k_1 L) + k_1 L \operatorname{senh}(k_1 L))}{\left[ \begin{aligned} & (\widehat{GJ} + \widehat{EC}_w k_1^2) (12 + k_1^2 L^2 - 12 \cosh(k_1 L)) - \widehat{GJ} k_1^2 L^2 \cosh(k_1 L) \\ & + 3k_1 L \operatorname{senh}(k_1 L) (2\widehat{GJ} + \widehat{EC}_w k_1^2) \end{aligned} \right]^2}, \quad (4.105)$$

$$\eta_4 = - \frac{(24 + 4k_1^2 L^2 - (24 + k_1^2 L^2) \cosh(k_1 L) + 9k_1 L \operatorname{senh}(k_1 L))}{3k_1^2 L^2 (4 + k_1^2 L^2 - 4 \cosh(k_1 L) + k_1 L \operatorname{senh}(k_1 L))} \eta_3,$$

donde

$$k_2 = 24 \widehat{EC}_w \widehat{GJ} + L^2 (\widehat{GJ}^2 + 3 \widehat{EC}_w^2 k_1^4) - \widehat{GJ} (24 \widehat{EC}_w + \widehat{GJ} L^2) \cosh(k_1 L) - 3 \widehat{EC}_w k_1 L \operatorname{senh}(k_1 L) (\widehat{EC}_w k_1^2 - 4 \widehat{GJ}). \quad (4.106)$$

Sin embargo, las diferencias numéricas entre las expresiones (4.104) y (4.105) no son importantes, siendo las ecuaciones (4.104) más simples y fáciles de aplicar.

En definitiva, las cargas críticas de pandeo para vigas doblemente empotradas, sometidas al estado de carga que se muestra en la Figura 4.5(c), se obtienen reemplazando las expresiones de los coeficientes  $\eta_i$  dados por (4.102-4.104) en las ecuaciones (4.91-4.94).

Por su parte, en las ecuaciones (4.102-4.104) se definieron parámetros de ajuste  $\bar{\eta}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 6$ ), los cuales se emplean para ajustar las fórmulas analíticas (4.91-4.94). En términos generales, para obtener los valores de los parámetros  $\bar{\eta}_i$  se minimiza el error cuadrático porcentual, comparando los resultados arrojados por dichas fórmulas con las cargas críticas obtenidas mediante la implementación del modelo estructural a partir del modelo de elementos finitos tipo viga que será descrito en el Capítulo 6. Este procedimiento se realiza de manera independiente entre los distintos parámetros, implementando técnicas de optimización para minimizar el error. Por su parte, los parámetros  $\bar{\eta}_1$  y  $\bar{\eta}_2$  son constantes y se hallan comparando los valores de la carga crítica

axial  $P_z$  ( $M_y = 0$ ) obtenidos según la expresión (4.92) con los hallados con el modelo de elementos finitos, variando las dimensiones de la viga. Análogamente se obtienen los parámetros  $(\bar{\eta}_3, \bar{\eta}_4)$  y  $(\bar{\eta}_5, \bar{\eta}_6)$  comparando los valores de las cargas críticas  $P_\phi$  y  $P_y$ , respectivamente. Por su parte, el parámetro  $\bar{\eta}_0$  se define en función de las relaciones entre las dimensiones de la sección transversal como se indica en la expresión (4.107) y su ajuste se realiza comparando valores de  $M_{cr}$  (correspondientes a  $P = 0$ ).

$$\bar{\eta}_0 = x_1 \frac{b}{h} + x_2 \frac{L}{h} + x_3 \frac{L}{b} + x_4 \frac{e}{h}. \quad (4.107)$$

donde  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  son las nuevas constantes de ajuste.

En el Capítulo 7 se detallan los valores que adoptan finalmente los parámetros de ajuste  $\bar{\eta}_i$  para perfiles de pared delgada tipo I y tipo cajón.

#### 4.4 Análisis del pandeo local

En esta sección se efectúa un análisis simplificado que permite obtener expresiones analíticas para hallar las cargas críticas que producen la inestabilidad local en vigas FRP de pared delgada. Tales expresiones son válidas para vigas ortótropas de pared delgada de eje recto o curvo, tanto de sección transversal cerrada como abierta, y son aplicables, con cierta aproximación, a distintas condiciones de borde y estados de carga independientes. Las fórmulas que se desarrollan a continuación facilitan la evaluación de los efectos locales en forma simplificada y serán empleadas a tal fin en los esquemas de diseño de vigas propuestos en el Capítulo 5 de esta tesis.

- Los desarrollos que se exponen a continuación están basados en las siguientes hipótesis:
- se modela a cada segmento de la sección transversal de la viga como una placa de gran longitud;
  - se analiza cada placa en forma individual y se la considera restringida rotacionalmente por la o las placas adyacentes;
  - se asume que los ejes comunes a dos o más placas permanecen rectos.

La Figura 4.6 muestra esquemáticamente las consideraciones mencionadas para el caso particular de un perfil tipo I. Luego, la carga crítica local de la viga queda determinada por la menor carga crítica obtenida en el análisis de las placas que la componen. Por lo tanto, para hallarla previamente debe realizarse un análisis de inestabilidad de placas como se describe a continuación.

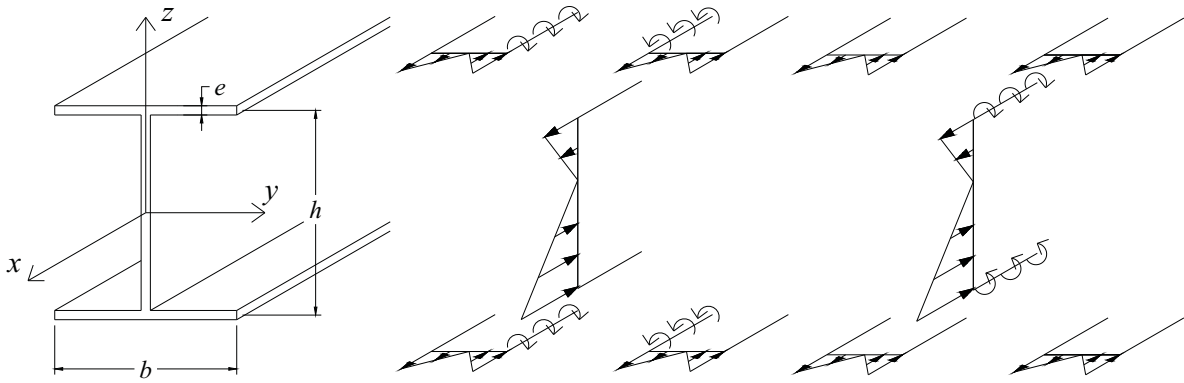


Figura 4.6. Esquema de análisis del pandeo local en una viga tipo I.

#### 4.4.1. Formulación variacional

Se analiza el pandeo de una placa ortótropa sujeta a cargas de compresión por unidad de longitud distribuidas linealmente en sus bordes simplemente apoyados (SS), como se muestra en las Figuras 4.7 (a) y (b). Se contemplan las siguientes condiciones para los bordes descargados: (a) ambos bordes rotacionalmente restringidos (RR) y (b) un borde rotacionalmente restringido y el otro libre (RF).

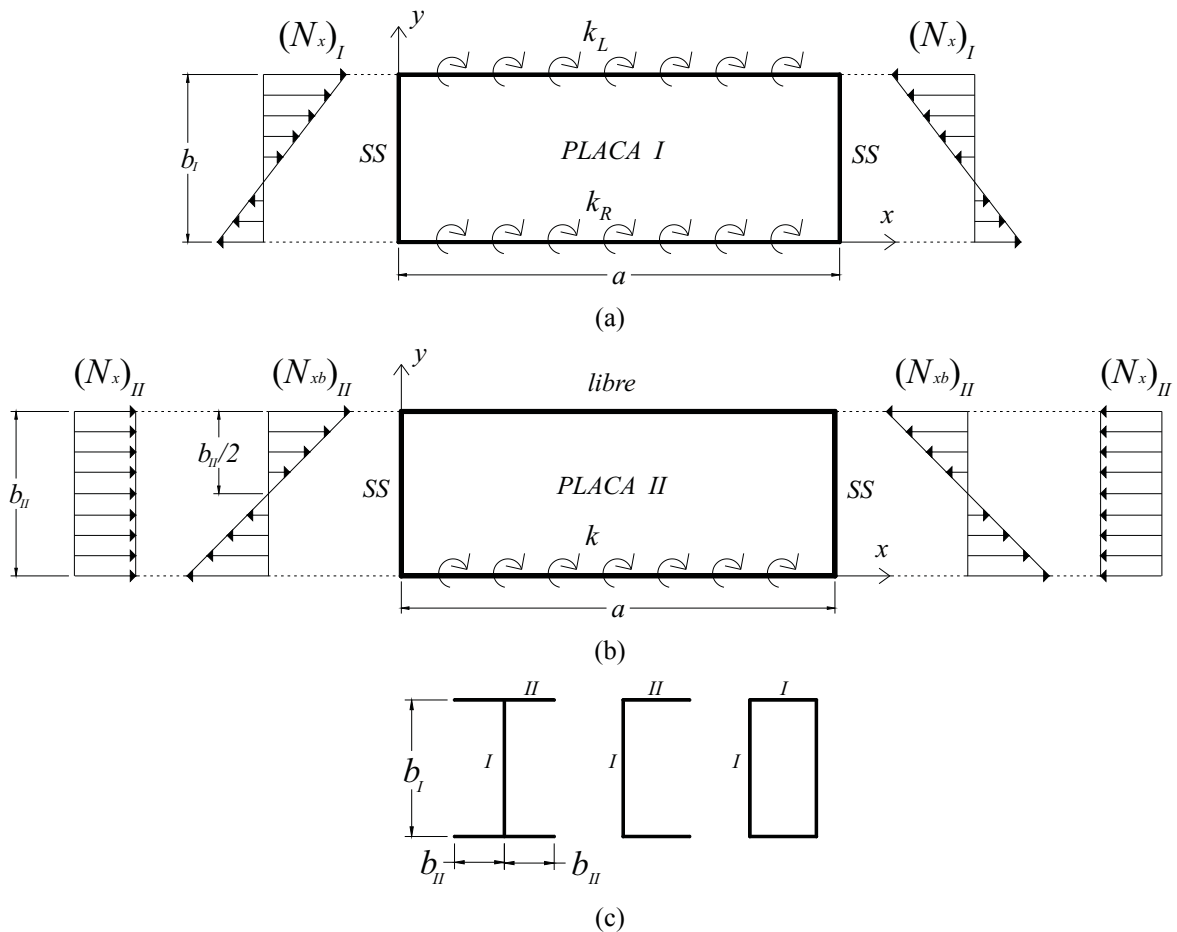


Figura 4.7. Geometría de placas ortótropas con diferentes condiciones de borde: (a) placa RR; (b) placa RF; (c) identificación de las placas en las secciones transversales de vigas de pared delgada.

La energía de deformación total de una placa ortótropa está compuesta por la energía de deformación elástica de la placa, la energía de deformación producida por las restricciones elásticas en los bordes rotacionalmente restringidos de la placa y el trabajo realizado por las fuerzas axiales en el plano. Luego, la energía total de la placa puede ser expresada por (Lekhnitskii *et al.*, 1968)

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_R \left( \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_L \left( \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy, \end{aligned} \quad (4.108)$$

donde  $D_{ij}$  son las constantes de rigidez flexionales del laminado dadas por las expresión (3.7),  $w$  es una función de  $x$  e  $y$  que define el desplazamiento de la placa en el estado de pandeo,  $k_R$  y  $k_L$  son las rigideces rotacionales elásticas de los bordes restringidos en  $y = 0$  e  $y = b$ , respectivamente, en el caso de placas RR. En el caso de placas RF,  $k_R = k$  y  $k_L = 0$ . En la expresión (4.108) se asume que no existen acoplamientos flexo-torsionales ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ) y, por lo tanto, dicha expresión es válida sólo para placas ortótropas (Barbero y Raftoyiannis, 1993). Esta hipótesis es la que limita el uso de las expresiones analíticas que serán desarrolladas para el análisis de inestabilidad local en vigas de pared delgada. Luego, dichas expresiones sólo podrán aplicarse cuando se trate de laminados ortótropos o *cross-ply*, como se mencionó anteriormente.

En (4.108) se hace referencia a la carga por unidad de longitud solicitante como  $N_x$  y se asume distribuida en los bordes simplemente apoyados de la placa de acuerdo a la siguiente ley lineal

$$N_x = N_{x0} \left( 1 - \alpha \frac{y}{b} \right), \quad (4.109)$$

donde  $\alpha$  y  $N_{x0}$  quedarán determinados por la resultante de tensión axial, correspondiente a la pared de la viga analizada.

Introduciendo una función de desplazamiento adecuada ( $w$ ) en la primera variación del funcional de energía (4.108) y aplicando el principio de energía potencial mínima, se obtiene un problema de autovalores que es resuelto por medio del método de Rayleigh-Ritz. Para ello, a continuación se proponen expresiones de  $w$  para placas RR y RF.

Se supone la siguiente función de desplazamiento general en el estado de pandeo



$$w(x, y) = \phi(y) \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad (4.110)$$

donde, en el caso de placas RR, se proponen como solución los siguientes polinomios dependientes de la pendiente de la carga aplicada

$$\begin{aligned} \text{si } \alpha \leq 1.5, \quad \phi(y) &= \frac{y}{b} + \psi_1 \frac{y^2}{b^2} + \psi_2 \frac{y^3}{b^3} + \psi_3 \frac{y^4}{b^4}, \\ \text{si } \alpha > 1.5, \quad \phi(y) &= \frac{y}{b} + \psi_1 \frac{y^2}{b^2} + \psi_2 \frac{y^3}{b^3} + \psi_3 \frac{y^4}{b^4} + \psi_4 \frac{y^5}{b^5}. \end{aligned} \quad (4.111)$$

En los bordes rotacionalmente restringidos de una placa RR, esta función de desplazamiento debe satisfacer las siguientes condiciones de borde

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0, \\ w(x, b) &= 0, \\ M_y(x, 0) &= -D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -k_R \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0}, \\ M_y(x, b) &= -D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = k_L \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Tales condiciones imponen que el desplazamiento sea nulo en ambos bordes y que el ángulo de rotación de la placa restringida sea igual al ángulo de rotación de la placa que restringe. Para la determinación aproximada de tales ángulos de rotación, se consideran válidas las hipótesis adoptadas por Bleich (1952).

Los casos en que  $\alpha > 1.5$ , es decir, cuando la distribución de la carga se aleja de una distribución uniforme, se adiciona la siguiente condición de borde

$$\begin{aligned} \text{si } 1.5 < \alpha < 2.0, \quad w(x, 0.7b) &= 0, \\ \text{si } \alpha \geq 2.0, \quad w(x, 0.3b) &= 0. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Estas condiciones de borde hacen que el desplazamiento sea nulo en diferentes puntos del borde cargado y fueron determinadas en base a observaciones de simulaciones numéricas realizadas en ABAQUS® 6.7.

Finalmente, asumiendo que los bordes restringidos rotacionalmente en la placa poseen la misma rigidez rotacional  $k$ , es decir,  $k_L = k_R = k$ , la función de desplazamiento  $\phi$  para una placa RR que satisface las condiciones de borde especificadas está dada por

si  $\alpha \leq 1.5$ ,

$$\begin{aligned} \phi(y) = & \frac{y}{b} + \frac{kb}{2D_{22}} \frac{y^2}{b^2} - \frac{12D_{22}^2 + 8D_{22}kb + k^2b^2}{D_{22}(6D_{22} + kb)} \frac{y^3}{b^3} \\ & + \frac{12D_{22}^2 + 8D_{22}kb + k^2b^2}{2D_{22}(6D_{22} + kb)} \frac{y^4}{b^4}, \end{aligned} \quad (4.114)$$

si  $1.5 < \alpha < 2.0$ ,

$$\begin{aligned} \phi(y) = & \frac{y}{b} + \frac{kb}{2D_{22}} \frac{y^2}{b^2} - \frac{3(4468D_{22}^2 + 1402D_{22}kb + 84k^2b^2)}{49D_{22}(38D_{22} + 3kb)} \frac{y^3}{b^3} \\ & - \frac{37604D_{22}^2 + 9936D_{22}kb + 567k^2b^2}{98D_{22}(38D_{22} + 3kb)} \frac{y^4}{b^4} \\ & - \frac{5(1452D_{22}^2 + 368D_{22}kb + 21k^2b^2)}{49D_{22}(38D_{22} + 3kb)} \frac{y^5}{b^5}, \end{aligned} \quad (4.115)$$

si  $\alpha \geq 2.0$ ,

$$\begin{aligned} \phi(y) = & \frac{y}{b} + \frac{kb}{2D_{22}} \frac{y^2}{b^2} - \frac{(10796D_{22}^2 + 2734D_{22}kb + 168k^2b^2)}{9D_{22}(62D_{22} + 7kb)} \frac{y^3}{b^3} \\ & + \frac{34996D_{22}^2 + 8464D_{22}kb + 483k^2b^2}{18D_{22}(62D_{22} + 7kb)} \frac{y^4}{b^4} \\ & - \frac{5(1452D_{22}^2 + 368D_{22}kb + 21k^2b^2)}{9D_{22}(62D_{22} + 7kb)} \frac{y^5}{b^5}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Para una placa RF, la función de desplazamiento elegida se establece de la siguiente manera (Qiao y Shan, 2005)

$$\phi(y) = (1 - \omega_1) \frac{y}{b} + \omega_1 \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{y}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{b} \right)^3 \right] \quad (4.117)$$

donde  $\omega_1$  es una constante desconocida, la cual puede ser obtenida a partir de las condiciones de borde. En placas simplemente apoyadas-libres la constante  $\omega_1$  adopta el valor 0, mientras que en placas empotradas-libres  $\omega_1 = 1$ .

Las condiciones de borde para una placa rotacionalmente restringida en  $y = 0$  y libre en  $y = b$ , están dadas por las siguientes expresiones

$$w(x, 0) = 0 \quad (4.118-a)$$

$$M_y(x, 0) = -D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -k \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (4.118-b)$$

$$M_y(x,b) = \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0 \quad (4.118-c)$$

$$V_y(x,b) = \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right]_{y=b} = 0 \quad (4.118-d)$$

De la misma manera que para una placa RR, se imponen las condiciones para un borde rotacionalmente restringido en  $y = 0$ , mientras que en el borde libre se debe verificar que tanto el corte como el momento sean nulos. Luego, considerando la condición (4.118-b), la constante  $\omega_1$  es determinada en función de la rigidez rotacional  $k$ , obteniendo la siguiente función de desplazamiento para una placa RF

$$\phi(y) = \left( 1 - \frac{kb}{3D_{22} + kb} \right) \frac{y}{b} + \frac{kb}{3D_{22} + kb} \left( \frac{3y^2}{2b^2} - \frac{y^3}{2b^3} \right) \quad (4.119)$$

Es necesario aclarar que la ecuación (4.117) no satisface en forma exacta las condiciones de borde libre dadas por las expresiones (4.118-c y 4.118-d). Con el objetivo de hallar una fórmula explícita de la carga de pandeo para placas RF, se asumen válidas las hipótesis adoptadas por Qiao y Shan (2005). Ellos proponen que resulta suficiente el cumplimiento en forma aproximada de la condición de borde libre. Es decir, se asume que dicha condición puede ser representada por  $(\partial^2 w / \partial y^2)_{y=b} = 0$ , siendo éste el término dominante en las expresiones del momento y del esfuerzo de corte en  $y = b$ .

#### 4.4.2. Soluciones explícitas para el pandeo de placas ortótropas

Reemplazando las funciones de los desplazamientos propuestas (4.114-4.116, 4.119) en la primera variación del funcional (4.108), se obtienen las soluciones al problema de autovalores para placas ortótropas RR y RF ( $N_x^{RR}$ ,  $N_x^{RF}$ ).

Luego, para obtener la menor carga de pandeo es necesario minimizar estas soluciones respecto de la relación de esbeltez  $c$  de la placa (es decir,  $d(N_x)/dc = 0$ , donde  $c = a/b$ ). De esta condición se obtiene la relación de esbeltez crítica ( $c_{cr}$ ). Reemplazando dicha esbeltez en las expresiones de  $N_x^{RR}$  y  $N_x^{RF}$  se obtiene la menor carga crítica de la placa:  $N_{x,cr}^{RR}$  ó  $N_{x,cr}^{RF}$ , según sea la condición de borde analizada. En el caso de placas RR, tales cargas están dadas por

si  $\alpha \leq 1.5$ ,

$$N_{x,cr}^{RR01} = \frac{48}{b^2(2-\alpha)} \left( \frac{\left( (D_{12} + 2D_{66})(10D_{22} + kb)^2 + \dots \right)}{(11.13D_{22} + kb)^2} + \dots \right) \frac{\sqrt{D_{11}D_{22}} \sqrt{3.5(2D_{22} + kb)(12D_{22} + kb)}}{(11.13D_{22} + kb)}, \quad (4.120)$$

si  $1.5 < \alpha < 2.0$ ,

$$N_{x,cr}^{RR02} = \frac{132.9}{b^2(3-\alpha)} \left( \frac{\left( (D_{12} + 2D_{66}) + \dots \right)}{1.77\sqrt{D_{11}D_{22}}(10.89D_{22} + kb)^2(13.53D_{22} + kb)^2} \right) \frac{(13.22D_{22} + kb)^4}{(13.22D_{22} + kb)^4}, \quad (4.121)$$

si  $\alpha \geq 2.0$ ,

$$N_{x,cr}^{RR03} = \frac{73.17}{b^2(1.51-\alpha)} \left( \frac{\left( (D_{12} + 2D_{66}) + \dots \right)}{1.77\sqrt{D_{11}D_{22}}(13.52D_{22} + kb)^2(10.89D_{22} + kb)^2} \right) \frac{(13.71D_{22} + kb)^4}{(13.71D_{22} + kb)^4}. \quad (4.122)$$

En el caso de placas RF las cargas críticas están dadas por

$$N_{x,cr}^{RF} = 3.12 \frac{\left( 60D_{22}^2D_{66} + kb(5D_{22} + kb)(8D_{66} - D_{12}) + \dots \right)}{b^2(11.72D_{22}^2(1.33 - \alpha) + 6.77D_{22}kb(1.27 - \alpha) + k^2b^2(1.23 - \alpha))} \frac{2.80\sqrt{D_{11}D_{22}kb}(3.37D_{22} + kb)^{\frac{3}{2}}}{(3.37D_{22} + kb)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.123)$$

En particular, la carga crítica para placas RF sometidas a cargas de compresión uniformemente distribuidas ( $\alpha = 0$ ) queda determinada por

$$N_{x,cr}^{RF} = 2.54 \frac{\left( 60D_{22}^2D_{66} + kb(5D_{22} + kb)(8D_{66} - D_{12}) + \dots \right)}{b^2(3.56D_{22} + kb)^2} \frac{2.80\sqrt{D_{11}D_{22}kb}(3.37D_{22} + kb)^{\frac{3}{2}}}{(3.37D_{22} + kb)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.124)$$

Por otro lado, en placas RF sometidas a cargas de flexión pura ( $\alpha = 2$ ), la carga crítica puede ser expresada de la siguiente forma

$$N_{xb,cr}^{RF} = 4.05 \frac{60D_{22}^2D_{66} + kb(5D_{22} + kb)(8D_{66} - D_{12}) + 2.80\sqrt{D_{11}D_{22}kb}(3.37D_{22} + kb)^{\frac{3}{2}}}{-b^2(3.192D_{22} + kb)^2}. \quad (4.125)$$

La carga crítica en el caso de placas con los cuatro bordes simplemente apoyados (SS) se obtiene asumiendo  $k_L = k_R = 0$  en las expresiones (4.120-4.122)

$$si \quad \alpha \leq 1.5, \quad N_{x,cr}^{SS01} = \frac{38.9}{b^2(2-\alpha)} \left( (D_{12} + 2D_{66}) + \sqrt{D_{11}D_{22}} \right), \quad (4.126)$$

$$si \quad 1.5 < \alpha < 2.0, \quad N_{x,cr}^{SS02} = \frac{132.9}{b^2(3-\alpha)} \left( (D_{12} + 2D_{66}) + 1.26\sqrt{D_{11}D_{22}} \right), \quad (4.127)$$

$$si \quad \alpha \geq 2.0, \quad N_{x,cr}^{SS03} = \frac{73.17}{b^2(1.51-\alpha)} \left( (D_{12} + 2D_{66}) + 1.09\sqrt{D_{11}D_{22}} \right). \quad (4.128)$$

Finalmente, en el caso de placas simplemente apoyadas-libres en los bordes descargados (SF), las cargas críticas para los casos particulares de carga uniforme ( $\alpha = 0$ ) y flexión pura ( $\alpha = 2$ ), surgen de las expresiones (4.124) y (4.125) considerando  $k = 0$ ,

$$si \quad \alpha = 0, \quad N_{x,cr}^{SF} = \frac{12D_{66}}{b^2}, \quad (4.129)$$

$$si \quad \alpha = 2, \quad N_{xb,cr}^{SF} = -\frac{23.8D_{66}}{b^2}. \quad (4.130)$$

#### 4.4.3. Aplicación de las expresiones de placas al pandeo local de vigas

El análisis del pandeo local de vigas de pared delgada abiertas o cerradas se realiza a partir de las expresiones obtenidas en el análisis de placas y su aplicación en vigas bajo las hipótesis mencionadas se describe a continuación.

1. *Calcular las resultantes de tensión axiales de todas las paredes de la sección:  $(N_x)_I$ ,  $(N_{xb})_{II}$ ,  $(N_x)_{II}$ .* Los subíndices *I* y *II* hacen referencia al tipo de placa que se está considerando, según se indica en la Figura 4.7. Tales resultantes de tensión pueden hallarse a partir de las ecuaciones constitutivas dadas por (4.36) cuando se emplea la teoría descrita en la sección 4.2, o bien, siguiendo el análisis simplificado expuesto en la sección 4.3.1.
2. *Calcular el parámetro de carga crítica para una placa tipo I, asumiendo sus bordes descargados como simplemente apoyados:  $\lambda_1^{SS}$ .* La resultante de tensión crítica  $N_{x,cr}^{SS}$  se puede obtener de las expresiones (4.126-4.128), según corresponda de acuerdo al valor de  $\alpha$ . Luego, el parámetro de carga crítica está dado por

$$\lambda_1^{SS} = \frac{N_{x,cr}^{SS0i}}{(N_x)_I}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.131)$$

3. *Calcular el parámetro de carga crítica para una placa tipo II, asumiendo uno de sus bordes como simplemente apoyado y el otro borde libre:  $\lambda_1^{SF}$ .* Para ello, primero se deben hallar las resultantes de tensión críticas  $N_{x,cr}^{SF}$  y  $N_{xb,cr}^{SF}$ , dadas por las expresiones

(4.129) y (4.130), respectivamente. Luego, el parámetro de carga crítico se obtiene a partir de la curva de interacción (Bleich, 1952) como la raíz de la siguiente ecuación

$$\left(\lambda_{II}^{SF}\right)^2 \left(\frac{\left(N_{xb}\right)_{II}}{N_{xb,cr}^{SF}}\right)^2 + \lambda_{II}^{SF} \left(\frac{\left(N_x\right)_{II}}{N_{x,cr}^{SF}}\right) = 1. \quad (4.132)$$

4. *Chequear qué tipo de placa pandea primero.* Esto es,

a. Si  $\lambda_I^{SS} < \lambda_{II}^{SF}$ , pandea primero la placa tipo I y deben seguirse los ítems 5-6.

b. Si  $\lambda_{II}^{SF} < \lambda_I^{SS}$ , pandea primero la placa tipo II y deben seguirse los ítems 7-8.

5. *Hallar la rigidez rotacional correspondiente a la placa tipo I.* Para ello, es conveniente hacer una distinción entre secciones abiertas y cerradas en lo que respecta a la rigidez rotacional dada por las placas adyacentes.

En el caso de vigas de sección transversal cerrada, se contemplan los efectos de restricción que genera la placa tipo I adyacente a partir de su rigidez flexional y el efecto desestabilizante de la carga de compresión de la siguiente manera

$$k_I = \frac{2D_{22}}{b_I} \left(1 - \frac{\lambda_I^{SS}}{\lambda_{II}^{SF}}\right), \quad (4.133)$$

donde  $b_I$  es el ancho de la placa adyacente. En el caso de vigas de sección transversal abierta, se contempla nuevamente el efecto de la carga de compresión y se tienen en cuenta los efectos de restricción que genera la placa tipo II adyacente a partir de la rigidez torsional que esta aporta (Tarjan *et al.*, 2009). Así, la rigidez de la placa adyacente se expresa de la siguiente manera

$$k_I = 4D_{66}b_{II} \left(1 - \frac{\lambda_I^{SS}}{\lambda_{II}^{SF}}\right), \quad (4.134)$$

donde  $b_{II}$  es, en este caso, el ancho de la placa adyacente.

6. *Calcular el parámetro de carga crítica de una placa tipo I asumiendo restringidos rotacionalmente sus bordes descargados:*  $\lambda_I^{RR}$ . Para ello, se debe determinar primero la resultante de tensión crítica  $N_{x,cr}^{RR}$  (dada por (4.120-4.122)) para luego determinar el parámetro de carga crítico dado por la siguiente expresión

$$\lambda_I^{RR} = \frac{N_{x,cr}^{RR0i}}{\left(N_x\right)_I}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.135)$$

7. Hallar la rigidez rotacional correspondiente a la placa tipo II. Este caso sólo se presenta en vigas de sección abierta. De manera análoga al ítem 5, se contemplan los efectos de restricción que genera la placa tipo I adyacente y el efecto desestabilizante de la carga de compresión de la siguiente manera

$$k_{II} = \frac{2D_{22}}{b_I} \left( 1 - \frac{\lambda_{II}^{SF}}{\lambda_I^{SS}} \right), \quad (4.136)$$

donde  $b_I$  es el ancho de la placa adyacente. Cuando la placa tipo I restringe rotacionalmente a dos placas tipo II, como es el caso del perfil I, el factor 2 debe ser omitido.

8. Calcular el parámetro de carga crítica de una placa tipo II asumiendo restringido rotacionalmente uno de sus bordes y el otro libre:  $\lambda_{II}^{RF}$ . Para ello, se deben determinar primero las resultantes de tensión críticas  $N_{x,cr}^{RF}$  y  $N_{xb,cr}^{RF}$  mediante las ecuaciones (4.124) y (4.125). Luego, el parámetro de carga crítico se obtiene de manera análoga al ítem 3, como la raíz de la siguiente ecuación de interacción

$$\left( \lambda_{II}^{RF} \right)^2 \left( \frac{\left( N_{xb} \right)_{II}}{N_{xb,cr}^{RF}} \right)^2 + \lambda_{II}^{RF} \left( \frac{\left( N_x \right)_{II}}{N_{x,cr}^{RF}} \right) = 1. \quad (4.137)$$





## CAPÍTULO 5

# DISEÑO ÓPTIMO DE VIGAS DE PARED DELGADA

### 5.1 Introducción

En este capítulo se proponen distintos esquemas de diseño de vigas FRP de pared delgada de eje recto y curvo, en base a diferentes requerimientos hipotéticos que condicionan a la estructura.

En primer lugar, se introduce y se representa esquemáticamente el ordenamiento de los distintos procedimientos empleados para hallar un diseño óptimo, en lo que se refiere a la formulación del esquema de diseño en sí misma y a la manera en que se involucran los parámetros estructurales y su determinación.

En segundo lugar, se desarrollan en forma detallada cada uno de los esquemas de diseño. Se expone una formulación matemática que permite minimizar el peso y la deflexión de la estructura, en forma conjunta o individualmente, empleando un método de optimización multiobjetivo basado en funciones de peso. Como una aplicación particular de este diseño, se considera la existencia de una carga dinámica sobre la estructura, lo cual adiciona algunas restricciones y consideraciones particulares a tener en cuenta. Se formula un tercer esquema que logra maximizar la resistencia y minimizar el peso de la estructura empleando una única función objetivo. En los problemas de diseño mencionados, el comportamiento estructural se analiza en base a la teoría presentada en la sección 4.2 del Capítulo 4, implementada utilizando el modelo de elementos finitos unidimensional que se describirá en el Capítulo 6. Luego, se plantea un nuevo problema de optimización que maximiza la carga de pandeo minimizando a su vez el peso y la deflexión de la estructura, en el cual el comportamiento estructural se describe en forma completamente analítica, empleando las fórmulas expuestas en la sección 4.3 del Capítulo 4.

Por último, se adiciona al esquema de diseño el concepto de incertidumbre. Para ello, se introducen conceptos generales de este tipo de modelos y se formula un esquema de diseño que contempla la aplicación de cargas inciertas en vigas FRP. Como caso particular, se asume que la carga a la que está sometida la estructura puede variar, en cuanto a su dirección y magnitud, con respecto a la carga nominal preestablecida para el diseño. El problema se formula como un problema minimax, en el cual se busca minimizar un

objetivo, respecto a las variables de diseño, el cual a su vez es maximizado respecto a las variables de incertidumbre que determinan la peor condición de carga posible en la estructura.

## **5.2 Esquema global de diseño óptimo**

En términos generales, el diseño óptimo de estructuras esbeltas construidas con materiales compuestos presenta complejidades de diversa índole generadas en su mayoría por las características propias de estos materiales. En particular, las vigas de pared delgada construidas con materiales FRP brindan grandes ventajas en cuanto a su comportamiento mecánico y una gran versatilidad en cuanto a su composición y fabricación. Esta última característica involucra a la mayoría de las variables del problema de diseño. Entre ellas pueden mencionarse las propiedades del material, el tipo y la disposición de las fibras empleadas, el número de capas del laminado, el espesor de cada una de ellas y las dimensiones de la pieza. La inclusión de estas variables en el esquema de diseño genera un problema complejo, el cual se acrecienta aún más si se considera la incertidumbre que existe en las variables mencionadas anteriormente. Todo esto ha motivado el desarrollo de nuevos métodos computacionales de diseño basados en algoritmos de optimización matemática. Tales métodos posibilitan el diseño automático de estructuras a fin de cumplir ciertos objetivos de la mejor manera posible.

El esquema de diseño se formula como un problema de optimización matemática, cuya solución representa las variables óptimas que generan el valor mínimo o máximo de un objetivo particular, cumpliendo a su vez con restricciones preestablecidas. En el proceso de optimización intervienen ciertos parámetros estructurales, relacionados con tales restricciones y, muchas veces, con el objetivo del diseño. Esto origina la necesidad de realizar, en forma iterativa y durante la optimización, un análisis completo que permita evaluar el comportamiento de la estructura analizada. En particular, la respuesta estructural de vigas bajo la aplicación de cargas externas puede ser obtenida mediante métodos numéricos o por medio de formulaciones analíticas simplificadas. La aplicación de métodos numéricos permite modelar la estructura y realizar un análisis completo de su comportamiento, ya sea mediante modelos tridimensionales de elementos lámina o bien empleando modelos unidimensionales. Sin embargo, muchas veces los métodos numéricos son difíciles de implementar y no siempre son accesibles para los diseñadores. Por ello y para facilitar las aplicaciones estructurales de vigas FRP, a veces es conveniente emplear

metodologías analíticas que describan el comportamiento de dichas estructuras en forma aproximada y que constituyan una herramienta de pre-diseño. Esto ofrece, además, una gran eficiencia computacional, lo cual es de fundamental importancia cuando se trata de optimización multiobjetivo.

A continuación se describe la manera en que se ordenan tales conceptos y procedimientos para obtener finalmente el diseño óptimo de la estructura, destinado de manera específica al tratamiento de vigas FRP analizadas en esta tesis.

La Figura 5.1 muestra gráficamente los procedimientos que deben realizarse durante el proceso de diseño y el orden en que se efectúan. El primer paso a tener en cuenta en el diseño óptimo es la determinación de los requerimientos preliminares que debe cumplir la estructura a diseñar, los cuales constituyen los **datos iniciales** del problema de optimización. Una vez definidos estos datos, se debe formular el **esquema de diseño** en base a las variables de decisión, a los objetivos que debe cumplir la estructura y a las restricciones que deben ser verificadas. Los esquemas de diseño presentados en este capítulo son identificados con la sigla “DO” seguida de un número identificativo. Algunos de ellos contemplan un único objetivo mientras que otros consideran objetivos múltiples. Tales objetivos involucran al peso de la estructura, al desplazamiento de la misma y a la carga de pandeo crítica global, evaluados en forma independiente o conjunta.

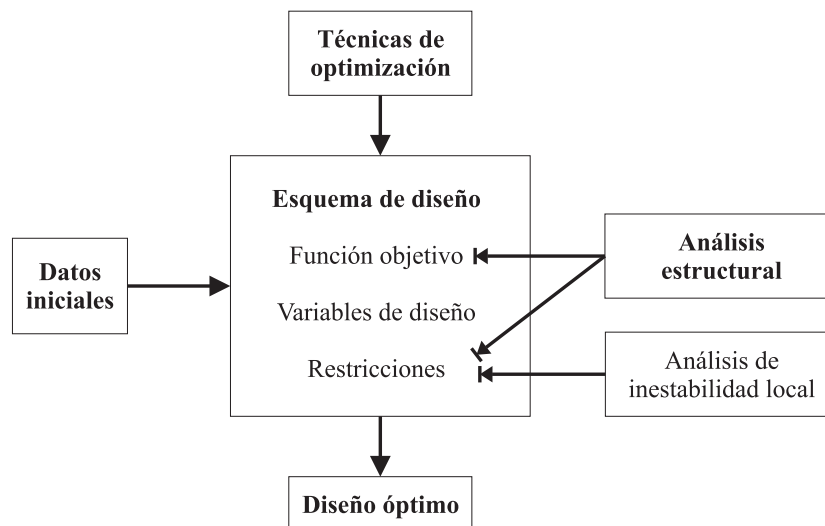


Figura 5.1. Síntesis del procedimiento general de diseño.

Adicionalmente, en todos los problemas de optimización planteados se contempla la existencia de restricciones estructurales, geométricas y, en algunos casos, operativas. Es evidente que, tanto para la determinación de los objetivos como de las restricciones, es necesario hallar los parámetros estructurales que describen la respuesta de la viga bajo las

condiciones preestablecidas. Aquí, el **análisis estructural** se lleva a cabo siguiendo dos procedimientos diferentes, uno de ellos está basado en un **enfoque numérico** (empleado en los esquemas DO1, DO2, DO3 y DO5) y el otro en un **enfoque analítico** (utilizado en el esquema DO4). El enfoque numérico consiste en la implementación de la teoría expuesta en la sección 4.2 del Capítulo 4 empleando el modelo de elementos finitos unidimensional que será abordado en el Capítulo 6. En la mayoría de los esquemas de diseño analizados según este enfoque, se evalúa la estabilidad local de la viga en forma analítica, empleando las fórmulas desarrolladas en la sección 4.4 del Capítulo 4. Por su parte, el enfoque analítico se caracteriza por la aplicación de únicamente fórmulas explícitas aproximadas para la determinación de todos los parámetros estructurales que intervienen en el diseño. Esto se logra empleando las fórmulas expuestas en las secciones 4.3 y 4.4 del Capítulo 4.

Una vez planteado el esquema de diseño y definida la manera en que serán evaluados los parámetros que en él intervienen, se está en condiciones de aplicar una **técnica de optimización** apropiada para obtener la solución óptima del problema de optimización, la cual representa el **diseño óptimo** de la estructura. Es decir, se obtienen los valores óptimos de las variables de diseño que minimizan el objetivo propuesto y verifican la totalidad de las restricciones impuestas.

### 5.3 Diseño óptimo

Los esquemas de diseño de vigas de pared delgada propuestos en esta sección se plantean como un problema de optimización que, en términos generales, puede ser formulado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 & \min F(\mathbf{x}), \\
 & \text{s.a:} \\
 & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de las variables de diseño,  $F(\mathbf{x})$  es la función objetivo,  $g_i(\mathbf{x})$  son las restricciones,  $\mathbf{x}^L$  y  $\mathbf{x}^U$  son los vectores que definen los extremos de los intervalos en que está definido  $\mathbf{x}$ . La función  $F(\mathbf{x})$  puede representar un único objetivo, o bien, puede hacer referencia a múltiples objetivos, en cuyo caso debe proponerse alguna combinación de las funciones objetivo particulares ( $f(\mathbf{x})$ ) a considerar.

### 5.3.1. Diseño óptimo 1 (DO1)

Se propone diseñar una estructura que sea liviana y que, a su vez, los desplazamientos que se produzcan en la misma sean mínimos. Para ello, se plantea el problema de optimización como un problema multiobjetivo que minimiza una función normalizada mediante el método de funciones de peso (Rao, 1996). La función objetivo global es expresada de la siguiente manera

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k_f} w_i f_i, \quad (5.2)$$

donde  $w_i$  es el factor de peso escalar asociado a cada función objetivo  $f_i$  y  $k_f$  es el número total de funciones objetivo a optimizar. Para cumplir con los objetivos propuestos, se emplea un bi-criterio de optimización ( $k_f = 2$ ) que minimiza en forma conjunta el peso propio de la estructura y su desplazamiento máximo. Luego, las funciones objetivo a evaluar están dadas por el máximo valor del desplazamiento absoluto en la estructura ( $\delta$ ) y por el área de la sección transversal ( $A$ ), la cual representa en una forma simple e indirecta al peso de la viga (Karperska *et. al*, 2007). Por lo tanto, la función objetivo global es expresada de la siguiente manera

$$F(\mathbf{x}) = (1-W) \frac{A(\mathbf{x})}{A_0} + W \frac{\delta(\mathbf{x})}{\delta_0}, \quad (5.3)$$

donde las funciones objetivo  $f_i$  son normalizadas respecto a  $A_0$  y  $\delta_0$ , los cuales representan el área y el desplazamiento de referencia, respectivamente. El factor de peso  $W$  es definido en forma arbitraria por el diseñador, de acuerdo a las necesidades y a los requerimientos de la estructura. Dentro de los casos particulares que pueden ser tenidos en cuenta, se observa que si  $W = 0$  el modelo considera el peso propio como única función objetivo, mientras que si  $W = 1$  sólo contempla la minimización del desplazamiento máximo de la estructura. Cuando  $W$  varía en el intervalo abierto (0,1) se pueden obtener diferentes diseños que consideren ambas funciones objetivo con distinto peso, dando más importancia a una u otra.

La expresión del área a minimizar varía en forma proporcional a las dimensiones de la sección y se define de acuerdo a la forma de la sección transversal. En particular, para los perfiles tipo I, U y cajón que se muestran en la Figura 5.2, las áreas quedan determinadas por

$$\begin{aligned} A^I &= A^U = (2b+h)e, \\ A^{cajón} &= (2b+2h)e. \end{aligned} \quad (5.4)$$

La segunda función objetivo que interviene en el problema es el desplazamiento total máximo producido en la estructura y se determina de la siguiente manera

$$\delta(\mathbf{x}) = \sqrt{(u_x + u_x^{NL})^2 + (u_y + u_y^{NL})^2 + (u_z + u_z^{NL})^2}, \quad (5.5)$$

donde  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $u_x^{NL}$ ,  $u_y^{NL}$  y  $u_z^{NL}$  son los desplazamientos lineales y no lineales en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , definidos por las expresiones (4.2). En este esquema de diseño el análisis estructural se realiza empleando el enfoque numérico mencionado en la sección 5.2, por lo tanto, los desplazamientos son obtenidos empleando mediante la aplicación del modelo de elementos finitos unidimensional mencionado.

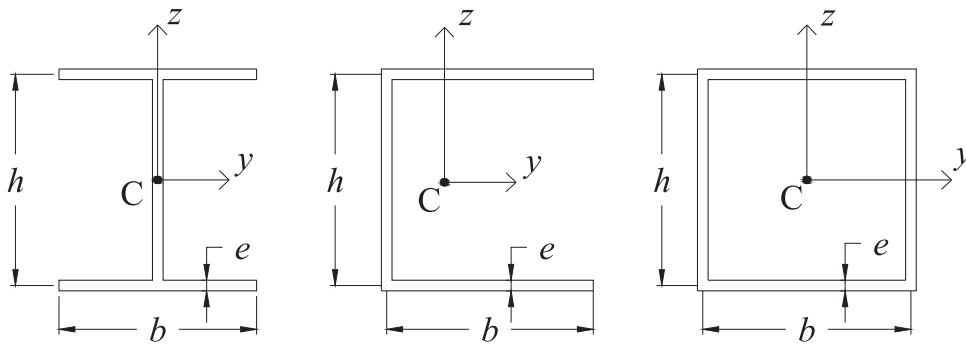


Figura 5.2. Secciones transversales de vigas de pared delgada.

El vector de las variables de diseño,  $\mathbf{x}$ , está compuesto por las dimensiones de la sección transversal de la viga ( $b$ ,  $h$  y  $e$ ) y los ángulos de orientación de las fibras del laminado ( $\theta_k$ ). Todas las variables pertenecen a dominios discretos limitados superior e inferiormente de acuerdo a cada problema en particular. Además, el conjunto de laminados factibles queda restringido a aquellos casos en que el laminado sea simétrico y balanceado.

En el diseño se consideran restricciones de desigualdad ( $g_i(\mathbf{x})$ ) que pueden ser clasificadas en dos categorías según la incumbencia de cada una de ellas: restricciones estructurales y geométricas.

Las **restricciones estructurales** impuestas en este diseño tienen en cuenta exigencias de resistencia, pandeo global, pandeo local y desplazamientos máximos.

La condición de resistencia se establece a partir del conocido criterio de falla de Tsai-Wu (Tsai y Wu, 1971), el cual fue presentado en la sección 3.3 del Capítulo 3. Luego, la condición de resistencia se verifica cuando el mínimo valor de  $R$  dado por (3.13) es

superior a 1.

Para evitar que la estructura se inestabilice globalmente, se evalúa el parámetro de carga crítica de pandeo global  $\lambda$ , el cual representa la relación entre la carga crítica y la carga aplicada. Su valor se determina resolviendo el problema de autovalores clásico de inestabilidad elástica, tal como se desarrollará en el Capítulo 6. Luego, la condición de estabilidad global de la estructura se verifica si el menor autovalor  $\lambda$  es mayor a 1.

Por su parte, se contemplan condiciones de estabilidad local. Una forma simple, aunque conservativa, de evitar la inestabilidad local es asignar un límite inferior al espesor de las paredes de la sección transversal en relación a las demás dimensiones de la misma. Se asume que este valor debe ser lo suficientemente grande a fin de evitar que se produzca la inestabilidad local de la sección. Para ello, se restringe el máximo valor de las relaciones entre la base y la altura de la sección de la viga respecto al espesor ( $b/e, h/e$ ).

Finalmente, el desplazamiento máximo que puede originarse en la estructura es restringido de acuerdo a los límites convencionales utilizados en este tipo de estructuras y está dado por

$$\delta_{\max} = \frac{L}{400}, \quad (5.6)$$

donde  $L$  es la longitud total de la viga.

Las **restricciones geométricas** se aplican en forma directa sobre las variables de diseño. Se limita superior e inferiormente el intervalo de variación de las componentes del vector de las variables de diseño ( $\mathbf{x}$ ). En particular, se establece que las dimensiones de la sección transversal sean positivas, que los ángulos de orientación de las fibras varíen entre  $-90^\circ$  y  $+90^\circ$  y que la secuencia de apilamiento sea simétrica y balanceada o *cross-ply*. Además, se limitan a las dimensiones de la sección de manera que la estructura se comporte como una viga de pared delgada, estableciendo un valor máximo del espesor en función de la base y de la altura de la viga de la siguiente manera

$$\min(h/e, b/e) \geq 10. \quad (5.7)$$

En resumen, el modelo matemático que define el esquema de diseño DO1 puede formularse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) &= (1-W) \frac{A(\mathbf{x})}{A_0} + W \frac{\delta(\mathbf{x})}{\delta_0}, \\ \mathbf{x} &= \{h, b, e, \theta_k\}, \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}
& \dots \text{ s.a:} \\
& R_{\min}(\mathbf{x}) > 1, \quad \lambda(\mathbf{x}) > 1, \quad \delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{\max}, \\
& \max(b/e, h/e) \leq 16, \\
& \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \quad (h, b, e) > 0, \\
& -90^\circ \leq \theta_k \leq 90^\circ \quad \forall k \in [1, n_c], \quad \min(b/e, h/e) \geq 10.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

### 5.3.2. Diseño óptimo 2 (DO2)

En esta sección se propone diseñar una viga sometida a dos estados de carga: un estado de carga nominal, compuesto por cargas estáticas, y un estado de carga secundario, compuesto por cargas dinámicas con una variación temporal armónica conocida. Para ello, ciertas consideraciones específicas deben ser tenidas en cuenta respecto al esquema DO1.

Como objetivo se propone minimizar el desplazamiento máximo y el peso de la viga con igual importancia. Por lo tanto, la función objetivo puede formularse como un caso particular del diseño DO1 asumiendo  $W = 0.5$  en la expresión (5.3), quedando expresada en forma adimensional de la siguiente manera

$$F(\mathbf{x}) = 0.5 \frac{A(\mathbf{x})}{A_0} + 0.5 \frac{\delta(\mathbf{x})}{\delta_0}, \tag{5.9}$$

donde ahora  $\delta(\mathbf{x})$  es el desplazamiento máximo total producido por la superposición de los estados estático y dinámico y  $\mathbf{x}$  es el vector de las variables de diseño definido por

$$\mathbf{x} = \{b, h, n_c, \theta_k\}, \tag{5.10}$$

donde  $n_c$  es el número de capas del laminado. El espesor de cada una de ellas ( $e_c$ ) es preestablecido y se considera igual para todas ellas. Por lo tanto, el espesor total de la paredes de la sección transversal ( $e$ ) queda determinado por el producto entre el número de capas y el espesor de cada una de ellas ( $e = n_c e_c$ ).

Las **restricciones estructurales** tienen en cuenta exigencias de resistencia estática, pandeo global, pandeo local, desplazamientos máximos y, a diferencia del diseño anterior, se verifica la resistencia a fatiga del laminado.

El análisis estructural se realiza nuevamente en base al enfoque numérico según lo expuesto en la sección 5.2. Por su parte, la condición de resistencia estática se establece a partir del criterio de falla de Tsai-Wu, verificando que el valor mínimo de  $R$  dado por (3.13) sea superior a 1.

Debido a que el estado dinámico se define como un estado de carga secundario, se



asume que no es necesario evaluar la inestabilidad dinámica de la estructura, ni global ni local. No obstante, a modo conservativo, para asegurar tanto la estabilidad global como la estabilidad local de la estructura, se adoptan los valores máximos de las tensiones y de las resultantes de tensión en el espesor, como superposición de ambos estados de carga.

A diferencia del diseño DO1, aquí se impone como restricción de pandeo local que el factor de carga local  $\lambda_L$ , determinado analíticamente según lo desarrollado en la sección 4.4 del Capítulo 4, sea superior a la unidad.

El valor límite establecido para los desplazamientos máximos se disminuye de tal manera de asegurar que la estructura no entre en resonancia, evitando el cálculo de frecuencias naturales durante el proceso de optimización. Luego, el desplazamiento máximo permitido en la estructura está dado por

$$\delta_{m\acute{a}x} = \frac{L}{800}. \quad (5.11)$$

A fin de verificar la resistencia a fatiga del laminado, se aplica el criterio de falla por fatiga desarrollado por Jen y Lee (1998a; 1998b). Dicho criterio es denominado por los autores como Criterio de Tsai-Hill Extendido (CT-HE) y fue descrito en la sección 3.3 del Capítulo 3. En consecuencia, se asume que el laminado no falla por fatiga si las expresiones dadas por (3.19-3.22) son menores a 1.

Las **restricciones geométricas** son las mismas que se expusieron para el diseño DO1, con la siguiente salvedad. Dado que las expresiones analíticas que definen al factor de carga local se obtienen despreciando los acoplamientos flexo-torsionales en el laminado, las mismas son aplicables sólo en laminados ortótropos. Adicionalmente, si bien el criterio de falla por fatiga CT-HE es aplicable para laminaciones simétricas, los autores advierten que para láminas con fibras orientadas a  $\pm 45^\circ$  el criterio no ofrece buenos resultados, en comparación con ensayos experimentales. Por lo tanto, el ángulo de orientación de las fibras sólo puede adoptar los valores  $0^\circ$  y  $90^\circ$  de manera tal de constituir un laminado ortótropo ( $[0_{nc}]$ ) ó *cross-ply* ( $[0/90]_s$ ,  $[0_{nc/2}/90_{nc/2}]$ ).

En síntesis, el problema de optimización que define el esquema de diseño descrito, es expresado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \min \quad F(\mathbf{x}) &= 0.5 \frac{A(\mathbf{x})}{A_0} + 0.5 \frac{\delta(\mathbf{x})}{\delta_0}, \\ \mathbf{x} &= \{h, b, n_c, \theta_k\}, \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

... s.a:

$$\begin{aligned}
 R_{min}(\mathbf{x}) > 1, \quad \lambda(\mathbf{x}) > 1, \quad \delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{m\acute{a}x}, \\
 \lambda_L(\mathbf{x}) > 1, \quad CT-HE(\mathbf{x}) < 1, \\
 \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \quad (h, b, e) > 0, \quad \theta_k = (0^\circ, 90^\circ), \\
 \min(b/e, h/e) \geq 10.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

### 5.3.3. Diseño óptimo 3 (DO3)

En este esquema de diseño, nuevamente, el problema de optimización se formula siguiendo el esquema dado por (5.1), aunque considerando dos objetivos contrapuestos englobados en una única función objetivo. El diseño se establece de manera tal de hallar las dimensiones de la sección transversal y la secuencia de laminación óptimas para maximizar la resistencia y simultáneamente minimizar el peso de la estructura. Como indicador de resistencia se adopta la carga de pandeo global (flexo-torsional) y el peso de la estructura es caracterizado por el área de la sección transversal de la misma. Estos objetivos resultan contrapuestos y para obtener un criterio de diseño que signifique un compromiso entre ambos, se adopta una función objetivo adimensional definida de la siguiente manera

$$F(\mathbf{x}) = \frac{E_1 A^{3/2}}{M_{cr}}, \tag{5.13}$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de las variables de diseño,  $A$  es el área de la sección transversal de la viga,  $E_1$  es el módulo de elasticidad longitudinal del material y  $M_{cr}$  es el momento crítico dado por

$$M_{cr} = \lambda M_0^{ref}, \tag{5.14}$$

donde  $M_0^{ref}$  es un momento de referencia adecuadamente seleccionado y  $\lambda$  es el factor que debe aplicarse sobre el mismo para alcanzar la inestabilidad elástica global de la estructura. Aquí el análisis estructural de vigas se realiza empleando el enfoque numérico y, por lo tanto, el parámetro  $\lambda$  se determina según lo expuesto en el esquema DO1. Se observa que la función objetivo (5.13) aumenta si lo hace el multiplicador de carga o si disminuye el área de la sección transversal.

En este caso, el vector de las variables de diseño se asume definido de la siguiente manera

$$\mathbf{x} = \{b, h, n_c, e_c, \theta_k\}, \tag{5.15}$$

donde los ángulos  $\theta_k$  indican la orientación de las fibras longitudinales de la capa  $k$ -ésima,  $b$  y  $h$  son las dimensiones de la sección transversal,  $n_c$  y  $e_c$  son el número de capas del laminado y el espesor de cada una de ellas, respectivamente (ver Figura 5.3). Luego, el espesor total de las paredes de la viga ( $e$ ) queda determinado por el producto de estas dos variables y se considera constante en todas las paredes de la sección. Notar que aquí se adiciona una variable con respecto a los esquemas de diseño anteriores.

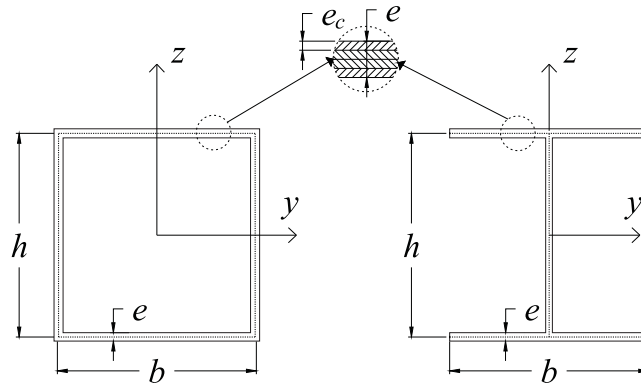


Figura 5.3. Detalle de las dimensiones de la sección transversal de perfiles I y cajón.

Nuevamente, se consideran en el diseño restricciones geométricas y estructurales que condicionan el problema.

Respecto a las **restricciones estructurales**, se requiere que el desplazamiento total máximo no supere un valor pre-establecido, dado por (5.6), y que la estructura cumpla con las condiciones de resistencia, pandeo global y pandeo local, como se describe a continuación.

La restricción de resistencia se verifica empleando el criterio de falla estático de Tsai-Wu, imponiendo como condición que el factor  $R$  dado por (3.13) sea mayor a 1. La estabilidad global de la viga se asegura verificando que el mínimo factor de carga  $\lambda$  sea mayor a la unidad. Por último, la inestabilidad local se condiciona a partir del parámetro de carga local,  $\lambda_L$ , el cual debe ser superior a 1 y es obtenido de acuerdo a lo expuesto en la sección 4.4 del Capítulo 4.

En cuanto a las **restricciones geométricas** se solicita que tanto las dimensiones de la sección como las variables que definen al espesor sean positivas en todo el dominio y que, a su vez, verifiquen la condición de vigas de pared delgada, dada por (5.7). Se asume además que el área de la sección transversal no debe superar un valor máximo ( $A_{max}$ ), preestablecido de acuerdo a los requerimientos preliminares de diseño. Por último, debido al empleo de las fórmulas analíticas que condicionan la estabilidad local de la viga, el laminado debe ser ortótropo ó *cross-ply*.

En definitiva, el esquema de diseño DO3 queda definido, desde el punto de vista matemático, de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \min \quad & F(\mathbf{x}) = \frac{E_1 A(\mathbf{x})^{3/2}}{M_{cr}(\mathbf{x})}, \\
 \mathbf{x} = & \{h, b, e_c, n_c, \theta_k\}, \\
 \text{s.a:} & \\
 & R_{min}(\mathbf{x}) > 1, \quad \lambda(\mathbf{x}) > 1, \quad \delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{m\acute{a}x}, \quad \lambda_L(\mathbf{x}) > 1, \\
 & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \quad (h, b, e_c, n_c) > 0, \quad \theta_k = (0^\circ, 90^\circ), \\
 & A(\mathbf{x}) \leq A_{max}, \quad \min(b/e, h/e) \geq 10,
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde  $\delta(\mathbf{x})$  es el desplazamiento total de la estructura dado por (5.5).

Cabe destacar que los diseños propuestos hasta aquí pueden emplearse en vigas de pared delgada tanto rectas como curvas de secci3n transversal arbitraria. Las mismas pueden estar sometidas a cualquier estado de carga bajo cualquier condici3n de vinculaci3n.

#### 5.3.4. Diseño 3ptimo 4 (DO4)

El problema de diseño se formula como un problema de optimizaci3n multiobjetivo que minimiza  $k_f$  funciones objetivo particulares empleando el m3todo de criterio global (Rao, 1996). Dicho criterio define a la funci3n objetivo  $F(\mathbf{x})$  como la suma de los cuadrados de las diferencias relativas de cada funci3n objetivo individual respecto a su valor 3ptimo. Luego, el problema de optimizaci3n global queda definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \min \quad & F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k_f} \alpha_j \left( \frac{f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_j^*)}{f_j(\mathbf{x}_j^*)} \right)^p, \\
 \text{s.a:} & \\
 & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

donde  $p$  habitualmente se considera igual a 2,  $\alpha_j$  es un par3metro de ponderaci3n arbitrario y  $f_j(\mathbf{x})$  son las funciones objetivo que se desean minimizar. Para poder evaluar la funci3n  $F(\mathbf{x})$  primero deben obtenerse las soluciones 3ptimas  $\mathbf{x}_j^*$  resolviendo los problemas de optimizaci3n que minimizan a cada una de las funciones objetivo particulares  $f_j(\mathbf{x})$ , como se indica a continuaci3n

$$\begin{aligned}
& \min f_j(\mathbf{x}), \\
& \text{s.a. :} \\
& g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
& \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

En particular, en este esquema de diseño se propone una función objetivo global que minimiza tres funciones objetivo. Se contempla la maximización del momento crítico de pandeo, o bien, la minimización de la inversa del mismo ( $f_1$ ). Se minimiza el desplazamiento total máximo en la estructura ( $f_2$ ) y se minimiza el peso de la misma ( $f_3$ ), expresado como el área de la sección transversal. Luego, las tres funciones a minimizar se expresan como

$$f_1(\mathbf{x}) = 1/M_{cr}(\mathbf{x}), \quad f_2(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \quad f_3(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}). \tag{5.19}$$

Por lo tanto, una vez resuelto cada uno de los problemas según (5.18) para cada una de las funciones objetivo (5.19), se resuelve el problema de optimización multiobjetivo utilizando la formulación (5.17).

Este esquema está destinado a la realización de diseños preliminares de la estructura. Por ello se propone realizar el análisis de vigas en forma completamente analítica. Es decir, todos los parámetros estructurales que intervienen en el esquema de diseño son evaluados empleando las expresiones explícitas desarrolladas en las secciones 4.3 y 4.4 del Capítulo 4. Esto permite realizar un pre-diseño que contemple múltiples objetivos, de una manera no arbitraria y sin que el cálculo resulte excesivamente costoso, permitiendo además la verificación posterior del diseño resultante empleando métodos numéricos más exactos.

Luego, las estabilidades global y local son evaluadas a partir de las soluciones analíticas desarrolladas en las secciones 4.3 y 4.4 del Capítulo 4, respectivamente. El empleo de dichas expresiones conlleva ciertas limitaciones desde dos puntos de vista. Por un lado, las fórmulas que permiten analizar la estabilidad global de la viga fueron obtenidas para tres estados de carga específicos que se corresponden con condiciones de vinculación particulares (ver Figura 4.5 del Capítulo 4) y son válidas sólo para secciones bi-simétricas. Por otro lado, las fórmulas empleadas en la evaluación de la estabilidad local tienen aplicación sólo en laminados ortótropos ó *cross-ply*.

En las expresiones (5.19), el momento crítico ( $M_{cr}$ ) se evalúa según la expresión (4.91) en la cual los coeficientes  $\eta_i$  están dados por las expresiones (4.98) o (4.102-4.104), según corresponda. El área de la sección transversal ( $A$ ) queda determinada por las ecuaciones

(5.4), según la forma de la sección, y, por último, el desplazamiento máximo en la viga ( $\delta$ ) se obtiene de la expresión (4.70).

Tanto en el problema de optimización global (5.17) como en los problemas particulares (5.18), el vector de las variables de diseño ( $\mathbf{x}$ ) se considera definido por las dimensiones de la sección ( $b, h, e$ ) y los ángulos de orientación de las fibras del laminado ( $\theta_k$ ), mientras que las restricciones  $g_{i(\mathbf{x})}$  se refieren a condiciones estructurales y geométricas, siendo idénticas en todos ellos.

Las **restricciones estructurales** contemplan condiciones de desplazamiento, de resistencia, de estabilidad global y local. Para hallar los parámetros estructurales necesarios para definir tales restricciones también se emplean expresiones analíticas.

La restricción de desplazamiento máximo surge inmediatamente, verificando que el desplazamiento en la estructura dado por (4.70) no supere el desplazamiento establecido por la expresión (5.6). Para verificar la resistencia del laminado se debe verificar que los coeficientes de seguridad dados por (4.76) sean mayores a la unidad.

La condición de pandeo global establece que, por un lado, la carga axial aplicada ( $P$ ) no supere la carga crítica axial de pandeo ( $P_{cr}$ ), definida como la menor carga crítica de la triple comparación entre las expresiones (4.92), (4.93) y (4.94). Además, se debe verificar que el máximo momento flector dado por (4.72) sea menor al momento crítico ( $M_{cr}$ ) dado por la expresión (4.91).

El pandeo local de la sección se evita imponiendo que el parámetro de carga  $\lambda_L$  sea mayor o igual a la unidad. Dicho parámetro es evaluado según lo desarrollado en la sección 4.4 del Capítulo 4 y, para ello, es necesario determinar en forma analítica las resultantes de tensión axiales máximas en cada una de las paredes de la sección transversal de la viga ( $(N_x)_b, (N_{xb})_{II}, (N_x)_{II}$ ). Tales resultantes de tensión se determinan multiplicando a la tensión normal  $\sigma_x$  (dada por (4.74)) por el espesor total de la pared considerada, como se muestra en la Figura 5.4.

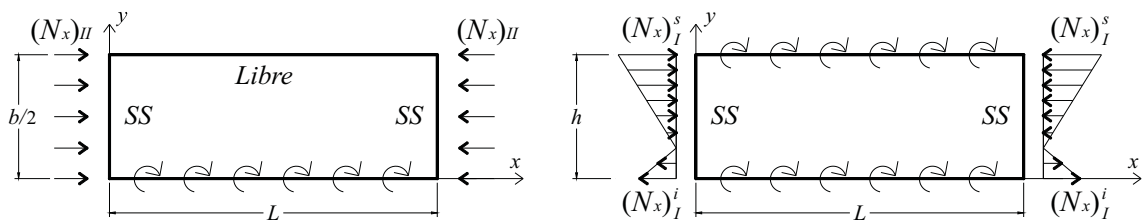


Figura 5.4. Resultantes de tensión axiales en el ala y en el alma de un perfil bi-simétrico bajo un estado de flexo-compresión.

Las **restricciones geométricas** son idénticas a las impuestas en el esquema de diseño DO1, con la salvedad de que aquí necesariamente el laminado debe estar compuesto por capas que contengan fibras en las direcciones  $0^\circ$ ,  $\pm 90^\circ$  y/o  $\pm 45^\circ$ , de manera de que el laminado formado sea ortótropo. Se establece además que el área de la sección transversal no supere un valor máximo, evaluado según los requerimientos preliminares de cada diseño en particular.

Finalmente, el esquema de diseño DO3 se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left( \frac{f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_j^*)}{f_j(\mathbf{x}_j^*)} \right)^2, \\ \mathbf{x} = & \{b, h, e, \theta_k\}, \\ \text{s.a.:} \quad & \delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{\max}, \quad \min(FS_{xt}(\mathbf{x}), FS_{xc}(\mathbf{x}), FS_{xy}(\mathbf{x})) > 1, \\ & P(\mathbf{x}) < P_{cr}, \quad M_{y,\max}(\mathbf{x}) < M_{cr}, \quad \lambda_L(\mathbf{x}) > 1, \\ & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \quad (b, h, e) > 0, \quad \theta_k = (0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ), \\ & A(\mathbf{x}) \leq A_{\max}, \quad \min(b/e, h/e) \geq 10. \end{aligned} \quad (5.20)$$

## 5.4 Diseño óptimo bajo incertidumbre

En términos generales, en el diseño óptimo estructural, las variables pueden clasificarse en tres tipos: estructurales, geométricas y operativas. Las variables estructurales y geométricas son, generalmente, las variables de decisión del problema de optimización. Luego, el grupo de parámetros inciertos está asociado a las variables operativas del sistema, es decir, asociadas con las condiciones de carga, las propiedades del material, etc.

Los procedimientos empleados en el diseño óptimo estructural convencional consideran modelos y parámetros de diseño determinísticos y las posibles variaciones existentes en los datos del problema se incluyen en el proceso bajo hipótesis simplificadoras, como por ejemplo con la inclusión de factores de seguridad. Consecuentemente, estos diseños resultan ser demasiado conservativos. Para evitar dicha característica se han desarrollado diversas formulaciones de diseño óptimo de sistemas estructurales sobre la base de distintos modelos matemáticos de incertidumbre. Entre ellos se encuentra el diseño óptimo basado en el peor escenario posible, el cual considera la falta de certeza presente en los parámetros del sistema empleando un modelo convexo o de intervalos. Es decir, frente a cada una de las posibles acciones, la falla estructural se analiza en base a la consecuencia más desfavorable, aplicando técnicas específicas denominadas estrategias de anti-optimización.

Este último modelo se emplea en la siguiente sección para obtener un esquema de diseño de vigas que considere variaciones en las condiciones de carga. Luego, el problema de optimización es abordado a partir de un proceso en dos niveles de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}_1} \left( \max_{\mathbf{x}_2} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right), \\ & \text{s.a:} \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} & g_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & \mathbf{x}_1^L \leq \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_1^U, \quad \mathbf{x}_2^L \leq \mathbf{x}_2 \leq \mathbf{x}_2^U, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{x}_1$  es el vector de las variables de diseño (o de decisión),  $\mathbf{x}_2$  es el vector de las variables de incertidumbre,  $F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  es la función objetivo,  $g_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  son las restricciones y  $\mathbf{x}_1^L$ ,  $\mathbf{x}_1^U$ ,  $\mathbf{x}_2^L$  y  $\mathbf{x}_2^U$  son los vectores que definen los extremos de los intervalos en que están definidos los vectores  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ . De esta manera, las componentes del vector de diseño  $\mathbf{x}_1$  deben adecuarse a la situación que resulta de adoptar un determinado estado definido por el vector  $\mathbf{x}_2$  y presuponer una cierta situación futura. Es decir, se elige el mejor vector  $\mathbf{x}_1$  correspondiente a la situación más desfavorable generada por  $\mathbf{x}_2$ .

#### 5.4.1. Diseño óptimo 5 (DO5)

En este esquema de diseño se asume que las cargas actuantes sobre una estructura no son conocidas de manera precisa, sino que existe una familia de posibles estados de carga. Aquí este tipo de incertidumbre es tenida en cuenta aplicando el modelo de optimización minimax dado por (5.21), de manera que la estructura resultante soporte de la mejor manera posible la peor condición de carga. El dominio de incertidumbre se define como una variación en la aplicación de la carga, asumiendo que pueden existir cargas accidentales.

A los efectos de explicar la metodología propuesta se considera una viga doblemente empotrada sometida a cargas de flexión en el plano, como se muestra en la Figura 5.5. Cabe aclarar que el mismo procedimiento puede aplicarse a vigas de pared delgada bajo cualquier condición de borde si se eligen convenientemente los parámetros del problema. Además, si bien el problema de diseño propuesto es aplicable a secciones transversales arbitrarias, por simplicidad se esquematiza la carga aplicada sobre un perfil tipo I.

El objetivo de este diseño óptimo es maximizar la resistencia y minimizar el peso. Como indicador de resistencia se adopta la carga de pandeo global mientras que el peso es representado por el área de la sección transversal. En forma similar al diseño DO3, se adopta una única función de diseño adimensional definida como



$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{E_1 A^{3/2}}{M_{cr}}, \quad (5.22)$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal definida de acuerdo a las expresiones (5.4),  $M_{cr}$  es el momento crítico definido por la ecuación (5.14) y  $E_1$  es el módulo de elasticidad longitudinal del material.

Se propone analizar dos tipos de cargas inciertas como se indica en la Figura 5.5. En el primer caso (C1), se supone que la carga vertical nominal puede desviarse cierto ángulo  $\alpha_1$  respecto de la vertical, generando a su vez una carga distribuida horizontal de menor magnitud. En un segundo caso (C2), se supone aplicada una carga nominal vertical distribuida y, actuando simultáneamente, una carga accidental en dirección horizontal (definida como  $\beta$  veces la carga nominal). Estos estados de carga definen el dominio de incertidumbre de las variables de diseño del sub-problema:  $N_z$  y  $N_y$ . Estas variables están directamente relacionadas con el ángulo  $\alpha_1$  en el caso C1 y con el coeficiente  $\beta$  en el caso C2.

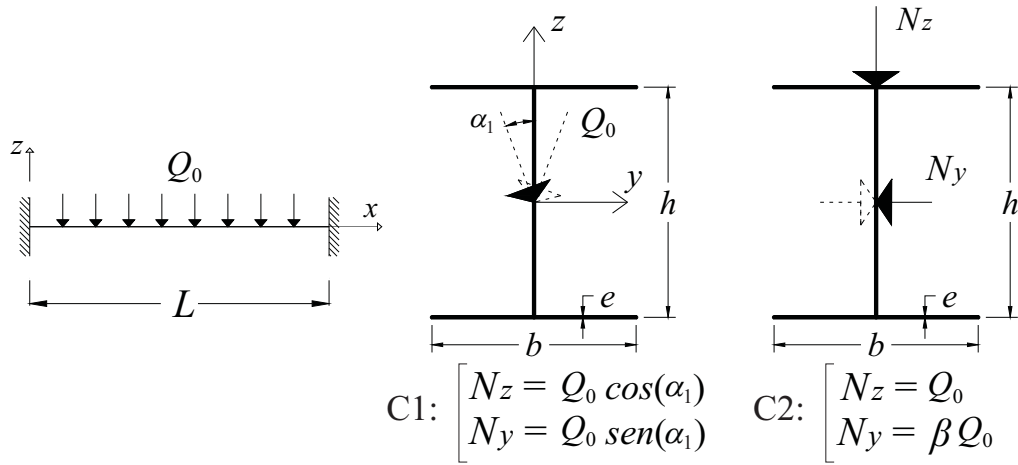


Figura 5.5. Condiciones de borde y estados de carga considerados en el esquema de diseño DO5.

Los vectores de las variables de diseño y de las variables de incertidumbre se renombran y se definen de la siguiente manera

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} = \{b, h, e, \theta_k\}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{N} = \{N_z, N_y\}, \quad (5.23)$$

donde  $b$ ,  $h$  y  $e$  son las dimensiones de la sección,  $\theta_k$  son los ángulos de orientación de las fibras longitudinales de la capa  $k$ -ésima,  $N_z$  y  $N_y$  son las componentes de la carga aplicada en las direcciones  $z$  e  $y$ , respectivamente.

Cuando se aplica el criterio de optimización minimax propuesto en (5.21), se resuelve un

problema anidado de optimización. Es decir, el proceso de optimización se inicia con ciertos valores de las variables de diseño, a partir de los cuales se hallan los valores óptimos de las variables de incertidumbre que maximizan la función (5.22), y, con este resultado, se minimiza la función (5.22) con respecto a las variables de diseño. El problema de optimización interno es a veces denominado problema de anti-optimización y el externo de optimización.

Respecto a las **restricciones estructurales**, se requiere que el desplazamiento total dado por (5.5) no supere el valor máximo pre-establecido por (5.6), que la estructura cumpla con las condiciones de resistencia, verificando que el coeficiente de seguridad  $R$  dado por (3.13) sea mayor a la unidad, y que la estructura no se inestabilice ni global ni localmente. Para ello, se debe verificar que los parámetros de carga críticos  $\lambda$  y  $\lambda_L$  sean mayores a 1, los cuales son determinados empleando el enfoque numérico mencionado en la sección 5.2 y las formulas desarrolladas en la sección 4.4 del Capítulo 4, respectivamente.

Las **restricciones geométricas** imponen que las dimensiones de la sección sean positivas en todo el dominio y que, a su vez, verifiquen la condición de vigas de pared delgada. Además, se limita superiormente el valor del área transversal de la sección de la viga.

Las **restricciones operativas** condicionan el ángulo de inclinación de la carga aplicada,  $\alpha_1$ , en el caso C1, y restringen los valores que adopta el coeficiente  $\beta$ , en el caso C2. Tales límites se definen para cada problema de diseño particular, de acuerdo a las variaciones de carga estimadas por el diseñador.

De acuerdo a lo expuesto, el esquema de diseño DO5 es formulado matemáticamente de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}=\{b,h,e,\theta_k\}} \left( \max_{\mathbf{N}=\{N_z,N_y\}} \frac{E_1 A(\mathbf{x})^{3/2}}{M_{cr}(\mathbf{x},\mathbf{N})} \right), \\
 & \text{s.a:} \\
 & \lambda(\mathbf{x},\mathbf{N}) > 1, \quad \lambda_L(\mathbf{x},\mathbf{N}) > 1, \\
 & R_{min}(\mathbf{x},\mathbf{N}) > 1, \quad \delta(\mathbf{x},\mathbf{N}) \leq \delta_{max}, \\
 & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \quad \mathbf{N}^L \leq \mathbf{N} \leq \mathbf{N}^U, \\
 & (b,h,e) > 0, \quad \theta_k = (0^\circ, 90^\circ), \\
 & A(\mathbf{x}) \leq A_{max}, \quad \min(b,h)/e \geq 10.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

## CAPÍTULO 6

# IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

### 6.1 Introducción

En este capítulo se describen las técnicas y los métodos empleados en la implementación numérica de los diferentes esquemas de diseño propuestos en el Capítulo 5.

En la primera sección se realiza una descripción general de las técnicas de optimización empleadas en la resolución de los esquemas de diseño y se describen detalladamente los algoritmos correspondientes desde el punto de vista de su implementación. En primer lugar, se describen las características básicas de la técnica *simulated annealing* (o recocido simulado), adicionando ciertos detalles sobre algunos procedimientos específicos que son implementados en esta tesis. Luego, el método de búsqueda de este algoritmo es modificado, obteniendo un algoritmo conocido como *simulated annealing* caótico (SAC). Además, se realiza una descripción del método de los algoritmos genéticos y de su implementación específica en MATLAB<sup>®</sup>.

En segundo lugar, se describen aspectos generales de la formulación numérica empleada para el análisis estructural de vigas FRP de pared delgada de eje recto y curvo. Se exponen las definiciones necesarias y el procedimiento de obtención de las ecuaciones de equilibrio dinámico y estático propias del método. Luego, se describen los procedimientos empleados en la resolución de dichas ecuaciones de elementos finitos, para el análisis de inestabilidad y de vibraciones libres y forzadas. Por último, se introducen brevemente los elementos empleados extensivamente en el tratamiento numérico de los capítulos posteriores. Estos elementos corresponden a un elemento isoparamétrico de cinco nodos en el caso de vigas curvas y a un elemento de dos nodos, basado en deformaciones supuestas, para vigas rectas. Ambos elementos presentan siete grados de libertad por cada nodo.

Por último, se describe brevemente la manera en que es implementado el problema global de diseño óptimo. Se muestra además el ordenamiento y la interacción entre las estrategias de optimización y los métodos de cálculo estructural, durante el proceso de resolución del problema de optimización.

## 6.2 Técnicas de optimización

En esta sección se describen las características básicas de las técnicas *simulated annealing*, *simulated annealing* caótico (SAC) y algoritmo genético. Estas técnicas son heurísticas y, si bien no aseguran fehacientemente la obtención de una solución mínima global, las mismas suelen ser más efectivas que las técnicas determinísticas. Esto se debe a que se independizan de la condición inicial logrando escapar de mínimos locales. Es importante recordar que el diseño óptimo de vigas compuestas implica resolver un problema multimodal formulado con variables discretas. Esto hace aún más propicio el uso de este tipo de técnicas, dado que su aplicación no requiere conocer el gradiente de la función objetivo con respecto a las variables de diseño.

A fin de explicar claramente cómo operan los algoritmos de optimización que serán descritos a continuación, se asume que el problema de optimización a resolver tiene la siguiente forma general

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U \\ & g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde  $F$  es la función objetivo y  $M$  es el número total de restricciones. Se define el vector de las variables de diseño  $\mathbf{x}$  formado por  $N$  componentes y se asume que varía en el intervalo  $[\mathbf{x}^L, \mathbf{x}^U]$ .

### 6.2.1. Simulated annealing (SA)

El algoritmo SA, introducido originalmente por Kirkpatrick *et al.* (1983), es una técnica de optimización heurística combinatoria basada en la generación de soluciones factibles en forma aleatoria, cuya principal característica es evitar la convergencia local en problemas de gran escala. Su nombre deriva de su analogía con el algoritmo diseñado en el campo de la termodinámica estadística para simular los cambios energéticos producidos en un sistema de partículas metálicas conforme disminuye la temperatura hasta su convergencia a un estado estable.

Una de las desventajas de este método está relacionada con su eficiencia computacional, en especial cuando la evaluación de la función objetivo es muy costosa computacionalmente, dado que se requiere un gran número de evaluaciones de la función objetivo para alcanzar la solución óptima.

Como se muestra en la Figura 6.1, el algoritmo de optimización comienza definiendo un punto inicial aleatorio ( $\mathbf{x}_0$ ) dentro de la región factible del problema, el cual es actualizado en base a un procedimiento iterativo hasta satisfacer un criterio de convergencia. En cada iteración, se genera un nuevo punto aleatorio en las proximidades de la configuración actual y se evalúa la función objetivo en ese punto, determinando su variación,  $\Delta C = F(\mathbf{x}_{i+1}) - F(\mathbf{x}^*)$ . Si el nuevo punto produce un valor menor de la función objetivo comparado con el mínimo actual ( $\Delta C < 0$ ), el punto es aceptado. Si, por el contrario, el nuevo valor de la función objetivo es mayor ( $\Delta C \geq 0$ ), la aceptabilidad del punto se define de acuerdo al siguiente criterio de probabilidad

$$p = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta C < 0, \\ e^{-\frac{\Delta C}{kT}} & \text{si } \Delta C \geq 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

donde  $k$  es un factor de escala conocido como la constante de Boltzmann y  $T$  es el parámetro de control denominado temperatura. Dicha temperatura permanece constante para un cierto número de iteraciones y va disminuyendo a medida que el algoritmo avanza, de manera tal que disminuya la probabilidad de aceptar soluciones factibles que no produzcan una mejora en la función objetivo.

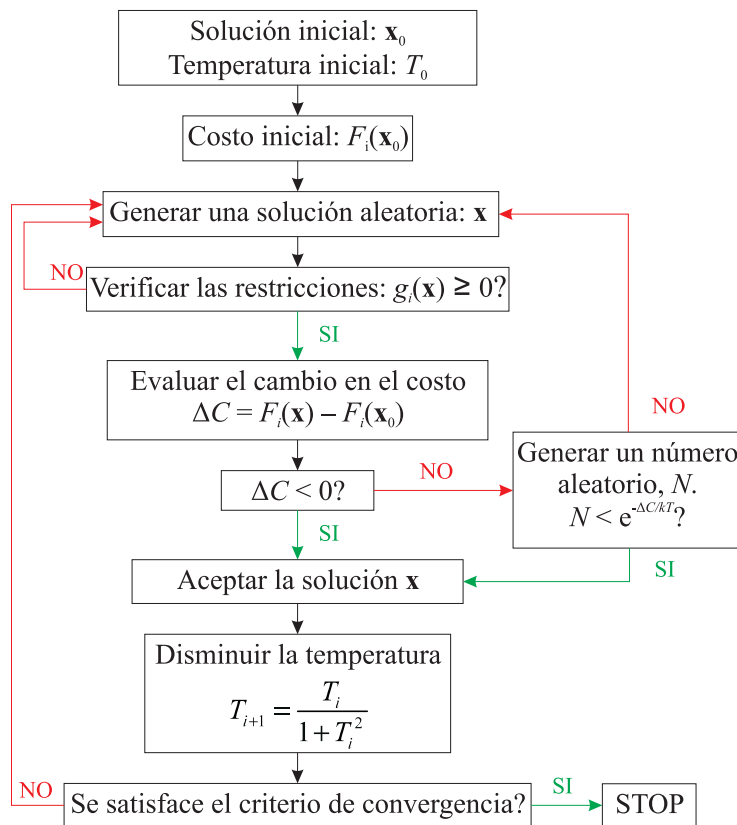


Figura 6.1. Esquema del algoritmo *simulated annealing*.

Para implementar este algoritmo exitosamente es preciso tomar una serie de decisiones en lo que se refiere al control de la temperatura. Por un lado, para que la solución final sea independiente de la solución inicial y el proceso de optimización no quede atrapado en un mínimo local, la temperatura inicial debe ser lo suficientemente alta tal que al iniciar el algoritmo todas las soluciones puedan ser aceptadas con la misma probabilidad. Una expresión adecuada de la temperatura inicial ( $T_0$ ) es expuesta por Dréo y Pétrowski (2006) y está dada por

$$T_0 = r \max(\Delta C), \quad (6.3)$$

donde  $\Delta C$  es la diferencia entre los valores extremos de la función objetivo y  $r$  es mucho mayor que 1.

Por otro lado, la función que determina y controla el descenso de la temperatura tiene un papel fundamental en la eficiencia del método, puesto que define el criterio de convergencia del algoritmo. Uno de los primeros programas de enfriamiento utilizados establece un esquema de enfriamiento de tipo geométrico, en el cual la temperatura desciende linealmente. Sin embargo, aún obteniendo buenas soluciones, el principal inconveniente que presenta este esquema es su alto tiempo de ejecución. Aquí se aplica el esquema de enfriamiento desarrollado por Vidal (2003) y Verdiell *et. al* (2007), siendo su principal objetivo establecer parámetros que permitan obtener un equilibrio entre el tiempo final de ejecución del algoritmo y el número de búsquedas que realice el mismo. De esta manera, se plantea disminuir la temperatura según el siguiente criterio

$$T_{i+1} = \frac{T_i}{1 + T_i^2}. \quad (6.4)$$

Su implementación logra disminuir los tiempos de cálculo, ya que la temperatura disminuye a mayor velocidad que en el esquema geométrico, aún cuando las temperaturas iniciales son altas.

### 6.2.2. Simulated annealing caótico (SAC)

El algoritmo *simulated annealing* caótico empleado en esta tesis en la resolución de problemas de diseño óptimo fue propuesto por Mingjun y Huanwen (2004). Esencialmente, el método consiste en introducir sistemas caóticos en los métodos de búsqueda del algoritmo SA descrito en la sección anterior. El método de búsqueda de SA puede definirse de la siguiente manera

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + rnd \left( \frac{\mathbf{x}^U - \mathbf{x}^L}{m} \right), \quad (6.5)$$

donde  $rnd$  es un número aleatorio,  $\mathbf{x}^U$  y  $\mathbf{x}^L$  son los extremos superior e inferior del dominio factible de cada una de las variables del problema y  $m$  es un cociente de radio de búsqueda apropiado.

Por su parte, en el algoritmo SAC las variables de diseño surgen a partir del siguiente esquema de generación

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}^L + z_{i+1} (\mathbf{x}^U - \mathbf{x}^L). \quad (6.6)$$

La variable caótica  $z_{i+1}$  se define a partir de algún sistema caótico conocido. En particular, aquí se emplea a tal efecto el mapa logístico

$$z_{i+1} = \mu z_i (1 - z_i), \quad z_{i+1} \in [0,1], \quad (6.7)$$

donde  $\mu$  es el parámetro de bifurcación.

Teniendo en cuenta la formulación general del problema de optimización propuesto en (6.1), la implementación del algoritmo SAC consiste en realizar los siguientes pasos:

1. *Inicialización caótica.* Dados el parámetro de bifurcación  $\mu$  y un valor inicial  $z_0$ , se generan diferentes variables  $z_{in}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) de acuerdo a algún sistema caótico, como por ejemplo el mapa logístico unidimensional definido por (6.7). Luego, las componentes del vector solución inicial  $\mathbf{x}_0$  están dadas por (6.6).

2. *Inicialización de los parámetros de temperatura extremos:*  $T_{max}$  y  $T_{min}$ . Se asume que la mejor solución es  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0$  y el valor óptimo de la función objetivo  $F^* = F(\mathbf{x}^*)$ .

3. Mientras que  $T > T_{min}$ , para  $k = 1$  a  $k_{max}$ :

(a) generar una nueva solución  $\mathbf{x}$ , basada en la expresión (6.6), que verifique las restricciones,

(b) evaluar la variación en el costo:  $\Delta C = F(\mathbf{x}) - F^*$ ,

(c) si  $\Delta C \leq 0$ , actualizar la solución óptima:  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$  y el costo óptimo  $F^* = F(\mathbf{x}^*)$ ,

(d) si  $\Delta C > 0$ , actualizar el estado según la probabilidad establecida por (6.2),

(e) disminuir la temperatura de acuerdo al esquema de enfriamiento dado por (6.4).

En la descripción anterior se ve claramente que la principal diferencia entre SA y SAC se encuentra en la generación, es decir, en los pasos 1 y 3(a). El trabajo realizado por Mingjun y Huanwen (2004) demuestra que en problemas multimodales de gran escala, el

algoritmo SA no puede encontrar una solución óptima global, mientras que el método SAC sí logra obtenerla. Ésta es la razón fundamental por la que aquí se emplea el algoritmo de optimización SAC para resolver los esquemas de diseño en los que el espacio de búsqueda de las variables crece notablemente. En el Capítulo 8 se muestran aplicaciones de dicho algoritmo al diseño de vigas.

### 6.2.3. Algoritmo genético (AG)

En esta tesis se emplean dos programaciones diferentes de Algoritmo Genético (AG). Una de ellas se utiliza para resolver el problema de ajuste de los coeficientes  $\eta_i$  definidos por las expresiones (4.102-4.104) del Capítulo 4. Para ello, se plantea dicho problema empleando variables continuas y se emplea el *toolbox* de MATLAB<sup>®</sup> con los operadores establecidos por defecto en el programa. Por su parte, en la resolución de algunos esquemas de diseño óptimo se emplea un algoritmo genético programado en MATLAB<sup>®</sup>, creado en base al algoritmo descrito por Yang *et al* (2005) y adicionando el empleo de una función de penalidad que permite resolver el problema de optimización propuesto. A continuación se presenta una descripción general del método y luego se describe, con más detalle, el algoritmo genético programado.

El método AG fue presentado por Holland en 1975 (Holland, 1992) con el objetivo de entender los mecanismos subyacentes de los sistemas auto-adaptativos. Actualmente, los algoritmos genéticos son los métodos más populares dentro de los algoritmos evolutivos. Aunque los detalles de implementación varían entre diferentes algoritmos genéticos, en términos generales su estructura es la siguiente. El algoritmo opera iterativamente actualizando un conjunto de soluciones al que se denomina *población*. En cada iteración, una nueva población es generada y todos los miembros de la población son evaluados de acuerdo a una *función de adaptación*, seleccionando los individuos de mayor adaptación de la población actual. Los individuos *seleccionados* crean una nueva prole mediante aplicaciones genéticas de *cruce* y *mutación*, empleando una serie de operadores llamados *operadores genéticos*.

Los algoritmos de *selección* son los encargados de elegir qué individuos van a disponer de oportunidades de reproducirse y cuáles no. Existen diversas técnicas de selección y elegir una u otra determina la estrategia de búsqueda del algoritmo. En particular, el algoritmo genético incluido en MATLAB<sup>®</sup> utiliza por defecto una selección estocástica uniforme. Para explicar esquemáticamente este tipo de selección, supongamos que se traza una línea en la cual cada padre se representa como una sección de la línea, proporcional a



su valor de aptitud. El algoritmo se mueve a lo largo de la línea en pasos de igual tamaño, eligiendo a los padres en cada paso. El tamaño del paso es un número aleatorio menor que el tamaño del padre. De esta manera, el padre de mayor aptitud probablemente sea elegido más de una vez. En el caso del algoritmo programado en MATLAB<sup>®</sup> se adopta una selección elitista, es decir, se selecciona el individuo con mejor valor de adaptación y la reproducción se realiza en torno a ese individuo.

Una vez seleccionados los individuos, éstos son recombinados para producir la descendencia que se insertará en la siguiente generación. Los diferentes métodos de *cruce* pueden operar de diferentes formas. En particular, MATLAB<sup>®</sup> emplea por defecto el método de cruce uniforme, en el cual cada gen de la descendencia tiene las mismas probabilidades de pertenecer a uno u otro padre. La técnica se basa en la generación de un vector binario aleatorio. En las posiciones de este vector donde hay un 1, el gen situado en esa posición se copia del primer padre. Por el contrario, donde hay un 0, el gen se copia del segundo padre. Otra técnica de selección es el cruce por un punto y será empleada en el algoritmo genético programado aquí. Consiste en cortar los cromosomas de los padres por un punto seleccionado en forma aleatoria. Ambos operadores de selección se muestran esquemáticamente en la Figura 6.2.

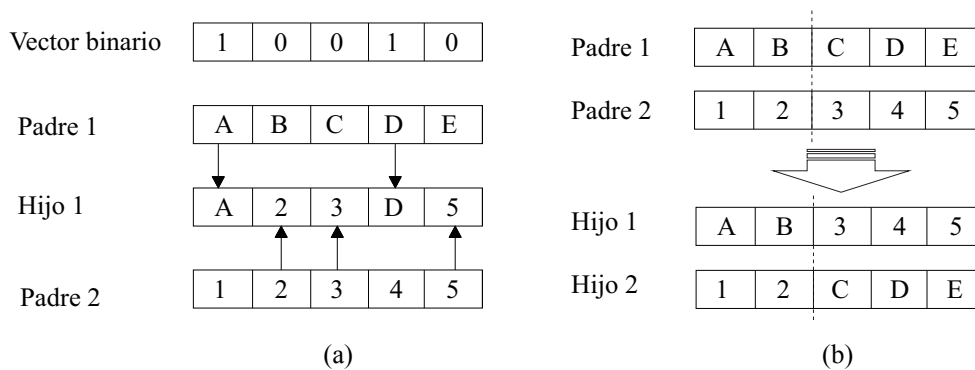


Figura 6.2. Operadores de cruce de AG. (a) Cruce uniforme. (b) Cruce por un punto.

El operador de *mutación* se aplica a cada hijo y consiste en la alteración aleatoria (normalmente con una probabilidad pequeña) de cada gen componente del cromosoma. Existen diversas formas de realizar la mutación. Aquí se realiza mediante un reemplazo aleatorio, el cual consiste en variar aleatoriamente un gen de un cromosoma. Es decir, si un número generado aleatoriamente está por debajo de la probabilidad de mutación, se cambia el bit (es decir, de 0 a 1 o de 1 a 0). En caso contrario, no se realiza la mutación. En MATLAB<sup>®</sup>, la técnica de mutación por defecto está definida por una función de mutación Gaussiana de media 0 y desviación estándar 1. La frecuencia de mutación, proporcional a la desviación estándar de la distribución, disminuye en cada nueva generación.

Cabe destacar que el objetivo principal de las mutaciones es no dejar que todos los individuos de la población se conviertan en mediocres (cayendo en mínimos locales), contribuyendo a la diversidad genética de la especie. Esto implica que constantemente la población se redistribuye sobre el espacio de búsqueda.

Cuando el problema de optimización es resuelto empleando algoritmos genéticos, los operadores estándares de reproducción, cruce y mutación generan individuos sin tener en cuenta las restricciones. Por lo tanto, para imponer la satisfacción de las restricciones  $g(\mathbf{x})$  del problema, se emplean métodos de penalización. En términos generales, tales métodos consisten en incrementar la función objetivo original (a minimizar) por una función de penalidad, obteniendo así la función objetivo de un individuo factible. Luego, la función a minimizar en el problema de optimización será

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) \quad (6.8)$$

donde  $p(\mathbf{x})$  es positiva y, en el caso de penalidades estáticas, puede ser expresada de la siguiente manera

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \xi_j \eta_j^\beta(\mathbf{x}), \quad \text{donde } \begin{cases} \eta_j(\mathbf{x}) = 1, & \text{si la restricción } j\text{-ésima es violada,} \\ \eta_j(\mathbf{x}) = 0, & \text{de modo contrario} \end{cases} \quad (6.9)$$

donde  $\beta$  típicamente adopta como valor 1 ó 2 y  $\xi_i$  es un coeficiente positivo cuyo valor es mayor cuanto más importante sea el cumplimiento de la restricción  $g_i(\mathbf{x})$ .

A continuación se exponen los pasos que describen el algoritmo genético programado, asumiendo que se desea resolver el problema de optimización general (6.1).

Paso 1. *Definición de parámetros y condiciones iniciales.* Se definen: el vector de variables inicial  $\mathbf{x}_0$ , el tamaño de la población  $N_p$ , el vector  $\mathbf{N}_b$  que define el número de bits que representan a cada variable, la probabilidad de cruce  $P_c$ , la probabilidad de mutación  $P_m$  y el número máximo de iteraciones. Además, se evalúa la función objetivo,  $F_0 = F(\mathbf{x}_0)$ .

Paso 2. *Generación aleatoria de la población inicial.* Se genera una población aleatoria  $\mathbf{X}_1$ , la cual incluye el estado inicial, de la siguiente manera

$$\mathbf{X}_1(1) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{X}_1(k_1) = 1 + \text{rand}(\mathbf{x}^U - \mathbf{x}^L), \quad k_1 = 2, 3, \dots, N_p. \quad (6.10)$$

Luego, se codifica a cada uno de los individuos como una cadena binaria, obteniendo la población  $\mathbf{P}_1$ .

Paso 3. *Mientras que*  $\text{Max}[F_1(1:N_p)] \neq 0$ , para  $k = 1$  a  $k_{max}$ :

1. Decodificar  $\mathbf{X}_1$ ,

2. Evaluar la función objetivo para cada individuo y determinar el costo mínimo

$$F_{min} = F(n_b),$$

3. Si  $F_{min} < F_0$ , entonces  $F_0 = F(n_b)$  y  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(n_b)$ ,

4. Convertir los valores de la función objetivo en valores de aptitud:

$$F_1(k_2) = \text{Max}[F(1:N_p)] - F(k_2), \quad k_2 = 1, 2, \dots, N_p. \quad (6.11)$$

5. Reproducir, en torno a la mejor solución, siguiendo la siguiente ley

$$\mathbf{X}(n) \rightarrow \mathbf{X}(n) + \frac{F_1(n_b) - F_1(n)}{F_1(n_b)} (\mathbf{x}(n_b) - \mathbf{x}(n)), \quad n = 1, 2, \dots, N_p, \quad (6.12)$$

6. Codificar  $\mathbf{X}$ , obteniendo la población  $\mathbf{P}'_{k+1}$ .
7. Con una probabilidad  $P_c$ , cruzar pares de individuos por un punto elegido aleatoriamente.
8. Con una probabilidad  $P_m$ , invertir un bit elegido aleatoriamente, obteniendo la población  $\mathbf{P}_{k+1}$ .

### 6.3 Modelo de elementos finitos unidimensional

Para obtener un diseño óptimo siguiendo los esquemas propuestos en el Capítulo 5, es necesario implementar computacionalmente un programa que permita realizar el análisis estructural. En esta sección se expone el modelo de elementos finitos unidimensional empleado a tal fin, el cual está basado en la teoría de vigas expuesta en la sección 4.2 del Capítulo 4 y su implementación numérica permite la modelación de vigas FRP rectas y curvas de pared delgada.

#### 6.3.1. Vectores de desplazamientos y deformaciones nodales

Las variables del problema, representadas por los desplazamientos generalizados pueden escribirse de manera asociada a un elemento, a partir de sus valores en los nodos del mismo, mediante la siguiente relación (Bathe, 1996)

$$\mathbf{w} = \mathbf{F} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (6.13)$$

donde  $\mathbf{w}^{(e)}$  es el vector de desplazamientos generalizados nodales,  $\mathbf{F}$  es la matriz de funciones de forma y  $\mathbf{w}$  es el vector de desplazamientos generalizados del elemento, es decir

$$\mathbf{w} = \{u, v, \theta_z, w, \theta_y, \phi_x, \theta_x\}^T. \quad (6.14)$$

Independientemente de los nodos que posea el elemento en cuestión, cada nodo contiene siete grados de libertad identificados con los siete desplazamientos generalizados de la teoría. De esta forma, la matriz  $\mathbf{F}$  es de orden  $[7, 7N_N]$  y el vector  $\mathbf{w}^{(e)}$  es de orden  $[7N_N, 1]$ , siendo  $N_N$  la cantidad de nodos del elemento. Con el objeto de simplificar la deducción de las ecuaciones de elementos finitos, se describe la matriz  $\mathbf{F}$  en forma de vectores fila, como se muestra a continuación

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5, \mathbf{F}_6, \mathbf{F}_7]^T, \quad (6.15)$$

donde cada vector fila  $\mathbf{F}_i$  es de orden  $[1, 7N_N]$ .

La transformación de coordenadas al sistema intrínseco del elemento está dada por  $\bar{x} = x/L_e$ , con  $\bar{x}$  perteneciente al intervalo  $[0, 1]$  y siendo  $L_e$  la longitud del elemento.

Ahora, empleando (6.13) y (6.15) en las deformaciones generalizadas (4.14), se obtienen estas últimas pero descriptas en términos de los desplazamientos generalizados nodales, según las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{D1}^{(e)} &= \left( \frac{1}{L_e} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\mathbf{F}_2}{R} \right) \mathbf{w}^{(e)}, & \boldsymbol{\varepsilon}_{D2}^{(e)} &= \left( \frac{1}{L_e} \frac{\partial \mathbf{F}_5}{\partial \bar{x}} + \frac{\mathbf{F}_6}{R} \right) \mathbf{w}^{(e)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{D3}^{(e)} &= \frac{1}{L_e} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \bar{x}} \right) \mathbf{w}^{(e)}, & \boldsymbol{\varepsilon}_{D4}^{(e)} &= \frac{1}{L_e} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_7}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{F}_5}{\partial \bar{x}} \right) \mathbf{w}^{(e)}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{D5}^{(e)} = \left( \frac{1}{L_e} \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \bar{x}} - \mathbf{F}_3 \right) \mathbf{w}^{(e)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{D6}^{(e)} = \left( \frac{1}{L_e} \frac{\partial \mathbf{F}_4}{\partial \bar{x}} - \mathbf{F}_5 \right) \mathbf{w}^{(e)}, \quad (6.17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{D7}^{(e)} = \left( \frac{1}{L_e} \frac{\partial \mathbf{F}_6}{\partial \bar{x}} - \mathbf{F}_7 \right) \mathbf{w}^{(e)},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{D8}^{(e)} = \left( \frac{1}{L_e} \frac{\partial \mathbf{F}_6}{\partial \bar{x}} - \frac{\mathbf{F}_5}{R} \right) \mathbf{w}^{(e)},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{B1}^{(e)} = \mathbf{F}_5 \mathbf{w}^{(e)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{B2}^{(e)} = \mathbf{F}_6 \mathbf{w}^{(e)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{B3}^{(e)} = \left( \mathbf{F}_3 - \frac{\mathbf{F}_1}{R} \right) \mathbf{w}^{(e)}, \quad (6.18)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{B4}^{(e)} = \left( \mathbf{F}_7 - \frac{\mathbf{F}_5}{R} \right) \mathbf{w}^{(e)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{B5}^{(e)} = \left( \frac{1}{L_e} \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \bar{x}} - \frac{\mathbf{F}_1}{R} \right) \mathbf{w}^{(e)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{B6}^{(e)} = \left( \frac{1}{L_e} \frac{\partial \mathbf{F}_4}{\partial \bar{x}} \right) \mathbf{w}^{(e)}.$$

Conforme con lo expuesto, los vectores de las deformaciones generalizadas pueden expresarse en el elemento como

$$\Delta^{(e)} = \left\{ \varepsilon_{D1}^{(e)}, -\varepsilon_{D2}^{(e)}, -\varepsilon_{D3}^{(e)}, -\varepsilon_{D4}^{(e)}, \varepsilon_{D5}^{(e)}, \varepsilon_{D6}^{(e)}, \varepsilon_{D7}^{(e)}, \varepsilon_{D8}^{(e)} \right\}^T. \quad (6.19)$$

$$\Delta_G^{(e)} = \left\{ \varepsilon_{D1}^{(e)}, -\varepsilon_{D2}^{(e)}, -\varepsilon_{D3}^{(e)}, -\varepsilon_{D4}^{(e)}, \varepsilon_{D5}^{(e)}, \varepsilon_{D6}^{(e)}, \varepsilon_{D7}^{(e)}, \varepsilon_{D8}^{(e)}, \varepsilon_{B1}^{(e)}, \varepsilon_{B2}^{(e)}, \varepsilon_{B3}^{(e)}, \varepsilon_{B4}^{(e)}, \varepsilon_{B5}^{(e)}, \varepsilon_{B6}^{(e)}, \varepsilon_{D2}^{(e)}, \varepsilon_{D8}^{(e)} \right\}^T. \quad (6.20)$$

### 6.3.2. Discretización de la expresión unidimensional de trabajos virtuales

La expresión general de trabajos virtuales (4.15) puede escribirse de la siguiente manera

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left( L_S^{(e)} + L_F^{(e)} + L_R^{(e)} + L_T^{(e)} + L_S^{0(e)} + L_F^{0(e)} + L_T^{0(e)} \right) = 0, \quad (6.21)$$

siendo  $N_e$  el número total de elementos y  $L_S^{(e)}$ ,  $L_S^{0(e)}$ ,  $L_F^{(e)}$ ,  $L_F^{0(e)}$ ,  $L_T^{(e)}$ ,  $L_T^{0(e)}$  y  $L_R^{(e)}$  el aporte energético en cada elemento correspondiente a los trabajos virtuales descritos en las expresiones (4.23-4.27), respectivamente. Teniendo en cuenta las expresiones (4.50), (6.14), (6.19), (6.20) y (4.23-4.27), los trabajos virtuales parciales se pueden escribir matricialmente como

$$L_S^{(e)} = \int_0^1 \delta \Delta^{(e)T} \mathbf{J} \Delta^{(e)} L_e d\bar{x} = \delta \mathbf{w}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \quad (6.22)$$

$$L_T^{(e)} + L_F^{(e)} = -\delta \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{Q}} - \int_0^1 \delta \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{P}} L_e d\bar{x} = -\delta \mathbf{w}^{(e)T} \mathbf{P}^{(e)}, \quad (6.23)$$

$$L_R^{(e)} = \int_0^1 \delta \mathbf{w}^T \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{w}} L_e d\bar{x} = \delta \mathbf{w}^{(e)T} \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{w}}^{(e)}, \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} L_S^{0(e)} + L_F^{0(e)} + L_T^{0(e)} &= \int_0^1 \delta \Delta_G^{(e)T} \mathbf{T}_E^0 \Delta_G^{(e)} L_e d\bar{x} - \int_0^1 \delta \mathbf{w}^T \mathbf{C}_F^0 \mathbf{w} L_e d\bar{x} \\ &\quad - \delta \mathbf{w}^T \mathbf{C}_T^0 \mathbf{w} = \delta \mathbf{w}^{(e)T} \mathbf{K}_G^{(e)} \mathbf{w}^{(e)}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

siendo

$$\bar{\mathbf{Q}} = \left\{ \bar{N} + \frac{\bar{M}_z}{R}, \bar{Q}_y, -\bar{M}_z, \bar{Q}_z, -\left( \bar{M}_y + \frac{\bar{B}}{R} \right), \bar{T}_w + \bar{T}_{sv}, \bar{B} \right\}^T, \quad (6.26)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \left\{ q_x + \frac{m_z}{R}, q_y, -m_z, q_z, -\left( m_y + \frac{b}{R} \right), m_x, -b \right\}^T, \quad (6.27)$$

$$\ddot{\mathbf{w}} = \left\{ \ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{\theta}_z, \ddot{w}, \ddot{\theta}_y, \ddot{\phi}_x, \ddot{\theta}_x \right\}^T, \quad (6.28)$$

$$\mathbf{T}_E^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{E11}^0 & \mathbf{T}_{E12}^0 \\ \mathbf{T}_{E21}^0 & \mathbf{T}_{E22}^0 \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

$$\mathbf{M}_\rho = \rho \begin{bmatrix} A & 0 & -\frac{I_z}{R} & 0 & -\frac{I_{yz}}{R} & 0 & -\frac{I_{z\omega}}{R} \\ & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -I_z & 0 & -I_{yz} + \frac{I_{z\omega}}{R} & 0 & -I_{z\omega} \\ & & & A & 0 & 0 & 0 \\ sim & & & & I_y - \frac{2I_{y\omega}}{R} & 0 & I_{y\omega} - \frac{C_w}{R} \\ & & & & & I_y + I_z & 0 \\ & & & & & & C_w \end{bmatrix}, \quad (6.30)$$

$$\mathbf{C}_F^0 = \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} -\frac{2\bar{y}F_y^0}{R^2} & 0 & \frac{2\bar{y}F_y^0}{R} & 0 & \frac{(\bar{y}F_z^0 + \bar{z}F_y^0)}{R} & -\frac{\bar{z}F_x^0}{R} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -2\bar{y}F_y^0 & 0 & -(\bar{y}F_z^0 + \bar{z}F_y^0) & zF_x^0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\bar{z}F_z^0 & -yF_x^0 & 0 & 0 \\ sim & & & & & -2(\bar{y}F_y^0 + \bar{z}F_z^0) & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} dA, \quad (6.31)$$

$$\mathbf{C}_T^0 = \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} -\frac{2\bar{y}T_y^0}{R^2} & 0 & \frac{2\bar{y}T_y^0}{R} & 0 & \frac{(\bar{y}T_z^0 + \bar{z}T_y^0)}{R} & -\frac{\bar{z}T_x^0}{R} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -2\bar{y}T_y^0 & 0 & -(\bar{y}T_z^0 + \bar{z}T_y^0) & zT_x^0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\bar{z}T_z^0 & -yT_x^0 & 0 & 0 \\ sim & & & & & -2(\bar{y}T_y^0 + \bar{z}T_z^0) & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} dA, \quad (6.32)$$

donde

$$\mathbf{T}_{E11}^0 = \begin{bmatrix} N^0 & M_y^0 & M_z^0 & B^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sim & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{T}_{E12}^0 = \mathbf{T}_{E21}^{0T} = \begin{bmatrix} -Q_z^0 & z_0 N^0 / R & -Q_y^0 & -T_w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_z^0 / 2 & M_x^0 / 2 & -T_{wz}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M_x^0 / 2 & -M_y^0 / 2 & 0 & -T_{wy}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q_{zw}^0 & 0 & -Q_{yw}^0 & -T_{ww}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.34)$$

$$\mathbf{T}_{E22}^0 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{Q_y^0}{2} & -\frac{z_0 N^0}{2R} & 0 & -\frac{z_0 N^0}{R} & \frac{y_0 N^0}{R} & 0 & -\frac{M_z^0}{2} \\ -\frac{M_z^0 + y_0 N^0}{R} & \frac{Q_z^0}{2} & -\frac{Q_{zw}^0}{R} & -Q_z^0 & Q_y^0 & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{M_z^0 + y_0 N^0}{R} & 0 & \frac{M_z^0}{R} & 0 & 0 & 0 & \frac{M_y^0}{2} \\ & & 0 & \frac{B^0}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & N^0 & 0 & 0 & -M_y^0 - z_0 N^0 & 0 \\ & & & & N^0 & 0 & M_z^0 + y_0 N^0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

En las expresiones (6.22-6.25) se han introducido las matrices  $\mathbf{K}^{(e)}$ ,  $\mathbf{K}_G^{(e)}$  y  $\mathbf{M}^{(e)}$ , que son respectivamente las matrices de rigidez, rigidez geométrica y masa del elemento, como así también el vector de cargas nodales  $\mathbf{P}^{(e)}$ .

### 6.3.3. Ecuación de movimiento de elementos finitos

Introduciendo las expresiones (6.22-6.25) en la (6.21) y operando en la forma convencional, se obtiene la clásica ecuación general sin amortiguamiento del método de elementos finitos

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{W}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_G) \mathbf{W} = \mathbf{P}, \quad (6.36)$$

donde  $\mathbf{W}$  es el vector global de desplazamientos nodales,  $\mathbf{P}$  es el vector global de cargas nodales,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global y  $\mathbf{K}_G$  es la matriz de rigidez geométrica global.

### 6.3.4. Ecuación de elementos finitos con movimiento armónico impuesto

Cuando se impone un movimiento armónico de la forma  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^* \cos(\omega t)$ , la expresión (6.36) permite obtener las siguientes ecuaciones particulares

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_G - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{W}^* = \mathbf{P}^d, \quad (6.37)$$

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_G - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{W}^* = \mathbf{0}, \quad (6.38)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia angular del movimiento armónico y  $\lambda$  el parámetro de pandeo, el cual relaciona la tensión crítica de pandeo con la tensión de referencia inicial. La expresión (6.37) rige la mecánica de un problema de vibraciones armónicas forzadas bajo la presencia de un estado de tensiones iniciales estáticas y un vector de cargas nodales definido como  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^d \cos(\omega t)$ . La expresión (6.38) permite obtener los autovalores de inestabilidad elástica, considerando  $\omega = 0$ , y las frecuencias naturales de vibración asumiendo  $\lambda = 1$ .

Cabe aclarar que para el cálculo de autovalores de inestabilidad o autovalores dinámicos bajo un estado de tensiones iniciales, es necesario efectuar un cálculo estático previo con solicitaciones de referencia que son luego empleadas en la obtención de la matriz de rigidez geométrica. Para ello, se debe hallar el vector de desplazamientos nodales iniciales  $\mathbf{W}^0$  del siguiente sistema

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{W}^0 = \mathbf{P}^0, \quad (6.39)$$

donde  $\mathbf{K}^0$  y  $\mathbf{P}^0$  son la matriz global de rigidez elástica inicial y el vector global de fuerzas estáticas iniciales, respectivamente. Luego, conociendo los desplazamientos iniciales se pueden determinar las deformaciones generalizadas según (6.16-6.18) y reemplazando éstas en la expresión (6.25) se obtiene la matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$ .

### 6.3.5. Elemento de viga recta – viga curva: deformación por corte constante

El elemento finito que se describe en este apartado consta de dos nodos y siete grados de libertad en cada nodo. El mismo fue desarrollado por Piován (2003) en cuanto a su extensión natural al dominio de materiales compuestos, a partir del elemento finito originalmente introducido por Cortínez y Rossi (1998a) para vigas rectas isótropas. En el elemento, las deformaciones por corte se consideran como constantes, con lo cual se verifican las ecuaciones de equilibrio en vigas rectas isótropas descargadas. De tal manera, los vectores  $\mathbf{F}_i$  de la expresión (6.15) vienen dados según

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \{f_{11}(\bar{x}), 0, 0, 0, 0, 0, 0, f_{12}(\bar{x}), 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \\ \mathbf{F}_2 &= \{0, f_{21}(\bar{x}, \Theta_1), f_{22}(\bar{x}, \Theta_1), 0, 0, 0, 0, 0, f_{23}(\bar{x}, \Theta_1), f_{24}(\bar{x}, \Theta_1), 0, 0, 0, 0\}, \\ \mathbf{F}_3 &= \{0, f_{31}(\bar{x}, \Theta_1), f_{32}(\bar{x}, \Theta_1), 0, 0, 0, 0, 0, f_{33}(\bar{x}, \Theta_1), f_{34}(\bar{x}, \Theta_1), 0, 0, 0, 0\}, \dots \end{aligned} \quad (6.40)$$



$$\begin{aligned}
\dots \mathbf{F}_4 &= \{0, 0, 0, f_{21}(\bar{x}, \Theta_1), f_{22}(\bar{x}, \Theta_1), 0, 0, 0, 0, 0, f_{23}(\bar{x}, \Theta_1), f_{24}(\bar{x}, \Theta_1), 0, 0\}, \\
\mathbf{F}_5 &= \{0, 0, 0, f_{31}(\bar{x}, \Theta_1), f_{32}(\bar{x}, \Theta_1), 0, 0, 0, 0, 0, f_{33}(\bar{x}, \Theta_1), f_{34}(\bar{x}, \Theta_1), 0, 0\}, \\
\mathbf{F}_6 &= \{0, 0, 0, 0, 0, f_{21}(\bar{x}, \Theta_1), f_{22}(\bar{x}, \Theta_1), 0, 0, 0, 0, 0, f_{23}(\bar{x}, \Theta_1), f_{24}(\bar{x}, \Theta_1)\}, \\
\mathbf{F}_7 &= \{0, 0, 0, 0, 0, f_{31}(\bar{x}, \Theta_1), f_{32}(\bar{x}, \Theta_1), 0, 0, 0, 0, 0, f_{33}(\bar{x}, \Theta_1), f_{34}(\bar{x}, \Theta_1)\},
\end{aligned} \tag{6.40}$$

siendo  $f_{ij}$  las funciones de forma, descriptas a continuación

$$f_{11}(\bar{x}) = 1 - \bar{x}, \quad f_{12}(\bar{x}) = \bar{x}, \tag{6.41}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(\bar{x}) &= \frac{1 + \Theta_i(1 - \bar{x}) - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3}{(1 + \Theta_i)}, & f_{22}(\bar{x}) &= \frac{[2 + \Theta_i - (4 + \Theta_i)\bar{x} - 2\bar{x}^2]\bar{x}L_e}{2(1 + \Theta_i)}, \\
f_{23}(\bar{x}) &= \frac{(\Theta_i + 3\bar{x} - 2\bar{x}^2)\bar{x}}{(1 + \Theta_i)}, & f_{24}(\bar{x}) &= \frac{[-\Theta_i - (2 - \Theta_i)\bar{x} + 2\bar{x}^2]\bar{x}L_e}{2(1 + \Theta_i)},
\end{aligned} \tag{6.42}$$

$$\begin{aligned}
f_{31}(\bar{x}) &= \frac{6(\bar{x} - 1)\bar{x}}{(1 + \Theta_i)L_e}, & f_{32}(\bar{x}) &= \frac{1 + \Theta_i - (4 + \Theta_i)\bar{x} + 3\bar{x}^2}{(1 + \Theta_i)}, \\
f_{33}(\bar{x}) &= \frac{6(1 - \bar{x})\bar{x}}{(1 + \Theta_i)L_e}, & f_{34}(\bar{x}) &= \frac{[\Theta_i - 2 + 3\bar{x}]\bar{x}}{(1 + \Theta_i)},
\end{aligned} \tag{6.43}$$

donde se ha definido

$$\Theta_1 = \frac{12J_{33}}{J_{55}L_e^2}, \quad \Theta_2 = \frac{12J_{22}}{J_{66}L_e^2}, \quad \Theta_3 = \frac{12J_{44}}{J_{77}L_e^2}. \tag{6.44}$$

Como fue mencionado, las deformaciones por corte son constantes a lo largo del elemento. Sus expresiones pueden obtenerse a partir de las funciones de forma y de las expresiones (6.17) como

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{D5}^{(e)} &= \frac{\Theta_1}{1 + \Theta_1} \left[ \left( \frac{u_{yc_2} - u_{yc_1}}{L_e} \right) - \left( \frac{\theta_{z_2} - \theta_{z_1}}{2} \right) \right], \\
\mathcal{E}_{D6}^{(e)} &= \frac{\Theta_2}{1 + \Theta_2} \left[ \left( \frac{u_{zc_2} - u_{zc_1}}{L_e} \right) - \left( \frac{\theta_{y_2} - \theta_{y_1}}{2} \right) \right], \\
\mathcal{E}_{D7}^{(e)} &= \frac{\Theta_3}{1 + \Theta_3} \left[ \left( \frac{\varphi_{x_2} - \varphi_{x_1}}{L_e} \right) - \left( \frac{\theta_{x_2} - \theta_{x_1}}{2} \right) \right],
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Puede observarse que cuando las constantes  $\Theta_i$  tienden a cero, es decir cuando la viga es muy esbelta, las expresiones (6.45) se aproximan a las deformaciones de corte de una teoría no flexible por corte. En consecuencia, este elemento reproduce la teoría no flexible por corte evitando el fenómeno de bloqueo por corte, sin necesidad de recurrir a estrategias de integración reducida.

### 6.3.6. Elemento curvo isoparamétrico

El elemento curvo isoparamétrico empleado en la presente tesis fue desarrollado también por Piovan (2003). Es un elemento de cinco nodos y siete grados de libertad en cada nodo, cuya aptitud para la modelación de vigas curvas anisótropas fue comprobada por Piovan y Cortínez (2007b). Así, la interpolación del desplazamiento generalizado está dada por la siguiente expresión genérica (Oñate, 1992; Zienkiewicz, 1980)

$$w_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^5 f_j(\bar{x}) w_i^{(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, 7, \quad (6.46)$$

siendo  $f_j(\bar{x})$  las funciones de forma, de orden cuártico, del elemento.

Para cada desplazamiento generalizado se adopta el mismo conjunto de funciones de forma. De esta manera, las funciones de forma serán las que se expresan a continuación

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) &= 1 - \frac{25}{3}\bar{x} + \frac{70}{3}\bar{x}^2 - \frac{80}{3}\bar{x}^3 + \frac{32}{3}\bar{x}^4, \\ f_2(\bar{x}) &= 16\bar{x} - \frac{208}{3}\bar{x}^2 + 96\bar{x}^3 - \frac{128}{3}\bar{x}^4, \\ f_3(\bar{x}) &= -12\bar{x} + 76\bar{x}^2 - 128\bar{x}^3 + 64\bar{x}^4, \\ f_4(\bar{x}) &= \frac{16}{3}\bar{x} - \frac{112}{3}\bar{x}^2 + \frac{224}{3}\bar{x}^3 - \frac{128}{3}\bar{x}^4, \\ f_5(\bar{x}) &= -\bar{x} + \frac{22}{3}\bar{x}^2 - 16\bar{x}^3 + \frac{32}{3}\bar{x}^4. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Así, respetando la estructura de la expresión (6.14), los vectores de incógnitas nodales (o vector de desplazamientos generalizados nodales) para el elemento se definen como

$$\mathbf{w}^{(e)} = \{ \mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)}, \mathbf{w}^{(4)}, \mathbf{w}^{(5)} \}, \quad (6.48)$$

siendo

$$\mathbf{w}^{(j)} = \{ u_j, v_j, \theta_{z_j}, w_j, \theta_{y_j}, \phi_{x_j}, \theta_{x_j} \}^T, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \quad (6.49)$$

Si bien el elemento con deformación por corte constante permite la modelación de vigas curvas, en la presente tesis se emplea el isoparamétrico para tal finalidad. Esto se realiza en términos de las conclusiones realizadas por Piovan (2003), quien mediante estudios numéricos demostró que el elemento isoparamétrico tiene un comportamiento más versátil

que el de deformación por corte constante en la modelación de vigas curvas de pared delgada.

#### 6.4 Esquema de implementación del problema global de diseño

La implementación numérica del problema de optimización requiere programar en forma conjunta y ordenada los distintos métodos y estrategias que intervienen en el mismo. Éstos deben combinarse apropiadamente y de la manera más eficiente posible. Al respecto, la implementación de los problemas de diseño abordados en esta tesis, requieren principalmente realizar tales combinaciones entre las estrategias de optimización y los métodos que gobiernan el análisis estructural.

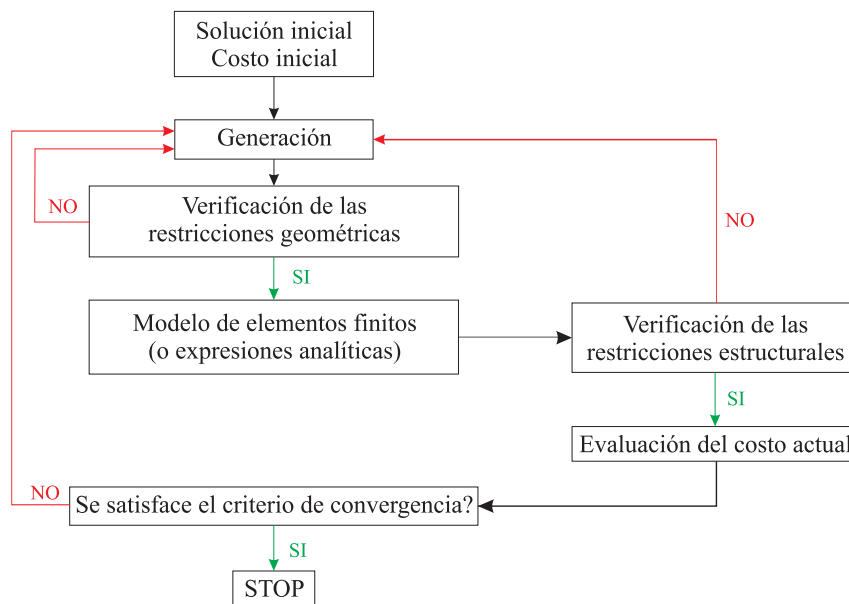


Figura 6.3. Esquema de resolución del problema de optimización.

La Figura 6.3 muestra esquemáticamente el orden en que se realizan los cálculos numéricos durante el proceso de resolución del problema de diseño. Antes de comenzar con el proceso iterativo debe proponerse una solución inicial y debe evaluarse su respectivo costo. En cada iteración se genera una nueva solución de acuerdo a las normas de generación de la técnica de optimización elegida. Primeramente, se verifican las restricciones geométricas, debido a que éstas pueden ser evaluadas rápidamente. Si tales condiciones no se satisfacen, se genera una nueva solución y el proceso se repite. Una vez que se encuentra una solución que satisfaga las restricciones geométricas, se implementa el modelo de elementos finitos expuesto en la sección anterior, o bien, las expresiones analíticas desarrolladas en el Capítulo 4 para el análisis estructural. Dicha implementación

permite evaluar los parámetros necesarios para la verificación de las restricciones estructurales. Si estas restricciones se cumplen, dichos cálculos permiten estimar además el costo que genera la solución factible obtenida, siempre que la función objetivo dependa de tales parámetros. Este mismo procedimiento se repite hasta satisfacer el criterio de convergencia, el cual dependerá de la técnica de optimización empleada.

Cabe aclarar que en esta tesis, la programación del problema completo de optimización como fue descrito se realiza en un entorno MATLAB<sup>®</sup>.

## CAPÍTULO 7

# VALIDACIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL. CÁLCULO DE PANDEO GLOBAL Y LOCAL

### 7.1 Introducción

El modelo estructural desarrollado en esta tesis puede resolverse en forma genérica aplicando el modelo de elementos finitos unidimensional expuesto en el Capítulo 6. Este modelo estructural es una generalización de la teoría desarrollada por Cortínez y Piovan (2002, 2006) a partir del principio del Hellinger-Reissner para el análisis dinámico y de inestabilidad de vigas FRP rectas de pared delgada. En tales trabajos se realizaron comparaciones con modelos desarrollados por distintos autores (Sherbourne y Kabir, 1995; Ghorbanpoor y Omidvar, 1996), los cuales omiten la flexibilidad por corte debida a alabeo no uniforme, y, a su vez, el modelo fue comparado con modelos tridimensionales tipo lámina realizados en COSMOS/M<sup>®</sup>. Se comprobó que la flexibilidad por corte tiene un efecto considerable en este tipo de estructuras, tanto en el cálculo de frecuencias naturales como en el cálculo de cargas críticas de pandeo, en especial cuando uno de los ejes principales del laminado coincide con el eje longitudinal de la viga. Es importante mencionar que estos autores también han desarrollado un enfoque basado en el principio de trabajos virtuales (Piovan y Cortínez, 2007a, 2007b). Los resultados obtenidos a partir de este último enfoque fueron validados a través de varios estudios comparativos que demuestran que la precisión es muy buena desde el punto de vista técnico. Sin embargo, el enfoque a partir del principio de Reissner tiene una precisión mayor que el correspondiente a trabajos virtuales, de acuerdo a los estudios realizados por dichos autores para vigas rectas (Piovan y Cortínez, 2005). Tales resultados fueron corroborados en esta tesis para vigas curvas en cálculos no mostrados aquí. Dichos estudios comparativos demuestran que los errores que pueden surgir en su aplicación son del orden del 3 % en el cálculo de frecuencias naturales, 4% en la determinación de las cargas críticas de pandeo global y un 15%, con picos de 20%, en el cálculo de tensiones.

Por su parte, las fórmulas analíticas aproximadas expuestas en el Capítulo 4, destinadas al análisis de deflexiones, esfuerzos y tensiones en vigas rectas sometidas a estados de

flexo-compresión, fueron validadas por Barbero (1998). En su libro confirma que en el caso de formas típicas de la sección transversal (secciones tipo I, tipo cajón, etc.), tales expresiones pueden emplearse en vigas compuestas con igual aproximación, siempre que se trate de un diseño preliminar de la estructura.

Las fórmulas desarrolladas para el análisis de inestabilidad local y global de vigas FRP desarrolladas en esta tesis requieren de un tratamiento especial, debido a la importancia que presenta este tipo de falla en las estructuras esbeltas. Por ello, en las siguientes secciones, se comparan los resultados obtenidos empleando las expresiones desarrolladas en las secciones 4.3.2 y 4.4 del Capítulo 4 con los resultados de experimentaciones numéricas.

Primeramente, se comparan los resultados obtenidos analíticamente en el cálculo de cargas críticas globales con los valores encontrados mediante la aplicación del modelo de elementos finitos expuesto en el Capítulo 6, basado en la formulación de Hellinger-Reissner descrita en la sección 4.2 del Capítulo 4. A su vez, en el caso de vigas doblemente empotradas, se realiza un ajuste de las fórmulas analíticas para distintas formas de secciones transversales bisimétricas.

En segundo lugar, se validan los parámetros críticos de carga locales en vigas rectas y curvas comparando las expresiones analíticas desarrolladas en esta tesis con los resultados de modelos tridimensionales de elementos lámina implementados en ABAQUS 6.7<sup>®</sup>.

## **7.2 Pandeo flexo-torsional de vigas FRP con sección transversal bisimétrica**

En esta sección se validan las fórmulas analíticas propuestas en la sección 4.3.2 que determinan, en forma aproximada, las cargas críticas de pandeo flexional y lateral-torsional en vigas FRP de secciones transversales doblemente simétricas. Para ello, tales expresiones analíticas son comparadas con resultados numéricos obtenidos a partir del modelo viga de elementos finitos unidimensional, expuesto en la sección 6.3 del Capítulo 6, basado en la teoría de vigas presentada en la sección 4.2 del Capítulo 4. En ambos enfoques se emplea la formulación constitutiva de Reissner.

Se analizan dos condiciones de borde: vigas simplemente apoyadas y vigas biempotradas. Cabe aclarar que en esta última condición de borde se permite el desplazamiento axial en uno de los extremos, tal como se muestra en la Figura 7.1. Allí se detallan los distintos estados de carga que serán analizados en las secciones siguientes.

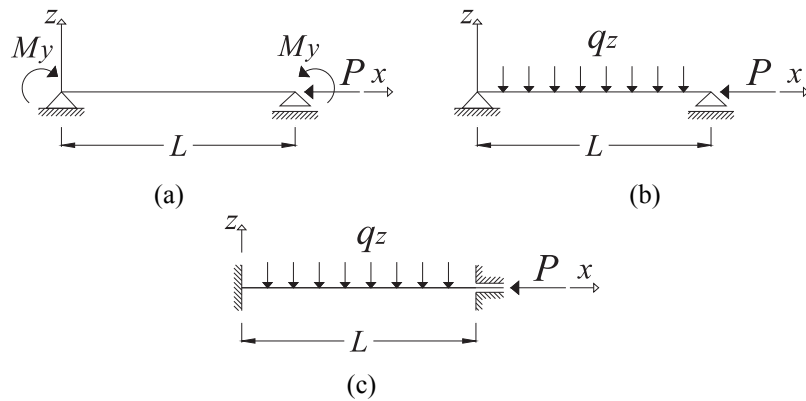


Figura 7.1. Condiciones de vinculación y estados de carga empleados en la validación de las fórmulas de pandeo global.

### 7.2.1. Vigas simplemente apoyadas

Se considera una viga simplemente apoyada (SAP) sometida a momentos flectores constantes aplicados en los extremos y, conjuntamente, una carga axial de compresión (Figura 7.1(a)). Se comparan los valores dados por las expresiones (4.99) con los obtenidos numéricamente para el caso de un perfil tipo I variando las dimensiones de la sección transversal y su longitud. El material empleado en los resultados que se exponen a continuación es GrafitoAS4/Epoxi3501, cuyas propiedades pueden verse en el Apéndice I.

En las figuras que se presentan en este apartado, se grafica la relación entre las cargas críticas ( $P_{cr}$  y  $M_{cr}$ ) obtenidas mediante los dos enfoques mencionados. Dichas cargas están escaladas respecto a las cargas críticas de referencia ( $P_0$  y  $M_0$ ), las cuales se obtienen asumiendo  $M = 0$  y  $P = 0$ , respectivamente, empleando el elemento de viga recta con deformación por corte constante basado en el modelo de elementos finitos mencionado. Se hace referencia a los cálculos analíticos como “Presente enfoque” y a los cálculos numéricos como “MEF”. Las dimensiones de las vigas analizadas se detallan en cada una de las figuras y están dadas en milímetros sobre un esquema fuera de escala.

Es necesario recordar que en el desarrollo de la formulación constitutiva de Reissner se desprecia el aporte del coeficiente de rigidez  $\bar{D}_{16}$ . Si bien esta hipótesis no es estrictamente válida para laminaciones simétricas y balanceadas, en el trabajo de Cortínez y Piovan (2002) se demostró que para el caso de laminaciones del tipo  $[\pm 45_n]_s$ , el modelo ofrece buenos resultados en lo que respecta al análisis dinámico, estático y de inestabilidad de vigas rectas FRP. Esto se debe a que, en tales laminados, el coeficiente  $\bar{D}_{16}$  es de al menos un orden de magnitud menor a las demás componentes de la matriz constitutiva, no siendo tan importante su omisión. Por esta razón, este laminado será utilizado en cálculos posteriores y se analizará la validez de su utilización en las fórmulas analíticas tratadas

aquí.

En las Figuras 7.2, 7.3 y 7.4 se muestran los resultados obtenidos para el caso de vigas FRP de sección tipo I construidas con laminados  $[0_2]_s$ ,  $[0/90]_s$  y  $[\pm 45]_s$ , respectivamente.

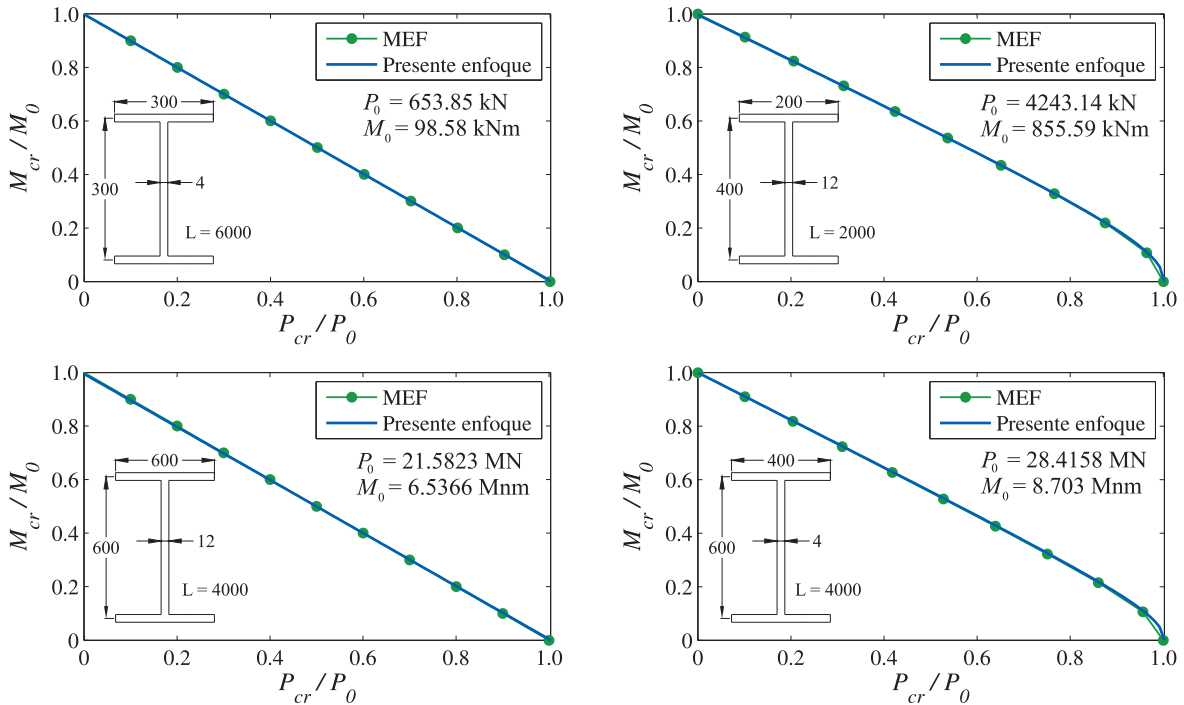


Figura 7.2. Cargas críticas flexo-torsionales para una viga tipo I, SAP, con laminación  $[0_2]_s$ .

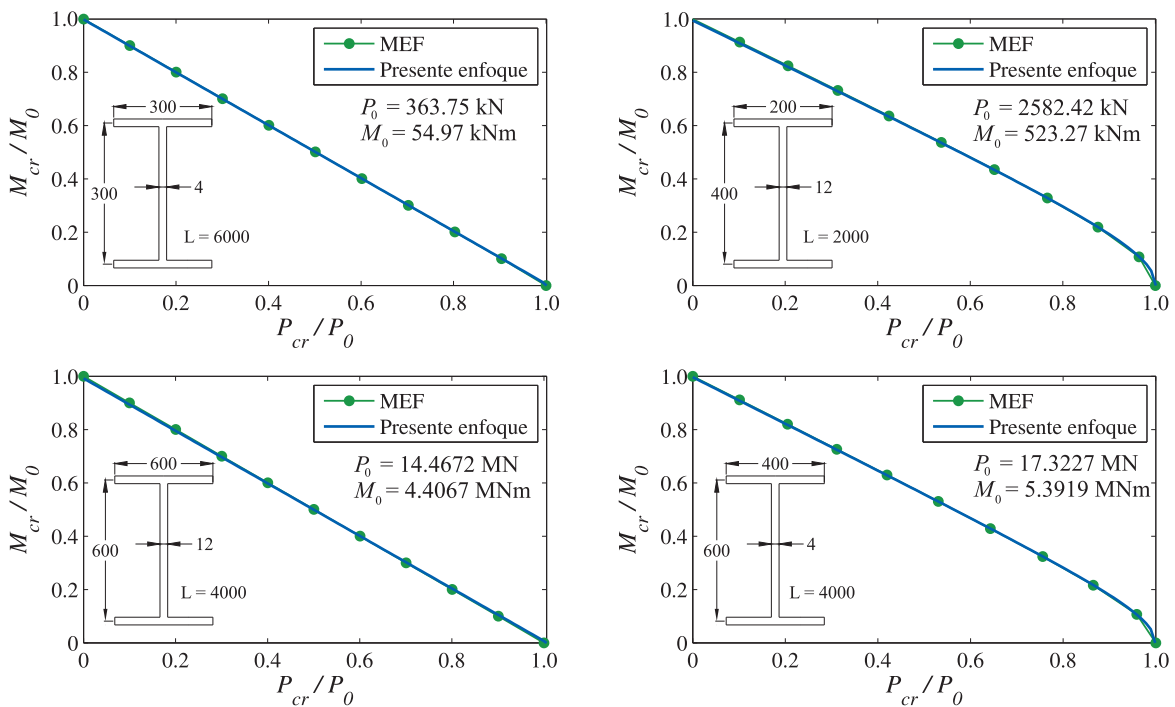


Figura 7.3. Cargas críticas flexo-torsionales para una viga tipo I, SAP, con laminación  $[0/90]_s$ .



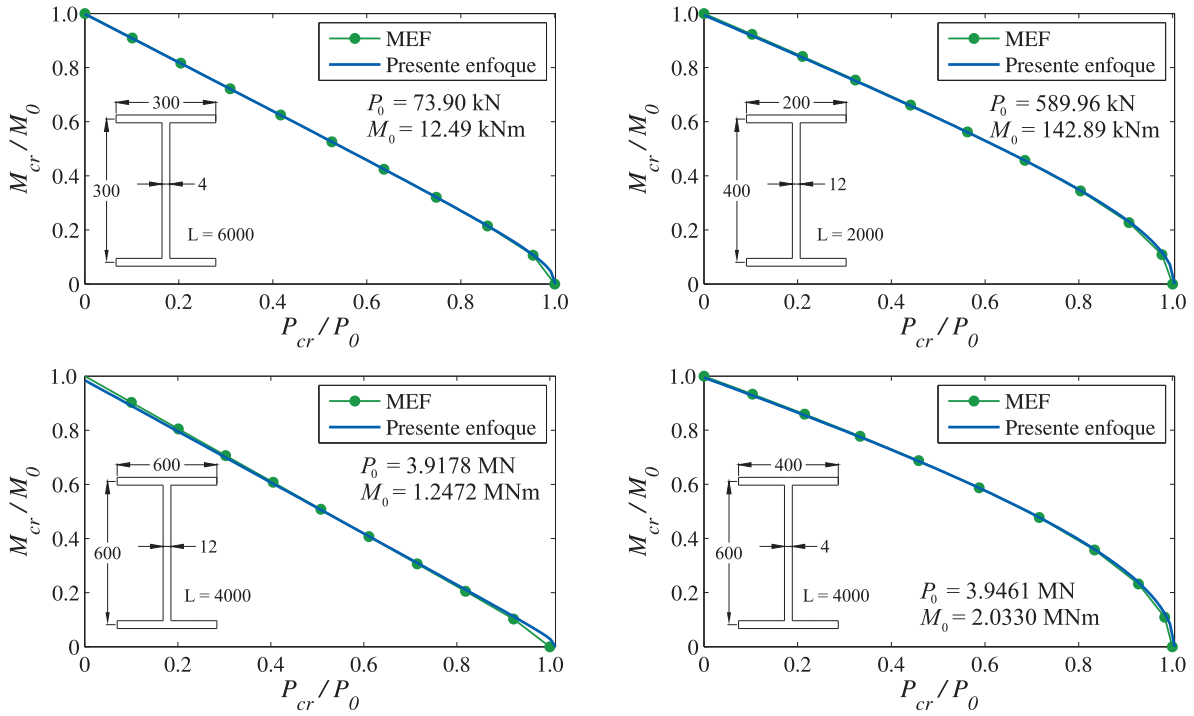


Figura 7.4. Cargas críticas flexo-torsionales para una viga tipo I, SAP, con laminación  $[\pm 45]_s$ .

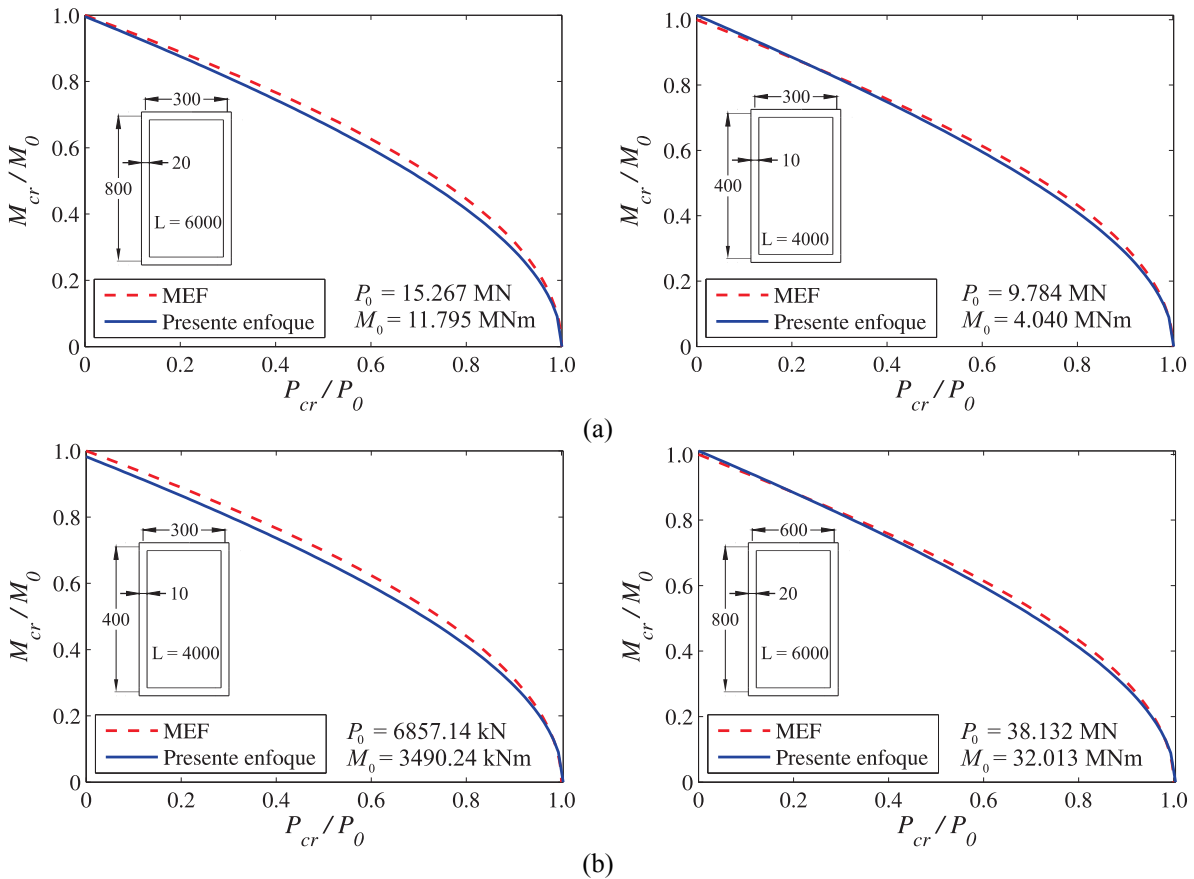


Figura 7.5. Cargas críticas flexo-torsionales para una viga tipo cajón, SAP, con laminación: (a)  $[0_2]_s$ , (b)  $[0/90]_s$ .

Se considera ahora una viga simplemente apoyada (SAP) sometida a una carga en la dirección de  $z$ , distribuida en su longitud conjuntamente con una carga axial de compresión,

como se muestra en la Figura 7.1(b). En la Figura 7.5 se comparan los valores dados por las expresiones (3.99) con los obtenidos numéricamente para el caso de una viga de sección tipo cajón bajo tales condiciones.

De acuerdo a los resultados encontrados se observa que para el caso de vigas simplemente apoyadas las fórmulas analíticas propuestas presentan buenos resultados, lo cual es esperable si se tiene en cuenta que las soluciones propuestas para definir el campo de desplazamientos son soluciones exactas.

### 7.2.2. Vigas doblemente empotradas

En esta sección se contempla el caso de una viga bi-empotrada (EE), de sección transversal bisimétrica, sometida a una carga axial de compresión y a una carga distribuida en la dirección de  $z$ , tal como muestra la Figura 7.1(c). De manera análoga a la sección anterior, se comparan los valores dados por las expresiones analíticas halladas en la sección 4.3 del Capítulo 4 con los obtenidos numéricamente empleando el modelo viga de elementos finitos. Las expresiones analíticas que determinan las cargas críticas de pandeo para este tipo de estructuras, bajo las condiciones de borde mencionadas, están dadas por las ecuaciones (4.91-4.94), introduciendo los coeficientes dados por (4.102-4.104). Sin embargo, las cargas críticas que se obtienen empleando tales expresiones presentan cierta disparidad respecto a las obtenidas mediante el modelo de elementos finitos. Se asume que tales diferencias se deben, principalmente, a las soluciones de los desplazamientos propuestas para la obtención de las fórmulas analíticas. Por ello, durante el desarrollo de las fórmulas analíticas se definieron los parámetros de corrección o de ajuste  $\bar{\eta}_i$ . A continuación se detalla la manera en que se determinan estos parámetros y se muestran los resultados obtenidos mediante su aplicación en el caso de vigas sometidas a cargas de compresión, en primer lugar, y a cargas de flexo-compresión, en segundo lugar.

El ajuste de los parámetros  $\bar{\eta}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) se realiza en forma independiente para cada una de las cargas críticas axiales, evaluando una a la vez y considerando que actúa sólo una carga de compresión (es decir,  $M_y = 0$ ). Luego, los parámetros de ajuste se obtienen minimizando el error medio cuadrático al calcular cada una de las cargas críticas. Para ello, se formula un problema de optimización con la siguiente función objetivo

$$f(\bar{\eta}_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k_1=1}^n (e_{k_1}^p)^2}{n}} \quad (7.1)$$

donde

$$e_{k_1}^P = \frac{(P_{cr}^{MEF})_{k_1} - (P_{cr}^{PE})_{k_1}}{(P_{cr}^{MEF})_{k_1}}, \quad k_1 = 1, 2, \dots, n \quad (7.2)$$

siendo  $n$  el número de evaluaciones realizadas y  $P_{cr}$  la carga crítica axial ( $P_z$ ,  $P_y$  ó  $P_\phi$  según sea el caso evaluado). En la expresión (7.2), el superíndice  $MEF$  hace referencia a los valores obtenidos con el modelo de elementos finitos y el superíndice  $PE$  se refiere a los resultados hallados analíticamente mediante el enfoque analítico propuesto.

El problema de optimización se resuelve aplicando la técnica de optimización algoritmo genético, utilizando las rutinas incluidas en el paquete de herramientas de optimización del software MATLAB<sup>®</sup>, con las opciones dadas por defecto en la programación, las cuales fueron detalladas en el Capítulo 6. Los parámetros de ajuste óptimos encontrados mediante este análisis se especifican en la Tabla 7.1. Luego, introduciendo dichos parámetros en las expresiones (4.103-4.104) y su resultado en las expresiones (4.92-4.94) se obtienen las cargas críticas de pandeo ajustadas para el caso de vigas bi-empotradas con doble simetría seccional. A continuación, los resultados obtenidos empleando tales ecuaciones son comparados con las cargas críticas que se obtienen al aplicar el modelo de elementos finitos unidimensional.

Tabla 7.1. Parámetros de ajuste.

	$\bar{\eta}_1$	$\bar{\eta}_2$	$\bar{\eta}_3$	$\bar{\eta}_4$	$\bar{\eta}_5$	$\bar{\eta}_6$
Perfil I	0.818	1.001	0.817	1.000	0.757	1.008
Perfil Cajón	0.720	1.024	0.481	1.216	0.753	1.008

Se emplea nuevamente el material GrafitoAS4/Epoxi3501 y las dimensiones de la sección transversal bajo análisis se indican en las figuras en milímetros sobre un esquema fuera de escala.

En las Figuras 7.6, 7.7 y 7.8 se grafican los valores de las cargas críticas axiales  $P_z$ ,  $P_y$  y  $P_\phi$ , respectivamente, para el caso particular de una viga de sección transversal tipo I. Se contemplan variaciones en las dimensiones de la sección transversal y en la longitud de la viga. Se hace referencia a los resultados obtenidos con las fórmulas analíticas sin ajustar como “Presente (SAj)” (asumiendo  $\bar{\eta}_i = 1, i = 1, 2, \dots, 6$ ) y se indican como “Presente (CAj)” los valores obtenidos a partir de las fórmulas analíticas ajustadas, empleando los valores de los parámetros especificados en la Tabla 7.1. Por su parte, los resultados numéricos se indican con la sigla “MEF”. Las cargas críticas están parametrizadas respecto a una carga

de compresión de referencia,  $P_0 = 1\text{MN}$ . El error graficado se define como el valor absoluto del error relativo porcentual respecto de los resultados del modelo numérico y está dado por

$$E_k = 100e_k^P, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.3)$$

donde  $n$  es el número total de cálculos realizados en cada figura.

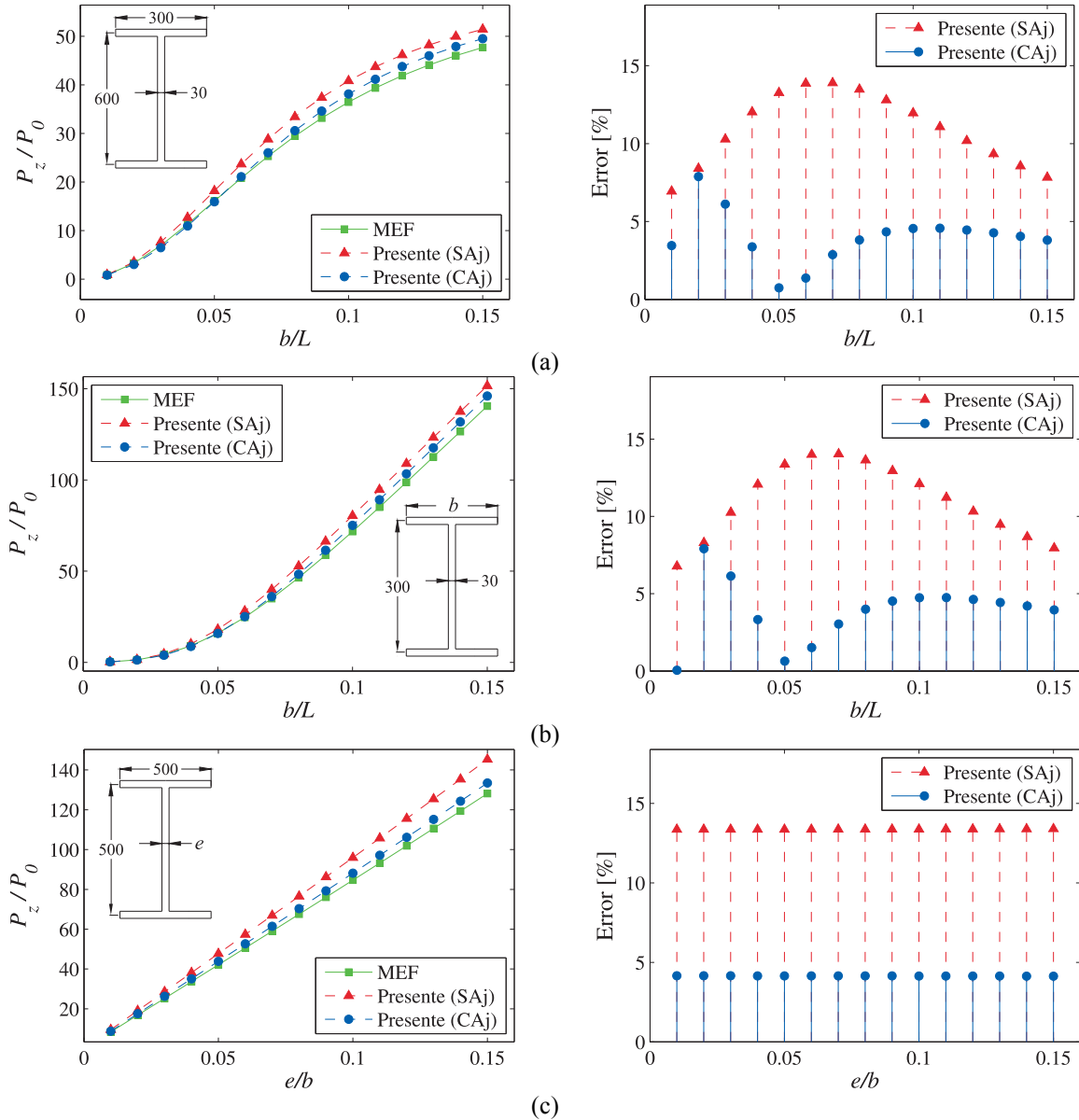


Figura 7.6. Cargas críticas axiales  $P_z$ ,  $[O_2]_s$ , (a) variación de  $L$ ; (b) variación de  $b$ ,  $L = 6\text{m}$ ; (c) variación de  $e$ ,  $L = 6\text{m}$ .

En los casos representados en las Figuras 7.6, 7.7 y 7.8, los errores son del orden del 5% a excepción de algunos casos particulares en los que se supera este valor. Esto ocurre, en general, cuando las cargas críticas comparadas son muy pequeñas y, por lo tanto, las diferencias relativas entre cargas críticas no son tan grandes. Por su parte, los tiempos de cálculo de los problemas de optimización no superaron los 20 segundos, realizando

alrededor de 80 iteraciones.

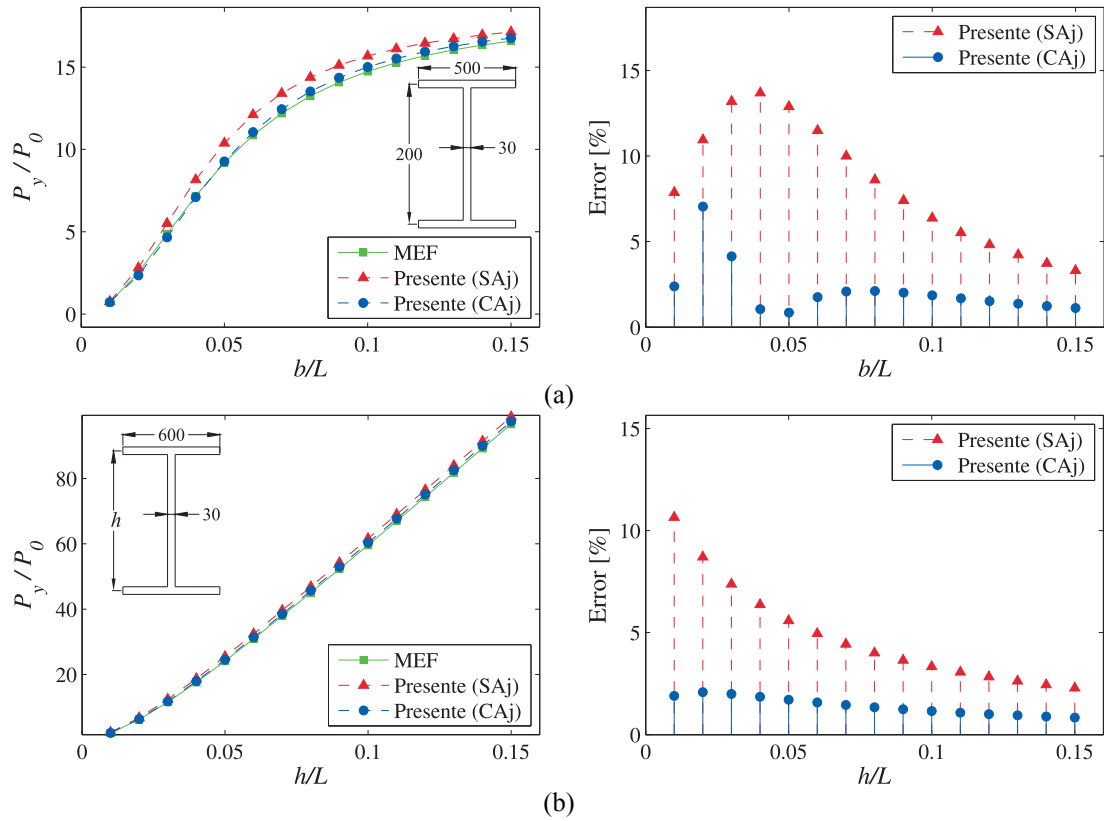


Figura 7.7. Cargas críticas axiales  $P_y$ ,  $[0_2]_s$ , (a) variación de  $L$ ; (b) variación de  $h$ ,  $L = 6m$ .

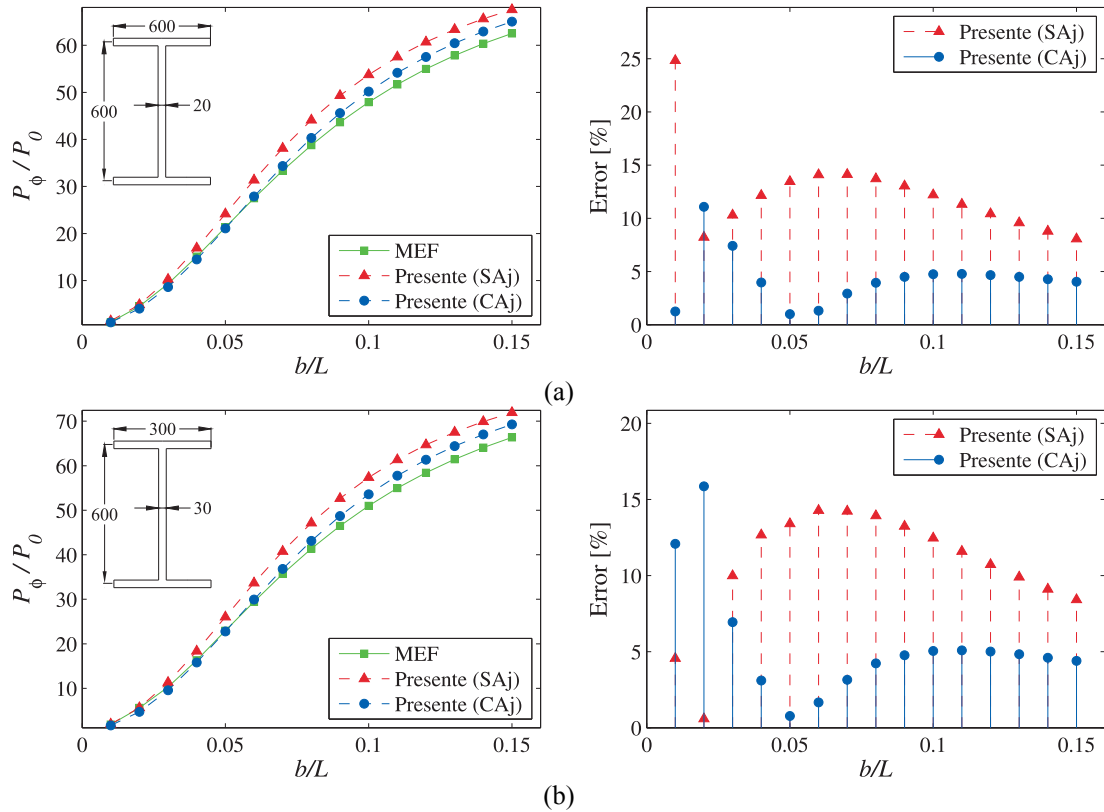


Figura 7.8. Cargas críticas axiales  $P_\phi$ ,  $[0_2]_s$ , (a) y (b) variación de  $L$ .

Las Figuras 7.9, 7.10, 7.11 y 7.12 muestran los valores de la carga crítica axial mínima

para una viga bi-empotrada, sometida únicamente a una carga axial de compresión. La sección transversal de la misma es un perfil I con laminación  $[0_2]_s$  y se varían  $b$ ,  $h$ ,  $e$  y  $L$  en forma independiente. Bajo estas condiciones, los errores porcentuales calculados según (7.3) no superan el 9%.

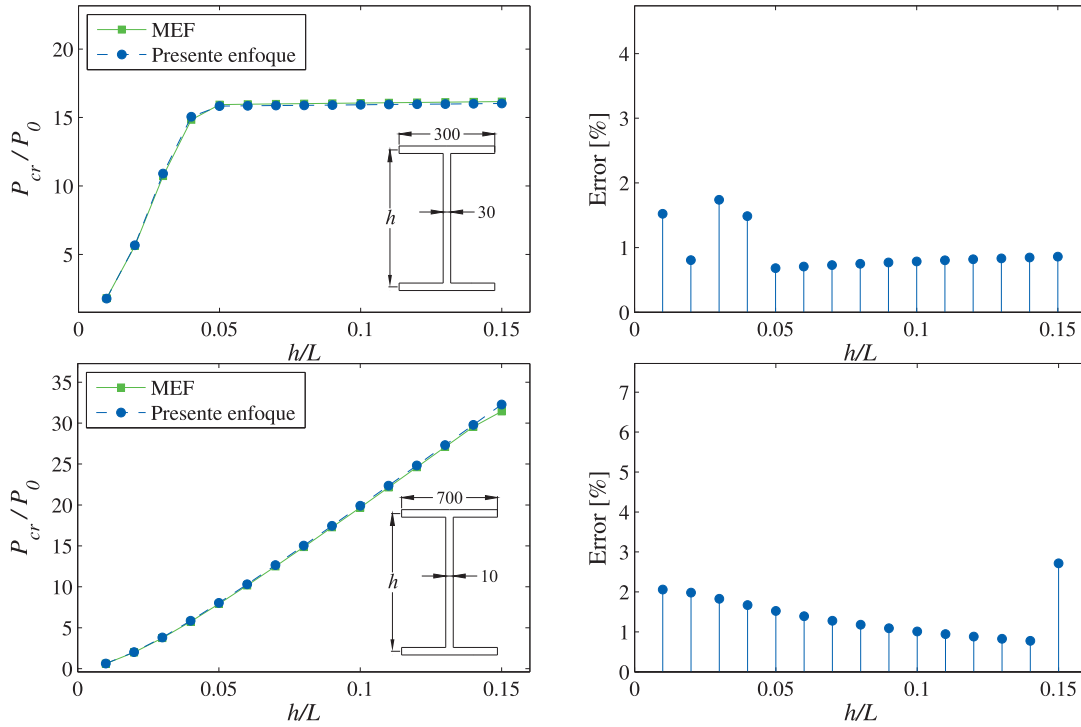


Figura 7.9. Carga crítica axial mínima variando  $h$ ,  $[0_2]_s$ ,  $L = 6\text{m}$ .

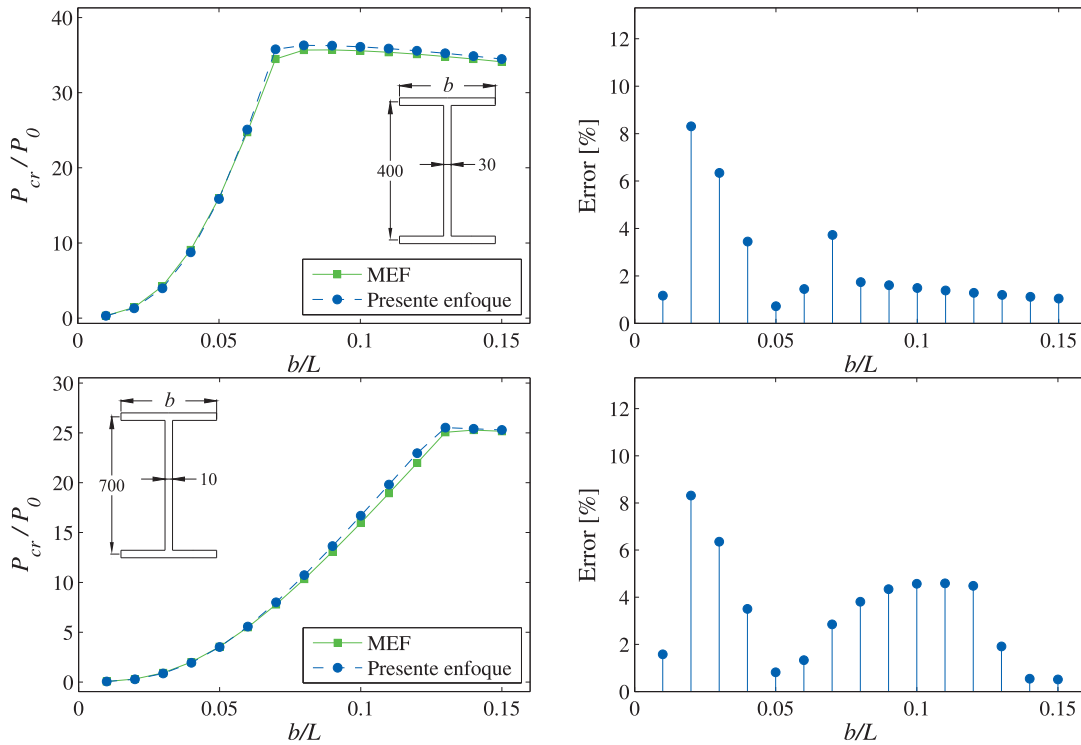


Figura 7.10. Carga crítica axial mínima variando  $b$ ,  $[0_2]_s$ , (a)  $L = 6\text{m}$ ; (b)  $L = 7\text{m}$ .

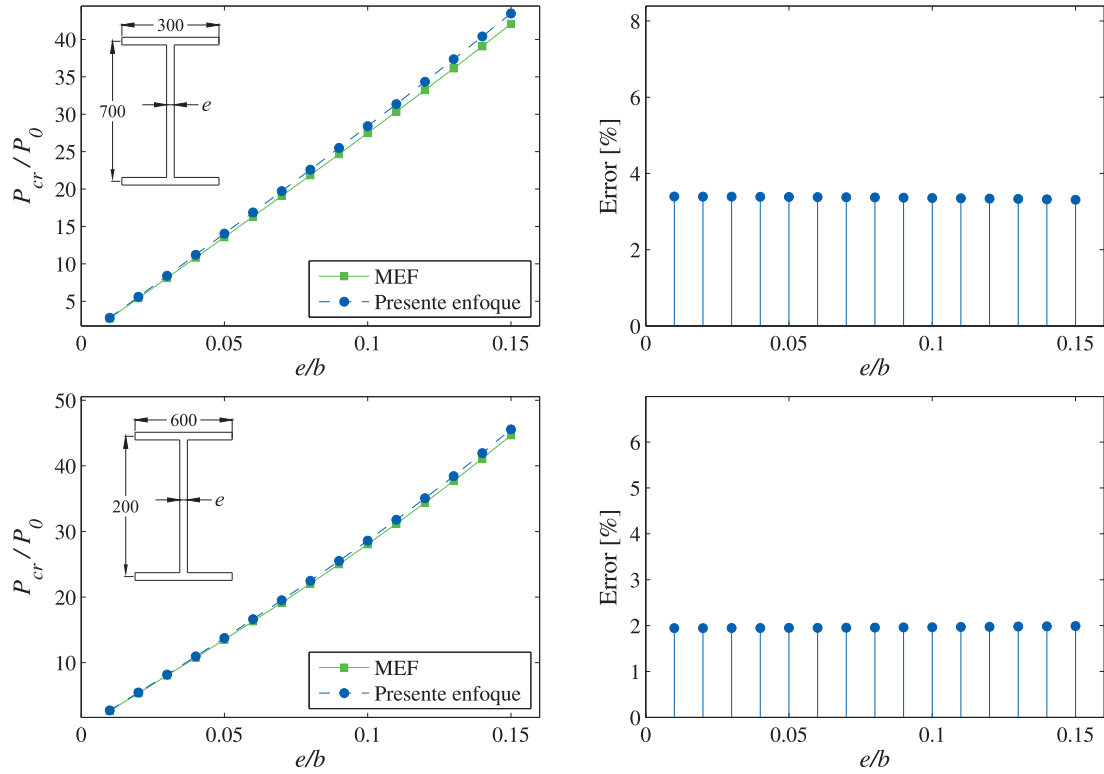


Figura 7.11. Carga crítica axial mínima variando  $e$ ,  $[0_2]_s$ , (a)  $L = 4\text{m}$ ; (b)  $L = 6\text{m}$ .

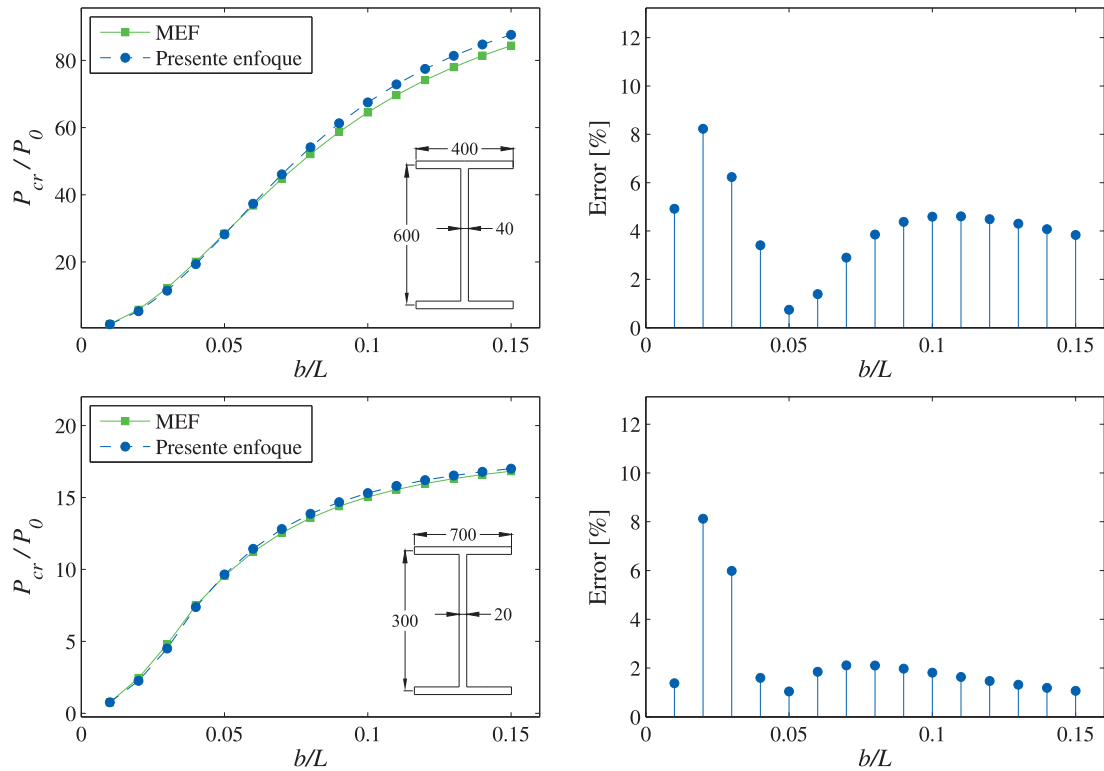


Figura 7.12. Carga crítica axial mínima variando  $L$ ,  $[0_2]_s$ .

Las Figuras 7.13 y 7.14 muestran los resultados obtenidos al analizar una viga con las mismas condiciones que en el caso anterior pero con laminación  $[0/90]_s$ . En este caso se observa que los errores relativos porcentuales promedio varían entre un 2% y un 8%, con picos de 20% y 15% en las Figuras 7.13(c) y 7.14(d), respectivamente, para valores

pequeños de  $b/L$ , los cuales se corresponden con valores pequeños de la carga crítica.

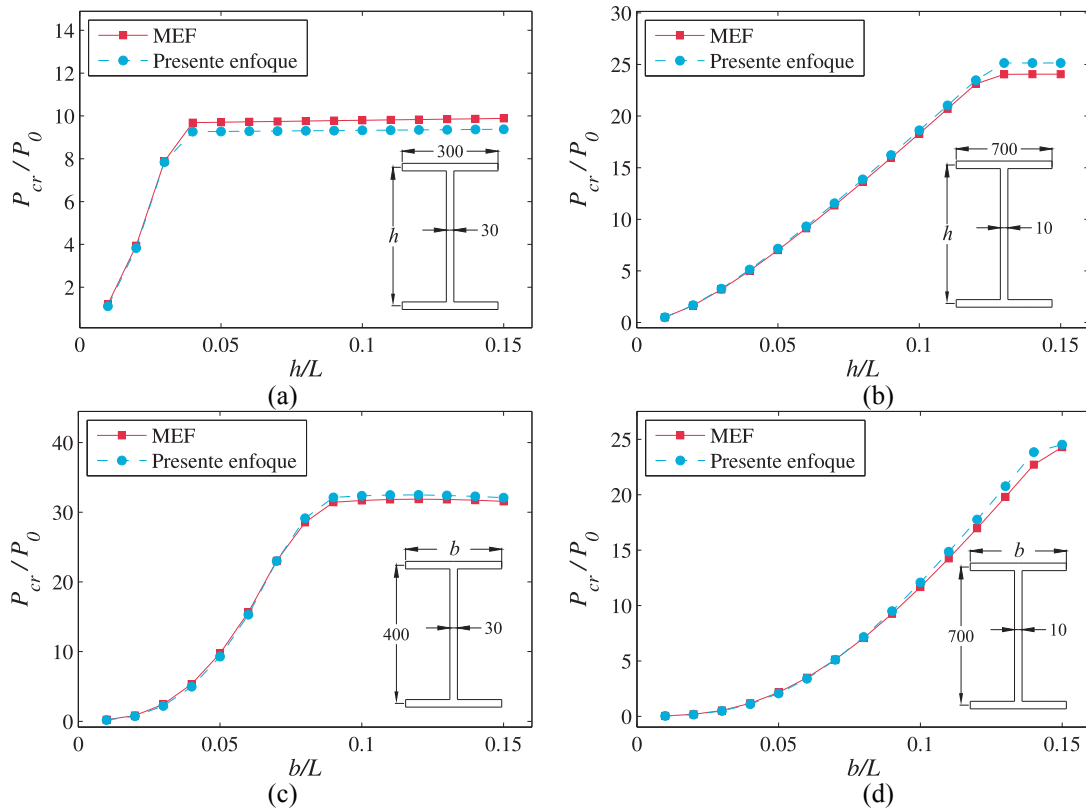


Figura 7.13. Carga crítica axial mínima,  $[0/90]_s$ , (a) y (b) variación de  $h$ ,  $L = 6\text{m}$ ; (c) y (d) variación de  $b$ ,  $L = 6\text{m}$  y  $L = 4\text{m}$ , respectivamente.

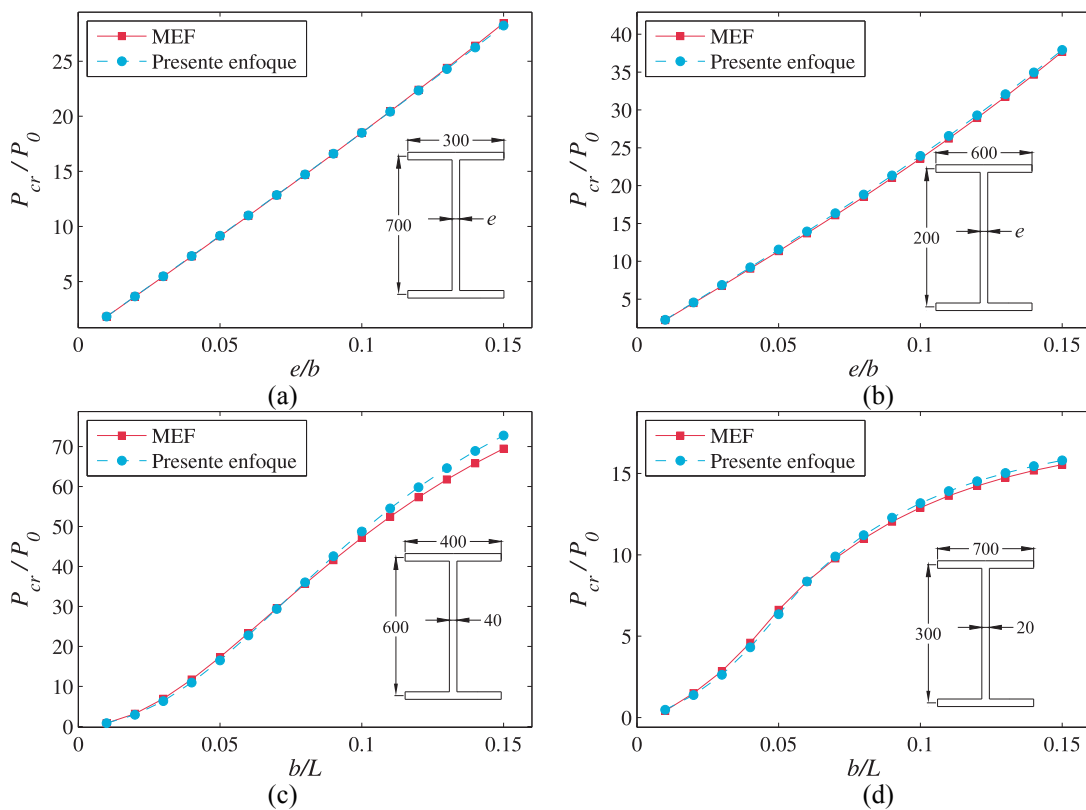


Figura 7.14. Carga crítica axial mínima,  $[0/90]_s$ , (a) y (b) variación de  $e$ ,  $L = 4\text{m}$  y  $L = 6\text{m}$ ; (c) y (d) variación de  $L$ .



En las Figuras 7.15, 7.16, 7.17 y 7.18 se comparan los valores de la carga crítica axial mínima de una viga de perfil rectangular en las que se varían los valores de  $h$ ,  $b$ ,  $e$  y  $L$ , respectivamente, compuesta con laminación  $[0_2]_s$ . Las mismas comparaciones se muestran en las Figuras 7.19, 7.20, 7.21 y 7.22 para vigas con laminación  $[0/90]_s$ .

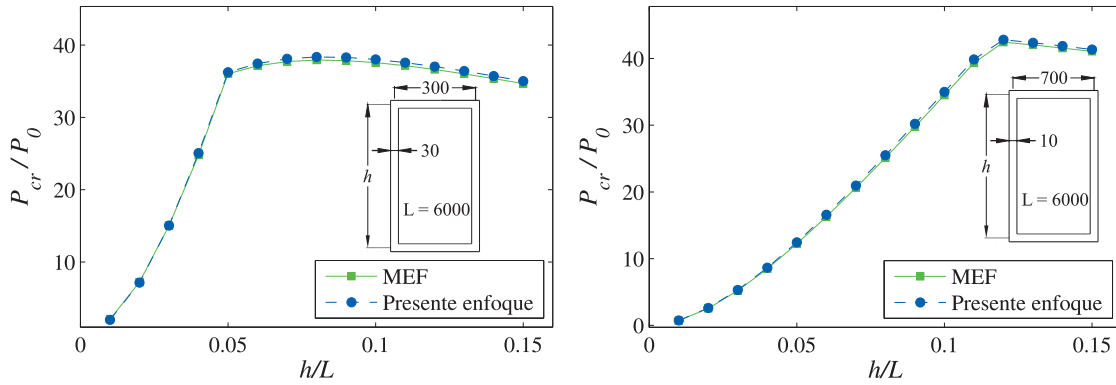


Figura 7.15. Carga crítica axial mínima,  $[0_2]_s$ , variación de  $h$ .

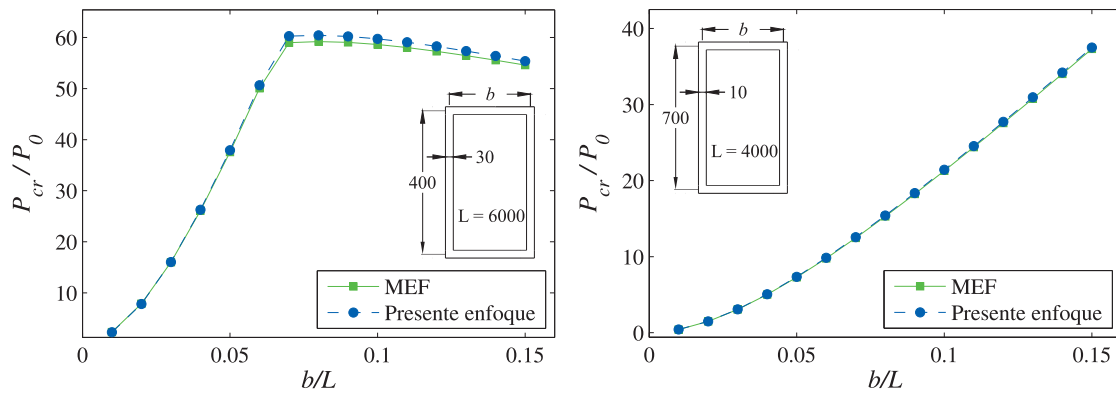


Figura 7.16. Carga crítica axial mínima,  $[0_2]_s$ , variación de  $b$ .

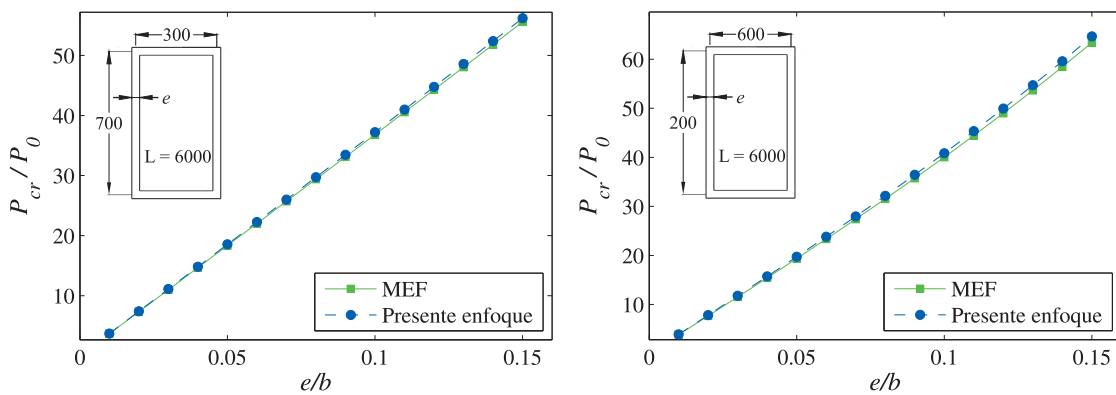


Figura 7.17. Carga crítica axial mínima,  $[0_2]_s$ , variación de  $e$ .

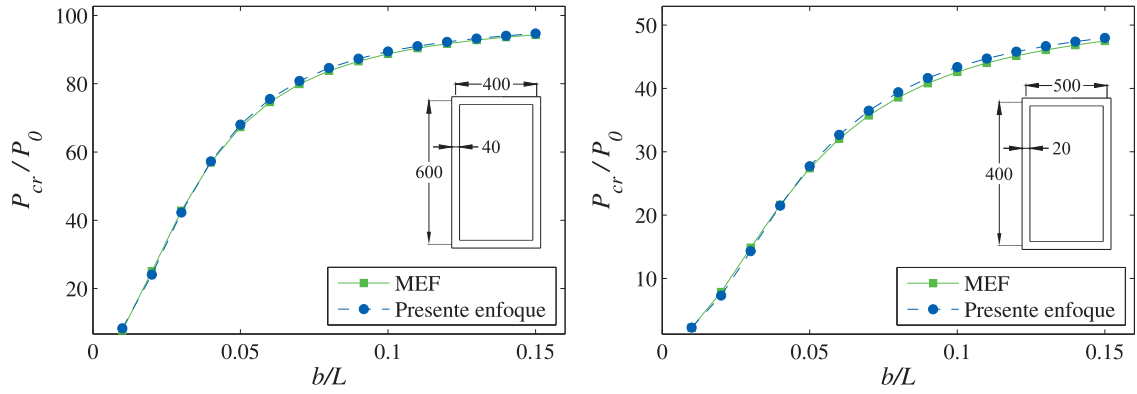


Figura 7.18. Carga crítica axial mínima,  $[0_2]_s$ , variación de  $L$ .

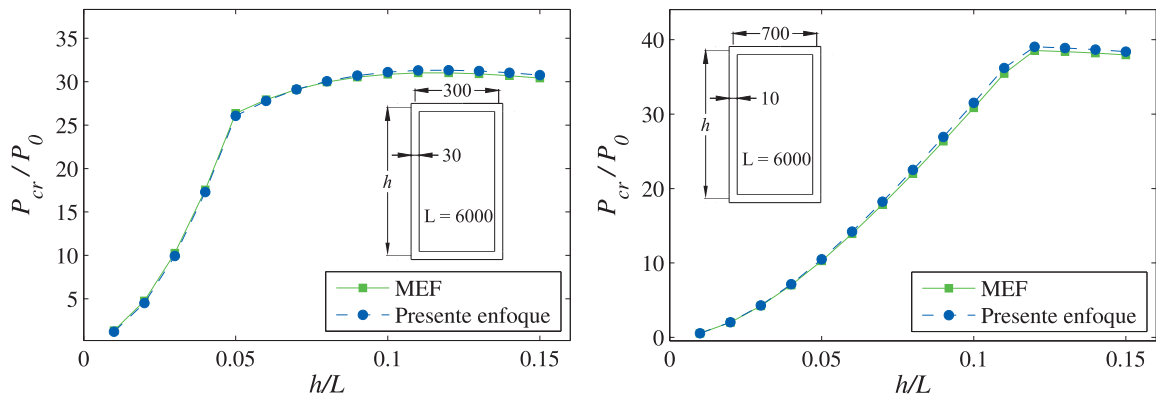


Figura 7.19. Carga crítica axial mínima,  $[0/90]_s$ , variación de  $h$ .

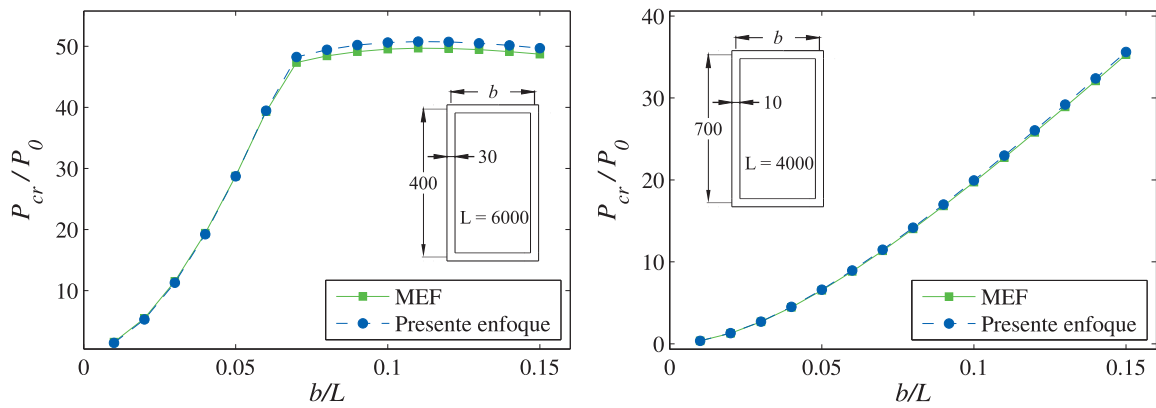


Figura 7.20. Carga crítica axial mínima,  $[0/90]_s$ , variación de  $b$ .

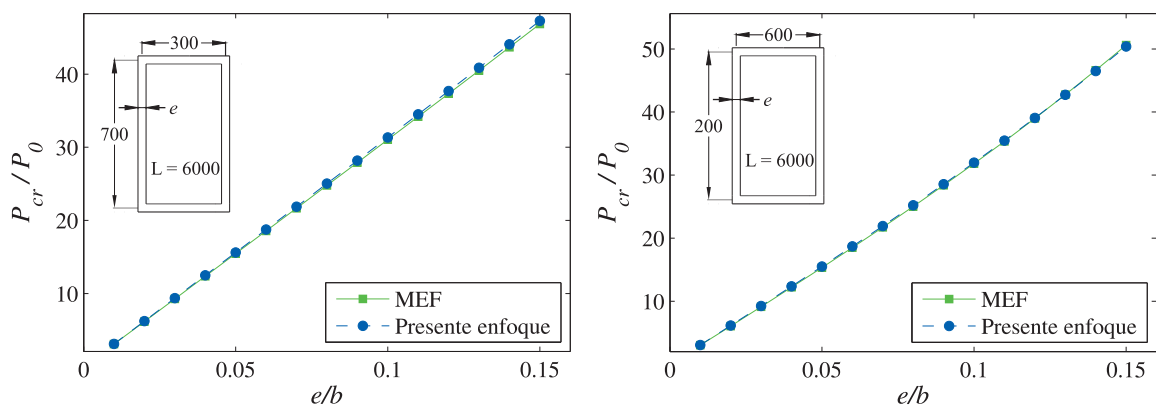


Figura 7.21. Carga crítica axial mínima,  $[0/90]_s$ , variación de  $e$ .

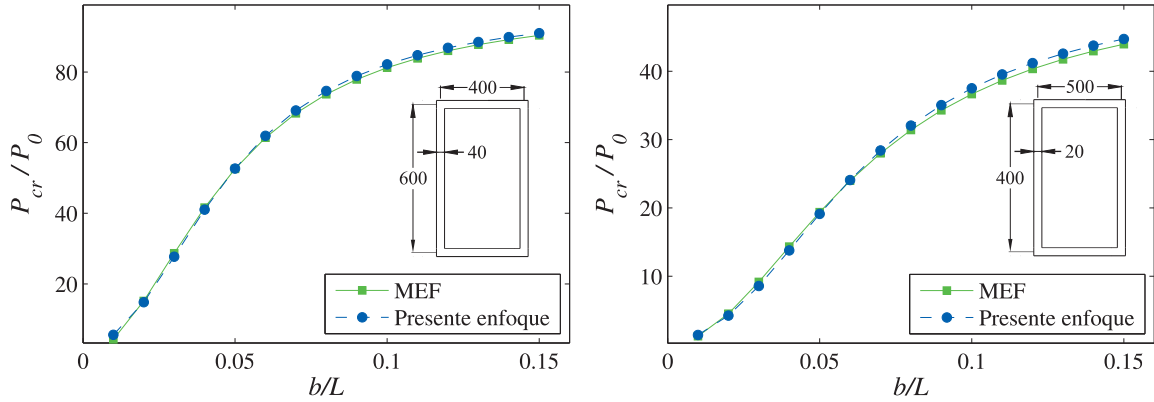


Figura 7.22. Carga crítica axial mínima,  $[0/90]_s$ , variación de  $L$ .

Para el estado de flexo-compresión que se indica en la Figura 7.1(c), a continuación se presentan los resultados obtenidos al evaluar las expresiones analíticas dadas por las ecuaciones (4.91-4.94), introduciendo los coeficientes dados por (4.102-4.104) y considerando los valores de los parámetros de ajuste  $\bar{\eta}_i$  hallados anteriormente (ver Tabla 7.1).

Primeramente, se resuelve un nuevo problema de optimización para encontrar las constantes  $x_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) que intervienen en la expresión (4.107) que define al parámetro  $\bar{\eta}_0$ . La función objetivo a minimizar está dada por el error medio cuadrático expresado de la siguiente manera

$$f(x_j) = \sqrt{\frac{\sum_{k_1=1}^n (e_{0,k_1}^M)^2}{n}}, \quad (7.4)$$

siendo

$$e_{0,k_1}^M = \frac{(M_{cr}^{MEF})_{0,k_1} - (M_{cr}^{PE})_{0,k_1}}{(M_{cr}^{MEF})_{0,k_1}}, \quad k_1 = 1, 2, \dots, n, \quad (7.5)$$

donde  $n$  es el número total de casos evaluados en este caso y el subíndice “0” indica que sólo se contemplan los casos en que  $P = 0$ . Nuevamente, el problema de optimización se resuelve aplicando las rutinas de algoritmo genético incluidas en la programación de MATLAB<sup>®</sup>. Los tiempos de cálculo resultantes son pequeños, al igual que en el problema anterior, resolviendo el problema en un total de 25 segundos, en menos de 100 iteraciones.

Los resultados de la optimización indican que, en el caso de un perfil tipo I, el parámetro de ajuste  $\bar{\eta}_0$  puede ser expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_0 &= 0.59 \frac{b}{h} - 0.03 \frac{L}{h} + 0.06 \frac{L}{b} - 0.47 \frac{e}{h}, & \text{si } \theta_k = 0^\circ, \\ \bar{\eta}_0 &= 0.81 \frac{b}{h} - 0.06 \frac{L}{h} + 0.07 \frac{L}{b} + 0.12 \frac{e}{h}, & \text{si } \theta_k = (0^\circ, 90^\circ).\end{aligned}\quad (7.6)$$

Mientras que, en el caso de un perfil cajón, el parámetro de ajuste  $\bar{\eta}_0$  es expresado de la forma

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_0 &= 1.33 \frac{b}{h} - 0.07 \frac{L}{h} + 0.07 \frac{L}{b} - 1.57 \frac{e}{h}, & \text{si } \theta_k = 0^\circ, \\ \bar{\eta}_0 &= 1.27 \frac{b}{h} - 0.07 \frac{L}{h} + 0.08 \frac{L}{b} - 1.99 \frac{e}{h}, & \text{si } \theta_k = (0^\circ, 90^\circ).\end{aligned}\quad (7.7)$$

Luego, reemplazando estas expresiones, según corresponda, en la ecuación (4.102) se obtiene el coeficiente  $\eta_0$  que interviene en la fórmula del momento crítico dado por (4.91).

Las Figuras 7.23 y 7.24 muestran la relación entre las cargas críticas axiales y los momentos críticos correspondientes a una viga sujeta a las condiciones de borde expuestas en la Figura 7.1(c) con laminación  $[0_2]$  y  $[0/90]_s$ , respectivamente. Allí se comparan los resultados obtenidos mediante el enfoque analítico y empleando el enfoque numérico. Los mismos se indican como “Presente enfoque” y “MEF”, respectivamente. La carga crítica flexional  $M_{cr}$  es escalada con la carga crítica de referencia  $M_0$  ( $P = 0$ ), mientras que la carga crítica axial  $P_{cr}$  es escalada respecto de la carga crítica axial de referencia  $P_0$  ( $M = 0$ ). Ambas cargas de referencia son evaluadas según el modelo de elementos finitos. Además, en las figuras mencionadas se grafican los errores cometidos empleando el enfoque analítico, según el siguiente criterio

$$e^M = 100 \frac{M_{y,cr}^{MEF} - M_{y,cr}^{PE}}{M_0}, \quad e^P = 100 \frac{P_{cr}^{MEF} - P_{cr}^{PE}}{P_0}. \quad (7.8)$$

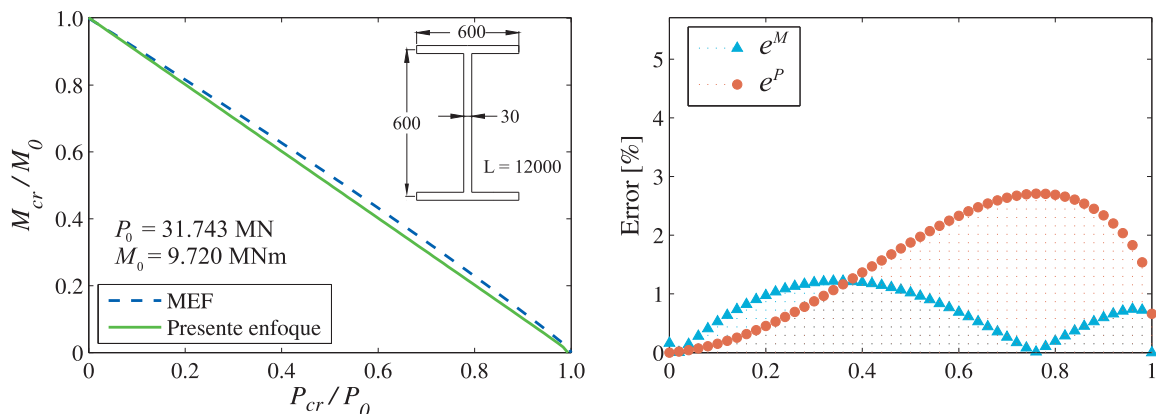


Figura 7.23. Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo I con laminación  $[0_2]_s$ .

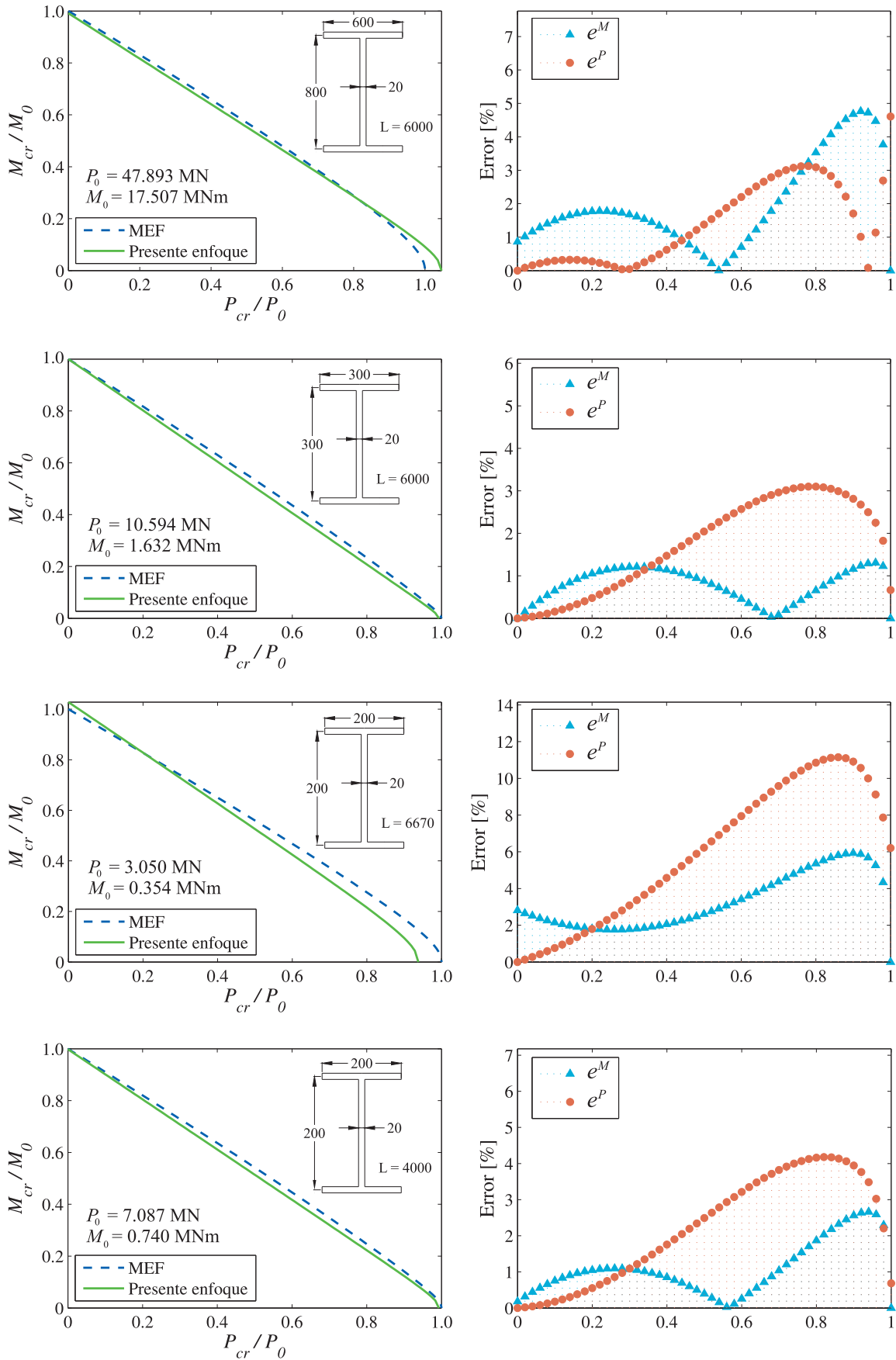


Figura 7.23 (cont.). Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo I con laminación  $[0_2]_s$ .

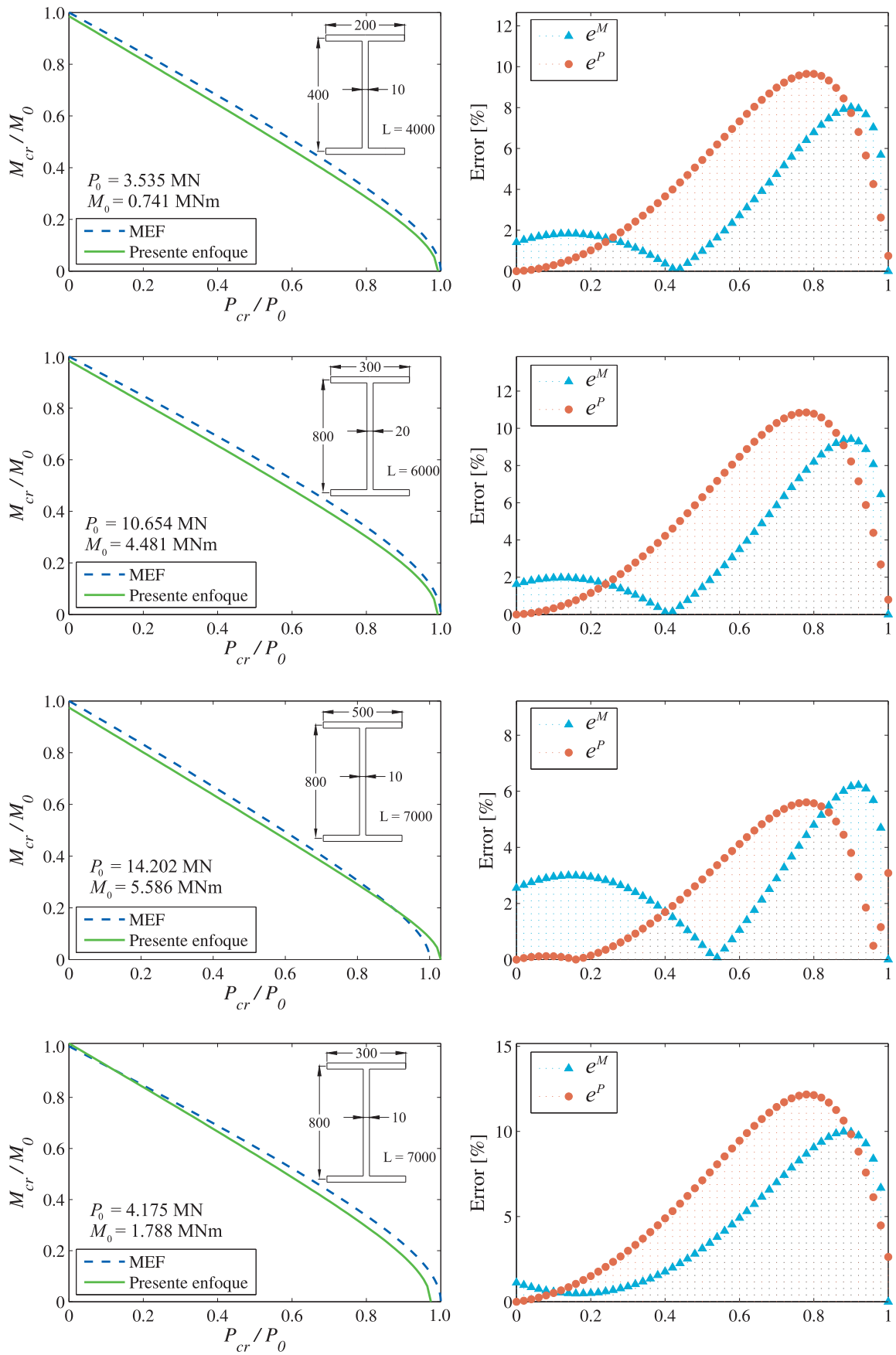


Figura 7.23 (cont.). Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo I con laminación  $[0_2]_s$ .

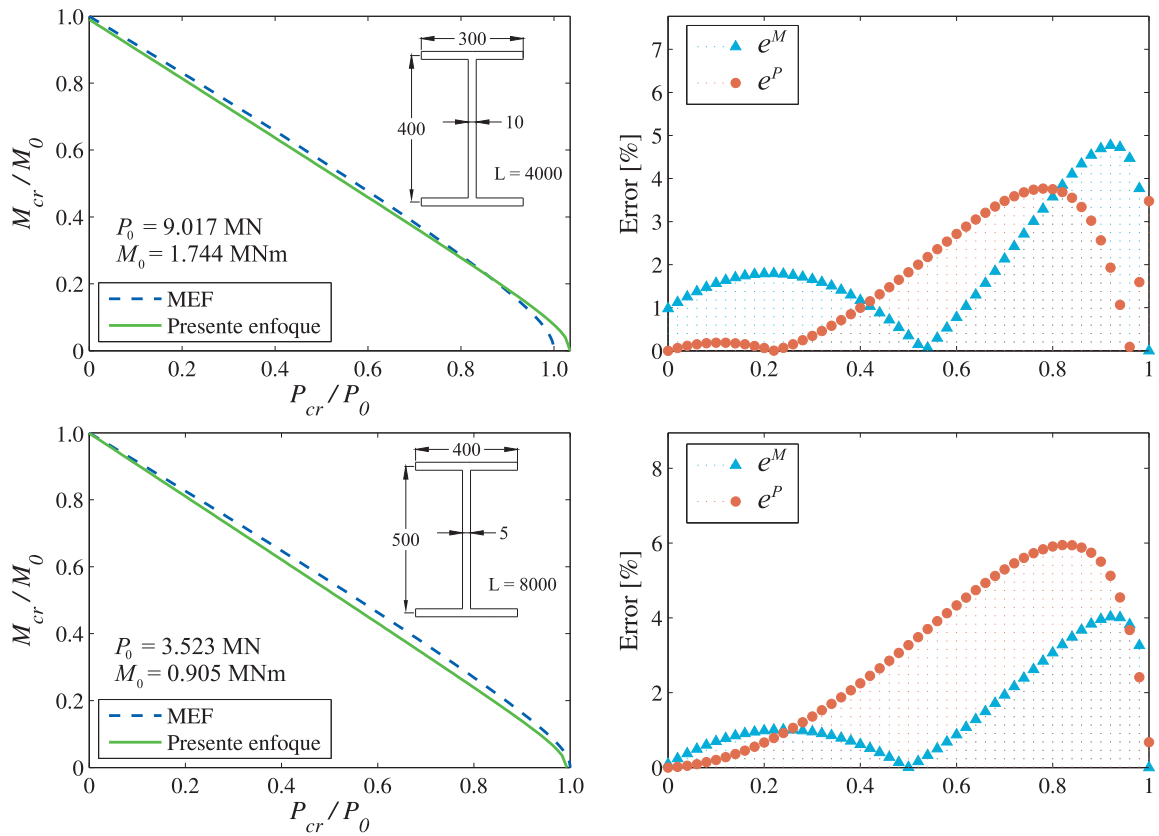


Figura 7.23 (cont.). Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo I con laminación  $[0_2]_s$ .

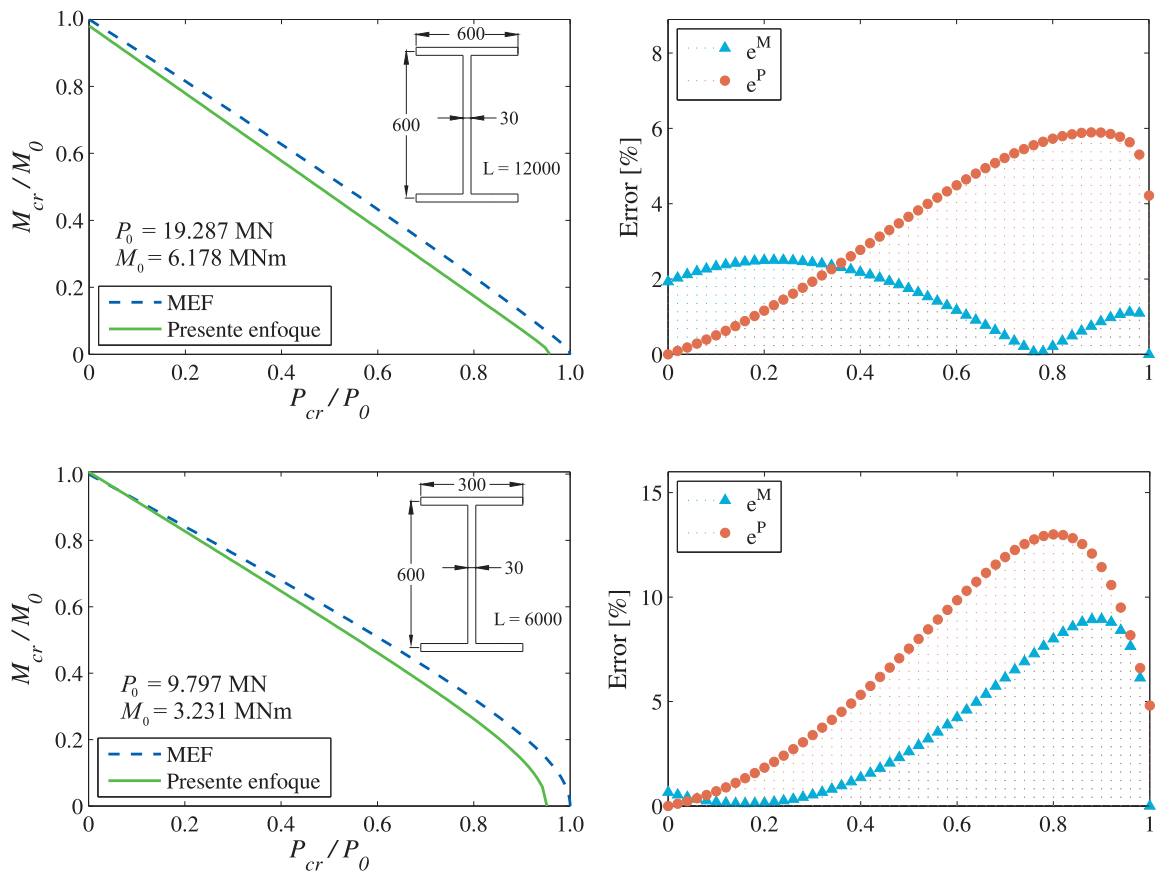


Figura 7.24. Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo I con laminación  $[0/90]_s$ .

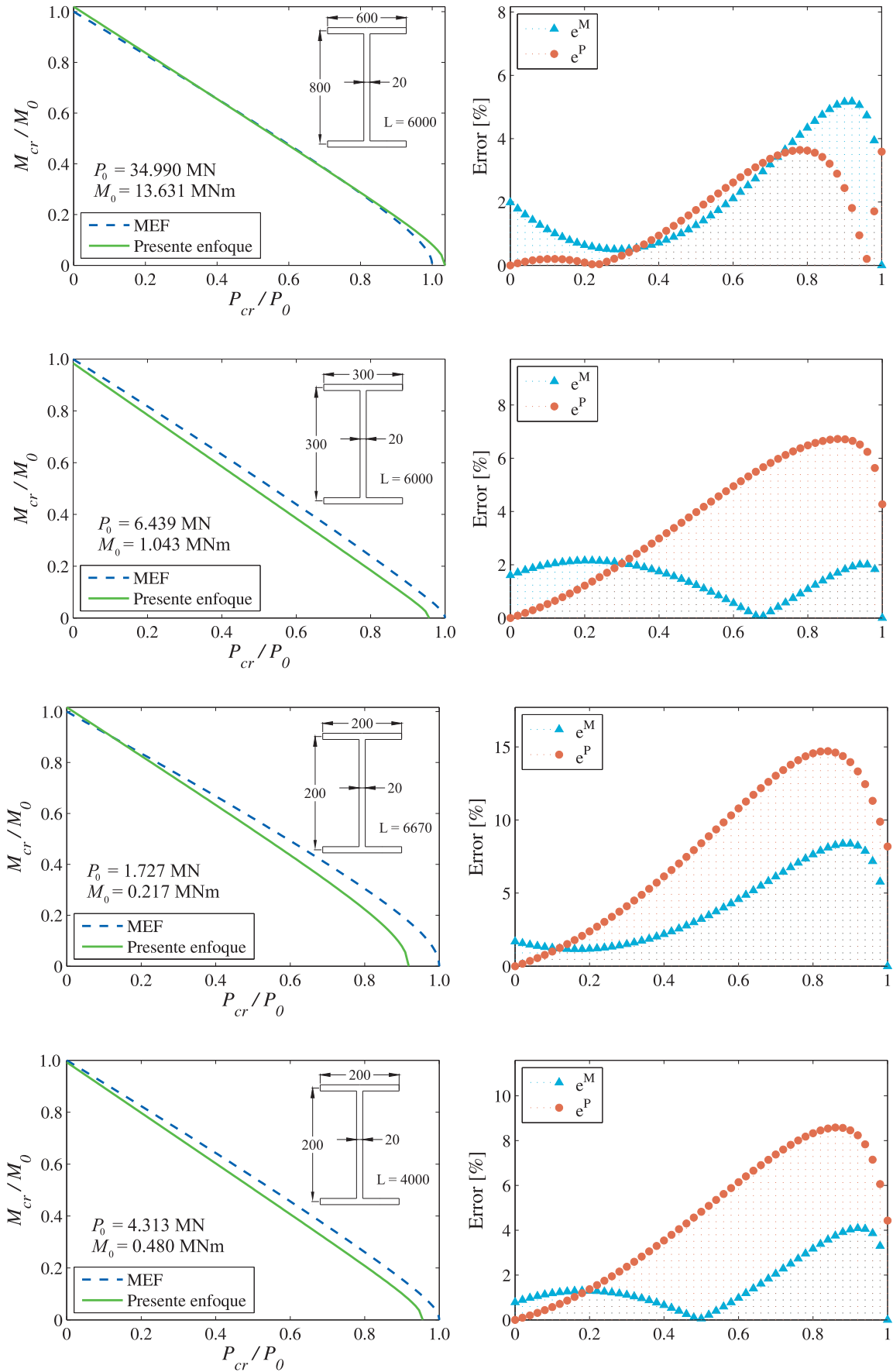


Figura 7.24 (cont.). Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo I con laminación [0/90].s.



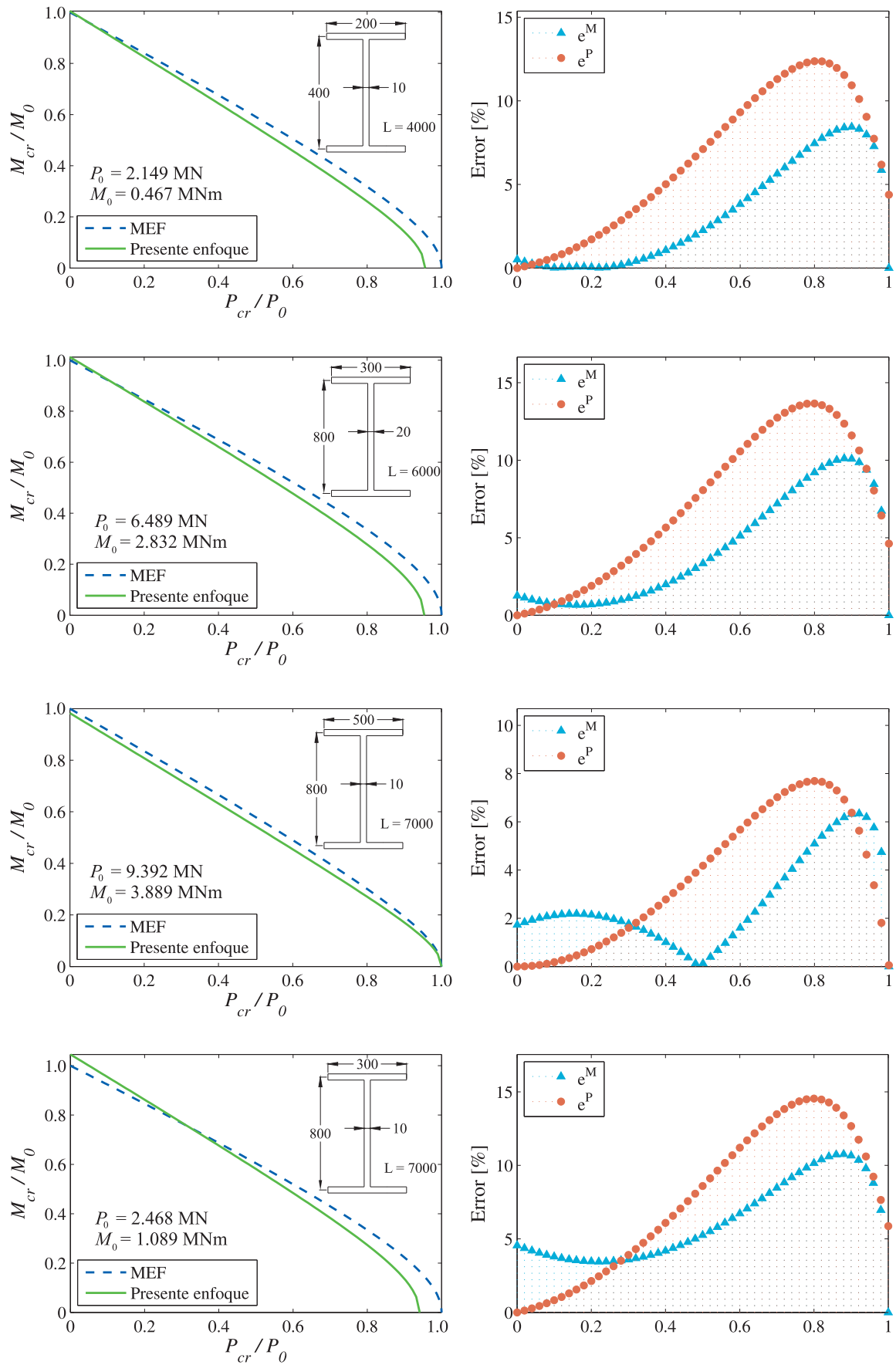


Figura 7.24 (cont.). Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo I con laminación [0/90].

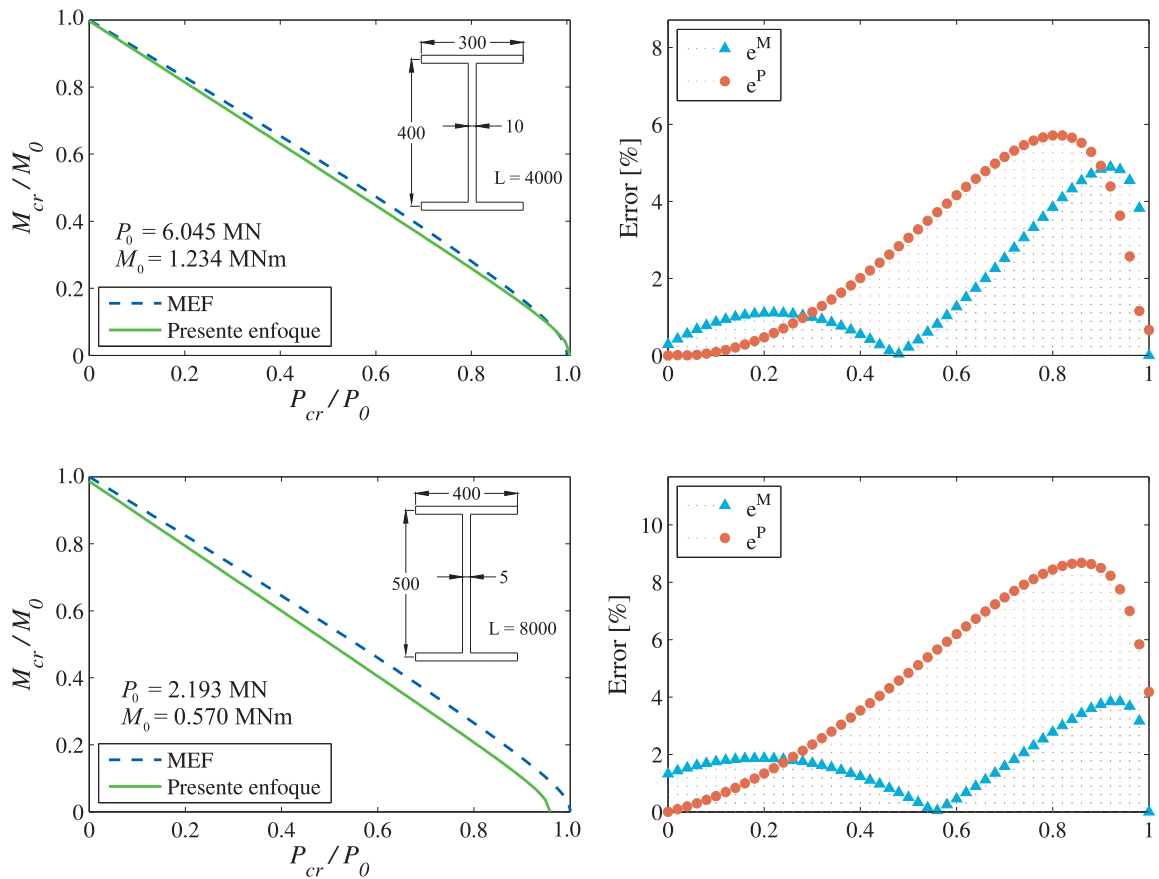


Figura 7.24 (cont.). Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo I con laminación  $[0/90]_s$ .

Los errores graficados en las Figuras 7.23 y 7.24 son del orden del 8%, a excepción de algunos casos particulares en los que se acercan al 12%. En las Figuras 7.25 y 7.26 se exponen las curvas que relacionan las cargas críticas de flexo-compresión para el caso de vigas FRP de sección cajón con laminaciones  $[0_2]_s$  y  $[0/90]_s$ , respectivamente. En dichos ejemplos los errores no superan el 15%.

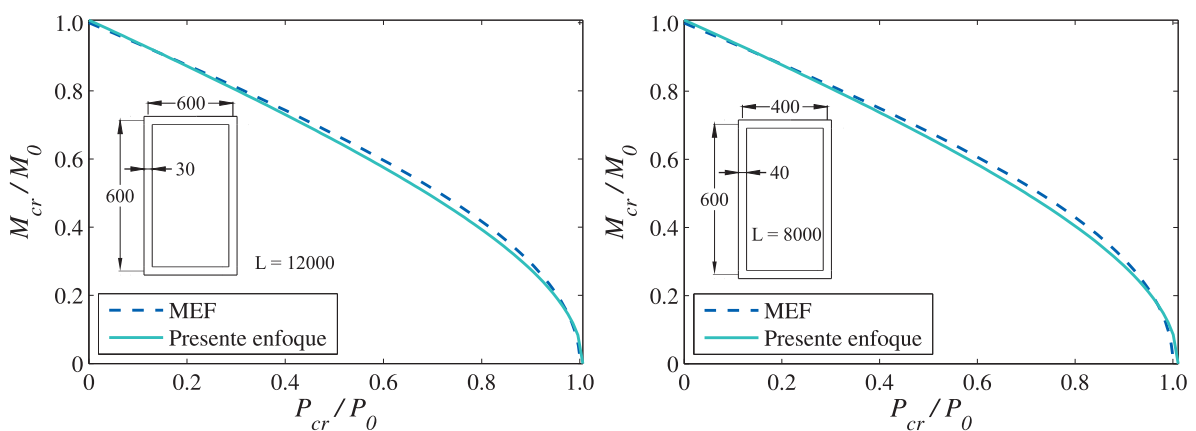


Figura 7.25. Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo cajón con laminación  $[0_2]_s$ .

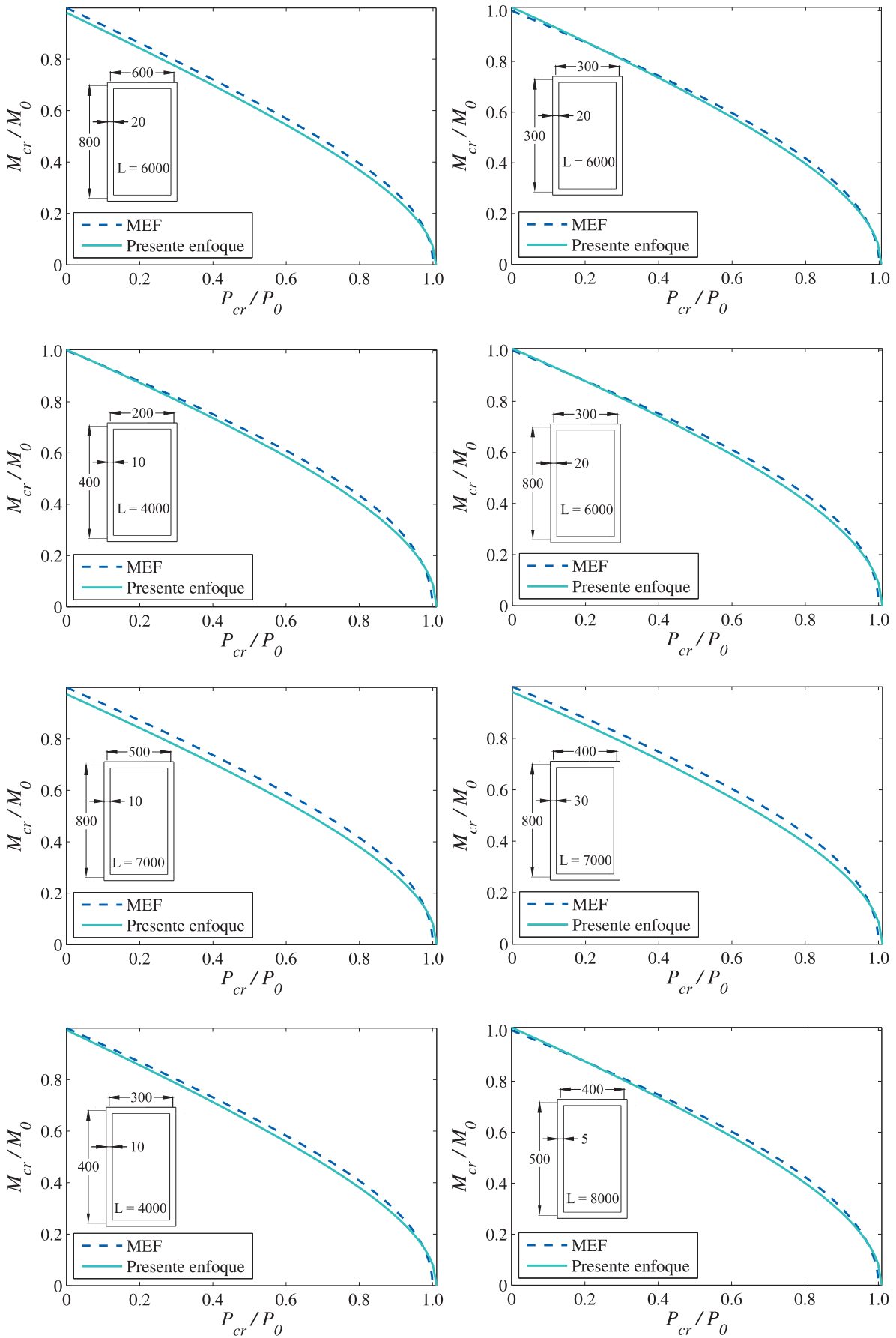


Figura 7.25 (cont.). Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo cajón con laminación  $[0_2]_s$ .

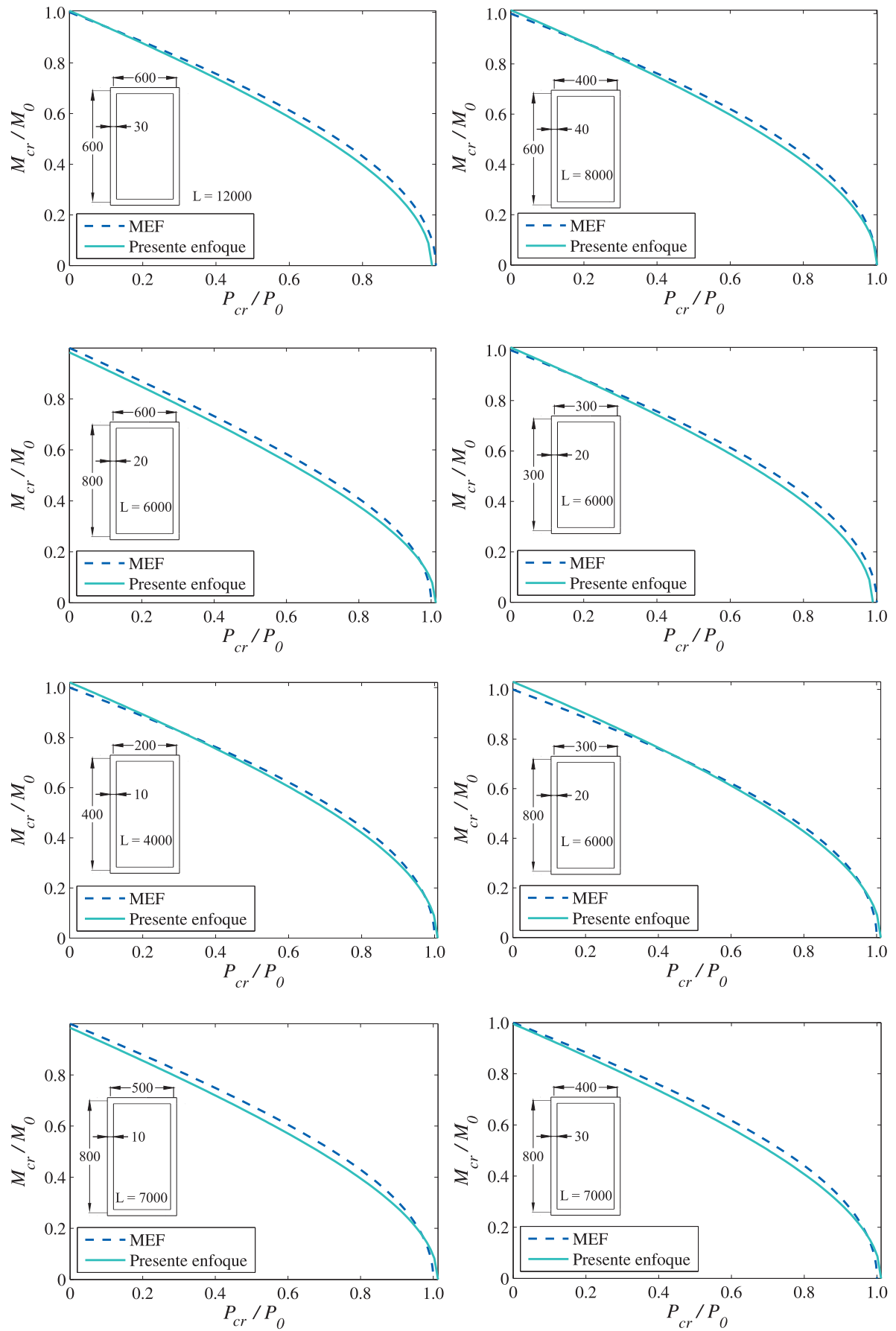


Figura 7.26. Relación entre cargas críticas de pandeo,  $[0/90]_s$ .

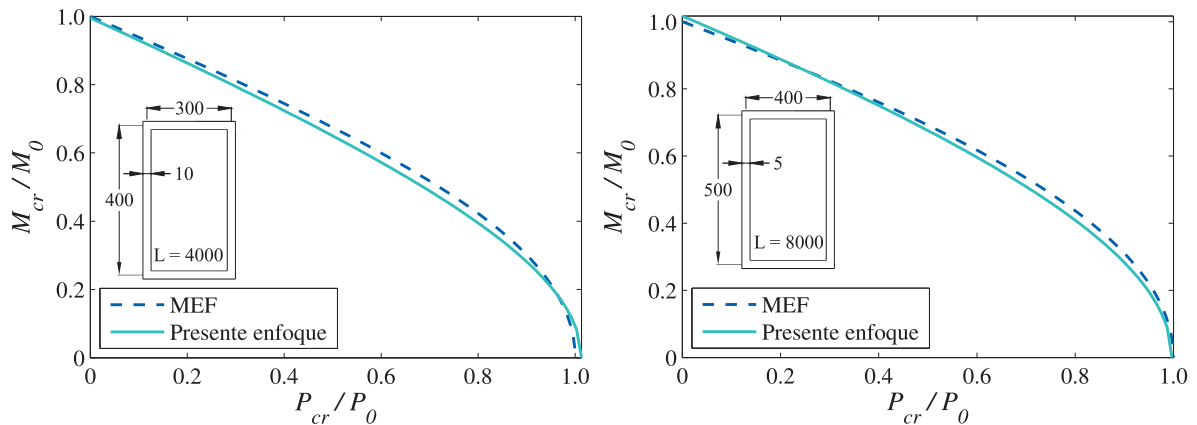


Figura 7.26 (cont.). Relación entre cargas críticas de pandeo, en vigas tipo cajón con laminación  $[0/90]_s$ .

Los errores cometidos en la implementación de las fórmulas analíticas en el caso de vigas bi-empotradas se consideran aceptables para la obtención de un diseño preliminar de la estructura. Cabe aclarar que, para este tipo de vinculación, no se hallaron buenos resultados en vigas con laminación  $[\pm 45_n]_s$ . Es por ello que no se emplearán estos laminados en las aplicaciones del esquema de diseño DO4 cuando se analicen vigas doblemente empotradas.

### 7.3 Pandeo local de vigas FRP de pared delgada

En esta sección se validan las expresiones analíticas desarrolladas en la sección 4.4 del Capítulo 4, las cuales determinan los parámetros críticos de pandeo local en vigas FRP de pared delgada de sección abierta y cerrada, con laminación ortótropa o *cross-ply*. Las validaciones se realizan, en primer lugar, en vigas de eje recto y, luego, en vigas de eje curvo. Para ello, los resultados analíticos, obtenidos según lo expuesto en la sección 4.4.3, son comparados con resultados experimentales simulados en ABAQUS 6.7<sup>®</sup>. Para la determinación de las resultantes de tensión en el espesor que intervienen en el cálculo analítico, aquí se emplea el modelo de elementos finitos unidimensional desarrollado en el Capítulo 6, utilizando el elemento con deformación por corte constante para el caso de vigas rectas y el elemento isoparamétrico en el caso de vigas curvas. Sin embargo, es necesario aclarar que cuando se emplee un enfoque completamente analítico para realizar el análisis estructural, como en el caso del esquema de diseño DO4, no es necesario emplear el mencionado modelo de elementos finitos para hallar las resultantes de tensión en el espesor. En tal caso, éstas pueden ser determinadas en forma directa a partir de los valores de las tensiones obtenidas de acuerdo a las expresiones dadas en la sección 4.3.1 del Capítulo 4.

En la Figura 7.27 se muestran esquemáticamente las condiciones de borde y los estados de carga que serán analizados a continuación y se designa la nomenclatura empleada en cada caso. En los cálculos se utiliza un material transversalmente isótropo compuesto por fibras de vidrio tipo E y viniléster, cuyas propiedades se detallan en el Apéndice I.

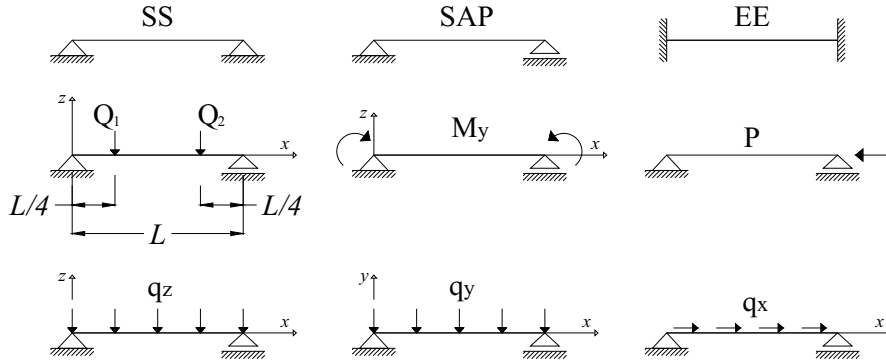


Figura 7.27. Estados de carga y condiciones de borde consideradas en el análisis de pandeo local.

### 7.3.1. Vigas de eje recto

En este apartado se exponen las validaciones realizadas para vigas FRP de eje recto. En las figuras que se muestran a continuación, los resultados analíticos se referencian como “Presente” y los resultados numéricos como “ABAQUS”. En cada figura se indica el tipo de sección analizada, sus dimensiones en milímetros y el estado de carga al que está sometida la viga.

Los errores relativos porcentuales que se indican en los gráficos son evaluados según la siguiente expresión

$$\varepsilon^{Pe} = 100 \frac{\lambda^{Pe} - \lambda^{AB}}{\lambda^{AB}}, \quad (7.9)$$

donde los superíndices *Pe* y *AB* hacen referencia a los cálculos realizados mediante el presente enfoque y mediante ABAQUS 6.7<sup>®</sup>, respectivamente.

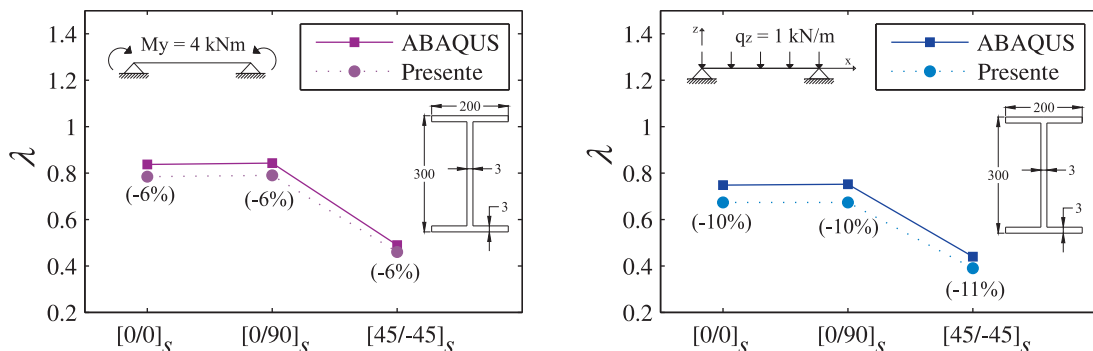


Figura 7.28. Parámetro de carga crítica para una viga I de 6 m de longitud.

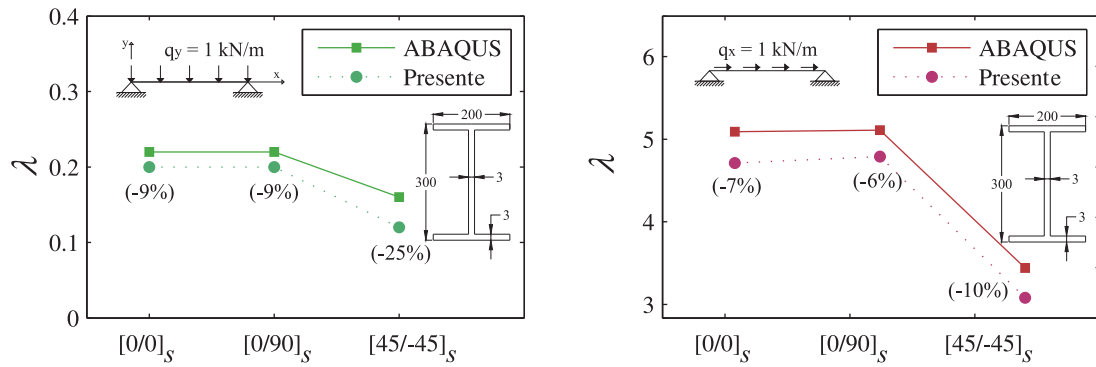


Figura 7.28 (cont.). Parámetro de carga crítica para una viga I de 6 m de longitud.

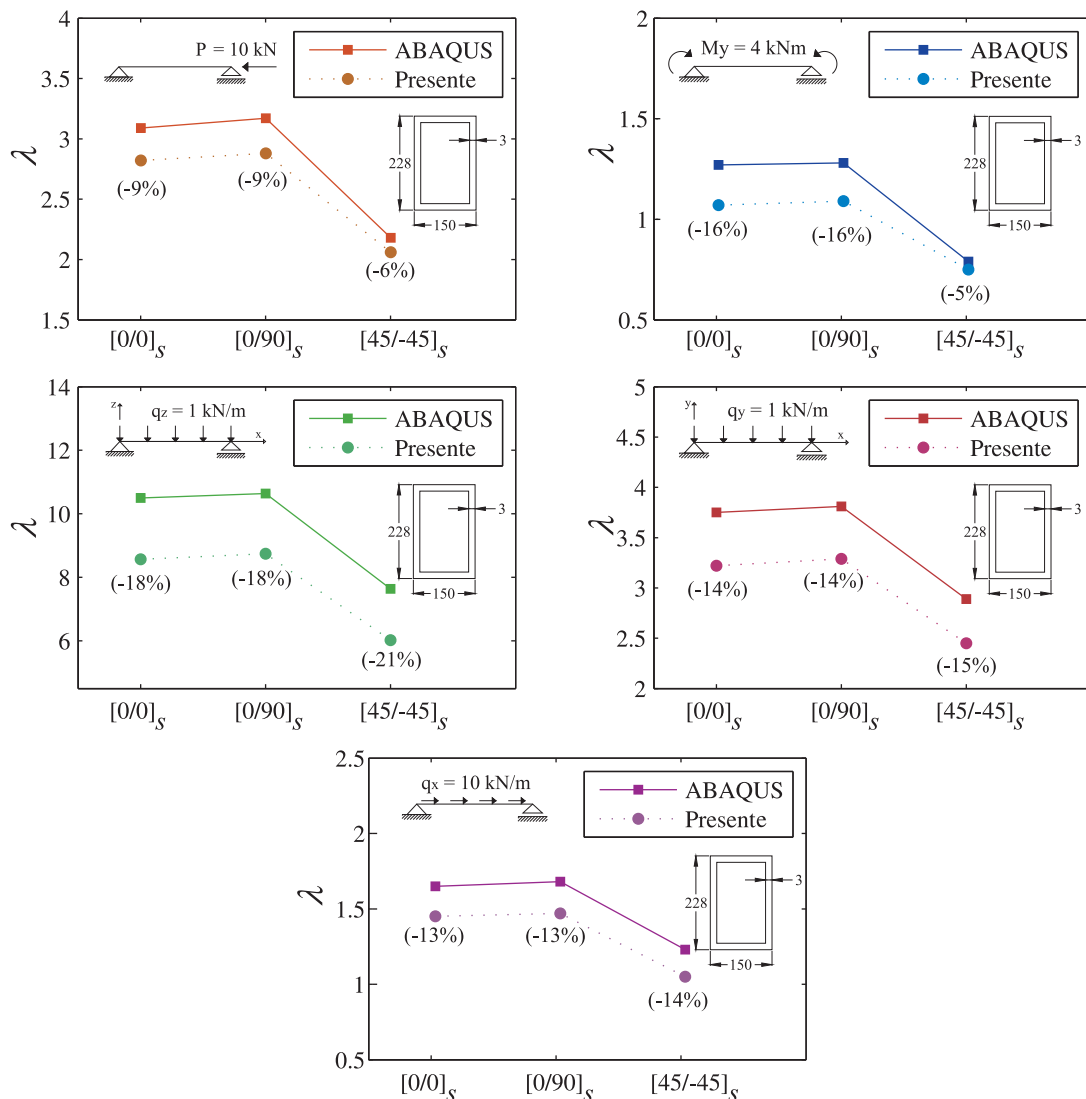


Figura 7.29. Parámetro de carga para una viga cajón de 2 m de longitud.

Las Figuras 7.28 y 7.29 muestran los parámetros críticos de pandeo local de vigas doblemente apoyadas (SS) de sección transversal tipo I y cajón, respectivamente. Allí se observa que los errores encontrados son del orden del 10%, a excepción de algún caso particular. Sin embargo, en todos los casos analizados dichos errores son negativos, lo que significa que la carga crítica calculada analíticamente es inferior a la obtenida en forma

numérica. Por lo tanto, los cálculos analíticos son más conservativos y están del lado de la seguridad.

En las Tablas 7.2, 7.3 y 7.4 se muestran los valores de parámetros críticos de vigas simple y doblemente apoyadas (SAP y SS, respectivamente) obtenidos por medio de: (a) el enfoque analítico presentado en esta tesis, “ $Pe$ ”; (b) el enfoque analítico presentado por Tarján *et al* (2009), “ $KL$ ”; y (c) modelos tridimensionales de elementos tipo lámina realizados en ABAQUS 6.7<sup>®</sup>, “ $AB$ ”. Cabe aclarar que el enfoque analítico desarrollado por Tarján *et al* (2009) sólo contempla aquellos casos en que la pared de la sección analizada se encuentra restringida rotacionalmente en ambos extremos, como es el caso de todas las paredes de la sección en vigas tipo cajón, o bien, el alma en vigas tipo I. En las tablas se especifica cuál es la pared que pandea primero, haciendo distinción entre “Superior” y “Lateral” para vigas tipo cajón (ambas placas RR), y entre “Alma” y “Ala” para vigas tipo I (placas tipo RR y RF, respectivamente).

Tabla 7.2. Parámetros críticos de una viga simplemente apoyada (SAP) tipo cajón, siendo  $h = 225\text{mm}$ ,  $b = 147\text{mm}$ ,  $e = 3\text{mm}$  y  $L = 2\text{m}$ .

Tipo de carga	Laminado	Pared	$\lambda^{Pe}$	$\lambda^{KL}$	$\lambda^{AB}$	$\varepsilon^{Pe}$
$Q_1 = Q_2 = 8\text{kN}$	[0] <sub>3</sub>	Superior	1.14	1.14	1.26	-9%
	[0/90] <sub>s</sub>	Superior	1.16	1.16	1.28	-9%
	[45/-45] <sub>s</sub>	Superior	0.80	0.80	0.88	-9%
$M_y = 4\text{kN}$	[0] <sub>3</sub>	Superior	1.07	1.06	1.27	-16%
	[0/90] <sub>s</sub>	Superior	1.09	1.08	1.28	-16%
	[45/-45] <sub>s</sub>	Superior	0.75	0.74	0.79	-5%
$P = 10\text{kN}$	[0] <sub>3</sub>	Lateral	2.82	2.81	3.09	-9%
	[0/90] <sub>s</sub>	Lateral	2.88	2.88	3.17	-9%
	[45/-45] <sub>s</sub>	Lateral	2.06	2.06	2.18	-6%
$q_x = 10\text{kN/m}$	[0] <sub>3</sub>	Lateral	1.45	1.44	1.65	-13%
	[0/90] <sub>s</sub>	Lateral	1.47	1.46	1.68	-13%
	[45/-45] <sub>s</sub>	Lateral	1.05	1.06	1.23	-14%
$q_y = 1\text{kN/m}$	[0] <sub>3</sub>	Lateral	3.22	3.06	3.75	-14%
	[0/90] <sub>s</sub>	Lateral	3.29	3.28	3.81	-14%
	[45/-45] <sub>s</sub>	Lateral	2.45	2.24	2.89	-15%
$q_z = 1\text{kN/m}$	[0] <sub>3</sub>	Superior	8.57	8.54	10.50	-18%
	[0/90] <sub>s</sub>	Superior	8.74	8.68	10.64	-18%
	[45/-45] <sub>s</sub>	Superior	6.02	5.96	7.64	-21%

En particular, en las Tablas 7.2 y 7.3 se detallan los valores de los parámetros críticos



correspondientes a los casos expuestos en las Figuras 7.29 y 7.28, respectivamente.

Tabla 7.3. Parámetros críticos de una viga doblemente apoyada (SS) tipo I, siendo  $h = 300$  mm,  $b = 200$  mm,  $L = 6$  m,  $e = 3$  mm.

Tipo de carga	Laminado	Pared	$\lambda^{Pe}$	$\lambda^{KL}$	$\lambda^{AB}$	$\varepsilon^{Pe}$
$M_y = 4$ kN	[0] <sub>3</sub>	Ala	0.78	-	0.83	-6%
	[0/90] <sub>s</sub>	Ala	0.79	-	0.84	-6%
	[45/-45] <sub>s</sub>	Ala	0.46	-	0.49	-6%
$q_x = 1$ kN/m	[0] <sub>3</sub>	Alma	4.71	4.77	5.09	-7%
	[0/90] <sub>s</sub>	Alma	4.79	4.80	5.11	-6%
	[45/-45] <sub>s</sub>	Alma	3.08	3.09	3.44	-10%
$q_y = 1$ kN/m	[0] <sub>3</sub>	Ala	0.20	-	0.22	-9%
	[0/90] <sub>s</sub>	Ala	0.20	-	0.22	-9%
	[45/-45] <sub>s</sub>	Ala	0.12	-	0.16	-25%
$q_z = 1$ kN/m	[0] <sub>3</sub>	Ala	0.673	-	0.748	-10%
	[0/90] <sub>s</sub>	Ala	0.673	-	0.752	-10%
	[45/-45] <sub>s</sub>	Ala	0.390	-	0.440	-11%

Tabla 7.4. Parámetros críticos de una viga simplemente apoyada (SAP) tipo I, siendo  $h = 300$  mm,  $b = 200$  mm,  $L = 2$  m,  $e = 3$  mm en el laminado [0]<sub>3</sub> y  $e = 4$  mm en el laminado [0/90]<sub>s</sub>.

Tipo de carga	Laminado	Pared	$\lambda^{Pe}$	$\lambda^{KL}$	$\lambda^{AB}$	$\varepsilon^{Pe}$
$Q_1 = Q_2 = 8$ kN	[0] <sub>3</sub>	Ala	0.75	-	0.78	-4%
	[0/90] <sub>s</sub>	Ala	1.80	-	1.85	-3%
$M_y = 4$ kN	[0] <sub>3</sub>	Ala	0.78	-	0.83	-6%
	[0/90] <sub>s</sub>	Ala	1.87	-	1.96	-5%
$P = 10$ kN	[0] <sub>3</sub>	Alma	1.37	1.37	1.47	-7%
	[0/90] <sub>s</sub>	Alma	3.29	3.29	3.63	-9%
$q_x = 1$ kN/m	[0] <sub>3</sub>	Alma	6.95	7.00	7.69	-10%
	[0/90] <sub>s</sub>	Alma	16.65	16.67	19.39	-14%
$q_y = 1$ kN/m	[0] <sub>3</sub>	Ala	1.80	-	2.01	-10%
	[0/90] <sub>s</sub>	Ala	4.30	-	4.79	-10%
$q_z = 1$ kN/m	[0] <sub>3</sub>	Ala	6.04	-	7.02	-14%
	[0/90] <sub>s</sub>	Ala	14.41	-	16.58	-13%

La Tabla 7.4 muestra los resultados obtenidos al analizar una viga tipo I simplemente apoyada de menor longitud y de igual sección transversal que la viga analizada en la Tabla 7.3. Comparando los resultados correspondientes, se observa que los errores son levemente superiores cuando la longitud de la viga es menor. En términos generales, en los resultados

se contempla que existe una pequeña diferencia entre los enfoques analíticos, siendo nula en muchos casos.

Tabla 7.5. Parámetros críticos de una viga tipo cajón, EE, siendo  $h = 225\text{mm}$ ,  $b = 147\text{mm}$ ,  $e = 3\text{mm}$  y  $L = 4\text{m}$ .

Tipo de carga	Laminado	Pared	$\lambda^{Pe}$	$\lambda^{AB}$	$\varepsilon^{Pe}$
$q_x = 10\text{kN/m}$	$[0]_3$	Lateral	1.49	1.91	-22%
	$[0/90]_s$	Lateral	1.51	1.94	-22%
	$[45/-45]_s$	Lateral	1.08	1.43	-25%
$q_y = 1\text{kN/m}$	$[0]_3$	Lateral	1.42	2.08	-32%
	$[0/90]_s$	Lateral	1.44	2.11	-32%
	$[45/-45]_s$	Lateral	1.07	1.77	-39%
$q_z = 1\text{kN/m}$	$[0]_3$	Superior	3.75	5.12	-27%
	$[0/90]_s$	Superior	3.81	5.30	-28%
	$[45/-45]_s$	Superior	2.63	4.10	-36%

Tabla 7.6. Parámetros críticos de una viga tipo I, EE, siendo  $h = 300\text{ mm}$ ,  $b = 200\text{mm}$ ,  $L = 4\text{m}$ ,  $e = 3\text{mm}$ .

Tipo de carga	Laminado	Pared	$\lambda^{Pe}$	$\lambda^{AB}$	$\varepsilon^{Pe}$
$Q_1 = Q_2 = 8\text{kN}$	$[0]_3$	Ala	0.60	0.67	-10%
	$[0/90]_s$	Ala	0.61	0.74	-17%
$q_x = 1\text{kN/m}$	$[0]_3$	Alma	7.20	10.69	-33%
	$[0/90]_s$	Alma	7.30	10.87	-33%
$q_y = 1\text{kN/m}$	$[0]_3$	Ala	0.79	0.95	-17%
	$[0/90]_s$	Ala	0.81	0.99	-18%
$q_z = 1\text{kN/m}$	$[0]_3$	Ala	2.75	3.36	-18%
	$[0/90]_s$	Ala	2.77	3.39	-18%

Las Tablas 7.5 y 7.6 contemplan el caso de vigas bi-empotradas tipo cajón y tipo I, respectivamente, sometidas a distintos estados de carga y empleando distintas laminaciones. Para esta condición de borde se observan porcentajes de error superiores a los esperados, pero los resultados siguen siendo conservativos. Se recuerda que el objetivo de estas fórmulas es utilizarlas como una aproximación que tenga en cuenta el pandeo local como una restricción en el diseño óptimo. Una vez encontrado dicho diseño, el mismo puede corroborarse y verificarse mediante el empleo de modelos de mayor precisión. Por su parte, se observó que las expresiones analíticas arrojan errores mayores en laminaciones

simétricas y balanceadas, como se muestra para el caso del laminado  $[\pm 45]_s$ . Por esta razón, es recomendable evitar la aplicación de dichas fórmulas para este tipo de laminaciones en vigas doblemente empotradas.

En las Tablas 7.7 y 7.8 se realiza una comparación entre los parámetros críticos de pandeo para distintas relaciones entre la longitud  $L$  y la altura  $h$  de vigas bi-empotradas tipo I y tipo cajón, respectivamente. Se destaca que en la mayoría de los casos los errores porcentuales son levemente menores cuando la esbeltez es mayor.

Tabla 7.7. Parámetros críticos de una viga tipo I, EE, siendo  $h = 300$  mm,  $b = 200$  mm,  $e = 3$  mm.

Tipo de carga	Laminado	$L/h$	$\lambda^{Pe}$	$\lambda^{AB}$	$\varepsilon^{Pe}$
$q_x = 1$ kN/m	$[0_2]_s$	13.3	7.20	10.69	-33%
	$[0_2]_s$	20.0	4.72	6.83	-31%
$q_y = 1$ kN/m	$[0_2]_s$	13.3	0.79	0.95	-17%
	$[0_2]_s$	20.0	0.33	0.40	-17%
$q_z = 1$ kN/m	$[0_2]_s$	13.3	2.75	3.36	-18%
	$[0_2]_s$	20.0	1.16	1.47	-21%

Tabla 7.8. Parámetros críticos de una viga tipo cajón, EE, siendo  $h = 225$  mm,  $b = 147$  mm,  $e = 3$  mm.

Tipo de carga	Laminado	$L/h$	$\lambda^{Pe}$	$\lambda^{AB}$	$\varepsilon^{Pe}$
$q_x = 10$ kN/m	$[0_2]_s$	17.8	1.49	1.91	-22%
	$[0_2]_s$	26.7	0.99	1.23	-19%
$q_y = 1$ kN/m	$[0_2]_s$	17.8	1.42	2.08	-32%
	$[0_2]_s$	26.7	0.63	0.78	-19%
$q_z = 1$ kN/m	$[0_2]_s$	17.8	3.75	5.12	-27%
	$[0_2]_s$	26.7	1.67	2.28	-27%

### 7.3.2. Vigas de eje curvo

En el Capítulo 4, el pandeo local de vigas se estudió a partir de suponer que cada pared de la sección transversal puede ser modelada como una placa delgada de gran longitud restringida rotacionalmente por las paredes adyacentes. Es por ello que para validar las fórmulas analíticas para la determinación de las cargas críticas locales en vigas curvas, primero se analiza el pandeo de placas ortótropas de gran longitud, con el fin de comparar el comportamiento entre placas rectas y curvas, bajo distintas condiciones de borde. Luego, se realizan cálculos comparativos a fin de validar la aplicación de las fórmulas desarrolladas al análisis de inestabilidad local de vigas curvas.

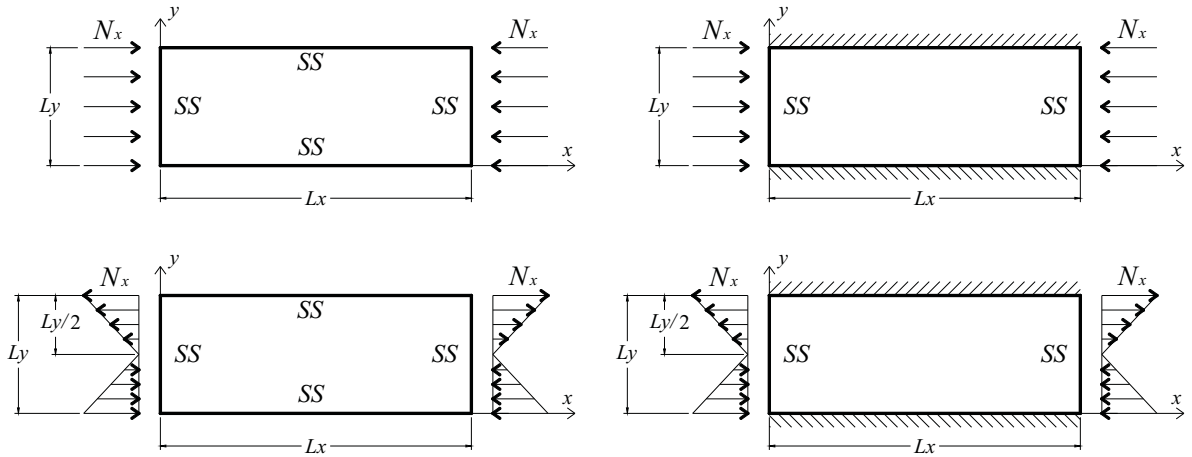


Figura 7.30. Condiciones de borde empleadas en el análisis de inestabilidad de placas.

En la Figura 7.30 se muestran esquemáticamente las diferentes vinculaciones y estados de carga empleados en el análisis de inestabilidad de placas, indicando con la sigla *SS* que los bordes están simplemente apoyados. Dicho análisis se realiza sólo para placas que respeten la relación de lados dada por la hipótesis de placas de gran longitud (Kollár y Springer, 2003)

$$L_x > 3L_y \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \tag{7.10}$$

En la Tabla 7.9 se muestran los resultados obtenidos empleando modelos tridimensionales de elementos lámina implementados en ABAQUS 6.7<sup>®</sup>. Allí se comparan placas delgadas de eje recto con placas de eje curvo de igual longitud. Se observa que las diferencias entre el parámetro crítico de pandeo de una placa recta con el de una placa curva son pequeñas, tanto para cargas uniformes como para cargas variables linealmente.

Tabla 7.9. Parámetros críticos de placas, siendo  $L_y = 0.3$  m,  $L_x = 6.28$  m,  $e = 10$  mm,  $R = 4$  m.

Condición de borde	Laminado	Parámetro de carga, $\lambda_L$			
		$\alpha = 0$ ( $N_x$ uniforme)		$\alpha = 2$ ( $N_x$ variable)	
		Placa recta	Placa curva	Placa recta	Placa curva
SS	[0 <sub>4</sub> ]	1.57	1.61	12.57	12.74
	[0/90] <sub>s</sub>	1.38	1.77	15.37	15.50
EE	[0 <sub>4</sub> ]	2.07	2.24	16.39	16.51
	[0/90] <sub>s</sub>	1.98	2.28	19.65	19.73

En cuanto a la validación de las fórmulas para el análisis de inestabilidad local en vigas de eje curvo, se realizan comparaciones entre modelos tipo lámina realizados en ABAQUS 6.7<sup>®</sup> y las fórmulas analíticas desarrolladas aquí, cuya implementación requiere

nuevamente un análisis estructural previo que se realiza empleando el elemento finito isoparamétrico expuesto en el Capítulo 6.

La Figura 7.31 muestra los resultados obtenidos al analizar una viga tipo I simplemente apoyada con laminación  $[0_4]$ . Las dimensiones de la sección transversal son las siguientes:  $b = 0.3 \text{ m}$ ,  $h = 0.4 \text{ m}$  y  $e = 0.004 \text{ m}$ . Se comparan los resultados obtenidos para una viga de eje recto de 3 m de longitud con los obtenidos en el caso de una viga curva formada por un arco de  $90^\circ$  de igual longitud, por lo que el radio de curvatura  $R$  es de 1.91 m. Se consideran distintos estados de cargas que se detallan en cada una de las figuras. Estos mismos resultados se representan numéricamente en la Tabla 7.10, donde se indica además qué pared de la sección pandea primero.

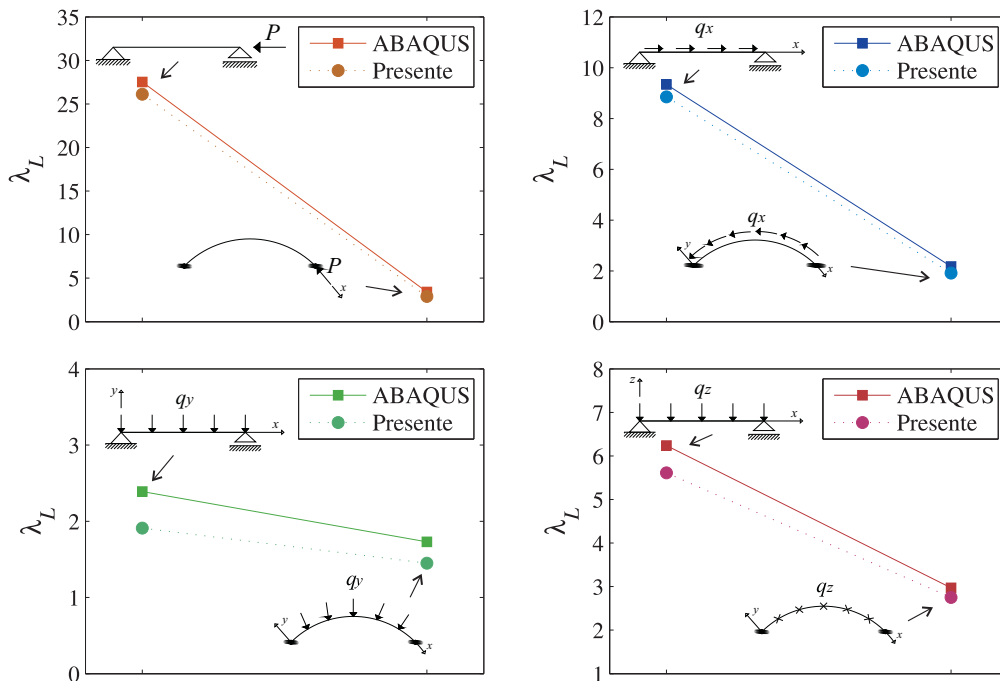


Figura 7.31. Parámetros de carga críticos locales para una viga tipo I de eje recto y curvo, siendo  $P = -1 \text{ kN}$ ,  $q_x = -1 \text{ kN/m}$ ,  $q_y = -1 \text{ kN}$  y  $q_z = -1 \text{ kN/m}$ .

Tabla 7.10. Parámetros críticos de pandeo local de vigas SS rectas y curvas.

ESTADO DE CARGA	Viga recta			Viga curva		
	$\lambda^{AB}$	$\lambda^{Pe}$	Pared	$\lambda^{AB}$	$\lambda^{Pe}$	Pared
EC <sub>1</sub>	27.53	26.12	Alma	3.42	2.90	Ala
EC <sub>2</sub>	9.34	8.85	Alma	2.17	1.91	Ala
EC <sub>3</sub>	2.39	1.91	Ala	1.73	1.45	Ala
EC <sub>4</sub>	6.24	5.61	Ala	2.97	2.75	Ala

Las siglas EC<sub>1</sub>, EC<sub>2</sub>, EC<sub>3</sub> y EC<sub>4</sub> se corresponden con los siguientes estados de carga: (1)

una carga axial de compresión constante aplicada en el extremo; cargas uniformemente distribuidas en la longitud (2) en la dirección del eje  $x$ , (3) en la dirección del eje  $y$  y (4) en la dirección del eje  $z$ , tal como se indican esquemáticamente en la Figura 7.31. Los resultados obtenidos con ABAQUS 6.7<sup>®</sup> se indican como  $\lambda^{AB}$ , mientras que  $\lambda^{Pe}$  hace referencia a los resultados obtenidos con las fórmulas analíticas.

En la Figura 7.32 se muestran los parámetros de carga críticos locales en vigas de eje curvo doblemente empotradas (EE) con laminaciones  $[0_4]$  y  $[0/90]_s$ , para los estados de cargas  $EC_2$ ,  $EC_3$  y  $EC_4$ . Estos resultados se detallan además en la Tabla 7.11.

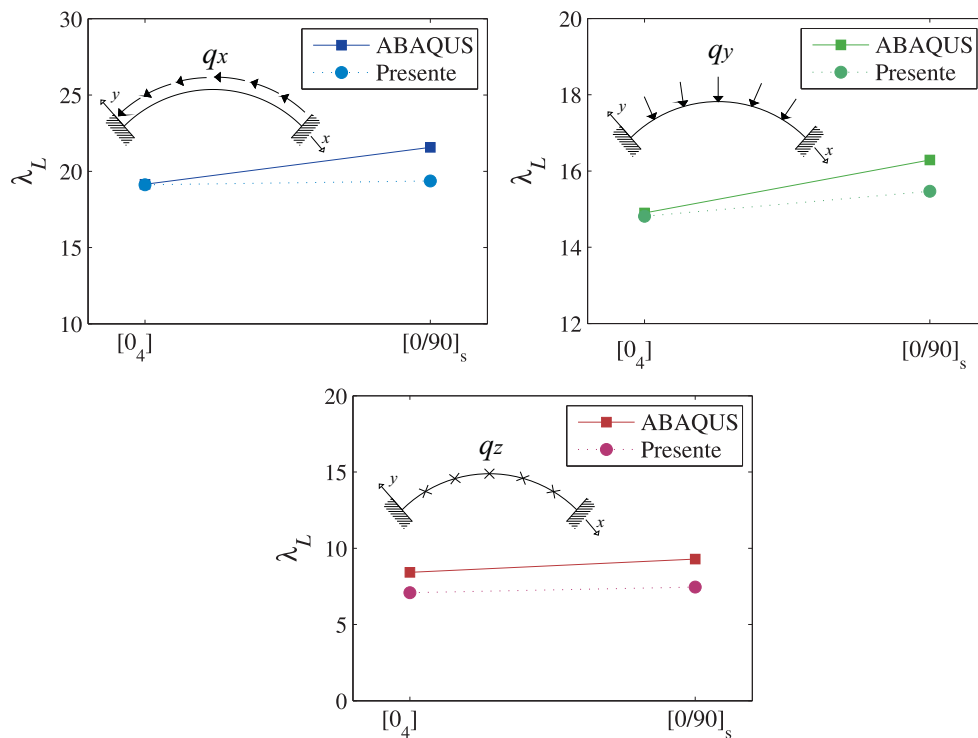


Figura 7.32. Parámetros de carga críticos locales para una viga tipo I de eje curvo, siendo  $q_x = -1\text{kN/m}$ ,  $q_y = -1\text{kN}$  y  $q_z = -1\text{kN/m}$ .

Tabla 7.11. Parámetros críticos de pandeo local de vigas curvas bi-empotradas.

ESTADO DE CARGA	Laminado $[0_4]$			Laminado $[0/90]_s$		
	$\lambda^{AB}$	$\lambda^{Pe}$	Pared	$\lambda^{AB}$	$\lambda^{Pe}$	Pared
$EC_2$	19.15	19.12	Ala	21.57	19.36	Alma
$EC_3$	14.90	14.81	Ala	16.29	15.47	Ala
$EC_4$	8.42	7.08	Ala	9.29	7.45	Ala

Se observa que las diferencias entre los modelos estudiados rondan entre un 2% y un 10%, alcanzando un 20% en algunos casos particulares. Nuevamente, los parámetros

críticos de pandeo local obtenidos mediante las fórmulas analíticas se encuentran siempre por debajo de los valores hallados empleando ABAQUS 6.7<sup>®</sup>, lo cual indica que los cálculos analíticos son más conservativos y están del lado de la seguridad. Se concluye que las fórmulas desarrolladas en el Capítulo 4 para el análisis de inestabilidad local en vigas de pared delgada pueden ser aplicadas tanto a vigas de eje recto como a vigas de eje curvo.





## CAPÍTULO 8

### APLICACIONES: DISEÑO ÓPTIMO DE VIGAS FRP

#### 8.1 Introducción

En el presente capítulo se presentan aplicaciones de los esquemas de diseño expuestos en el Capítulo 5. Se diseñan vigas de pared delgada construidas con plásticos reforzados con fibras que se encuentran sometidas a distintas condiciones de carga y de vinculación. Los primeros diseños óptimos que se exponen son del tipo determinísticos, en los cuales se suponen conocidas a priori ciertas condiciones iniciales que involucran datos preliminares de diseño tales como las condiciones de carga, el espacio físico que ocupará la estructura (que definen su longitud y el área transversal máxima admisible) y el tipo de material con el que será construida, entre otros. Luego, se contempla la falta de certeza en las condiciones operativas de la estructura aplicando el esquema de diseño propuesto a tal fin.

En primer lugar, se resuelve la propuesta de diseño DO1 para el caso de vigas rectas de pared delgada construidas con laminados simétricos y balanceados, bajo distintas hipótesis de carga. El esquema contempla la minimización del peso y del desplazamiento total de la estructura. Se emplean distintas formas de la sección transversal y se compara su comportamiento a partir de los resultados obtenidos del análisis individual de cada una de ellas. Luego, se resuelve el esquema de diseño DO2 considerando a la estructura sometida a estados de carga estáticos y dinámicos. En particular, se busca un diseño que minimice tanto el peso como el desplazamiento con la misma importancia. Para la resolución de ambos esquemas de diseño se aplica el algoritmo *simulated annealing* (SA), expuesto en el Capítulo 6.

En el esquema de diseño DO3, la función objetivo considera dos objetivos a través de una única función adimensional: el peso y la resistencia de la estructura. A diferencia del esquema DO1, la variable de diseño que define al espesor total de la pared de la viga se disocia en dos variables que se corresponden con el número de capas que componen al laminado y el espesor de cada una de ellas. Esto genera un problema de optimización más complejo con un espacio de búsqueda mayor que hace necesaria la aplicación de diferentes alternativas de búsqueda para obtener la solución óptima global del problema. Para ello, se emplea el algoritmo *simulated annealing* caótico (SAC), el cual genera las variables de

diseño a través de un método de búsqueda basado en un sistema caótico. A su vez, los resultados obtenidos de esta manera son comparados con las soluciones óptimas que se obtienen aplicando el algoritmo SA.

Según lo desarrollado en el Capítulo 5, el esquema de diseño DO4 es formulado de manera completamente analítica y, por lo tanto, su aplicación se limita a aquellos casos en los que se cuenta con expresiones analíticas que definan las características estructurales involucradas en el esquema de diseño. Consecuentemente, se propone diseñar vigas FRP de sección transversal doblemente simétrica de manera que sean livianas, que se desplacen lo menos posible y que sean resistentes al pandeo. Para resolver el problema de optimización se emplean dos algoritmos: SA y Algoritmo Genético (AG), y se compara el comportamiento de ambos.

Por último, se considera la existencia de incertidumbre en la carga aplicada. Para ello, se implementa el esquema de diseño DO5 para el caso de una viga FRP empotrada en ambos extremos y sometida a distintas hipótesis de variación de carga. El problema se formula como un problema minimax y es resuelto aplicando el método SA.

## 8.2 Aplicaciones del esquema de diseño DO1

Como aplicación de la propuesta de diseño DO1 desarrollada en la sección 5.3.1, a continuación se analiza una viga recta de pared delgada construida con material Kevlar49/Epoxi, cuyas propiedades se pueden ver en el Apéndice I. Se considera en particular una viga de 3m de longitud, empotrada en ambos extremos y sometida a distintos estados de carga que se detallan en la Tabla 8.1. Bajo estas condiciones se diseñan, en forma independiente, vigas conformadas por distintas secciones transversales, las cuales se muestran en la Figura 8.1. Esto permite comparar el comportamiento estructural de cada una de ellas y optar por la forma de la sección transversal más conveniente.

El vector de las variables de diseño está compuesto por las dimensiones de la sección ( $b$ ,  $h$ ,  $e$ ) y los ángulos de orientación de las fibras que componen el laminado ( $\theta_k$ ). Los rangos de variación de las dimensiones de la sección transversal se definen de acuerdo a cada problema en particular, con precisiones de 1 mm en la determinación del espesor y de 5 mm en el cálculo de la base y de la altura. Los laminados evaluados deben ser simétricos y balanceados y se consideran constituidos por cuatro capas de igual espesor.

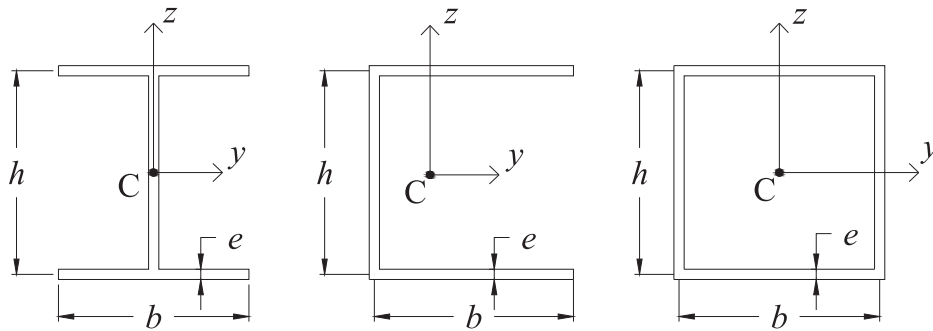


Figura 8.1. Secciones transversales analizadas en el esquema de diseño DO1.

Las combinaciones de cargas consideradas se detallan en la Tabla 8.1 y representan posibles escenarios que pueden ocurrir durante la vida útil de la estructura. Las solicitaciones mencionadas corresponden a una carga distribuida en la dirección de  $z$  ( $q_z$ ) y momentos aplicados en la mitad de la longitud ( $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$ ) en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Tabla 8.1. Detalle de los estados de carga analizados.

Caso N°	Magnitud de las cargas			
	$q_z$ [N/m]	$M_x$ [Nm]	$M_y$ [Nm]	$M_z$ [Nm]
1	-1000	0	0	0
2	0	1000	0	0
3	0	0	1000	0
4	0	0	0	1000
5	0	1000	500	500
6	0	500	1000	500
7	0	500	500	1000

Cabe recordar que el parámetro de peso ( $W$ ) está definido en el intervalo cerrado  $[0,1]$ . Cuando  $W$  adopta los valores extremos de dicho intervalo (inferior ó superior) se minimiza el peso ó se minimiza el desplazamiento, respectivamente. Los resultados obtenidos al considerar el caso en que  $W$  es igual a cero se muestran en la Figura 8.2 y en la Tabla 8.2.

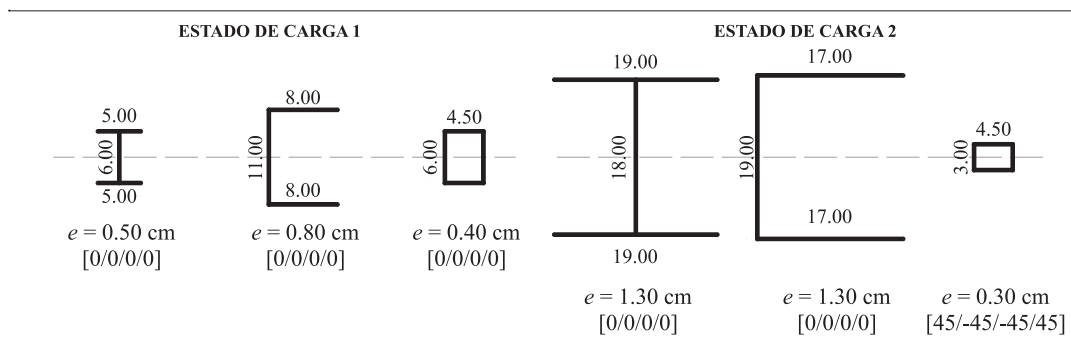


Figura 8.2. Secciones y laminaciones óptimas para los distintos estados de carga evaluados ( $W = 0$ ).

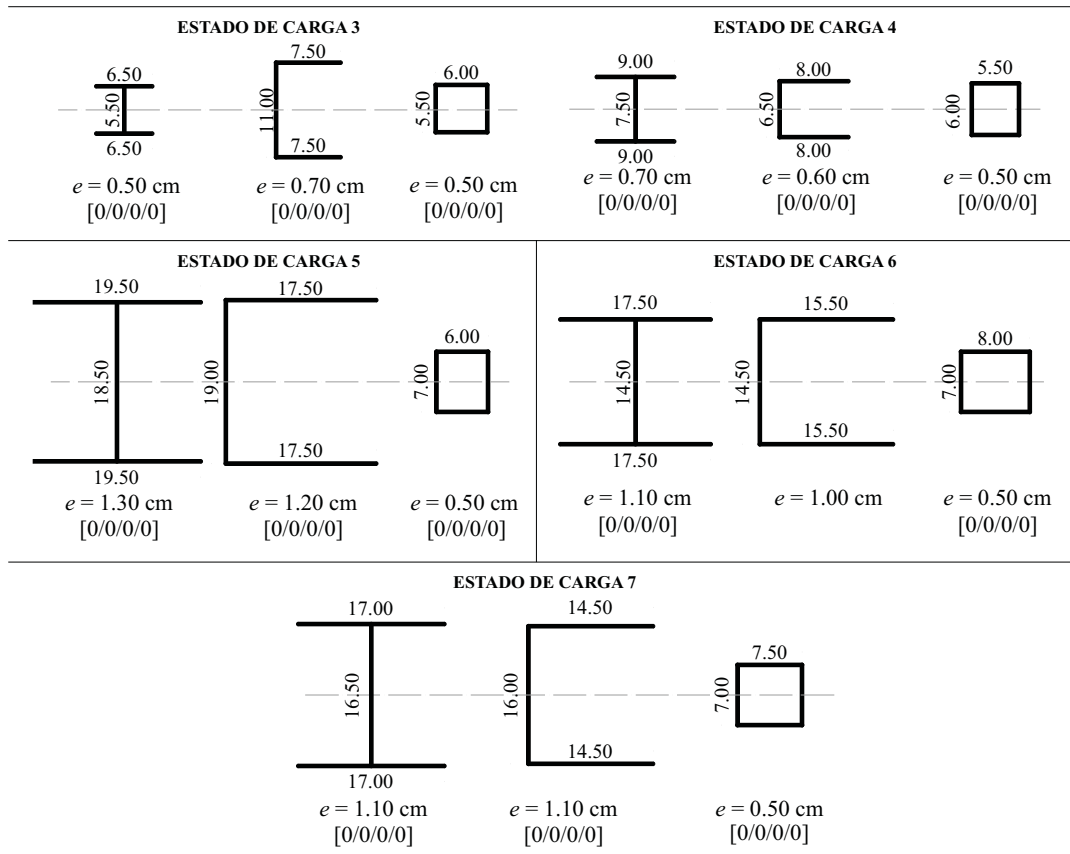


Figura 8.2 (cont.). Secciones y laminaciones óptimas para los distintos estados de carga evaluados ( $W = 0$ ).

Tabla 8.2. Soluciones óptimas y valores mínimos de las funciones objetivo para  $W = 0$ .

Estado de Carga	Tipo de Perfil	$h$ [cm]	$b$ [cm]	$e$ [cm]	Laminado	$F(\mathbf{x}^*) = A$ [cm <sup>2</sup> ]	$\delta$ [cm]
1	Perfil I	6.00	5.00	0.50	$[0_2]_s$	<b>8.00</b>	0.70
	Perfil U	11.00	8.00	0.80	$[0_2]_s$	21.60	0.69
	Perfil Cajón	6.00	4.50	0.40	$[0_2]_s$	8.40	0.71
2	Perfil I	18.00	19.00	1.30	$[0_2]_s$	72.80	0.31
	Perfil U	19.00	17.00	1.30	$[0_2]_s$	68.90	0.50
	Perfil Cajón	3.00	4.50	0.30	$[45/-45]_s$	<b>4.50</b>	0.70
3	Perfil I	5.50	6.50	0.50	$[0_2]_s$	<b>9.25</b>	0.12
	Perfil U	11.00	7.50	0.70	$[0_2]_s$	18.20	0.15
	Perfil Cajón	5.50	6.00	0.50	$[0_2]_s$	11.50	0.10
4	Perfil I	7.50	9.00	0.70	$[0_2]_s$	17.85	0.07
	Perfil U	6.50	8.00	0.60	$[0_2]_s$	13.50	0.06
	Perfil Cajón	6.00	5.50	0.50	$[0_2]_s$	<b>11.50</b>	0.10
5	Perfil I	18.50	19.50	1.30	$[0_2]_s$	74.75	0.29
	Perfil U	19.00	17.50	1.20	$[0_2]_s$	64.80	0.53
	Perfil Cajón	7.00	6.00	0.50	$[0_2]_s$	<b>13.00</b>	0.39
6	Perfil I	14.50	17.50	1.10	$[0_2]_s$	54.45	0.30
	Perfil U	14.50	15.50	1.00	$[0_2]_s$	45.50	0.60
	Perfil Cajón	7.00	8.00	0.50	$[0_2]_s$	<b>15.00</b>	0.46
7	Perfil I	16.50	17.00	1.10	$[0_2]_s$	55.55	0.31
	Perfil U	16.00	14.50	1.10	$[0_2]_s$	49.50	0.52
	Perfil Cajón	7.00	7.50	0.50	$[0_2]_s$	<b>14.50</b>	0.36

En la Tabla 8.2 se muestran las soluciones óptimas encontradas para cada una de las secciones analizadas, según los distintos estados de carga propuestos. Además, se detallan los valores mínimos del área de la sección transversal y los valores del desplazamiento máximo total.

En la Figura 8.3 y en la Tabla 8.3 se muestran los resultados obtenidos al considerar valores de  $W$  variando entre 0 y 1, con un paso de 0.25, para los diferentes tipos de perfiles analizados bajo el estado de carga 7.

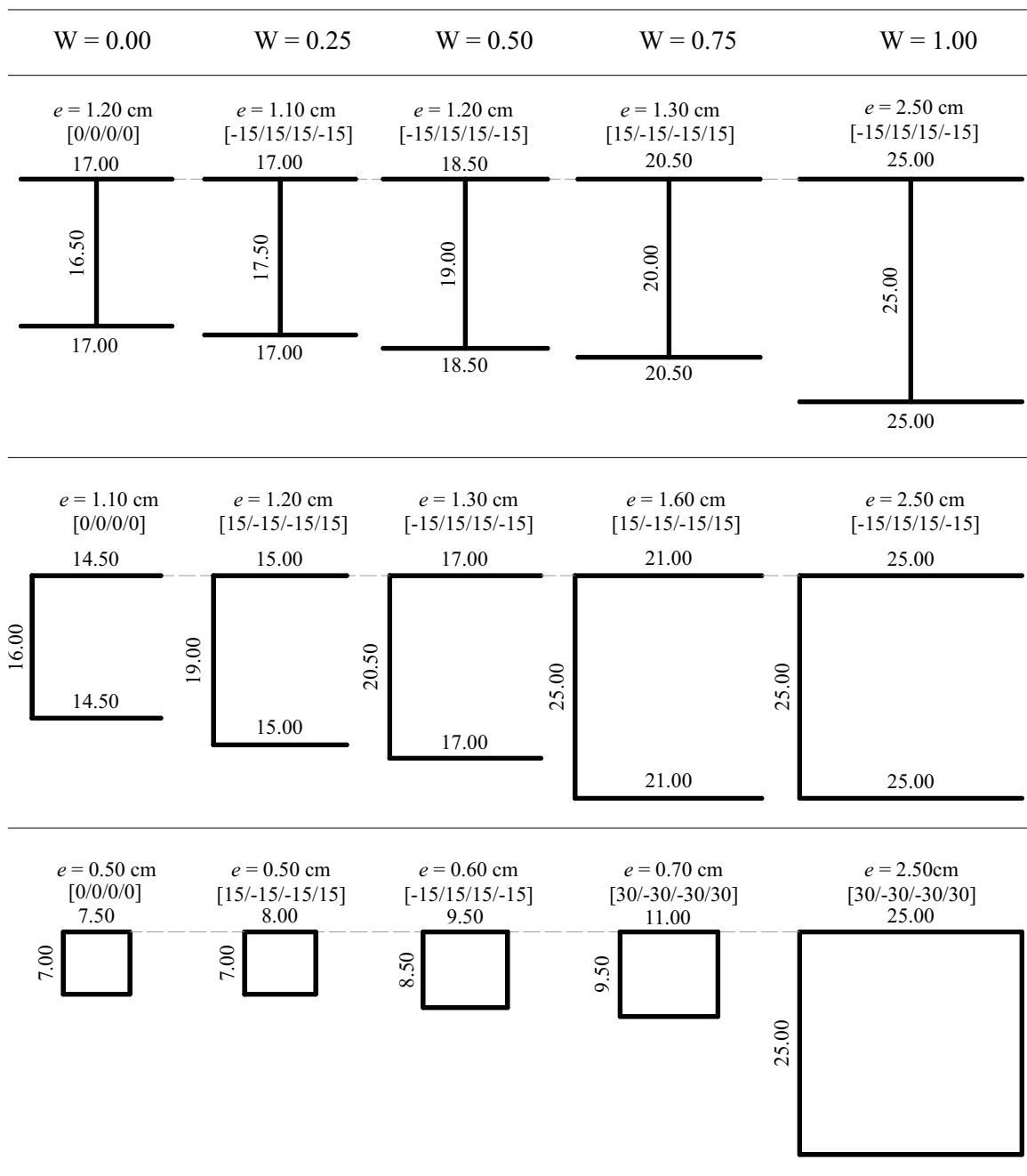


Figura 8.3. Soluciones óptimas correspondientes a diferentes valores de  $W$ .

La Figura 8.4 muestra las curvas Pareto resultantes, las cuales representan gráficamente

la relación entre los valores óptimos de las dos funciones objetivo propuestas, para distintos valores del parámetro  $W$ .

Tabla 8.3. Soluciones óptimas para valores de  $W = [0:0.25:1]$ , correspondientes a un perfil I, un perfil U y un perfil rectangular bajo la condición de carga número 7.

$W$	Tipo de Perfil	$h$ [cm]	$b$ [cm]	$e$ [cm]	Laminado	Función Objetivo	$A$ [cm <sup>2</sup> ]	$\delta$ [cm]
<b>0.00</b>	Perfil I	16.50	17.00	1.10	[0 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	1.852	55.55	0.310
	Perfil U	16.00	14.50	1.10	[0 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	1.650	49.50	0.520
	Perfil Cajón	7.00	7.50	0.50	[0 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	<b>0.483</b>	14.50	0.170
<b>0.25</b>	Perfil I	17.50	17.00	1.10	[15/-15] <sub>s</sub>	1.678	56.65	0.210
	Perfil U	19.00	15.00	1.20	[15/-15] <sub>s</sub>	1.845	58.80	0.300
	Perfil Cajón	7.00	8.00	0.50	[15/-15] <sub>s</sub>	<b>0.575</b>	15.00	0.160
<b>0.50</b>	Perfil I	19.00	18.50	1.20	[15/-15] <sub>s</sub>	1.470	67.20	0.140
	Perfil U	20.50	17.00	1.30	[15/-15] <sub>s</sub>	1.656	70.85	0.190
	Perfil Cajón	8.50	9.50	0.60	[15/-15] <sub>s</sub>	<b>0.585</b>	21.60	0.090
<b>0.75</b>	Perfil I	20.00	20.50	1.30	[15/-15] <sub>s</sub>	1.032	79.30	0.099
	Perfil U	25.00	21.00	1.60	[15/-15] <sub>s</sub>	1.172	107.20	0.074
	Perfil Cajón	9.50	11.00	0.70	[30/-30] <sub>s</sub>	<b>0.441</b>	28.70	0.054
<b>1.00</b>	Perfil I	25.00	25.00	2.50	[15/-15] <sub>s</sub>	0.116	187.50	0.010
	Perfil U	25.00	25.00	2.50	[15/-15] <sub>s</sub>	0.176	187.50	0.016
	Perfil Cajón	25.00	25.00	2.50	[30/-30] <sub>s</sub>	<b>0.008</b>	250.00	0.001

Todos los problemas de optimización fueron resueltos mediante la aplicación del método heurístico *simulated annealing* descrito en el Capítulo 6. Los tiempos de cálculo variaron entre 10 y 15 minutos, realizando entre 200 y 300 iteraciones en cada ejemplo. En todos los casos se utilizó un procesador DualCore Intel Wolfdale de 2533 MHz, con 2044 MB de memoria RAM.

Se destaca que los resultados obtenidos en la implementación de este diseño responden adecuadamente a los esperados en cuanto al comportamiento del algoritmo utilizado. Se advierte que la variación de las dimensiones de la sección con respecto a los valores que adopta el parámetro  $W$  es la esperada si se asocian dichos valores con el peso correspondiente que se le da a cada función objetivo. Se observa que en los casos en que  $W$  es igual a 1, es decir, cuando sólo se considera al desplazamiento como función objetivo, los valores de  $b$  y de  $h$  aumentan hasta los límites del intervalo, mientras que el valor del espesor se condiciona a partir de las restricciones de pared delgada y de estabilidad local. Es decir, en estos casos particulares se optimiza la forma de la sección transversal y el tipo

de laminación, de tal manera que se origine el mínimo desplazamiento posible. En consecuencia, el costo computacional para este caso particular disminuye considerablemente.

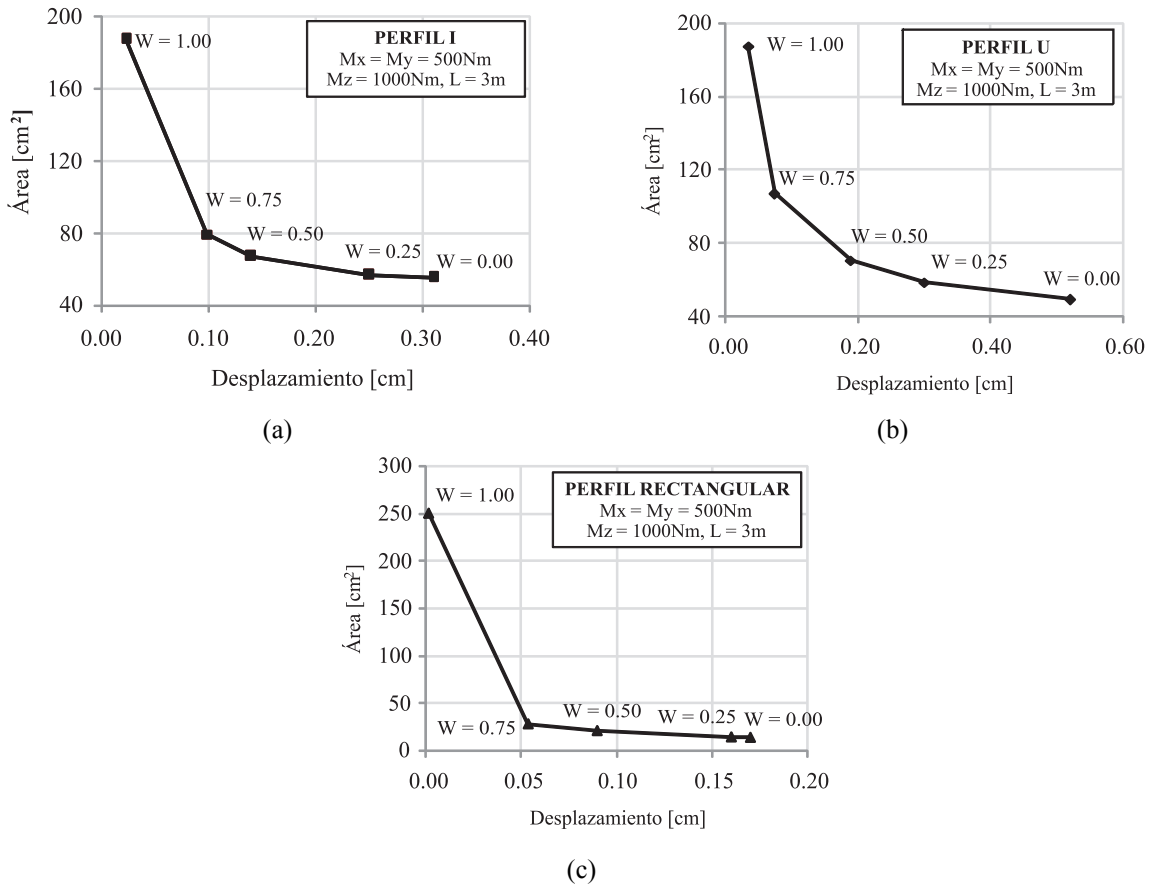


Figura 8.4. Comparación de resultados para distintos valores de  $W$ , correspondientes a: (a) un perfil I, (b) un perfil U y (c) un perfil rectangular bajo la condición de carga número 7.

### 8.3 Aplicaciones del esquema de diseño DO2

A continuación se aplica el esquema de diseño DO2 en una viga construida con fibras de carbono AS4 y resina PEEK, cuyas propiedades se detallan en el Apéndice I. En cuanto a su objetivo, este esquema de diseño puede considerarse como un caso particular del esquema DO1 asumiendo que el parámetro  $W$  es igual a 0.5, de manera de minimizar el peso y el desplazamiento de la viga con la misma prioridad. Las condiciones de carga y de vinculación a las que está sometida la viga se muestran en la Figura 8.5. Se trata de una viga cantiléver de 6m de longitud, sometida a una carga estática distribuida en la dirección de  $y$  ( $q_y = 5000\text{ N/m}$ ) y se supone la aplicación de una carga dinámica sinusoidal en el extremo libre,  $Q_z = 2000\cos(5t)\text{ N}$ . Además, se propone el empleo de una sección transversal tipo I.

Las variables de diseño se definen en los siguientes dominios

$$\begin{aligned} b &\in [0.1:0.01:0.8] \text{ m}, & h &\in [0.1:0.01:0.8] \text{ m}, \\ n_c &\in [2:2:40] \rightarrow e &\in [0.004:0.002:0.08] \text{ m}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

siendo el espesor de cada una de las capas del laminado ( $e_c$ ) igual a 0.002 m. Se admite un desplazamiento máximo de 0.0075 m. Establecidas estas condiciones, se resuelve el problema de optimización de acuerdo a lo establecido en (5.12) de la sección 5.3.2 del Capítulo 5. Para su resolución se emplea nuevamente el método de optimización SA.

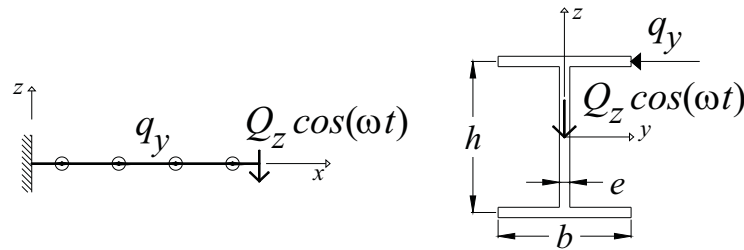


Figura 8.5. Condiciones de carga y de vinculación consideradas en la aplicación del esquema DO2.

Los valores de referencia que hacen adimensional a cada una de las funciones que intervienen en la función objetivo global dada por (5.9) son  $A_0 = 0.05 \text{ m}^2$  y  $\delta_0 = 0.005 \text{ m}$ . En la Tabla 8.4 se muestran los valores óptimos de las variables de diseño y el valor mínimo de la función objetivo y de sus componentes correspondiente.

Tabla 8.4. Soluciones óptimas y restricciones estructurales.

$b^*$ [m]	$h^*$ [m]	$n_c^*$	$e^*$ [m]	Laminado	$F(\mathbf{x}^*)$	$A(\mathbf{x}^*)$ [m <sup>2</sup> ]	$\delta(\mathbf{x}^*)$ [m]
0.80	0.57	8	0.016	[0 <sub>8</sub> ]	0.604	0.035	0.003

La sección óptima encontrada es acorde a lo que se esperaba encontrar con este esquema de diseño, dado que la sección resultante posee la rigidez flexional necesaria para soportar la carga nominal  $q_y$  al aumentar el ancho del perfil y, a su vez, el peso disminuye al disminuir las demás dimensiones. Los tiempos de cómputo fueron similares a los de resultados anteriores, rondando los 17 minutos, empleando el mismo procesador que en la resolución del diseño DO1.

## 8.4 Aplicaciones del esquema de diseño DO3

A continuación se diseñan vigas de pared delgada empleando el esquema DO3, expuesto



en la sección 5.3.3 del Capítulo 5. En las Figuras 8.6 y 8.7 se detallan las condiciones geométricas y estructurales preestablecidas en este diseño. En ambos casos se trata de una viga curva de pared delgada tipo I empotrada en sus dos extremos, de 4 metros de longitud y un radio de curvatura de 5 metros, lo cual genera un ángulo de apertura del arco ( $L/R$ ) de  $45.8^\circ$ . La condición inicial que diferencia a ambos diseños es la dirección que se le asigna a la carga externa. Esto genera la distinción entre los diseños Dqz y Dqy, correspondientes a cargas distribuidas en su longitud según las direcciones  $z$  e  $y$ , respectivamente. Se considera que la magnitud de ambas cargas es igual a  $20 \text{ kN/m}$ . Se asume que la estructura está construida con un material transversalmente isótropo compuesto por fibra de vidrio tipo E y viniléster 1222, cuyas propiedades se muestran en el Apéndice I.

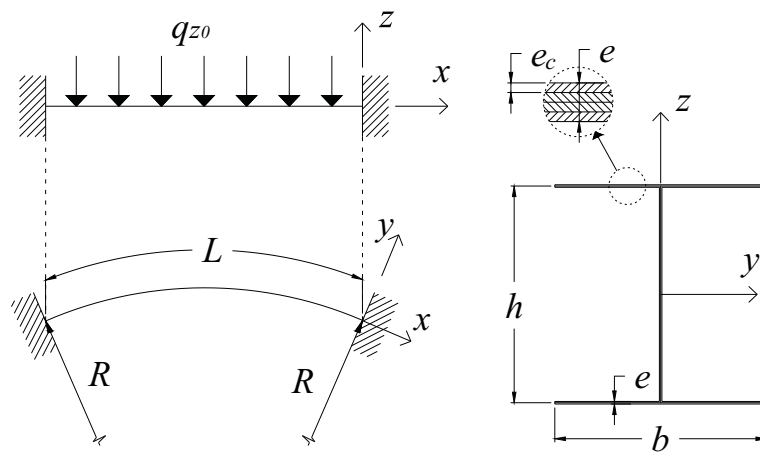


Figura 8.6. Condiciones de borde y estados de carga correspondientes al diseño Dqz.

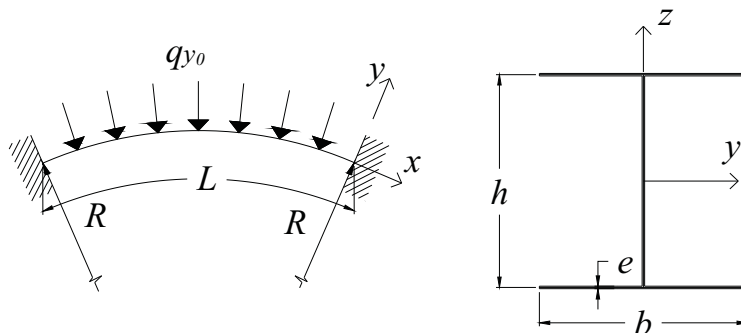


Figura 8.7. Condiciones de borde y estados de carga correspondientes al diseño Dqy.

El vector de las variables de diseño está compuesto por el número y el espesor de cada una de las capas del laminado ( $n_c$  y  $e_c$ , respectivamente), los ángulos de orientación de las fibras longitudinales de cada una de dichas capas ( $\theta_k$ ) y las dimensiones de la sección transversal ( $b$  y  $h$ ).

Se admite en la estructura un desplazamiento máximo de  $0.015 \text{ m}$  y el espesor de cada una de las capas del laminado se considera constante. Teniendo en cuenta las condiciones

de carga y de vinculación impuestas en la estructura, el momento de referencia que interviene en la expresión (5.14) se define de la siguiente manera

$$M_0^{ref} = \frac{q_0 L^2}{12}. \quad (8.2)$$

Los problemas de diseño se resuelven aplicando las siguientes técnicas de optimización: *simulated annealing* (SA) y *simulated annealing* caótico (SAC). Ambas técnicas fueron descritas en el Capítulo 6. La técnica SAC define las variables de diseño a partir de un sistema caótico. En particular, aquí se utiliza el mapa logístico. Consecuentemente, los resultados de la implementación de este método de búsqueda son comparados con los obtenidos al emplear el método de búsqueda clásico basado en distribuciones normales.

Se plantean distintos intervalos de variación de cada una de las variables de diseño con el fin de evaluar la performance del algoritmo bajo ambos esquemas de generación. La Tabla 8.5 muestra en detalle los dominios factibles de cada una de las variables de diseño y se denomina a cada uno de ellos como D1, D2 y D3. Se propone que la variable  $\theta_k$  puede adoptar sólo dos valores ( $0^\circ$  y  $90^\circ$ ) y que la secuencia de laminación sea tal que el laminado sea ortótropo ó *cross-ply*, según las siguientes posibilidades:  $[0_{nc}]$ ,  $[90_{nc}]$ ,  $[(0/90)_{nc/2}]_s$ ,  $[(90/0)_{nc/2}]_s$ .

Tabla 8.5. Dominios de factibilidad de las variables de diseño.

Dominios	$b$ [m]	$h$ [m]	$e_c$ [mm]	$n_c$	$\theta_k$ [°]
D1	0.2:0.1:0.6	0.2:0.1:0.6	1:1:5	2:2:60	0 - 90
D2	0.1:0.05:0.6	0.1:0.05:0.6	0.5:0.5:5	2:2:60	0 - 90
D3	0.1:0.01:0.6	0.1:0.01:0.6	0.5:0.5:5	2:2:60	0 - 90

La Tabla 8.6 muestra los valores de los parámetros involucrados en la programación de los algoritmos, siendo  $r$  el factor que define la temperatura inicial según la expresión (6.3),  $T_{min}$  la temperatura final que define el criterio de convergencia y  $\mu$  el parámetro de bifurcación que define la aleatoriedad de la generación.

Tabla 8.6. Parámetros empleados en los algoritmos.

Diseño	$R$	$T_{min}$	$\mu$
PO1	10	$10^{-10}$	4
PO2	10	$10^{-8}$	4
PO3	100	$10^{-10}$	4
PO4	100	$10^{-15}$	4

En la Tabla 8.7 se presentan los resultados obtenidos al resolver el problema de diseño Dqz empleando los dominios de factibilidad D1 y D2 e implementando los métodos de optimización SA y SAC. Allí se muestran los valores óptimos del momento crítico y del área de la sección transversal encontrados en cada uno de los casos analizados.

Tabla 8.7. Soluciones óptimas del diseño Dqz.

Diseño	$b^*$ [m]	$h^*$ [m]	$e_c^*$ [m]	$n_c^*$	Laminado	$F(\mathbf{x}^*)$	$M_{cr}$ [MNm]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	Iteraciones
D1/PO1/SAC	0.40	0.60	0.005	2	[0 <sub>2</sub> ]	11.180	3.61	0.014	700
D1/PO1/SA	0.40	0.60	0.005	2	[0 <sub>2</sub> ]	11.180	3.61	0.014	700
D2/PO1/SAC	0.45	0.60	0.0045	2	[0 <sub>2</sub> ]	10.551	3.63	0.0135	700
D2/PO1/SA	0.40	0.60	0.0005	18	[0 <sub>18</sub> ]	10.607	3.25	0.0126	700

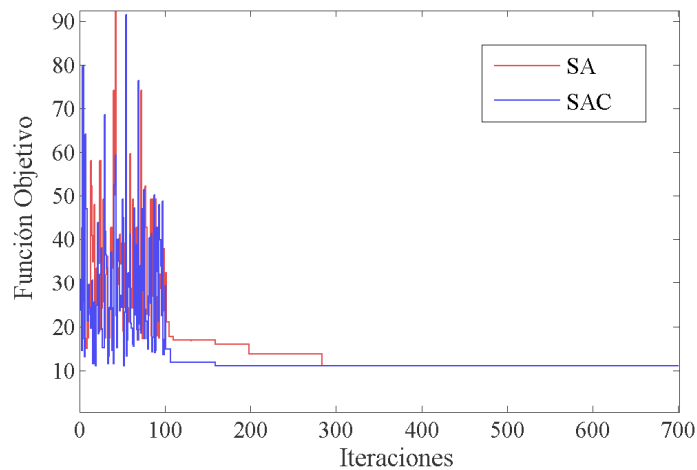


Figura 8.8. Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño Dqz, correspondiente a D1/PO1.

En las Figuras 8.8 y 8.9 se grafican los valores que adopta la función objetivo a medida que avanza el algoritmo para los casos detallados en la Tabla 8.7. En tales resultados se observa que cuando el paso de los intervalos de variación es relativamente grande (dominio D1), ambos algoritmos obtienen la solución óptima global del problema, siendo el método SA quien ofrece un menor costo computacional. Sin embargo, al disminuir el paso de los intervalos de variación (dominio D2), es decir, al aumentar el dominio de búsqueda, el método SA no encuentra el mínimo global empleando los mismos parámetros (PO1), mientras que el método SAC sí lo hace con el mismo costo computacional que en el caso D1/PO1/SAC. No obstante, si bien las soluciones obtenidas con el método SA no son las soluciones óptimas globales, no existe una gran diferencia entre ellas desde el punto de vista estructural. Por ejemplo, en el caso D2/PO1/SA el espesor total de la sección

transversal es el óptimo global, aunque el número de capas del laminado y el espesor de cada una de ellas no lo sea. Es evidente que en este caso el algoritmo SA converge a un mínimo local cercano al global.

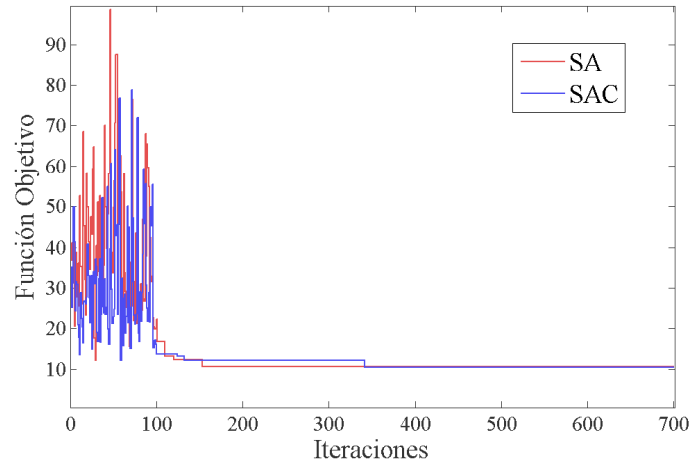


Figura 8.9. Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño Dqz, correspondiente a D2/PO1.

Tabla 8.8. Soluciones óptimas del diseño Dqy.

Diseño	$b^*$ [m]	$h^*$ [m]	$e_c^*$ [m]	$n_c^*$	Laminado	$M_{cr}$ [MNm]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$F(\mathbf{x}^*)$	Iteraciones
D1/PO2/SAC	0.50	0.60	0.004	2	[0 <sub>2</sub> ]	2.98	0.0128	11.819	400
D1/PO2/SA	0.50	0.50	0.004	2	[0 <sub>2</sub> ]	2.40	0.0120	13.363	400
D1/PO1/SA	0.60	0.60	0.001	8	[0 <sub>8</sub> ]	3.55	0.0144	11.868	700
D2/PO3/SAC	0.55	0.60	0.004	2	[0 <sub>2</sub> ]	3.27	0.0136	11.800	360
D2/PO3/SA	0.45	0.50	0.0025	4	[0 <sub>4</sub> ]	2.70	0.0140	14.952	360
D3/PO4/SAC	0.53	0.60	0.004	2	[0 <sub>2</sub> ]	3.16	0.0133	11.795	1500
D3/PO4/SA	0.25	0.46	0.001	10	[0 <sub>10</sub> ]	0.79	0.0096	28.703	1500

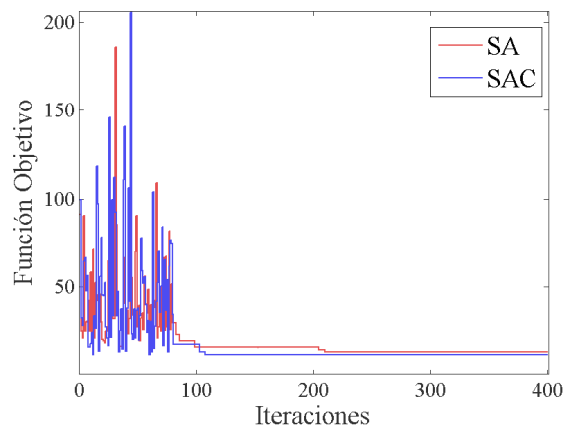


Figura 8.10. Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño Dqy, correspondiente a D1/PO2.

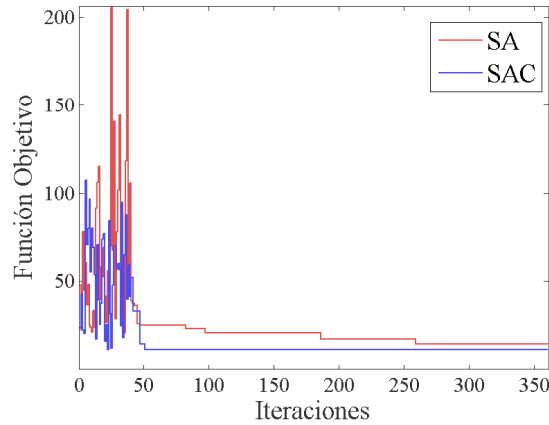


Figura 8.11. Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño Dqy, correspondiente a D2/PO3.

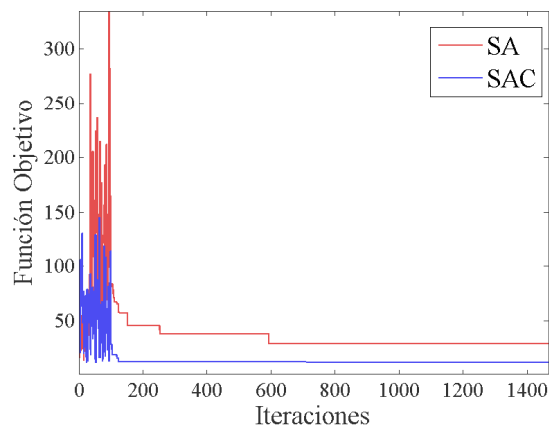


Figura 8.12. Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño Dqy, correspondiente a D3/PO4.

Los resultados obtenidos para el diseño Dqy se muestran en la Tabla 8.8, donde se especifican las dimensiones de la sección transversal y la secuencia de laminación óptimas. En las Figuras 8.10, 8.11 y 8.12 se grafican los valores de la función objetivo que fueron aceptados durante el proceso de optimización, en los casos detallados en la Tabla 8.8. Se observa que el comportamiento de ambos algoritmos es similar al expuesto con anterioridad. Cabe destacar que, en este caso, aún empleando el menor intervalo de búsqueda (D1), el algoritmo SA no alcanza el mínimo global utilizando los mismos parámetros que al implementar el algoritmo SAC. A diferencia del diseño Dqz, aquí se consideró un espacio de búsqueda aún mayor (dominio D3), aumentando la precisión en la que se determinan las dimensiones de la sección. Para tales diseños se obtuvieron grandes diferencias entre los mínimos alcanzados por cada de los algoritmos. A continuación se realiza una comparación más exhaustiva respecto al comportamiento de ambos.

En base a los resultados obtenidos, se puede concluir que al aumentar el dominio de búsqueda de las variables de diseño, la incorporación de un método de búsqueda caótico en el algoritmo *simulated annealing* proporciona mejores resultados que la aplicación del

método de búsqueda clásico. En algunos casos particulares, a iguales parámetros de configuración, el algoritmo SA queda atrapado en mínimos locales, mientras que el algoritmo SAC encuentra el mínimo global. Una de las causas principales de este comportamiento es la distribución que adopta la función objetivo, la cual presenta varios mínimos locales, como se muestra a continuación.

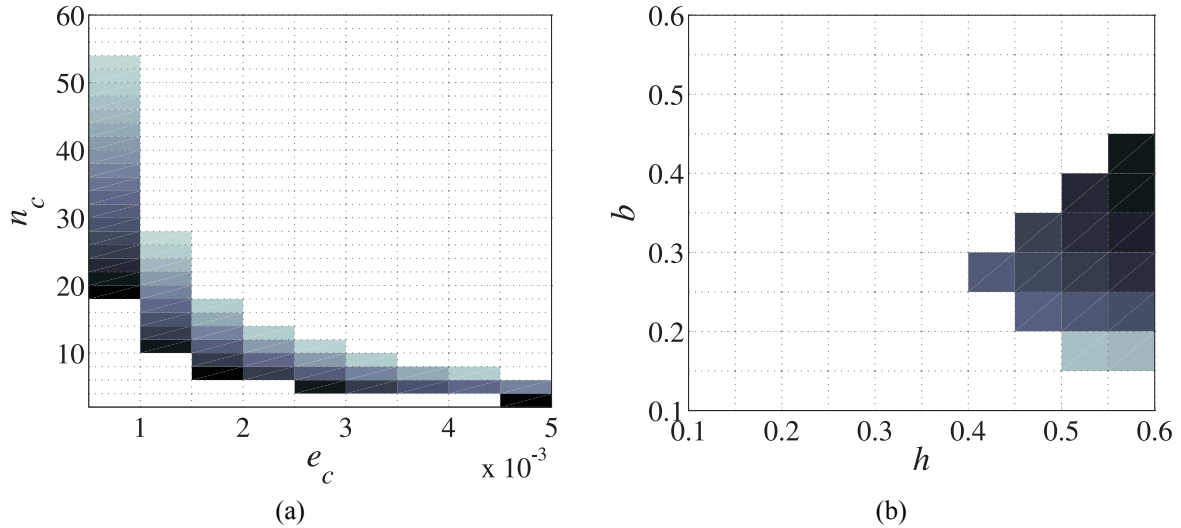


Figura 8.13. Distribución de la función objetivo vs. las variables: (a)  $e_c$  y  $n_c$  para el diseño Dqz, dominio D2,  $h = 0.6$  m,  $b = 0.45$  m,  $[0_{nc}]$ , (b)  $b$  y  $h$  para el diseño Dqz, dominio D2,  $e_c = 0.0045$  m,  $n_c = 2$ ,  $[0_{nc}]$ .

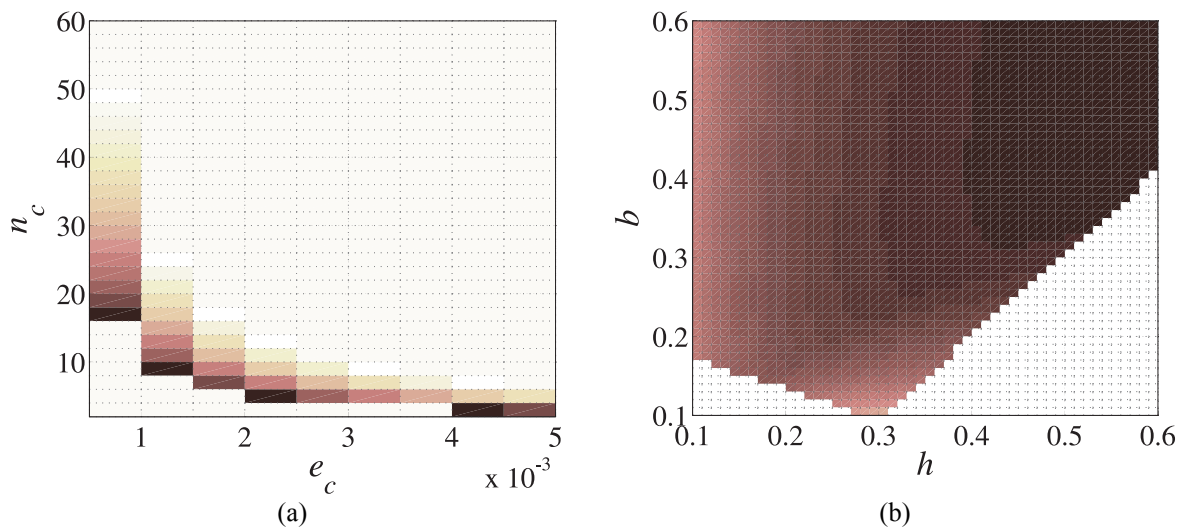


Figura 8.14. Distribución de la función objetivo vs. las variables: (a)  $e_c$  y  $n_c$  para el diseño Dqy, dominio D3,  $h = 0.6$  m,  $b = 0.53$  m,  $[0_{nc}]$ , (b)  $b$  y  $h$  para el diseño Dqy, dominio D3,  $e_c = 0.004$  m,  $n_c = 2$ ,  $[0_{nc}]$ .

En la Figura 8.13(a) se grafican los valores que adopta la función objetivo para el diseño Dqz en el dominio D2, variando el número de capas y su espesor (fijando las variables  $b$ ,  $h$  y  $\theta_k$  en sus valores óptimos). La Figura 8.13(b) muestra los valores de la función objetivo, para el mismo diseño, variando ahora  $b$  y  $h$  (fijando las variables  $e_c$ ,  $n_c$  y  $\theta_k$  en sus valores óptimos). Las variables se grafican en todo el dominio en el que están definidas,

identificando las zonas no factibles en blanco. Estas zonas quedan definidas por las restricciones impuestas al problema y son las que originan la presencia de los mínimos locales que se observan en las figuras 8.13(a) y 8.14(a). Cabe destacar que tal comportamiento no se presenta en los casos en que varían  $b$  y  $h$  para un número fijo de capas de igual espesor (Figuras 8.13(b) y 8.14(b)), sin embargo, no debe perderse de vista que, durante la optimización, las variables de diseño son cinco en su totalidad.

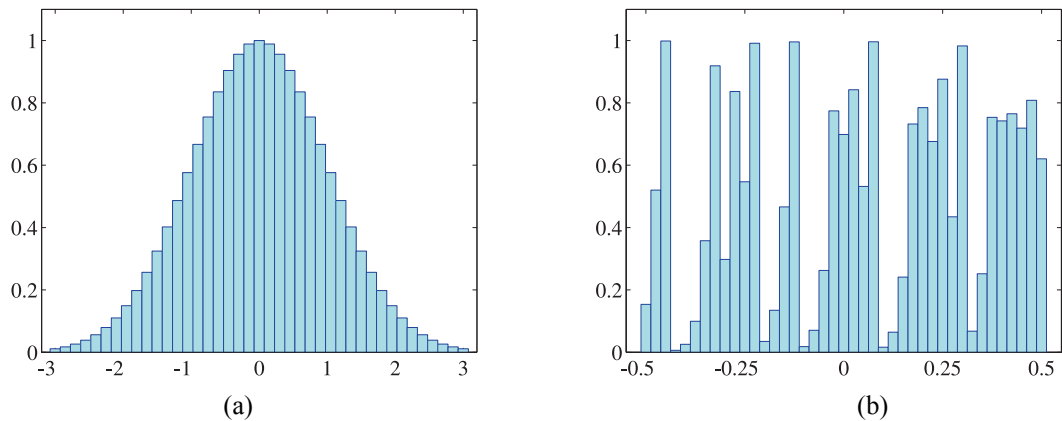


Figura 8.15. Distribución de puntos de: (a) distribución normal estándar; (b) mapa logístico ( $\mu = 4$ ).

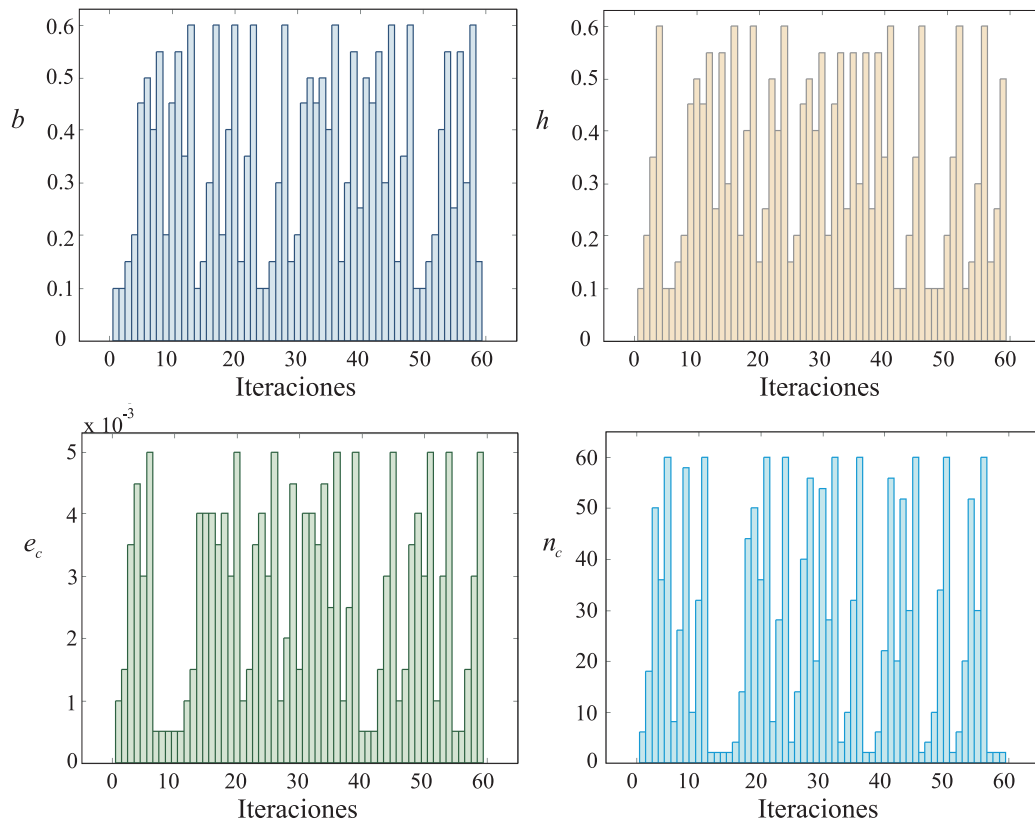


Figura 8.16. Generación de las variables  $b$ ,  $h$ ,  $e_c$  y  $n_c$  utilizando el mapa logístico, siendo  $\mu = 4$ .

Como se mencionó, la diferencia entre los dos algoritmos implementados aquí es la forma de generar las soluciones en cada iteración. El método de búsqueda de SA genera las

variables en base a una distribución normal, cuya función de densidad se muestra en la Figura 8.15(a). Mientras que el algoritmo SAC introduce sistemas caóticos en la búsqueda del algoritmo, generando las variables de diseño a partir del mapa logístico, como se muestra en la Figura 8.15(b). La eficiencia del algoritmo SAC y su ventaja de escapar de mínimos locales está fundamentada en las propiedades estocásticas y de ergodicidad del sistema caótico empleado en el método de búsqueda. Esto se ve evidenciado en las generaciones que se muestran en la Figura 8.15. La Figura 8.16 muestra una posible generación durante 60 iteraciones, correspondiente a las variables  $b$ ,  $h$ ,  $e_c$  y  $n_c$  empleando el método de búsqueda caótico.

Los cálculos que se realizaron para el diseño Dqz tuvieron un costo computacional de alrededor de 30 minutos (700 iteraciones), mientras que para el caso de diseño Dqy el tiempo total de cálculo tuvo un máximo de una hora para el dominio D3. No se observaron grandes diferencias entre los tiempos de cálculo producto de la aplicación de uno u otro algoritmo. Cabe destacar que la programación del algoritmo se realizó en un entorno MATLAB<sup>®</sup>, empleando un procesador AMD Athlon de 3.01 GHz, con 2.96 GB de memoria RAM.

## 8.5 Aplicaciones del esquema de diseño DO4

En el diseño DO1 el factor de peso  $W$  fue impuesto de manera arbitraria en el diseño estructural. Sin embargo, es posible realizar un diseño en el que este factor esté contenido en la función objetivo global en base a la influencia que tiene cada función objetivo en sí misma. Para lograrlo existen distintas alternativas. Una de ellas es emplear el método de criterio global descrito en el Capítulo 5 durante el desarrollo del esquema de diseño DO4. A continuación, se presentan algunas aplicaciones particulares de dicho esquema.

Se propone diseñar vigas rectas de sección transversal tipo I sometidas a las condiciones de borde que se muestran en la Figura 8.17. Para ello, se considera la minimización de la deflexión y del peso de la viga conjuntamente con la maximización de la resistencia, tal como se desarrolló en la sección 5.3.4.

En particular, se considera una viga de 6 m de longitud y se asume conocida la magnitud de las cargas ( $P = -1.10^5$  N,  $M_y = 1.10^4$  Nm,  $q_z = -3.10^3$  N/m). Se propone emplear para su construcción un material compuesto de fibras de vidrio-E y poliéster, cuyas propiedades mecánicas se dan en el Apéndice I.



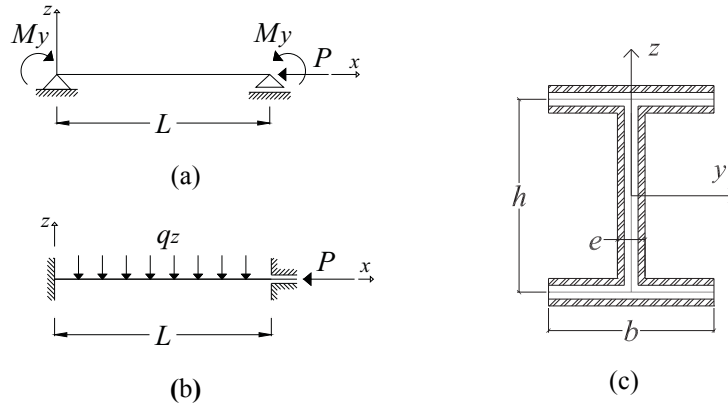


Figura 8.17. Condiciones de borde analizadas en el esquema DO4: (a) viga simplemente apoyada (SA), (b) viga doblemente empotrada (EE). (c) Sección transversal.

Las dimensiones de la sección transversal y la laminación son las variables de diseño del problema y los dominios en que están definidas son los siguientes

$$\begin{aligned}
 h &= [0.1 : 0.01 : 0.6] \text{ m}, & b &= [0.1 : 0.01 : 0.6] \text{ m}, & e &= [0.004 : 0.004 : 0.06] \text{ m} \\
 \text{Laminados:} & \quad \text{Caso SAP: } [0/0]_s, [0/90]_s, [45/-45]_s & (8.3) \\
 & \quad \text{Caso EE: } [0/0]_s, [0/90]_s
 \end{aligned}$$

En el Apéndice I también se pueden ver los *carpet plots* que definen las resistencias máximas a tracción, a compresión y a corte de los laminados construidos con dicho material. Tales resistencias adoptan los siguientes valores para los laminados empleados

$$\begin{aligned}
 [0/0]_s &\rightarrow F_{xt} = 903 \text{ MPa}, & F_{xc} &= 379 \text{ MPa}, & F_{xy} &= 44 \text{ MPa}, \\
 [0/90]_s &\rightarrow F_{xt} = 104 \text{ MPa}, & F_{xc} &= 112 \text{ MPa}, & F_{xy} &= 44 \text{ MPa}, & (8.4) \\
 [45/-45]_s &\rightarrow F_{xt} = 50 \text{ MPa}, & F_{xc} &= 58 \text{ MPa}, & F_{xy} &= 95 \text{ MPa}.
 \end{aligned}$$

Se impone un valor de área máxima que puede tener la sección transversal ( $A_{max} = 0.05 \text{ m}^2$ ) y la deflexión máxima es acotada superiormente ( $\delta_{max} = 0.015 \text{ m}$ ), de acuerdo a la expresión (5.6).

Definidas las restricciones estructurales y geométricas a las que está sometida la estructura, se está en condiciones de resolver el problema de diseño. Como se mencionó anteriormente, en este diseño se consideran múltiples objetivos contenidos en una función objetivo global, como se indica en la formulación del esquema de diseño dada por (5.20). Para hallar dicha función global, previamente se deben determinar las soluciones óptimas que generan la máxima carga de pandeo, el mínimo desplazamiento y el mínimo peso de la viga resolviendo los tres problemas de optimización establecidos en (5.18-5.19).

Dado que los problemas a resolver durante el diseño son relativamente simples y las variables están definidas en dominios pequeños, el método SA es implementado en base al

método de búsqueda clásico.

Luego, los problemas de optimización son resueltos implementando computacionalmente las siguientes técnicas: *simulated annealing* (SA) y algoritmo genético (AG), con el propósito de realizar una comparación entre ambas, contrastando las soluciones óptimas y los tiempos de cálculo de cada una de ellas. Los conceptos teóricos de cada algoritmo fueron detallados en el Capítulo 6.

Algoritmo genético es implementado en un entorno MATLAB<sup>®</sup>, empleando codificaciones binarias y utilizando los operadores genéticos que se especifican a continuación. La población inicial del algoritmo es generada en forma aleatoria y la reproducción se realiza según la expresión (6.12). Se adopta una probabilidad de cruce  $P_c = 0.5$  y una probabilidad de mutación  $P_m = 0.01$ . El problema es restringido mediante un método de penalización, empleando la función penalidad que se indica en (6.8). Para ello, se adopta un valor de  $\beta$  igual a 1 y el coeficiente  $\zeta_i$  toma un valor de 10 para los problemas de optimización dados por (5.18) y se considera igual a 100 para restringir el problema de optimización multiobjetivo (5.17), dado que en algunos casos la función multiobjetivo es mayor a 10.

La Tabla 8.9 muestra los diseños óptimos hallados en los dos casos de vinculación analizados. Allí se detallan las soluciones óptimas de cada uno de los problemas de optimización resueltos y los valores óptimos de cada una de las funciones objetivo. Se observa que las soluciones óptimas del problema multiobjetivo contemplan en mayor o menor medida a cada uno de los objetivos. Analizando físicamente el problema, minimizar el desplazamiento y maximizar la resistencia al pandeo implica un aumento en las dimensiones de la sección. Sin embargo, minimizar el peso de la estructura se traduce en la minimización del área de la sección transversal, por lo que las dimensiones de la sección deben ser pequeñas. En los resultados se observa que para cumplir estos objetivos en forma conjunta,  $b$  y  $h$  son grandes (de manera de otorgar rigidez y resistencia), mientras que el espesor disminuye tanto como se lo permita la condición de estabilidad local de la sección (de manera de minimizar el peso). Cabe aclarar que las soluciones óptimas obtenidas para la viga SAP son similares a las obtenidas para la viga EE. Esto se debe a que tanto el tipo de carga como su magnitud son similares en ambos casos.

Las dos técnicas de optimización empleadas obtuvieron los mismos resultados óptimos y es por eso que no se diferencia entre una u otra técnica en la Tabla 8.9. Sin embargo, a fin de realizar una comparación en la performance de ambos algoritmos, en las Tablas 8.10 y 8.11 se exponen los tiempos de cálculo y las iteraciones realizadas en cada una de las

corridas. Empleando el mismo procesador en todos los casos, se obtuvieron diferencias mínimas de tiempo de cálculo entre los dos métodos. El número de iteraciones se indica sólo como una característica de cada una de las técnicas, dado que no es comparable entre ambas. Esto se debe a que las generaciones son muy diferentes: algoritmo genético genera poblaciones en cada iteración mientras que *simulated annealing* genera una única solución factible por cada iteración y para hallarla se genera una cantidad incierta de soluciones no factibles. Por lo tanto, considerando los tiempos de cálculo, es evidente que para este caso particular ambas técnicas son igualmente eficaces. Sin embargo, es importante mencionar que la configuración inicial de los parámetros de convergencia de AG se define de forma más rápida y simple que la configuración inicial de SA.

Tabla 8.9. Diseños óptimos obtenidos en la aplicación del esquema DO4.

	VIGA SAP	VIGA EE
$f_1(\mathbf{x}_1^*) [1/\text{Nm}]$	$3.60 \cdot 10^{-7}$	$1.29 \cdot 10^{-7}$
$\mathbf{x}_1^* = (b_1^*, h_1^*, e_1^*, \theta_{k1}^*)$	(0.60,0.58,0.028,0°)	(0.60,0.58,0.0028,0°)
$f_2(\mathbf{x}_2^*) [\text{m}]$	0.0006	0.0002
$\mathbf{x}_2^* = (b_2^*, h_2^*, e_2^*, \theta_{k2}^*)$	(0.39,0.60,0.036,0°)	(0.39,0.60,0.036,0°)
$f_3(\mathbf{x}_3^*) [\text{m}^2]$	0.0038	0.0026
$\mathbf{x}_3^* = (b_3^*, h_3^*, e_3^*, \theta_{k3}^*)$	(0.28,0.40,0.004,0°)	(0.18,0.30,0.004,0°)
$F_{MCG}$	21.62	37.00
Laminado óptimo	[0 <sub>4</sub> ]	[0 <sub>4</sub> ]
$(b^*, h^*, e^*)$	(0.60,0.60,0.008)	(0.60;0.60;0.008)
$M_{cr(\mathbf{x}^*)} [\text{Nm}]$	$7.78 \cdot 10^5$	$2.22 \cdot 10^6$
$\delta_{(\mathbf{x}^*)} [\text{m}]$	0.002	0.001
$A_{(\mathbf{x}^*)} [\text{m}^2]$	0.0144	0.0144

Tabla 8.10. Costos computacionales en el diseño de la viga simplemente apoyada.

	<i>Simulated annealing</i>		Algoritmo genético	
	Tiempo [seg]	Iteraciones	Tiempo [seg]	Iteraciones
$\min f_1(\mathbf{x}) = 1/M_{cr}$	14.9	5200	14.8	500
$\min f_2(\mathbf{x}) = \delta$	13.9	6000	13.6	300
$\min f_3(\mathbf{x}) = A$	14.1	6000	13.3	300
$\min F_{MCG}(\mathbf{x})$	13.1	10150	12.0	300

Los cálculos se realizaron con un procesador DualCore Intel Wolfdale de 2533 MHz, con 2044 MB de memoria RAM.

En las Figuras 8.18 y 8.19 se muestran esquemáticamente las soluciones óptimas de cada uno de los problemas de optimización resueltos.

Tabla 8.11. Costos computacionales en el diseño de la viga doblemente empotrada.

	<i>Simulated annealing</i>		Algoritmo genético	
	Tiempo [seg]	Iteraciones	Tiempo [seg]	Iteraciones
$\min f_1(\mathbf{x}) = 1/M_{cr}$	8.3	4080	10.4	400
$\min f_2(\mathbf{x}) = \delta$	9.3	8140	10.0	300
$\min f_3(\mathbf{x}) = A$	16.0	8000	13.6	300
$\min F_{MCG}(\mathbf{x})$	12.8	9450	14.4	300

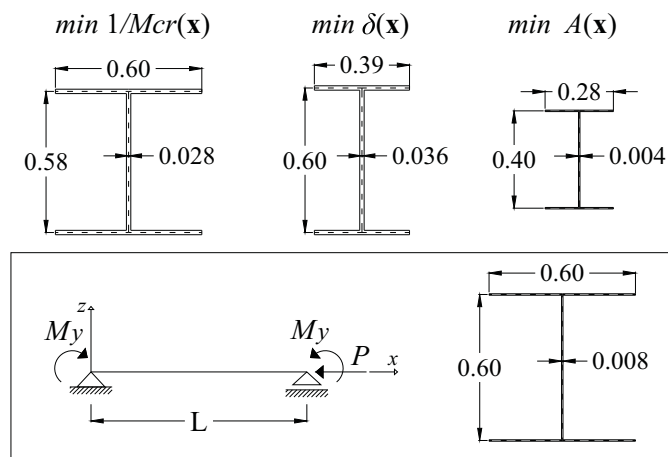


Figura 8.18. Esquemas de las secciones óptimas (viga SAP).

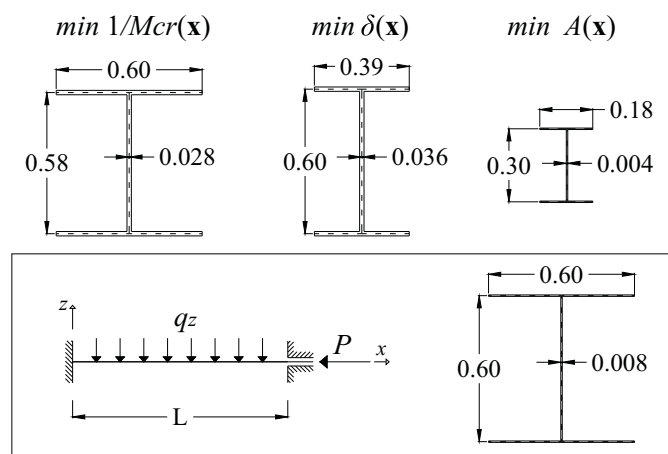


Figura 8.19. Esquemas de las secciones óptimas (viga EE).

Más allá del método de optimización empleado para resolver el problema de diseño, hay que destacar que el planteo del problema en sí mismo hace que los tiempos de cálculo sean considerablemente menores a los que se obtienen al realizar el cálculo estructural mediante

el modelo de elementos finitos. Esto confirma la eficiencia computacional del diseño analítico y la importancia de poder realizar un diseño preliminar simplificado desde el punto de vista estructural, sobre todo en problemas de gran escala donde el número de iteraciones crece considerablemente.

## 8.6 Aplicaciones del esquema de diseño bajo incertidumbre DO5

En los casos en que existe cierta incertidumbre respecto a las cargas aplicadas a la estructura y se desean contemplar posibles variaciones en las mismas, pueden aplicarse estrategias de anti-optimización y formular el esquema de diseño de la manera en que se describió para el esquema DO5 en el Capítulo 5. A continuación, se aplica tal esquema al diseño de vigas FRP para las dos hipótesis de carga mostradas en la Figura 8.20 (casos C1 y C2), en base a las siguientes especificaciones iniciales.

Se asume que la viga de pared delgada a diseñar será recta, tendrá 6 metros de longitud y será construida con el material GrafitoT300/Epoxi5208, cuyas propiedades se describen en el Apéndice I. Como se indica en la Figura 8.20, la viga se encuentra empotrada en sus dos extremos y está sometida a una carga nominal en la dirección del eje  $z$  ( $Q_0 = 20$  kN). La sección transversal máxima preestablecida es de  $0.01$  m<sup>2</sup>, admitiendo un desplazamiento total máximo de  $0.015$  m.

Las variables de diseño se definen en los siguientes intervalos:  $b = [0.1:0.02:0.8]$  m,  $h = [0.1:0.02:0.8]$  m,  $e = [0.004:0.001:0.1]$  m y  $\theta_k = [0, 90]$ , pudiendo formar laminados ortótropos con un número fijo de capas igual a 4.

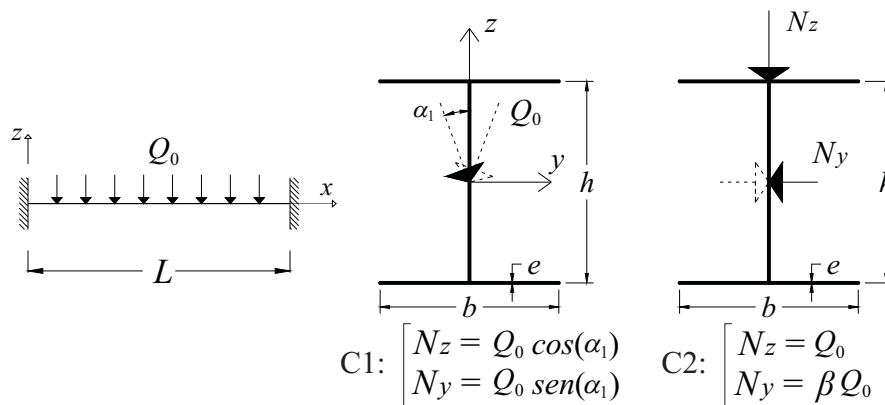


Figura 8.20. Condiciones de borde y estados de carga considerados en el esquema DO5.

El problema de optimización externo es resuelto mediante *simulated annealing* (SA), mientras que el problema interno se resuelve haciendo una búsqueda exhaustiva, dado que los intervalos de incertidumbre analizados son pequeños y, consecuentemente, el tiempo

empleado en su resolución también es pequeño.

En primer lugar, se resuelve el problema de diseño sin considerar la incertidumbre en la carga, a fin de poder evaluar la robustez de los diseños obtenidos. Para esto, se define una única carga nominal de referencia: una carga distribuida en el sentido negativo del eje  $z$ , de magnitud  $Q_0$ . Los resultados obtenidos se muestran en las primeras filas de las Tablas 8.12 y 8.13, correspondientes a  $\alpha_1 = 0$  y  $\beta = 0$ , respectivamente.

En el caso de carga C1, se adoptan los siguientes tres intervalos de variación del ángulo de inclinación de la carga ( $\alpha_1$ ):  $I_{10} = [-10^\circ:5^\circ:10^\circ]$ ,  $I_{20} = [-20^\circ:10^\circ:20^\circ]$ ,  $I_{30} = [-30^\circ:15^\circ:30^\circ]$ . Los resultados de este análisis se muestran en la Tabla 8.12.

Se observa que la solución óptima se modifica en el primer caso analizado (C1– $I_{10}$ ). Esto se debe a que cuando  $\alpha_1$  adopta un valor distinto de cero (es decir, cuando la carga pasa de ser estrictamente vertical a estar inclinada un cierto ángulo), si bien el estado de carga más desfavorable está dado por la carga nominal, la solución óptima es restringida por la condición de pandeo local. Cabe destacar que si se adoptara un diseño óptimo determinístico y en algún momento la carga nominal deja de ser vertical, entonces la estructura fallaría por pandeo local del alma.

Tabla 8.12. Diseños óptimos para el caso C1.

Casos	$N^*$ [kN]	$b^*$ [m]	$h^*$ [m]	$e^*$ [m]	Laminado	Costo Mínimo
Nominal	-	0.40	0.80	0.006	[0 <sub>4</sub> ]	24.70
C1 – $I_{10}$	(-20,0)	0.40	0.44	0.008	[0 <sub>4</sub> ]	36.20
C1 – $I_{20}$	(-20,0)	0.36	0.38	0.009	[0 <sub>4</sub> ]	48.53
C1 – $I_{30}$	(-20,0)	0.35	0.40	0.009	[0 <sub>4</sub> ]	49.57

Tabla 8.13. Diseños óptimos para el caso C2.

Casos	$N^*$ [kN]	$b^*$ [m]	$h^*$ [m]	$e^*$ [m]	Laminado	Costo Mínimo
Nominal	-	0.36	0.52	0.008	[0 <sub>4</sub> ]	39.83
C2 – $I_{10}$	(-20, $\pm 2$ )	0.36	0.52	0.008	[0 <sub>4</sub> ]	39.88
C2 – $I_{20}$	(-20, $\pm 4$ )	0.36	0.52	0.008	[0 <sub>4</sub> ]	40.06
C2 – $I_{30}$	(-20, $\pm 6$ )	0.36	0.52	0.008	[0 <sub>4</sub> ]	40.34
C2 – $I_{40}$	(-20, $\pm 8$ )	0.36	0.52	0.008	[0 <sub>4</sub> ]	40.74
C2 – $I_{50}$	(-20, $\pm 10$ )	0.36	0.52	0.008	[0 <sub>4</sub> ]	41.24
C2 – $I_{51}$	(-20, $\pm 10.2$ )	0.36	0.38	0.009	[0 <sub>4</sub> ]	51.04

Los resultados para el caso de carga C2 se muestran en la Tabla 8.13, suponiendo que la magnitud de la carga secundaria adopta distintos valores definidos en relación a la carga

nominal ( $N_y = I\% N_z$ ). Para ello, se especifican los siguientes intervalos:  $I_{10} = [-0.10:0.05:0.10]$ ,  $I_{20} = [-0.20:0.10:0.20]$ ,  $I_{30} = [-0.30:0.15:0.30]$ ,  $I_{40} = [-0.40:0.20:0.40]$ ,  $I_{50} = [-0.50:0.25:0.50]$ ,  $I_{51} = [-0.51:0.255:0.51]$ . Bajo este estado de carga, el diseño muestra que la seguridad frente al pandeo global disminuye al considerar la incertidumbre de la carga, dado que la situación más desfavorable se produce siempre que exista la carga horizontal y la solución óptima no varía. Para este ejemplo en particular, cuando la carga lateral accidental supera en más de un 50 % a la carga nominal, se activa la condición de pandeo local. Esto significa que recién en ese caso, un diseño óptimo determinístico fallaría por pandeo localizado de la sección.

Los tiempos de cálculo fueron del orden de 10 minutos en los problemas de optimización minimax resueltos (C1, C2) y de 5 minutos en la resolución del problema determinístico (considerando sólo la carga nominal). Cabe destacar que se utilizó un procesador DualCore Intel Wolfdale de 2533 MHz, con 2044 MB de memoria RAM.





## CAPÍTULO 9

# SUMARIO, CONTRIBUCIONES, PUBLICACIONES Y TRABAJO A FUTURO

### 9.1 Sumario

En esta tesis se han formulado diferentes esquemas destinados al diseño óptimo de vigas de pared delgada construidas con materiales FRP. Tales esquemas fueron empleados para el diseño de vigas rectas y curvas sometidas a diferentes situaciones hipotéticas de carga y vinculación. En los diseños óptimos presentados fueron considerados los siguientes objetivos: la carga de pandeo global de la estructura, el desplazamiento máximo y el peso total de la misma. Se propusieron distintas alternativas a fin de contemplarlos en forma conjunta o individual. Algunas de las funciones multiobjetivo fueron definidas como el cociente adimensionalizado entre los objetivos particulares a considerar, mientras que otras fueron determinadas empleando distintos métodos multiobjetivo. En particular, se aplicaron el método de coeficientes de peso y el método de criterio global. El primero de ellos consiste en establecer parámetros de peso arbitrarios a cada objetivo, los cuales son definidos por el diseñador y, por lo tanto, el esquema de diseño permite considerar uno o varios objetivos. En cambio, empleando el método de criterio global se define un diseño multiobjetivo que otorga a cada función objetivo la importancia que le corresponde de manera implícita. Esto requiere de la resolución previa de distintos problemas de optimización que minimizan los objetivos particulares.

Los esquemas de diseño se formularon de manera de poder diseñar la sección transversal de la viga y el laminado óptimo. Para ello, el vector de las variables de diseño fue definido por las dimensiones de la sección y por los ángulos de orientación de las fibras del laminado. Se propusieron distintas alternativas para definir el espesor total de las paredes de la sección transversal. En el caso más general se definió al mismo como el producto entre el número de capas y el espesor de cada una de ellas, considerando a ambas magnitudes como variables del problema de optimización.

Todos los diseños fueron condicionados por restricciones geométricas y estructurales. Se consideraron: condiciones de resistencia estática (aplicando el criterio de falla de Tsai-Wu),

condiciones de resistencia a fatiga (aplicando el criterio CT-HE basado en el criterio de Tsai-Hill, extendido para el análisis de falla por fatiga), condiciones de estabilidad global y local (la inestabilidad local de la sección transversal fue evaluada en forma aproximada a través de las fórmulas desarrolladas en esta tesis), condiciones de desplazamiento (preestableciendo el desplazamiento máximo que puede producirse en la estructura) y condiciones geométricas (las cuales se aplican directamente sobre las dimensiones de la sección, verificando además que se cumplan las relaciones para que la estructura se comporte como una viga de pared delgada).

Adicionalmente, se incorporó el concepto de incertidumbre al modelo de diseño, considerando como variables inciertas a las componentes de la carga aplicada a la estructura. El modelo matemático mediante el cual se formuló este diseño está basado en una técnica de anti-optimización, en la cual el problema de optimización se resuelve en dos niveles (optimización minimax). El problema interno determina las variables óptimas de incertidumbre que producen la condición de carga más desfavorable, mientras que el externo minimiza la función objetivo respecto a las variables de diseño. Se asignaron dos tipos de variaciones en la carga que contemplan la incertidumbre en cuanto a la orientación de la carga y la ocurrencia de pequeñas cargas de flexión accidentales.

Es sabido que cuando el problema de diseño se formula como uno de optimización, se requiere implementar un modelo de análisis estructural que defina el comportamiento de la estructura durante el proceso de diseño y, en forma conjunta, se deben aplicar las técnicas de optimización que permiten obtener la solución óptima del problema.

El análisis estructural se realizó mediante la aplicación de un modelo teórico desarrollado aquí, basado en el principio de Hellinger-Reissner. El mismo considera flexibilidad por corte debida a flexión y alabeo en vigas FRP de eje recto o curvo. Se presentaron dos enfoques para determinar las ecuaciones constitutivas de las resultantes de tensión en el área. El primero surge a partir del variacional constitutivo de Reissner, mientras que el segundo enfoque se basa en el principio de trabajos virtuales. La ventaja fundamental del enfoque constitutivo de Reissner es aportar coeficientes de rigidez por corte en forma natural a la formulación del problema que proporcionan mejores resultados, tanto en el cálculo de frecuencias naturales como de inestabilidad. Sin embargo, dicho enfoque está basado en ciertas hipótesis que limitan su uso en laminaciones más generales.

Por este motivo, fue expuesto el segundo enfoque constitutivo basado en el principio de trabajos virtuales, aunque éste sea más impreciso.

En base al modelo teórico de vigas expuesto, se obtuvieron soluciones explícitas aproximadas que permiten determinar las cargas críticas de pandeo global de vigas rectas FRP con laminación simétrica y balanceada de manera analítica. A tal efecto, se contemplaron secciones transversales doblemente simétricas de vigas sometidas a distintos estados de flexo-compresión bajo condiciones de vinculación particulares. Las cargas críticas obtenidas empleando dichas fórmulas fueron comparadas con los resultados de la aplicación del modelo de elementos finitos unidimensional presentado.

Por su parte, se desarrollaron fórmulas explícitas aproximadas para evaluar las cargas críticas locales en vigas FRP rectas y curvas de pared delgada con laminación ortótropa. Este análisis de inestabilidad local se realizó modelando a cada segmento de la sección transversal como una placa de gran longitud y considerando, como aspecto distintivo, la presencia de esfuerzos variables linealmente en las paredes de la viga. Luego, la carga de pandeo local se determinó considerando a cada pared de la sección transversal como una placa individual de gran longitud restringida rotacionalmente por el segmento adyacente. Los resultados emergentes del procedimiento analítico expuesto para el análisis de inestabilidad local fueron contrastados con los resultados obtenidos de modelos tridimensionales de elementos lámina implementados en ABAQUS 6.7<sup>®</sup>.

Durante la resolución de los diferentes esquemas de diseño propuestos, la respuesta estructural fue evaluada empleando el modelo teórico mencionado anteriormente. En su mayoría, a tal fin se implementó un modelo de elementos finitos unidimensional y se incorporó el estudio analítico de la inestabilidad local empleando las fórmulas desarrolladas a tal fin en esta tesis. Además, se propuso un esquema particular de prediseño de vigas FRP simplemente apoyadas y bi-empotradas sometidas a un estado de flexo-compresión. En este caso, la respuesta estructural se obtuvo mediante fórmulas explícitas expuestas en esta tesis, tanto para el análisis estático como para el cálculo de inestabilidad global y local.

Los problemas de optimización fueron resueltos aplicando técnicas de optimización heurísticas. En particular, se emplearon las técnicas de optimización *Simulated Annealing* (SA), *Simulated Annealing* Caótico (SAC) y Algoritmo Genético (AG). En todos los diseños se empleó el método SA para hallar la solución óptima y, en algunos casos particulares, se aplicaron los métodos SAC y AG con el objetivo de realizar comparaciones entre ellos, respecto a su comportamiento y convergencia.

Se obtuvieron buenos resultados aplicando SA, tanto en lo que respecta a las soluciones halladas como a los tiempos de cálculo. Sin embargo, en los casos en que, tanto el número de variables como el dominio de búsqueda son muy grandes, el método SA presenta ciertas dificultades de convergencia a la solución óptima global del problema, mientras que el método SAC converge al óptimo global con menor error. Estas diferencias se atribuyen al método de búsqueda que emplea cada uno de los algoritmos.

Adicionalmente, se empleó la técnica AG en uno de los esquemas de diseño y su comportamiento también fue comparado con el del método SA. En este caso, los resultados arrojados por ambos fueron muy similares en cuanto a soluciones y tiempos de cálculo obtenidos. Sin embargo, se observó que la configuración inicial de los parámetros de convergencia de AG se define de forma más rápida y simple que la configuración inicial de SA.

## 9.2 Contribuciones

Se formularon novedosos esquemas destinados al diseño de vigas FRP, que contemplan el cumplimiento de las restricciones impuestas a la estructura y permiten satisfacer varios objetivos de manera conjunta.

Se consideró la incertidumbre que puede existir en la carga aplicada a la estructura, empleando conjuntos de intervalos que determinan el caso de carga más desfavorable frente a las distintas acciones sobre la estructura.

En cuanto a la metodología desarrollada e implementada para la resolución de los esquemas de diseño propuestos, se destacan las siguientes contribuciones:

- Se desarrolló un modelo teórico estructural para el análisis de vigas FRP de pared delgada de eje curvo basado en el principio de Hellinger-Reissner. Dicho principio permite obtener de manera implícita coeficientes de rigidez por corte mejorados.
- El modelo estructural teórico se implementó numéricamente a partir de un modelo de elementos finitos unidimensional desarrollado a tal fin.
- Se obtuvieron soluciones analíticas aproximadas para la determinación de las cargas de pandeo flexo-torsional para determinados casos particulares de vinculación. Estas soluciones son de fácil implementación y permiten hallar de manera simple las cargas críticas de pandeo.
- Se desarrollaron formulas explícitas aproximadas para la evaluación del pandeo local en vigas FRP, bajo cualquier estado de carga, siendo validas tanto para secciones

cerradas como abiertas.

- Se implementaron técnicas de optimización que permiten hallar el diseño óptimo en problemas multimodales con variables discretas. Se destaca el comportamiento y la performance demostrada por el algoritmo SAC en la aplicación a problemas de gran escala.

### 9.3 Publicaciones realizadas

De los estudios presentados en esta tesis han surgido una serie de publicaciones, las cuales se detallan a continuación:

- Reguera F, Vidal MC, Cortínez VH (2007). Diseño óptimo de vigas de pared delgada construidas con material compuesto. Publicado como capítulo del libro Modelización aplicada a la ingeniería, Vol. II. Legnani, Jacovkis, Armentano Editores. SeCyT UTN-FRBA, ISBN: 978-950-42-0082-6, págs. 445-470.
- Reguera F, Cortínez VH (2008). Análisis de estabilidad de taludes mediante un método de optimización aleatorio. Memorias del XIX Congreso Argentino de Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica (CAMSIG), págs. 21-28.
- Reguera F, Cortínez VH, Piovan MT (2009a). Diseño de vigas compuestas mediante elementos finitos. Mecánica Computacional XXVIII, Asociación Argentina de Mecánica Computacional. P.A. Lotito, L. A. Parente y M. Vénere, editores, ISSN 1666-6070, págs. 767-788.
- Dotti FE, Reguera F, Cortínez VH, Piovan MT (2009b). Una revisión de los conceptos de la mecánica de fractura fractal discreta. Mecánica Computacional XXVIII, Asociación Argentina de Mecánica Computacional. P.A. Lotito, L. A. Parente y M. Vénere, editores, ISSN 1666-6070, págs. 985-1009.
- Reguera F, Cortínez VH (2010). Soluciones analíticas simplificadas para el diseño óptimo de vigas compuestas de paredes delgadas. Mecánica Computacional XXIX, Asociación Argentina de Mecánica Computacional. E.N. Dvorkin, M. B. Goldschmit y M. A. Storti, editores, ISSN 1666-6070, págs. 1575-1589.
- Reguera F, Cortínez VH (2011). Diseño óptimo de vigas compuestas laminadas sujetas a cargas inciertas. Mecánica Computacional XXX, Asociación Argentina de Mecánica Computacional. O. Möller, J. W. Signorelli, M. A. Storti, editores, ISSN 1666-6070, págs. 2133-2144.

- Reguera F, Cortínez VH (2012). Diseño óptimo de vigas curvas construidas con material compuesto. *Mecánica Computacional XXXI*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional. A. Cardona, P. H. Kohan, R. D. Quinteros, M. A. Storti, editores, ISSN 1666-6070, págs. 3481-3499.

#### 9.4 Sugerencias de trabajo a futuro

El modelo estructural presentado, basado en el principio de Hellinger-Reissner, es válido sólo para laminaciones simétricas y balanceadas u ortótropas. Sin embargo, es posible sustituir tal enfoque por el de trabajos virtuales para analizar laminaciones genéricas.

No obstante, el estudio de pandeo local desarrollado es únicamente válido para laminaciones ortótropas. Por lo tanto, la aplicación del presente modelo estructural a casos de laminación general debería contemplar tal aspecto una vez obtenida la estructura óptima, aplicando un modelo tipo lámina. Asimismo, sería de interés desarrollar expresiones generales que permitan verificar la estabilidad local de la estructura durante el proceso de diseño para el caso de laminaciones generales, en base a la energía de deformación para una placa de laminación general. En tal caso, deberán realizarse los desarrollos y las comparaciones correspondientes que corroboren la validez de las mismas.

Si bien la teoría de vigas presentada es aplicable a secciones transversales genéricas, la misma no fue implementada computacionalmente desde ese punto de vista. Una manera de realizar dicha implementación es modelar la sección transversal mediante puntos definidos por coordenadas. Esto representaría una importante extensión en cuanto al diseño óptimo de vigas, dado que podría realizarse la optimización de forma de la sección transversal de manera automática.

Adicionalmente, los esquemas de diseño propuestos podrían aplicarse al análisis de entramados planos y espaciales, de manera similar al trabajo propuesto por Piovan *et al.* (2002) para el análisis de vibraciones libres.

Por su parte, en los resultados numéricos se supusieron diferentes estados de carga a los que pueden estar sometidas las estructuras tipo viga durante su vida útil. Sin embargo, podrían considerarse cargas de origen térmico, actuando en forma conjunta o individualmente.

Los esquemas de diseño presentados son, en su mayoría, modelos de optimización determinísticos. Sin embargo, el diseño estructural puede ser formulado de manera más robusta y sofisticada sobre la base de distintos modelos matemáticos de incertidumbre.

Aquí se empleó un modelo matemático de incertidumbre basado en el análisis del peor escenario posible. No obstante, diseños similares pueden ser formulados empleando otras técnicas que consideren posibles incertezas en las variables operativas del sistema. Más particularmente, en investigaciones futuras se estudiará la formulación de diseños óptimos basados en confiabilidad (RBDO) en vigas de pared delgada compuestas. Los modelos RBDO presentan grandes ventajas en el diseño estructural, dado que permiten la inclusión de distintos parámetros de incertidumbre, pudiendo evaluar los cambios que ellos producen en la solución. Pueden ser empleados en este aspecto los conceptos desarrollados en los trabajos de Jeong y Shenoj (2000), Schüeller (2001), Papadrakakis y Lagaros (2002), Youn y Choi (2004), Tsompanakis y Papadrakakis (2004), Papadrakakis *et al.* (2005), Lagaros y Papadopoulus (2006), Beck y Santana Gomes (2012).

Finalmente, resulta interesante el estudio y la implementación de nuevas técnicas de optimización heurísticas y sus posibles variaciones, teniendo en cuenta la posibilidad de incluir, en los algoritmos clásicos, modificaciones que mejoren la convergencia de los mismos y/o cambios que produzcan la disminución de los costos computacionales.





## REFERENCIAS

- ABAQUS Analysis Manual v6.7 (2007), © Dassault Systèmes.
- ABAQUS Theory Manual v6.7 (2007), © Dassault Systèmes.
- Adali S, Lene F, Duvaut G, Chiaruttini V (2003). Optimization of laminated composites subject to uncertain buckling loads. *Composite Structures* 62, 261-269.
- Aggarwal HR, Cranch ET (1967). A Theory of torsional and coupled bending-torsional waves in thin walled open beams. *Journal of Applied Mechanics* 34 (2), 337-343.
- Almeida FS y Awruch AM (2009). Design optimization of composite laminated structures using genetic algorithms and finite element analysis. *Composite Structures* 88, 443-454.
- Ambrosini R, Riera J, Danesi R (1995). Dynamic analysis of thin walled and variable open section beams with shear flexibility. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 38, 2867-2885.
- Barbero EJ, Raftoyiannis IG (1993). Local buckling of FRP beams and columns. *Journal of Materials in Civil Engineering* 5 (3), 339-355.
- Barbero, EJ (1998). *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis Inc..
- Bathe KJ (1996) *Finite element procedures*, Prentice Hall.
- Bauld NR, Tzeng LS (1984). A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross sections. *International Journal Solids and Structures* 20 (3), 277-297.
- Beck AT, Santana Gomes WJ (2012). A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty. *Probabilistic Engineering Mechanics* 28, 18–29.
- Bhaskar K, Librescu L (1995). A geometrically non-linear theory for laminated anisotropic thin walled beams. *International Journal of Engineering Sciences* 33 (9), 1331-1344.
- Bank LC (2006). *Composites for construction*, J. Willey & Sons. Hoboken.
- Bleich F (1952). *Buckling of metal structures*, McGraw-Hill, New York.
- Bishop RE, Price WG (1977). Coupled bending and twisting of a Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration* 50 (4), 469-477.
- Capuani D, Savoia M, Laudiero F (1992). A generalization of the Timoshenko beam model for coupled vibration analysis of thin walled beams. *Earthquake Engineering Structural Dynamics* 21, 859-879.

Chen CN (2000). Dynamic equilibrium equations of composite anisotropic beams considering the effects of transverse shear deformations and structural damping. *Composite Structures* 48, 287-303.

Cortínez VH, Dotti FE (2010), Un modelo numérico para la dinámica de vigas de pared delgada dañadas por fatiga: Aplicación a la identificación de daños. *Mecánica Computacional* 29, 441-448.

Cortínez VH, Dotti FE (2012), efecto no lineal de cerramiento de fisura en vigas de pared delgada sometidas a vibraciones forzadas. *Mecánica Computacional* 31, 2231-2254.

Cortínez VH, Dotti FE, Piovan MT (2009), Factor de intensidad de tensiones del modo I para vigas abiertas de pared delgada. *Mecánica Computacional* 28, 955-971.

Cortínez VH, Rossi RE (1998a). Dynamics of shear deformable thin-walled open beams subjected to initial stresses. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 14 (3), 293-316.

Cortínez VH, Rossi RE (1998b). Vibrations of pretwisted thin-walled beams with allowance for shear deformability. *Computational Mechanics: New Trends and Applications*. Eds. Idelsohn S, Oñate E, Dvorkin E, CIMNE. (IV World Congress on Computational Mechanics -Buenos Aires)

Cortínez VH, Piovan MT (2002), Vibration and Buckling of Composite Thin-Walled Beams with Shear Deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4), 701-723.

Cortínez VH, Piovan MT (2006). Stability of composite thin-walled beams with shear deformability. *Computers and Structures* 84: 978–990.

Cortínez VH, Machado SP, Piovan MT (2002). Post-pandeo de vigas compuestas de pared delgada. *Mecánica Computacional* 21, 1713-1729.

Cortínez VH, Piovan MT, Rossi RE (1999). Out of plane vibrations of thin-walled curved beams considering shear flexibility. *Structural Engineering and Mechanics* 8, 257-272.

Cortínez VH, Piovan MT, Rossi RE (2000). Mecánica de vigas curvas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos. *Mecánica Computacional* 19, 269-276.

Cortínez VH, Piovan MT, Machado SP (2001). DQM vibration analysis of composite thin-walled curved beams. *Journal of Sound and Vibration* 246(3), 551-555.

Dávalos JF, Qiao P (1999). A computacional approach for análisis and optimal design of frp beams. *Computers and Structures* 70, 169-183.

Dávalos JF, Qiao P, Barbero EJ (1996). Multiobjective material architecture optimization of pultruded FRP I-beams. *Composite Structures* 35, 271-281.

Degrieck J, Van Paepegem W (2001). Fatigue damage modeling of fibre-reinforced composite materials: review. *Applied Mechanics Reviews* 54(4), 279-300.

Dréo J, Pétrowski A (2006). *Metaheuristics for hard optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Erdal O, Sonmez FO (2005). Optimum design of composite laminates for maximum buckling load capacity using simulated annealing. *Composite Structures* 71, 45-52.

Gendy AS, Saleeb F (1994). Vibration-analysis of coupled extensional-flexural-torsional modes of curved beams with arbitrary thin-walled sections. *Journal of Sound and Vibration* 174 (2), 261-274.

Ghorbanpoor A, Omidvar B (1996). Simplified analysis of thin-walled composite members. *Journal of Structural Engineering* 122, 1379–1383.

Goodier NJ (1941). The buckling of compressed bars by torsion and flexure. Cornell University Engineering Experiment Station, Bulletin 27.

Holland JH (1992). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, 2nd edition. MIT Press.

Hu N, Hu B, Yan B, Fukunaga H, Sekine H (1999). Two kinds of C0-type elements for buckling analysis of thin walled curved beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 171, 87-108.

Jen HR, Lee CH (1998a). Strength and life in thermoplastic composite laminates under static and fatigue loads. Part I: Experimental. *International Journal of Fatigue* (20), 9:605-615.

Jen HR, Lee CH (1998b). Strength and life in thermoplastic composite laminates under static and fatigue loads. Part II: Formulation. *International Journal of Fatigue* (20), 9:617-629.

Jeong HK, Sheno RA (2000). Probabilistic strength of rectangular FRP plates using Monte Carlo simulation. *Computers and Structures* 76, 219-235.

Kang Z (2005). *Robust design optimization of structures under uncertainties*. Tesis Doctoral. Universidad de Stuttgart. Alemania.

Karperska R, Magnucki K, Ostwald M (2007). Bicriteria optimization of cold-formed thin-walled beams with monosymmetrical open cross sections under pure bending. *Thin-Walled Structures*, 45:563-572.

Kathiravan R, Ganguli, R (2006). Strength design of composite beam using gradient and particle swarm optimization. *Composite Structures* doi: 10.1016/j.compstruct.

Kirkpatrick S, Gelatt CD, Vecchi MP (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, (20), 4598: 671-680.

Kollár LP, Springer GS (2003). *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press.

Lagaros ND, Papadopoulos V (2006). Optimum design of shell structures with random geometric, material and thickness imperfections. *International Journal of Solid and Structures* 43, 6948-6964.

Lee J, Kim SE, Hong K (2002). Lateral buckling of I-section composite beams, *Engineering Structures*, 24, 955-964.

Lekhnitskii SG (1968). *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publisher.

Lombardi L, Haftka RT (1998). Anti-optimization technique for structural design under load uncertainties. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 157, 19-31.

Machado SP (2006). Estabilidad dinámica de estructuras esbeltas construidas con materiales compuestos. Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, Argentina.

Machado SP (2008). Non-linear buckling and postbuckling behavior of thin-walled beams considering shear deformation, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 4, 345-365.

Machado SP (2010). Interaction of combined loads on the lateral stability of thin walled composite beams, *Engineering Structures* 32, 3516-3527.

Machado SP, Cortínez VH (2005a). Non-linear model for stability of thin-walled composite beams with shear deformation. *Thin-Walled Structures* 43 (10), 1615-1645.

Machado SP, Cortínez VH (2005b). Lateral buckling of thin-walled composite bisymmetric beams with prebuckling and shear deformation, *Engineering Structures* 27, 1185-1196.

Machado SP, Cortínez VH (2007). Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations. *Engineering Structures* 29, 372-382.

Machado SP, Cortínez VH (2009). Dynamic stability of thin-walled composite beams under periodic transverse excitation. *Journal of Sound and Vibration* 321, 220-241.

McWilliam S (2001). Anti-optimization of uncertain structures using interval analysis. *Computers and Structures* 79, 421-430.

Magnucki K, Maćkiewicz M, Lewiński J (2006). Optimal design of a mono-symmetrical open cross section of a cold-formed beam with sinusoidally corrugated flanges. *Thin-walled Structures* 44:554-562.

Manevich AI, Raksha SV (2007). Two-criteria optimization of H-section bars–beams under bending and compression. *Thin-Walled Structures* 45:898–901.

Massa JC, Barbero EJ (1998). A strength of materials formulation for thin-walled composite beams with torsion. *Journal Composite Material* 32 (17), 1560-1594.

Mingjun J, Huanwen T (2004). Application of chaos in simulated annealing. *Chaos, Solitons and Fractals* 21, 933–941.

Muller P (1983). Torsional flexural waves in thin-walled open beams. *Journal of Sound and Vibration* 87 (1), 115-141.

Narayana Naik G, Gopalakrishnan S, Ganguli R (2008). Design optimization of composites using genetic algorithms and failure mechanism based failure criterion. *Composite Structures* 83, 354-367.

Paluch B, Grédiac M, Faye A (2008). Combining a finite element programme and a genetic algorithm to optimize composite structures with variable thickness. *Composite Structures* 83, 284-294.

Papadrakakis M, Lagaros ND (2002). Reliability-based structural optimization using neural networks and Monte Carlo simulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191, 3491-3507.

Papadrakakis M, Lagaros ND, Plevris V (2005). Design optimization of steel structures considering uncertainties. *Engineering Structures* 27, 1408-1418.

Piovan MT (2003). Estudio teórico y computacional sobre la mecánica de vigas curvas de materiales compuestos, con sección de paredes delgadas, considerando efectos no convencionales. Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, Argentina.

Piovan MT, Cortínez VH (2002). Vibration studies of composite thin-walled curved box beams using structural tailoring. *Journal of Sound and Vibration* 256 (5), 989-995.

Piovan MT, Cortínez VH (2003). Mecánica de vigas curvas anisótropas con sección de paredes delgadas. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 19 (3), 241-362.

Piovan MT, Cortínez VH (2005). Transverse Shear Deformability in the Dynamics of Thin-Walled Composite Beams: Consistency of Different Approaches. *Journal of Sound and Vibration*, 285: 721-733.

Piovan MT, Cortínez VH (2007a). Mechanics of thin-walled beams made of composite materials. *Thin-Walled Structures* 45 (9), 37-62.

Piovan MT, Cortínez VH (2007b). Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin-Walled Structures* 45(9), 759-789.

Piovan MT, Cortínez VH, Dotti F (2002). Dinámica de entramados espaciales de vigas anisótropas de paredes delgadas. *Mecánica Computacional* 21, 2176-2193.

Piovan MT, Cortínez VH, Rossi RE (2000). Out-of-plane vibrations of shear deformable continuous horizontally thin-walled curved beams, *Journal of Sound and Vibration* 237 (1), 101-118.

Pollock GD, Zak AR, Hilton HH, Ahmad MF (1995). Shear center for elastic thin-walled composite beams. *Structural Engineering and Mechanics* 3, 91-103.

Qiao P, Shan L (2005). Explicit local buckling analysis and design of fiber-reinforced plastic composite structural shapes. *Composite Structures*, 70:468-483.

Rand O (1998). Fundamental closed-form solutions for solid and thin-walled composite beams including a complete out-of-plane warping model. *International Journal Solids and Structures* 35 (21), 2775-2793.

Rao, S (1996). *Engineering Optimization – Theory and Practice*, John Wiley & Sons Inc..

Sapkás A, Kollár LP (2002) Lateral-torsional buckling of composite beams. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 2939-2963.

Savic V, Tuttle ME, Zabinsky ZB (2001). Optimization of composite I-sections using fiber angles as design variables. *Composite Structures* 53, 265-277.

Schüeller GI (2001). Computational stochastic mechanics – recent advances. *Computers and Structures* 79, 2225-2234.

Schüeller GI, Jensen HA (2008). Computational methods in optimization considering uncertainties - An overview. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198: 2-13.

Sherbourne AN, Kabir MZ (1995). Shear strains effects in lateral stability of thin-walled fibrous composite beams. *Journal Engineering Mechanics* 121, 5:640–647.

Smith EC, Chopra I (1991), Formulation and evaluation of an analytical model for composite box-beams. *Journal American Helicopter Society* 36(3), 23-35.

Song O, Librescu L (1993). Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed cross-section contour. *Journal of Sound and Vibration* 167 (1), 129-147.

Song O, Librescu L (1997a). Anisotropy and structural coupling on vibration and instability of spinning thin-walled beams. *Journal of Sound and Vibration* 204 (3), 477-494.

Song O, Librescu L (1997b). Structural modeling and free vibration analysis of rotating composite thin-walled beams. *Journal American Helicopter Society* 42 (4), 358-369.

Tarján G, Sapkás A, Kollár LP (2009). Local Buckling of composite beams. *ICCM17*, Seventeenth International Conference on Composite Materials, Edimburgo.

Tian YS, Lu TJ (2004). Minimum weight of cold-formed steel sections under compression. *Thin-Walled Structures* 42:515–532.

Timoshenko SP (1945), Theory of bending torsion and bucking of thin-walled members of open cross section. *Journal of the Franklin Institute* 239 (3-4-5).

Timoshenko SP (1953). History of strength of materials. Mc Graw Hill Book Company.

Timoshenko SP, Gere J (1961). Theory of elastic stability. McGraw-Hill Book Company, Inc.

Tokuda I, Aihara K, Nagashima T (1998). Adaptive annealing for chaotic optimization. *Physical Review* 58 (4), 5157-5160.

Tsomanakis Y, Papadrakakis M (2004). Large-scale reliability-based structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 26(6), 429-440.

Tsai SW (1965). Strength characteristics of composite materials, NASA CR-224.

Tsai SW, Wu EM (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials* 5:58–80.

Vlasov V (1961). Thin Walled Elastic Beams. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation.

Verdiell AB, Maciel MC and Vidal MC (2007). An improved scheme for accelerating the convergence of the simulated annealing algorithm applied to real world problems. *PAMM, Proc. Appl. Math. Mech.* 7, 1060405-1060406 (2007)/DOI 10.1002/pamm.200700541.

Vidal MC (2003). Un procedimiento heurístico para un problema de asignación cuadrática. Tesis Mg. Matemática. Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur.

Washizu K (1974). Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press.

Wu XX, Sun CT (1990). Vibration analysis of laminated composite thin walled beams using finite elements. *AIAA Journal* 29 (5), 736-742.

Yang D, Li G, Cheng G (2007). On the efficiency of chaos optimization algorithms for global optimization. *Chaos, Solitons and Fractals* 34, 1366–1375.

Yang W, Cao W, Chung TS y Morris J (2005). Applied numerical methods using MATLAB<sup>®</sup>. John Wiley & Sons Inc..

Youn BD, Choi KK (2004). A new response surface methodology for reliability-based design optimization. *Computers and Structures* 82, 241–256.

Zang C, Friswell MI, Mothershead JE (2005). A review of robust optimal design and its application in dynamics. *Computers and Structures* 83, 315-326.



## APÉNDICE I

### PROPIEDADES DE MATERIALES FRP

Se definen las propiedades de los materiales FRP y de sus componentes según la siguiente nomenclatura

#### Propiedades de las fibras

$E_{f1}$	Módulo de elasticidad longitudinal
$G_{f12}$	Módulo de corte longitudinal
$\nu_{f12}$	Coefficiente de Poisson
$s_{f1}$	Resistencia a tracción
$\rho_f$	Densidad

#### Propiedades de las matrices

$E_m$	Módulo de elasticidad
$G_m$	Módulo de corte
$\nu_m$	Coefficiente de Poisson
$s_m$	Resistencia a tracción
$\rho_m$	Densidad

#### Propiedades de la lámina compuesta

$\rho$	Densidad
$E_1$	Módulo de elasticidad longitudinal
$E_2$	Módulo de elasticidad transversal
$G_{12}$	Módulo de corte longitudinal
$G_{23}$	Módulo de corte transversal
$\nu_{12}$	Coefficiente de Poisson longitudinal
$\nu_{23}$	Coefficiente de Poisson transversal
$s_1^+$	Resistencia a tracción longitudinal
$s_2^+$	Resistencia a tracción transversal
$s_{12}$	Resistencia al corte membranal
$s_1^-$	Resistencia a compresión longitudinal
$s_2^-$	Resistencia a compresión transversal

A continuación se especifican las propiedades de los materiales FRP empleados en la tesis.

Tabla AI.1. Propiedades de las fibras empleadas.

Propiedad	Vidrio-E <sup>1</sup>	Vidrio-E <sup>2</sup>	Grafito T300
$E_{f1}$ [GPa]	72	72.3	231
$G_{f12}$ [GPa]	33	-	91
$\nu_{f12}$	0.09	0.22	0.27
$s_{f1}$ [MPa]	3103	3450	3241
$\rho_f$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	2600	2500	1770

Tabla AIII.2. Propiedades de las matrices empleadas.

Propiedad	Viniléster 1222	Poliéster	Epoxi 5208
$E_m$ [GPa]	3.2	3.4	3.9
$G_m$ [GPa]	-	1.23	1.4
$\nu_m$	-	0.38	0.35
$s_m$ [MPa]	79	55.2	50
$\rho_m$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	1300	-	1270

Tabla AI.3. Propiedades de las láminas unidireccionales.

Propiedad	Kevlar 49/ Epoxi	Vidrio-E <sup>1</sup> / Viniléster 1222 (*)	Vidrio-E <sup>2</sup> / Poliéster	Grafito T300/ Epoxi 5208 (*)	Grafito AS4/ Epoxi 3501	Vidrio-E/ Viniléster (*)
$\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	1380	-	-	1600	-	-
$E_1$ [GPa]	75.80	24.4	37.9	181	38.0	19.93
$E_2$ [GPa]	5.50	6.87	11.3	10.3	11.0	6.89
$G_{12}$ [GPa]	2.07	2.89	3.3	7.17	2.36	12.93
$G_{23}$ [GPa]	2.00	-	3.03	-	2.34	-
$\nu_{12}$	0.34	0.32	0.30	0.28	0.30	0.33
$\nu_{23}$	0.37	0.32	0.40	0.59	0.30	0.32
$s_1^+$ [MPa]	1380	548	903	1500	-	-
$s_2^+$ [MPa]	34.50	43	40	40	-	-
$s_{12}$ [MPa]	44.10	64	40	68	-	-
$s_1^-$ [MPa]	576	803	357	1500	-	-
$s_2^-$ [MPa]	138	187	68	246	-	-

En el caso de materiales transversalmente isótropos (indicados con (\*) en las tablas), el módulo de corte transversal puede ser determinado por

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}. \quad (\text{AI.1})$$

Las propiedades de los materiales Vidrio-E/Viniléster1222 y GrafitoT300/Epoxi5208 se obtuvieron de Kollár y Springer (2003), el material Vidrio-E/Viniléster fue empleado por Bank (2006), el material GrafitoAS4/Epoxi3501 fue utilizado por Cortínez y Piovan (2002) y los materiales Kevlar49/Epoxi y Vidrio-E<sup>2</sup>/Poliéster fueron utilizados por Barbero (1998). Para este último material, Barbero (1998) obtiene los *carpet plots* que permiten hallar las resistencias de distintos laminados. Dichos gráficos se reproducen a continuación.

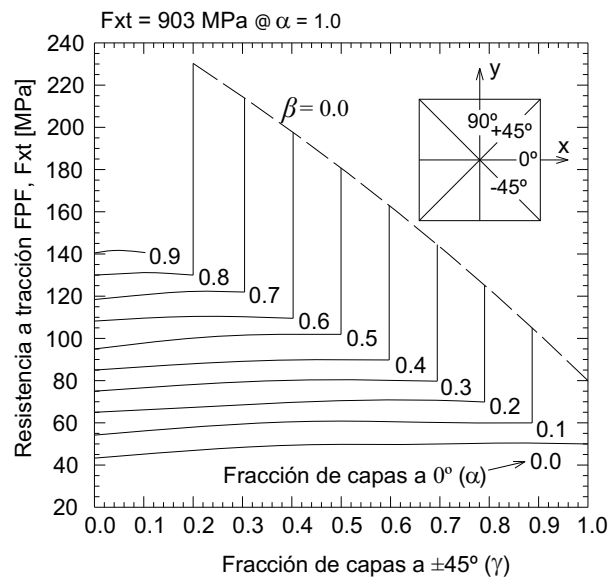


Figura AI.1. *Carpet plot* para hallar la resistencia a la tracción de laminados de Vidrio-E<sup>2</sup>/Poliéster.

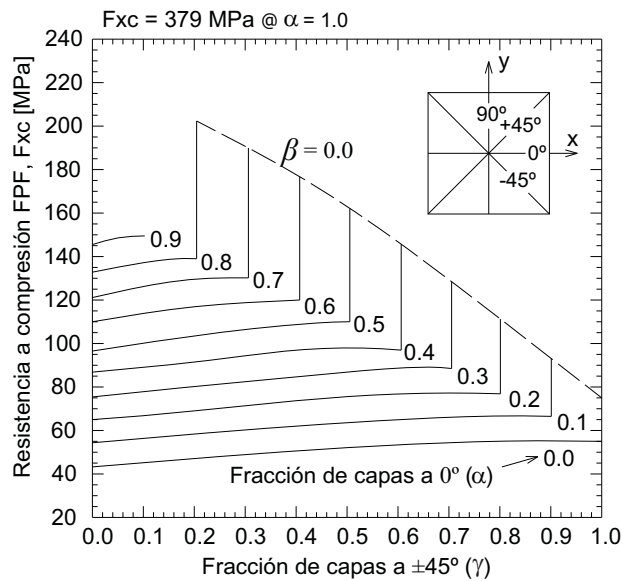


Figura AI.2. *Carpet plot* para hallar la resistencia a la compresión de laminados de Vidrio-E<sup>2</sup>/Poliéster.

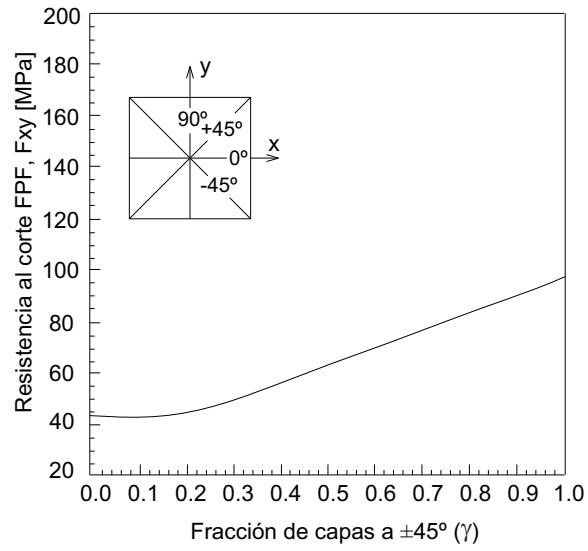


Figura AI.3. *Carpet plot* para hallar la resistencia al corte de laminados de Vidrio-E<sup>2</sup>/Poliéster.