



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

*Bifurcaciones globales y sincronía en redes y sistemas
no suaves*

Ulises Chialva

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2019

Prefacio

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Sur, a través de una beca interna doctoral otorgada por la Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), durante el período comprendido entre los meses de marzo de 2015 y noviembre de 2019, bajo la dirección del Dr. Walter Alberto Reartes, Profesor Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Ulises Chialva



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el / /, mereciendo la calificación de (.....).

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a Walter, por su guía y ayuda a lo largo del desarrollo de esta tesis y mucho más. Su buena disposición y paciencia han sido fundamentales para mí en todo este tiempo.

A mi familia, por su apoyo constante. A mis amigos (los de todos lados), por bancarme en varias. Y a mi novia, Mariela ♡, por estar siempre a mi lado, alentándome en todo.

Tampoco quiero olvidar a mis compañeros de oficina, a los distintos docentes y estudiantes de los que tanto aprendí, y a la Universidad Nacional del Sur y el CONICET, por darme la oportunidad de formarme en esto que me apasiona.

Por último, quiero agradecer a Ana, por su análisis exhaustivo de los borradores de esta tesis y las correcciones que hizo, y también a Andrea, por su colaboración en la lectura final de este trabajo.

A la educación pública.

Resumen

Las redes y los sistemas no suaves constituyen uno de los tópicos más recientes y estudiados en la teoría de los sistemas dinámicos. Distintos desarrollos y problemas surgidos de disciplinas como la física, la biología, la informática y la electrónica, han generado la necesidad de expandir las clásicas herramientas utilizadas para los sistemas suaves a estos nuevos objetos. Por ello, los conceptos y herramientas de la teoría clásica de sistemas dinámicos resultan sistemáticamente generalizados a este nuevo contexto, aunque las particularidades propias de las dinámicas colectivas y/o discontinuas provocan que esta generalización no sea directa.

A lo largo de esta tesis nos concentramos en el análisis de la dinámica de un tipo específico de redes y de cierto tipo específico de sistemas no suaves.

Por un lado damos cuenta de un tipo particular de redes no suaves denominadas *threshold linear networks (TLN)*. Recurriendo a desarrollos formales y a la simulación numérica, investigamos el fenómeno de sincronía en estas redes, así como ciertas bifurcaciones globales que tienen lugar (dadas por la aparición/desaparición de conexiones heteróclinas y homóclinas). Logramos establecer resultados que dan condiciones suficientes para tales comportamientos, y mediante simulación, reportamos nuevos fenómenos asociados a estas redes.

Por otro lado, motivados por el estudio de dinámicas fuertemente discontinuas, recurrimos a ejemplos concretos (algunos clásicos y otros más novedosos), enfocándonos en particular en aquellos que son de tipo *híbrido*. Mediante simulaciones numéricas exhibimos las distintas dinámicas caóticas que estos sistemas poseen, y damos cuenta de las similitudes y diferencias que tienen lugar al compararlos con los sistemas clásicos. Además presentamos la generalización al caso no suave de dos herramientas utilizadas para estudiar los sistemas dinámicos y la sincronía de redes: el exponente maximal de Lyapunov y la *master stability function (MSF)*.

Primero comentamos dos metodologías utilizadas para estimar el exponente maximal de Lyapunov, que son el método de Stefanski y el método de la matriz de salto, y las ejemplificamos aplicándolas a sistemas caóticos no suaves.

Luego aportamos una generalización de la MSF, aplicable a un tipo de redes (propuestas por nosotros) caracterizadas por poseer un fuerte comportamiento discontinuo: las redes *híbridas*. Damos un ejemplo original de este tipo de red y realizamos la evaluación de su MSF. Además discutimos la posibilidad de generalizar esta herramienta a casos de acoplamiento no lineal y damos una respuesta negativa a tal situación.

Por último, estudiamos el caso de una red de dos osciladores conectados de manera lineal a trozos y discutimos su adaptabilidad, que es posible en este caso particular.

Abstract

Networks and non-smooth systems are one of the most recent topics studied in the theory of dynamical systems. Different developments and problems arising from disciplines such as physics, biology, computer science and electronics, have generated the need to expand the classic tools used for smooth systems to these new objects. Therefore, the concepts and tools of the classical theory of dynamical systems are systematically generalized to this new context, although the peculiarities of the collective and/or discontinuous dynamics cause that this generalization is not direct.

Throughout this thesis we concentrate on the analysis of the dynamics of a specific type of networks and of a specific type of non-smooth systems.

On the one hand we analyze a particular type of non-smooth networks called *threshold linear networks* (TLN). Using formal developments and numerical simulation, we investigate the phenomenon of synchrony in these networks, as well as certain global bifurcations that take place (given by the appearance/disappearance of heteroclinic and homoclinic connections). We managed to establish results that give sufficient conditions for such behaviors, and through simulation, we report new phenomena associated with these networks.

On the other hand, motivated by the study of strongly discontinuous dynamics, we resort to concrete examples (some classic and others more novel), focusing in particular on those that are of hybrid type. Through numerical simulations we show the different chaotic dynamics that these systems have, and we realize the similarities and differences that take place when compared with classical smooth systems. We also present the generalization to the non-smooth case of two tools used to study dynamical systems and network synchrony: the maximal exponent of Lyapunov and the master stability function (MSF).

First we discuss two methodologies used to estimate the maximal exponent of Lyapunov, which are the Stefanski method and the saltation matrix method, and we exemplify them by applying them to non-smooth chaotic systems.

Then, we provide a generalization of the MSF, applicable to a type of networks (proposed by us) characterized by having a strong discontinuous behavior: the hybrid networks. We give an original example of this type of network and perform the evaluation of its MSF. We also discuss the possibility of generalizing this tool to non-linear coupling cases and we give a negative response to this situation.

Finally, we study the case of a network of two oscillators connected in a piecewise linear way and we discuss their adaptability, which is possible in this particular case.

Certifico que fueron incluidos los cambios y correcciones sugeridas por los jurados.

Dr. Walter Reartes
DIRECTOR

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Estructura de la tesis	6
2. Preliminares	9
2.1. Equivalencia topológica y bifurcaciones	10
2.1.1. Bifurcaciones	11
2.1.2. Conexiones homóclinas y heteróclinas	12
2.2. Sistemas no suaves	13
2.2.1. EDOs suaves a trozos	14
2.2.2. Sistemas híbridos	16
2.3. Redes neuronales	19
3. Conexiones heteróclinas en un TLN	23
3.1. Construcción de los TLN	24
3.2. El caso modificado	27
3.2.1. El ciclo límite	29
3.2.2. Los ciclos heteróclinos	30
3.2.3. Análisis de las conexiones <i>saddles</i>	34
3.2.4. Resultado principal	39
3.3. El fenómeno de coloración	45
4. Sincronía en redes TLN	51
4.1. Sincronización y simetría	52
4.2. Ejemplos	55
4.3. Redes con conexión simétrica	60
4.3.1. Análisis asintótico.	61

4.4.	Existencia y estabilidad de ciclos límites	64
4.4.1.	Existencia del ciclo	64
4.4.2.	Estabilidad del ciclo	65
4.5.	Sincronía sin simetría	69
5.	Caos en sistemas no suaves	73
5.1.	Sistemas no suaves caóticos	73
5.1.1.	Ejemplos	74
5.2.	Teoría de Lyapunov	80
5.3.	Método de Stefanski	81
5.3.1.	Caso suave	81
5.3.2.	El caso no suave	82
5.4.	La matriz de salto	84
5.4.1.	Oscilador de Nakano-Saito	86
6.	La MSF y aplicaciones	87
6.1.	Construcción de la MSF	88
6.2.	Discusión de la MSF	92
6.3.	Sincronía de redes híbridas	93
6.3.1.	Extensión de la MSF	95
6.3.2.	Cálculo de la MSF	97
6.3.3.	La matriz de salto	98
6.3.4.	Aplicación al oscilador de Nakano-Saito	99
6.4.	Un sistema con acoplamiento no lineal	102
6.5.	Conectividad piecewise en pares de osciladores	104
6.5.1.	Caso Master-Slave	105
6.5.2.	Conexión simétrica	106
7.	Conclusiones	109
7.1.	Líneas futuras de trabajo	110
A.	Códigos del capítulo 3	111
A.1.	Períodos de los ciclos límites	111
A.2.	Simulación del fenómeno de coloración	114

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	xv
B. Códigos del capítulo 5	119
B.1. Exponentes de Lyapunov del sistema de Nakano-Saito	119
C. Códigos del capítulo 6	123
C.1. Código para $\lambda_{\text{máx}}$	123
C.2. MSF del sistema de Rössler	124
C.2.1. Datos	124
C.2.2. Gráfica	127
C.3. MSF de la red híbrida	128
C.3.1. Datos	128
Bibliografía	132

Índice de figuras

2.1.	Órbita del oscilador suave a trozos forzado (2.2.1).	15
2.2.	Serie temporal del oscilador suave a trozos (2.2.1).	16
2.3.	Proyecciones del atractor de un sistema lineal a trozos.	16
2.4.	Serie temporal del sistema IF lineal a trozos (2.2.3) con $\tau = 1$, $I = 2$, $v_{th} = 1$ y $v_r = -0,5$.	18
2.5.	Órbita caótica del oscilador con impacto para $\sigma = 0$, $\mu = 0,05$, $r = 0,8$ y un forzamiento externo $\xi(t) = \cos(\omega_f t)$ con $\omega_f = 2,85$.	19
2.6.	Sistema Lotka-Volterra competitivo de cuatro dimensiones. El color corresponde al valor de la cuarta variable.	22
3.1.	Grafo orientado.	28
3.2.	Proyección del ciclo límite sobre el plano inestable de eq_0 (los ejes corresponden a las direcciones inestables principales del equilibrio) y su gráfica en 3D.	29
3.3.	Curva azul: crecimiento del período del ciclo a medida que α se acer- ca al valor crítico α_0 por izquierda. Curva roja: gráfica de la función $6,95 \log\left(\frac{1}{\alpha - \alpha_0}\right)$ ($\alpha_0 \approx 1,31712123845$). El código utilizado para reali- zar esta figura se encuentra en el apéndice.	30
3.4.	Esquema del ciclo heteróclino para valores de α mayores y no muy ceranos a α_0 .	31
3.5.	Ciclo heteróclino.	32
3.6.	Proyección del ciclo heteróclino sobre el plano inestable de eq_0 . Los ejes u_0 y v_0 corresponden a las direcciones inestables principales. Las líneas puntuadas marcan la intersección de este plano con las varie- dades de transición Σ .	33

3.7. Curvas de bifurcacion de ϵ vs. α ($\delta = 0,5$).	34
3.8. Conexión heteróclina simple entre eq_2 y eq_{23}	35
3.9. Conexión heteróclina <i>enroscada</i> entre eq_2 y eq_{31}	35
3.10. Conexión heteróclina <i>enroscada</i> entre eq_2 y eq_{23}	36
3.11. Solución $+ \frac{\sqrt{t}}{700} (1, 1, 1)$	37
3.12. Esquema de uno de los nuevos ciclos heteróclinos que aparecen para valores de α suficientemente cercanos a α_0	37
3.13. Esquema de otro de los nuevos ciclos heteróclinos que aparecen para valores de α suficientemente cercanos a α_0	38
3.14. Conexiones heteróclinas entre eq_0 y eq_{31}	38
3.15. Conexiones heteróclinas entre eq_0 y eq_{12}	39
3.16. Conexiones heteróclinas entre eq_0 y eq_{23}	40
3.17. Solución $+ \frac{(\exp(-t)+1)\sqrt{t}}{700} (1, 1, 1)$	40
3.18. Los puntos verdes muestran la localización del primer punto de intersección entre Γ_α y Σ_2 para diferentes valores de α . El punto de corte se mueve de izquierda a derecha a medida que el valor de α decrece.	41
3.19. La trayectoria corta arriba del plano estable de eq_2 y emerge una conexión heteróclina. La línea punteada verde es el plano estable de eq_2 y la línea roja punteada la dirección inestable.	42
3.20. La trayectoria corta por debajo del plano estable de eq_2	43
3.21. Diagrama esquemático de todas las posibles trayectorias. Cuando la trayectoria corta alguna variedad Σ_i^- hay tres posibles alturas de corte, y dependiendo de ello diferentes conexiones nacen o la trayectoria continúa.	44
3.22. La curva azul muestra la función monótona q_α^1	45
3.23. Fenómeno de coloración para $\alpha = 1,22$	46
3.24. Fenómeno de coloración para $\alpha = 1,2139083795$	47
3.25. Fenómeno de coloración para $\alpha = 1,213908379$	48
3.26. Fenómeno de coloración para $\alpha = 1,213908375$	49

4.1. Los vértices del mismo color significan que sincronizan. Puede observarse cómo la clase de sincronía y la de simetría coinciden. En el grafo de la derecha, la etiqueta repetida del nodo 1 significa que fue dibujado dos veces, con el fin de una mejor representación gráfica. . . . 56

4.2. Gráfica de la actividad de la red en el espacio (t, x) , el eje horizontal representa la actividad de la variable $x_i(t)$. En la figura superior se observa la sincronía entre las variables x_1, x_2 y x_3 . En la segunda figura puede apreciarse la presencia de varias clases de sincronía. Las simulaciones fueron realizadas con $\epsilon = 0,25, \delta = 0,5$ 57

4.3. Representación esquemática del grafo (P,Q,R). Nuevamente, con el fin de una mejor representación gráfica se ha dibujado dos veces el nodo u 58

4.4. En la primera figura se observa la sincronía de las clases de simetría x_p y las y_q . En la segunda se observa que las variables y_q siguen sincronizando todas con todas, pero dentro de la clase de simetría de las x_p no todas sincronizan. 59

4.5. Ejemplo de la conjetura 4.4.4 con $f(t) = c[\sin(t)]_+$. En la gráfica el eje vertical corresponde a la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\{x, y\}$, el eje horizontal es el tiempo. Vemos cómo las soluciones decaen hacia el plano a medida que el valor de c crece. 68

4.6. Observamos la aparición/desaparición de ciclos ($f(t) = c[\sin(t)]_+$) . . . 68

4.7. Podemos ver que la convergencia al ciclo contenido en Δ es inmediata. 69

4.8. Red en la cual los nodos 6 y 7 son claramente no simétricos. 70

4.9. Actividad del CTLN asociado al grafo 4.8, en el espacio $(t, x_i(t))$. En color negro observamos la sincronía entre las variables correspondientes a los nodos 6 y 7. 71

4.10. En la figura podemos observar como la función $f(u, v)$ es negativa dentro del rango de las variables u y v determinados por el poliedro invariante \mathcal{B} 71

5.1. Cascada de doble período del oscilador de impacto forzado (parámetros: $r = 0,8, \sigma = 0, \mu = 0, \omega = 1$ y $\omega_f \in [2, 5]$). 75

5.2.	Proyección sobre el plano $x_1 - x_3$ de órbitas del sistema lineal a trozos para distintos valores de β . Podemos ver cómo a medida que variamos tal parámetro ocurre la aparición de nuevos períodos.	76
5.3.	Órbita caótica asociada al sistema (5.1.2) (parámetros: $\beta = 0,9$, $\omega = 0,4$, $s = 0,35$, $k = 0,4$, $I = 4$, $v_R = 20$ y $v_{th} = 60$).	78
5.4.	Régimen de <i>bursting</i> correspondiente a la variable x_1 del oscilador caótico de Nakano-Saito (parámetros: $\rho = 0,125$, $b = 0,1$, $v_{th} = 1$, $v_R = 0$).	79
5.5.	Atractor del oscilador caótico de Nakano-Saito y su mapa de retorno (parámetros: $\rho = 0,1$, $b = 0,1$, $v_{th} = 1$, $v_R = 0$).	79
5.6.	En la figura superior podemos ver la cascada de períodos del sistema lineal a trozos 5.1.1 y compararla con la estimación de su coeficiente $\lambda_{\text{máx}}$ en función del parámetro β (figura inferior). La simulación se realizó utilizando el paquete de integración Dopri.	83
5.7.	Exponente $\lambda_{\text{máx}}$ en función del parámetro de reseteo v_R . El punto de inflexión a la izquierda del gráfico se debe comienzo de un comportamiento de <i>bursting</i> constante a partir de $v_R \approx -0,8$. El salto abrupto en el extremo derecho, es debido a la cercanía al valor crítico $v_R = v_{th}$ para el cual el sistema deja de estar definido. Parámetros: $\rho = 0,07$, $b = 0$, $v_{th} = 1$. El cociente (5.4.7) se estimó tomando hasta $k = 200$ y $\delta_0 = 10^{-8}$	86
6.1.	<i>Master Stability Function</i> evaluada para el oscilador caótico de Rössler con $a = 0,2$, $b = 0,2$ y $c = 7,0$. La región oscura del centro de la imagen se corresponde con su <i>región de sincronía</i> . Los ejes corresponden a la parte real e imaginaria de los posibles autovalores $\lambda = \alpha + i\beta$	91
6.2.	Comportamiento sincrónico y no sincrónico de la variable x_1 , de una red con estructura de grafo completo no dirigido y valores aleatorios para los pesos de los acoplamiento. En negro, se encuentra graficada la primera variable de la solución de sincronía (parámetros: $\rho = 0,1$, $b = 0,1$, $v_{th} = 1$, $v_R = 0$).	100
6.3.	MSF de la red híbrida cuyo estado de sincronía es un oscilador caótico de Nakano-Saito (parámetros: $\rho = 0,1$, $b = 0,1$, $v_{th} = 1$, $v_R = 0$).	101

Capítulo 1

Introducción

Las redes neuronales y los sistemas no suaves han sido elementos centrales de la teoría de los sistemas dinámicos durante los últimos 30 años. Como a menudo sucede en el desarrollo de la matemática, han sido otras disciplinas como la biología [1], la informática [37], la física [38] y la electrónica [55] quienes pusieron en escena distintos modelos, que requerían expandir las clásicas herramientas utilizadas para los sistemas suaves para aplicarlas a dos nuevos objetos: las redes neuronales y los sistemas no suaves. Señalemos además que el interés entre estos dos objetos se ha dado de manera simultánea y con influencias recíprocas.

A mediados del siglo XX, con la aparición de la informática comienzan a desarrollarse distintos tipos de redes neuronales (un breve repaso de estos primeros modelos puede encontrarse en [29]) y cobran interés los distintos patrones que surgen mediante su actividad. Así mismo, la necesidad de simular estos sistemas informáticos requirió la formalización de varios conceptos que luego serán centrales en el estudio de las redes (tales como comportamiento recurrente, arquitectura de una red, matriz de conectividad, sincronía de redes, etc.). Simultáneamente, en el campo de la biología, los estudios pioneros de Hodgking y Huxley [36] y la propuesta de su modelo para el comportamiento del potencial de una neurona, junto a sus posteriores simplificaciones como los sistemas de Fitz-Hugh y Nagumo [26] o Morris y Lecar [51], generan la necesidad de estudiar estos sistemas acoplados y formando algún tipo de red. Además, la complejidad que a menudo presentan las dinámicas de estos sistemas, llevó a considerar distintas *caricaturas* no suaves de estos modelos, tales como el de McKean [50], los PWL-IF [18], o aquellos que son de tipo *integrate-and-fire*

[40].

Por otro lado hacia fines de los 70, debido a la popularización de las simulaciones numéricas en la física, se produjo un interés creciente hacia sistemas que poseían dinámica discontinua y permitían modelar distintos sistemas mecánicos (osciladores de impactos [74], movimientos sometidos a fricción seca [46], etc) o eléctricos (circuitos con rectificadores o *switch* [23, 55], interacción entre sistemas analógicos y digitales, etc.).

Por todo lo anterior, y junto al impulso que supuso el redescubrimiento de los resultados de la escuela rusa sobre sistemas discontinuos, desde fines de 1970 se generó la demanda de expandir la tradicional teoría de sistemas dinámico al caso no suave, y estudiar estos nuevos sistemas de manera aislada o acoplados en redes. Debido a ello, muchos conceptos clásicos de los sistemas dinámicos como *estabilidad*, *sincronía*, *caos*, *cascadas de doble período*, *exponentes de Lyapunov*, son reeditados en este nuevo contexto discontinuo, aunque también aparecen nuevos fenómenos tales como la *multiestabilidad*, *matrices de salto*, *regímenes de reseteo*, etc. Del mismo modo, herramientas tales como el planteo de una ecuación variacional de primer orden o la *master stability function* (originalmente desarrollados para sistemas y redes suaves), son revisados a fin de poder definirlos en el caso discontinuo.

En la presente tesis damos cuenta de algunas de las generalizaciones más relevantes, y las aplicamos al estudio concreto de distintos tipos de osciladores discontinuos y redes no suaves. Alguno de estos sistemas son ejemplos clásicos de la teoría de sistemas discontinuos y otros son de desarrollo más recientes. También desarrollamos un nuevo tipo de red no suave (la red *híbrida*), y para este caso concreto, conseguimos expandir una de las herramientas más utilizadas en el estudio de la sincronía de redes: la *master stability function* (*MSF*).

Además presentamos distintos programas numéricos de desarrollo propio que permiten simular estos sistemas, y que fueron los utilizados para su estudio.

1.1. Estructura de la tesis

En el segundo capítulo hacemos un breve repaso de las definiciones usuales de *equilibrio*, *órbita*, *bifurcación*, etc., propios de la teoría tradicional de sistemas dinámicos. Junto a eso, introducimos los sistemas no suaves, haciendo hincapié en

tres tipos particulares de ellos: los sistemas suaves a trozos, los sistemas híbridos y los de impacto. Luego introducimos las redes neuronales y definimos los principales conceptos para su estudio.

En el tercer capítulo introducimos un tipo particular de red no suave, la red con umbral lineal a trozos (*threshold linear network TLN*), originalmente desarrolladas por Hahnloser en [31, 30] y ampliamente estudiadas en [52, 21]. Nos concentramos específicamente en un TLN de tres dimensiones y a través de una adecuada modificación de los parámetros obtenemos nuevos comportamientos dinámicos de índole global distintos de los ya conocidos, tales como conexiones homóclinas y heteróclinas, junto al fenómeno de *multiestabilidad* (es decir, la existencia simultánea de varios equilibrios estables). También demostramos un teorema (que denominamos de *enroscamiento*) a través del cual damos cuenta de algunas de las bifurcaciones globales que tienen lugar en la red. Finalmente exponemos un curioso fenómeno que tiene lugar, y que llamamos de *coloración*. Los contenidos presentes en este capítulo se hallan publicados en [13].

En el cuarto capítulo continuamos con el estudio de las TLN, e investigamos el fenómeno de sincronía en esas redes. Principalmente, estudiamos cómo las simetrías presentes en la arquitectura de la red (que se encuentran expresadas como permutaciones de su matriz de conectividad) dan lugar a sincronía en la dinámica de los nodos. El resultado principal de este capítulo es un teorema que aporta condiciones suficientes para la sincronía en el caso de conexiones simétricas. Finalmente, en la última sección del capítulo desarrollamos un ejemplo de sincronización *sin* simetría como demostración de que la simetría no agota los mecanismos de sincronía en estas redes. Los contenidos presentes en este capítulo se hallan aceptados para su publicación en [14].

En el quinto capítulo introducimos algunos tópicos sobre dinámica caótica de sistemas no suaves. Hacemos hincapié en algunos ejemplos canónicos de sistemas no suaves caóticos y realizamos un breve comentario sobre la generalización de la teoría de Lyapunov a estos casos. Luego exponemos dos métodos utilizados para estimar el exponente maximal de Lyapunov $\lambda_{\text{máx}}$ en sistemas no suaves: el método de Stefanski y el método de la matriz de salto. Como ejemplos propios de aplicación de esos dos métodos, implementamos la evaluación numérica del coeficiente $\lambda_{\text{máx}}$ para un sistema caótico lineal a trozos (proveniente de una modificación de un sistema presente en

[22]) y para el oscilador caótico de Nakano-Saito [55].

El sexto capítulo está dedicado a la *master stability function (MSF)*, una herramienta crucial en el estudio de la sincronía en redes de osciladores idénticos. En las primeras secciones introducimos la MSF clásica y hacemos un breve comentario listando algunas de sus principales generalizaciones para el caso de osciladores no suaves. Luego introducimos un nuevo tipo de red, que denominamos *híbrida*, caracterizada por un fuerte comportamiento no suave, y proponemos una expansión de la MSF para este nuevo caso. Como aplicación evaluamos la MSF en un tipo particular de red híbrida caótica. Luego discutimos la posibilidad de expandir la MSF a redes con acoplamiento no lineal, y obtenemos una demostración que aporta una respuesta negativa a tal cuestión. La última sección está dedicada a estudiar el acople lineal a trozos de un sistema de dos osciladores, y allí exhibimos algunos resultados particulares de este caso. Algunos de estos resultados mencionados se enviaron para su publicación.

Finalmente en el séptimo y último capítulo hacemos una breve conclusión de la tesis y exponemos algunas líneas abiertas para trabajos futuros.

A modo de apéndice, presentamos algunos de los principales códigos propios utilizados en las simulaciones. Todos ellos son originales, desarrollados en lenguaje Python e implementados a través de su librería científica SciPy.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo introducimos los principales conceptos que utilizamos en esta tesis y la terminología básica necesaria.

Para las definiciones de los conceptos básicos del estudio de los sistemas dinámicos, tales como *equilibrio*, *conjunto invariante*, ω -*límite*, *atractores* y *estabilidad*, junto con la construcción de sistemas dinámicos a partir de un sistema diferencial, referimos al lector al capítulo introductorio de Kuznetsov [45], libro del cual tomamos la mayoría de las definiciones y la notación utilizada.

En la primera sección presentamos las nociones fundamentales de *equivalencia topológica* entre sistemas dinámicos y *bifurcación*, haciendo hincapié en dos tipos particulares de bifurcaciones: las conexiones *homóclinas* y *heteróclinas*, que son el tipo de bifurcaciones que más adelante encontraremos y estudiaremos en las redes TLN.

En la segunda sección, introducimos y damos varios ejemplos de sistemas dinámicos no suaves: los sistemas *suaves a trozos*, los sistemas *híbridos* y los de *impacto*.

Finalmente, en la última sección definimos la noción de *red neuronal* y *red competitiva*, junto con los conceptos necesarios para el estudio de redes complejas, tales como *simetría*, *matriz de conectividad*, etc.

El objetivo de estos preliminares es presentar los conceptos necesarios para poder abordar el estudio de las bifurcaciones globales en un tipo particular de red no suave: a los TLN, que serán el objeto de estudio en los próximos capítulos.

2.1. Equivalencia topológica y bifurcaciones

La noción de sistema dinámico es la formalización matemática del concepto científico de *proceso determinístico*. En tales procesos, el estado futuro (o pasado) de un sistema químico, físico, biológico, económico o social puede predecirse a partir del estado presente del sistema y el conocimiento de las leyes que gobiernan su evolución. Asumiendo que tales leyes no varían, el comportamiento de un sistema tal puede considerarse enteramente definido (determinado) por su estado inicial. Así, la noción de *sistema dinámico* incluye un conjunto de posibles estados, y una ley de evolución en función del tiempo, formalmente denominada *operador de evolución*.

Definición 2.1.1. *Un espacio de estados \mathbf{X} , un conjunto de índices T (en general $T = \mathbb{Z}$ ó \mathbb{R}) y un operador de evolución ϕ^t , se dice que definen un sistema dinámico si satisfacen*

1. $\phi^0 \mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$,
2. $\phi^{t+s} \mathbf{x} = \phi^t \circ \phi^s \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $s, t \in T$.

El sistema dinámico será discreto si T lo es, caso contrario diremos que es continuo. El conjunto de todos los puntos de la forma $\phi^t \mathbf{x}$ se denomina órbita de $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, y el retrato de fase del sistema dinámico es la partición del conjunto \mathbf{X} en órbitas.

Al estudiar cualitativamente los sistemas dinámicos y sus comportamientos característicos, a menudo resulta posible clasificarlos y compararlos con otros sistemas. Y como es usual, la comparación entre estos objetos estará basada en una *relación de equivalencia* entre tales objetos. Así, deberemos especificar cuando dos sistemas actúan de modo *cualitativamente similar*. Por ejemplo, resultará natural esperar que dos sistemas equivalentes posean el mismo número de equilibrios y ciclos, y posean el mismo tipo de estabilidad. Lo mismo quisiéramos que ocurriera con los diferentes conjuntos invariantes que puedan aparecer. En otras palabras, consideraremos que dos sistemas son equivalentes si sus retratos de fase resultan “cualitativamente similares”. Todas estas nociones se formalizan a través de la noción de *equivalencia topológica* entre sistemas dinámicos definidos sobre subconjuntos $E, F \subset \mathbb{R}^n$:

Definición 2.1.2. *Un sistema dinámico $\{T, E, \phi^t\}$ se dice topológicamente equivalente a un sistema dinámico $\{T, F, \psi^t\}$ si existe un homeomorfismo $h : E \rightarrow F$ que*

mapea las órbitas del primer sistema en órbitas del segundo, preservando el sentido del tiempo. Es decir, tal que para cada $\mathbf{x} \in E$ se cumple

$$h(\phi^t \mathbf{x}) = \psi^t h(\mathbf{x}).$$

A menudo los sistemas se estudian *localmente*, es decir, no en todo el espacio de fase, sino en cierta región $U \subset E$. Tal región puede ser, por ejemplo, la vecindad de un equilibrio o de algún ciclo. Así, resulta útil “localizar” la definición anterior cerca de los puntos de equilibrios:

Definición 2.1.3. *Un sistema dinámico $\{T, E, \phi^t\}$ se dice localmente equivalente cerca de un equilibrio \mathbf{x}_0 a un sistema dinámico $\{T, F, \psi^t\}$ cerca de un equilibrio \mathbf{y}_0 si existe un homeomorfismo h tal que:*

(I) *está definido en un entorno U de \mathbf{x}_0 .*

(II) *satisface $\mathbf{y}_0 = h(\mathbf{x}_0)$.*

(III) *mapea órbitas del primer sistema en órbitas del segundo preservando el sentido del tiempo.*

Es decir, existe un entorno U del equilibrio \mathbf{x}_0 homeomorfo a un entorno V del equilibrio \mathbf{y}_0 , con dinámicas equivalentes.

2.1.1. Bifurcaciones

Consideremos ahora un sistema dinámico que depende de un parámetro. En el caso continuo lo escribiremos como

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha), \tag{2.1.1}$$

y en el caso de un sistema discreto

$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \alpha), \tag{2.1.2}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^m$ representan las variables de fase y el parámetro respectivamente. Consideremos el retrato de fase variando a medida que el parámetro α varía.

Tendremos entonces dos posibilidades, o el sistema se mantiene topológicamente equivalente al original, o experimenta algún tipo de cambio en su topología.

Definición 2.1.4. *Se denomina bifurcación del sistema dinámico (2.1.1) a la pérdida de la equivalencia topológica del retrato de fase debido a la variación del parámetro.*

Así una *bifurcación* consiste en un cambio de la topología del espacio de fases, y el valor α_0 del parámetro a partir del cual sucede se denomina *valor crítico o de bifurcación*.

Aquellas bifurcaciones que pueden ser detectadas solamente estudiando un entorno de algún equilibrio o ciclo, son denominadas *bifurcaciones locales*. Ejemplos clásicos de bifurcaciones locales son las de tipo *fold*, *saddle-node*, *pitchfork*, *Andronov-Hopf*, etc.. Referimos al lector a Kuznetsov [45] y Strogatz [70], para dos exposiciones amenas sobre tales bifurcaciones.

Por otro lado, también existen bifurcaciones que no pueden ser detectadas mirando únicamente un pequeño entorno de un equilibrio o ciclo. Tales bifurcaciones son denominadas *globales*.

2.1.2. Conexiones homóclinas y heteróclinas

Los dos tipos más importantes de bifurcaciones globales en las que nos enfocaremos son aquellas que producen la aparición de un tipo particular de órbitas, denominadas conexiones *homóclinas* y *heteróclinas*.

Consideremos un sistema dinámico continuo definido sobre \mathbb{R}^n por el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1.3)$$

donde f es suficientemente suave. Sean $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ equilibrios del sistema.

Definición 2.1.5. *Una órbita Γ_0 conmenzando en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es denominada conexión homóclina del equilibrio \mathbf{x}_0 del sistema dinámico (2.1.3) si $\phi^t \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.*

Definición 2.1.6. *Una órbita Γ_0 conmenzando en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es denominada conexión heteróclina entre los equilibrios \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 del sistema (2.1.3) si $\phi^t \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_1$ cuando $t \rightarrow -\infty$ y $\phi^t \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_2$ cuando $t \rightarrow +\infty$.*

Para un equilibrio \mathbf{x}_0 del flujo ϕ^t , podemos definir el siguiente par de conjuntos:

$$\mathcal{W}^s(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} : \phi^t \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, t \rightarrow \infty\}, \quad \mathcal{W}^u(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} : \phi^t \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, t \rightarrow -\infty\}.$$

Definición 2.1.7. $\mathcal{W}^s(\mathbf{x}_0)$ y $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}_0)$ son las variedades estables e inestables del equilibrio \mathbf{x}_0 .

Observación 2.1.8. De las definiciones previas, sigue fácilmente que tendremos $\Gamma_0 \subset \mathcal{W}^u(\mathbf{x}_0) \cap \mathcal{W}^s(\mathbf{x}_0)$ en el caso de una conexión homoclina y $\Gamma_0 \subset \mathcal{W}^u(\mathbf{x}_1) \cap \mathcal{W}^s(\mathbf{x}_2)$ en el caso heteroclino.

En general resulta difícil dar cuenta de las bifurcaciones globales y los mecanismos que las producen. Sin embargo, al enfocarnos en ciertos sistemas no suaves que definiremos más adelante, la posibilidad de expresar la variedad estable o inestable de un equilibrio como un hiperplano o una variedad lineal en combinación con la observación anterior, permitirá la detección y el análisis de distintos tipos de conexiones homoclina y heteroclina.

2.2. Sistemas no suaves

El interés por los sistemas no suaves comienza a mediados del siglo XX, gracias a los trabajos de la escuela rusa: motivados por modelar sistemas mecánicos sencillos sujetos a vibraciones y golpes, llegaron a estudiar la dinámica de lo que hoy se conoce como *oscilador de impacto* (para una breve reseña histórica puede consultarse el capítulo preliminar de Di Bernardo [22]). Por otro lado, si bien ciertos sistemas discontinuos, luego denominados *Integrate-and-Fire*, ya habían sido investigados desde principios del siglo XX, fue el estudio de los primeros modelos neuronales como el de Hodgking-Huxley (1952) o el de FitzHugh-Nagumo (1961), lo que llevó a considerar como primera aproximación distintas versiones discontinuas de esos sistemas.

El propósito de esta sección es introducir las principales definiciones y ejemplos de los sistemas no suaves, siguiendo el tratamiento dado en Di Bernardo [22].

Definición 2.2.1. Un sistema dinámico (2.1.1) donde $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ se dice C^r -suave (smooth), si las r primeras derivadas de $\phi(\mathbf{x}, t) := \phi^t \mathbf{x}$ respecto de \mathbf{x} son continuas para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Observación 2.2.2. *De la definición anterior resulta inmediato que si el sistema está dado por una ecuación $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ donde f es C^{r-1} entonces el sistema será C^r -suave.*

Remarquemos que aún no hay una definición formal de los sistemas no suaves ni una teoría unificada para tales sistemas. A menudo algunas condiciones como la buena definición del flujo, o la unicidad de la órbita siquiera resultan satisfechas. Aún así resulta posible clasificar tales sistemas en unas pocas familias. Para una exposición más exhaustiva de todos los posibles sistemas de esta forma, remitimos al lector al capítulo 2 de [22].

A continuación expondremos los dos tipos de sistemas no suaves más comunes, y que trabajaremos más adelante.

2.2.1. EDOs suaves a trozos

Definición 2.2.3. *Un flujo suave a trozos está dado por un conjunto finito de EDOs*

$$\dot{\mathbf{x}} = F_i(\mathbf{x}, \mu) \quad \mathbf{x} \in S_i.$$

Donde $\cup S_i = \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, y cada S_i tiene interior no vacío y son disjuntos dos a dos. Además la intersección $\Sigma_{ij} = \bar{S}_i \cap \bar{S}_j$ es una variedad $(n-1)$ -dimensional, y cada campo vectorial F_i es suave respecto de la variable de estado \mathbf{x} y el parámetro μ , y define un flujo suave $\phi_i(\mathbf{x}, t, \mu)$ en algún abierto $U \supset S_i$. En particular, cada flujo debe ser suave y bien definido en cada lado de ∂S_i .

Los conjuntos Σ_{ij} arriba definidos suelen denominarse de varias maneras: *variedad de transición, conjunto o frontera de discontinuidad, variedad de switch*.

Oscilador a trozos: Un ejemplo de sistema suave a trozos, es el siguiente estudiado por Hudson [38] y Lapidus [46], en el contexto de osciladores con fricción seca:

$$\ddot{x} - \epsilon \operatorname{sg}(\dot{x}) + w_0 x = \sin w_1 t. \quad (2.2.1)$$

Como el sistema es no-autónomo, tomaremos como espacio de fase $x - \dot{x}$. Entonces la variedad de transición será $\Sigma = \{x = 0\}$, y tendremos dos regiones $S_1 = \{(x, \dot{x}) : x > 0\}$ y $S_2 = \{(x, \dot{x}) : x < 0\}$. Véanse las figuras 2.1 y 2.2.

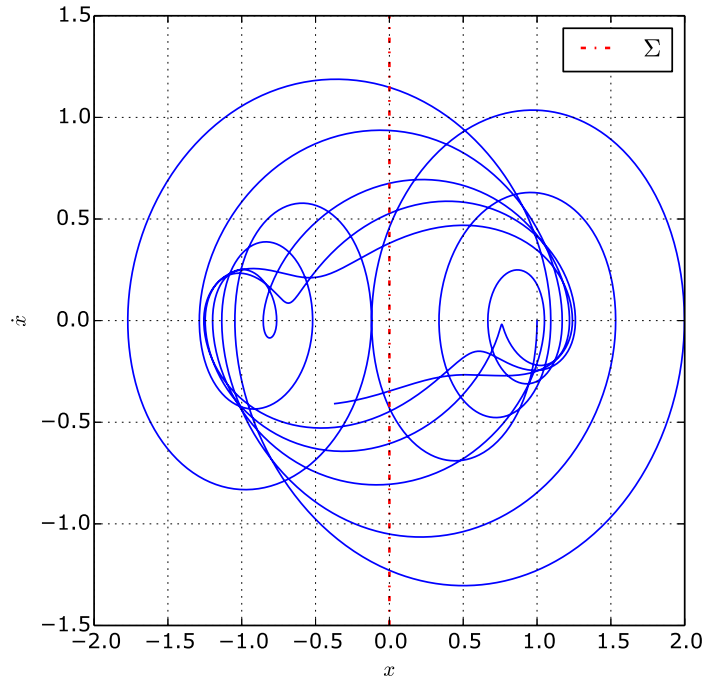


Figura 2.1: Órbita del oscilador suave a trozos forzado (2.2.1).

Sistema lineal a trozos: Sean dos matrices $A_{1,2} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $M \in \mathbb{R}^3$. Tomemos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y consideremos el sistema *piecewise* definido como

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_1 \mathbf{x} + M & \text{si } x_1 > 0 \\ \dot{\mathbf{x}} = A_2 \mathbf{x} + M & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Tal sistema, como veremos exhaustivamente más adelante posee ciclos límites y para valores adecuados de los parámetros de las matrices exhibe una cascada de doble período como ruta al caos. En este caso volvemos a tener dos regiones $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 > 0\}$ y $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 < 0\}$, y la variedad de transición está dada por $\Sigma = \{x_1 = 0\}$. Un ejemplo de comportamiento caótico puede observarse en la figura 2.3, para

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -0,57 & 0 & 1 \\ -0,09 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0,1 & 10 & 0,5 \\ -0,2 & 0 & 1 \\ -60 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

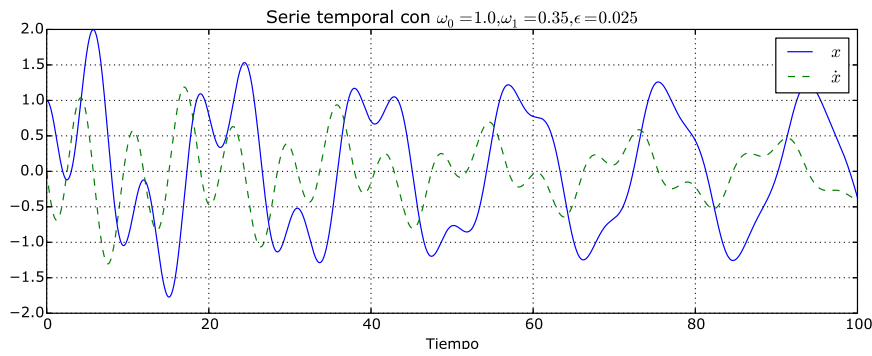


Figura 2.2: Serie temporal del oscilador suave a trozos (2.2.1).

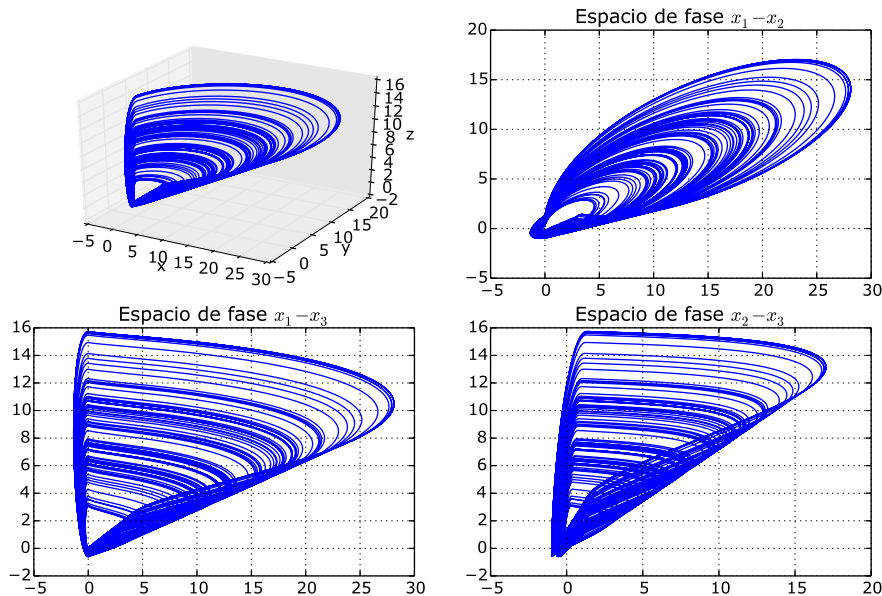


Figura 2.3: Proyecciones del atractor de un sistema lineal a trozos.

2.2.2. Sistemas híbridos

Los *sistemas dinámicos híbridos* son una combinación de mapas y flujos, dando origen a flujos discontinuos que resultan suaves a trozos. Estos sistemas surgen de la modelización de colisiones, osciladores de impacto o en el contexto de la interacción entre sistemas digitales o analógicos. Además debemos señalar que la noción de

sistema híbrido es un concepto amplio que engloba un gran número de formalismos y ejemplos presentes en la literatura. Siguiendo el desarrollo formal expuesto en [22], un sistema híbrido será aquel donde un sistema gobernado por una ecuación diferencial se encuentra sometido a un reajuste (*reset*) a través de cierta regla que es función de los estados.

Definición 2.2.4. *Un sistema híbrido suave a trozos consiste en un conjunto de EDOs:*

$$\dot{\mathbf{x}} = F_i(\mathbf{x}, \mu) \quad \mathbf{x} \in S_i,$$

junto a un conjunto de reglas de reseteo (*reset maps*):

$$\mathbf{x} \mapsto R_{ij}(\mathbf{x}, \mu) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Sigma_{ij} := \bar{S}_i \cap \bar{S}_j.$$

Aquí $\cup_i S_i = \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, poseen interior no vacío y son disjuntos dos a dos. Además el conjunto Σ_{ij} es una variedad $(n-1)$ -dimensional contenida en las fronteras $\partial S_{i,j}$ o es vacío. Y cada F_i o R_{ij} se considera continuo y suave en algún entorno de S_i y Σ_{ij} respectivamente.

Sistema *Integrate and Fire*. Consideremos el siguiente sistema *Integrate and Fire* (IF) unidimensional ([18]):

$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{v}{\tau}, & \tau > 0 \\ v(t^-) \geq v_{\text{th}} \Rightarrow v(t^+) = v_r, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

donde v_{th} es el *threshold* o *umbral* de la variable v y v_r el valor de reseteo. Vale $v_r < v_{\text{th}}$. Véase figura 2.4

De acuerdo con el formalismo de la definición 2.2.4 aquí tendremos dos regiones $S_1 = \{v < v_{\text{th}}\}$ y $S_2 = \{v \geq v_{\text{th}}\}$. La variedad de transición será $\Sigma = \{v = v_{\text{th}}\}$, y como función de reseteo tendremos

$$\begin{aligned} R : S_2 &\rightarrow S_1 \\ v &\mapsto v_r \end{aligned}$$

Otra clase importante de sistemas híbridos la constituyen los *sistemas de impacto*:

Definición 2.2.5. *Un sistema de impacto es un sistema híbrido suave a trozos para*

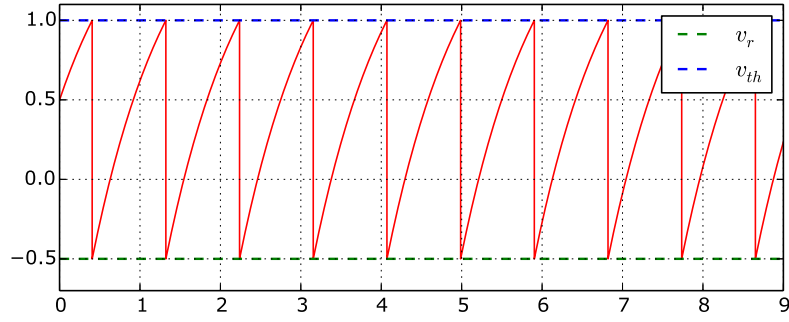


Figura 2.4: Serie temporal del sistema IF lineal a trozos (2.2.3) con $\tau = 1$, $I = 2$, $v_{th} = 1$ y $v_r = -0,5$.

el cual

$$R_{ij} : \Sigma_{ij} \rightarrow \Sigma_{ij},$$

y el flujo está sujeto a la regla de mantenerse a un lado de la frontera E_{ij} . Es decir, está contenido en la región $\bar{S}_i = \Sigma_{ij} \cup S_i$.

Oscilador de Impacto. Consideremos el movimiento de una pelota elástica que cae sobre una superficie rígida, por ejemplo, una tabla. La caída libre de la pelota es suave hasta el momento del impacto, donde, como consecuencia del impacto, “instantáneamente” se invierte el sentido de su velocidad. Supongamos que se aplica una ley de restitución newtoniana simple, de modo que la velocidad invertida sea un coeficiente $0 \leq r \leq 1$ que multiplica la velocidad entrante. Si $r < 1$ y la tabla permanece inmóvil, luego de una cantidad infinita de impactos en un tiempo *finito*, la pelota queda en reposo.

Sin embargo si en vez de quedar en reposo, la superficie rígida de impacto *oscila*, la dinámica se torna increíblemente rica, véanse [57, 58, 74].

Consideremos el siguiente modelo del *oscilador con impacto*. Donde la *variedad de impacto* está dada por $\Sigma = \{(x, y) : x = \sigma\}$, el coeficiente de recuperación es $0 < r < 1$, μ es la fricción del sistema, ω su frecuencia y $\xi(t)$ un forzamiento externo:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \mu\dot{x} + \omega^2x = \xi(t) \\ x(t^-) = \sigma \Rightarrow -r\dot{x}(t^+) = \dot{x}(t^-) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Un ejemplo de movimiento caótico puede verse en la figura 2.5.

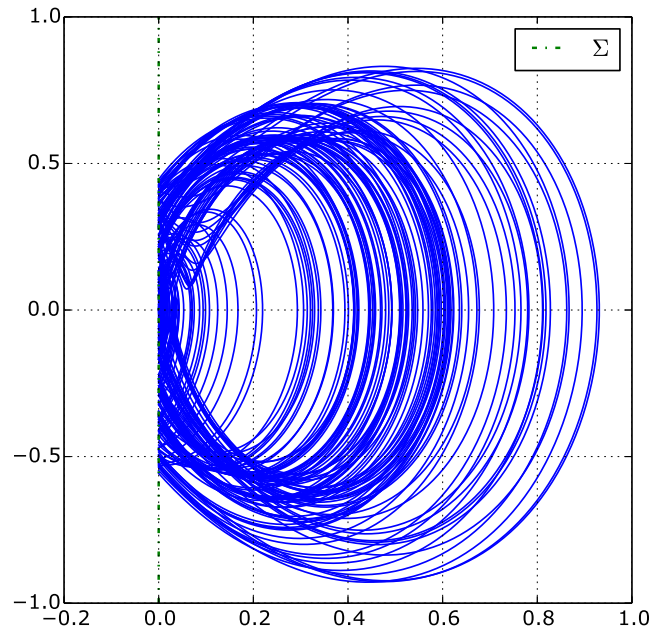


Figura 2.5: Órbita caótica del oscilador con impacto para $\sigma = 0$, $\mu = 0,05$, $r = 0,8$ y un forzamiento externo $\xi(t) = \cos(\omega_f t)$ con $\omega_f = 2,85$.

Según el formalismo de la definición 2.2.5 e introduciendo la variable $y =: \dot{x}$ tendremos que hay dos regiones $S_1 = \{(x, y) : x > \sigma\}$ y $S_2 = \{(x, y) : x < \sigma\}$. La variedad de impacto será $\Sigma = \{(x, y) : x = \sigma\}$, el flujo estará dado por $\ddot{x} + \mu\dot{x} + \omega^2 x = \xi(t)$ y sujeto a la regla de reseteo

$$R : \Sigma \rightarrow \Sigma \tag{2.2.5}$$

$$(\sigma, y) \mapsto (\sigma, -ry),$$

y la dinámica estará reducida a desarrollarse dentro de la región S_1 (el lado derecho de la variedad Σ).

2.3. Redes neuronales

El estudio de las redes neuronales comienza a mediados de la década de 1940, a través de los estudios pioneros de McCulloche y Ritts (cf. [29]). Insertos en los inicios de la informática, estos autores estudiaron la evolución de un sistema n -dimensional

discreto y la aparición de patrones de comportamiento. Sin embargo, la noción de red neuronal rápidamente es llevada al campo de la biología a través de la ecología (estudio de redes tróficas) y la neurología (modelado de redes de células neuronales). La posterior evolución de la informática, junto problemas provenientes de la electrónica (redes de circuitos, interconexión de sistemas), convirtieron la noción de *red neuronal* en uno de los conceptos más transversales de la ciencia desde mediados del siglo pasado. Hay varios formalismos en la literatura para definir las nociones de *red neuronal*, *recurrente*, etc. Nos ceñiremos al desarrollo clásico abordado por Hopfield [37] y Grossberg [29].

Definición 2.3.1. *Una red neuronal recurrente (recurrent neural network) consiste en un conjunto de índices $1, 2, \dots, n$ llamados nodos o neuronas, cuyos estados en un momento dado (representados por los valores de las variables $\mathbf{x}_i(t)$ con $t \in T$) se encuentran determinados por el estado anterior de todos los nodos (retroalimentación (feedback) entre nodos). Si T es un conjunto discreto, la red será discreta. Caso contrario, la llamaremos continua.*

En general, las redes continuas suelen estar modeladas a través de una EDO

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t, w_{i1}, \dots, w_{in}), \quad (2.3.1)$$

donde w_{ij} es un parámetro (casi siempre un valor real) que representa el *peso* o *influencia* de la conexión del nodo j con el nodo i . Señalemos además que la conexión entre nodos puede ser unidireccional: el nodo j puede estar conectado con el nodo i , pero el nodo i no estarlo con j . Usualmente se toma $w_{ii} = 0$, y en el caso en que $w_{ij} = w_{ji}$ la red se llama *simétrica*. Finalmente, la matriz $W := (w_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suele denominarse *matriz de pesos* o *matriz de conectividad*.

Observemos que aún no dijimos nada sobre las variables \mathbf{x}_i . En muchas aplicaciones además de las n variables correspondientes a los nodos, tendremos que tales estados estarán descritos por un vector m -dimensional. Es decir, $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^m$. Así tendremos que nuestra red es un sistema $n.m$ -dimensional.

Red de Kuramoto. Un modelo simple de red, pero de importancia central en el estudio de la sincronía entre osciladores, lo constituye el ejemplo clásico propuesto

por Kuramoto [44]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.3.2)$$

donde θ_i representa la variable de fase del oscilador ubicado en el nodo i , y K_{ij} el peso de la conexión $\theta_j \rightarrow \theta_i$.

Definición 2.3.2. Una red recurrente descrita por el sistema (2.3.1) y donde las variables \mathbf{x}_i son unidimensionales, se dirá competitiva si

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}_j} \leq 0$$

para $i \neq j$.

Sistema de Lotka-Volterra competitivo Este sistema consiste en una red competitiva que modela la interacción entre n especies o poblaciones que compiten por un recurso común.

$$\dot{x}_i = r_i x_i \left(1 - \sum_{j \neq i}^n \alpha_{ij} x_j \right). \quad (2.3.3)$$

Las variables x_i representan el tamaño de cada población y, como es de esperar, el crecimiento de una de ellas repercute negativamente en la tasa de crecimiento de las restantes. Además para $n \geq 5$ esta red exhibe una amplia variedad de comportamientos dinámicos como *multiestabilidad*, *ciclos límites*, *n-toros* o *caos*. Véanse [33, 34, 66] y la figura 2.6.

En el próximo capítulo nos concentraremos detalladamente en cierto tipo de redes recurrentes, que poseen la particularidad de que el sistema (2.3.1) es suave a trozos. En consecuencia tendremos una dinámica C^1 -suave, y en ese contexto, estudiaremos las distintas bifurcaciones globales a las que da lugar la dinámica de la red.

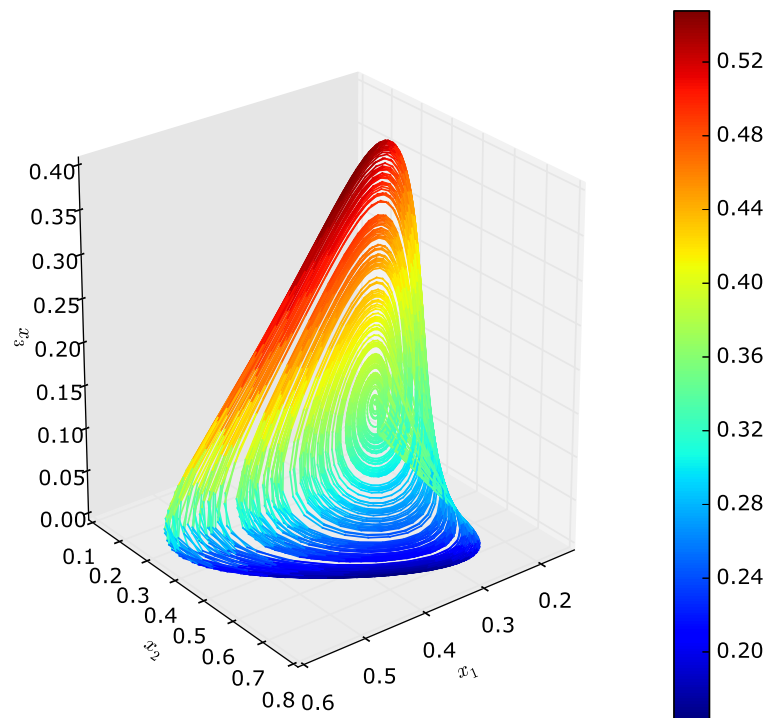


Figura 2.6: Sistema Lotka-Volterra competitivo de cuatro dimensiones. El color corresponde al valor de la cuarta variable.

Capítulo 3

Conexiones heteróclinas en un TLN

Tal como vimos, las redes recurrentes consisten básicamente en un conjunto de nodos y sus interacciones. Un camino habitual y sencillo para construirlas consiste en asociarle a un grafo (que representa la *arquitectura* de la red), algún sistema de ecuaciones cuyas soluciones representan la *actividad* del nodo [1, 29, 37, 39, 47, 63].

Las *redes con umbral lineal* (threshold linear network, TLN), son un caso particular de redes recurrentes, introducidas y estudiadas por Hahnloser [30, 31]. Posteriormente Morrison, Pamerlee y Curto las estudiaron en conexión con el *Problema de Codificación*¹. En [19, 20, 21, 53] las autoras analizan la *dinámica emergente* de estas redes, y estudian distintos comportamientos de naturaleza no lineal presentes en estos sistemas, centrándose en la multiestabilidad y los ciclos límites (aunque también reportan atractores cuasiperiódicos y caos). Sin embargo, esos fenómenos no agotan los tipos de dinámicas que pueden tener lugar en este tipo de redes.

Como mostraremos en este capítulo, a través de una adecuada modificación de los parámetros de estas redes, resulta posible obtener nuevos fenómenos de bifurcación de índole global, tales como conexiones y ciclos heteróclinos o conexiones homóclinas surgidas por la aparición/desaparición de ciclos límites.

En la primera sección de este capítulo exponemos la construcción usual de las redes TLN, junto a las definiciones y la nomenclatura necesaria, y algunos resul-

¹El problema de la codificación de redes (*Network Encoding Problem*) consiste básicamente en hallar algoritmos que permitan codificar de manera óptima una serie de datos a través de un atractor asintóticamente estable de una red dada (cf. [2, 37])

tados generales sobre este tipo de redes. En la segunda sección, proponemos una modificación del espacio de parámetros y mediante simulaciones numéricas, mostramos la gran variedad de nuevos comportamientos globales que emergen en este caso. Realizamos un análisis exhaustivo de las conexiones heteróclinas y homóclinas que tienen lugar, y demostramos un teorema acerca de la existencia de tales bifurcaciones. Finalmente, en la última sección exhibimos un curioso fenómeno, que hemos llamado de *coloración*, y que sugestivamente ilustra cierta cercanía al caos que esta dinámica posee.

Todos estos resultados se encuentran publicados y reportados en [13], y los principales códigos que desarrollamos para las simulaciones, se encuentran en el Apéndice.

3.1. Construcción de los TLN

Consideremos el siguiente sistema n -dimensional con umbral lineal (*threshold lineal system, TLN*):

$$\dot{x}_i = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + b_i \right]_+ . \quad (3.1.1)$$

De acuerdo con la notación establecida en [19, 20, 53], llamamos *matriz de conectividad* a $W = (W_{ij})$, y escribimos W_i a su i -ésima fila. El vector $b \in \mathbb{R}^n$ es denominado *input* del sistema (3.1.1), y la función $[\cdot]_+$ es la función rampa (*ramp function*) definida como $[y]_+ = \max\{0, y\}$. Por último, suele tomarse $W_{ii} = 0$

Observemos que el sistema (3.1.1) es C^1 -suave, y la red será *competitiva* si $W_{ij} < 0$. Cada variable dinámica representa la actividad de algún nodo, y el valor de la entrada ij de W la influencia del nodo j sobre la actividad del nodo i . Llamaremos *inhibitorias* a aquellas conexiones para las cuales $W_{ij} < 0$. Además la autoinhibición (la tasa de decaimiento) de un nodo aislado, que en el sistema han sido normalizados a -1 , proveen una escala natural para clasificar la inhibición (cf. [53]). Dada una conexión con origen en el nodo j y extremo en el nodo i , diremos que es *fuerte* si $W_{ij} < -1$ (es decir, si la inhibición del nodo j sobre el nodo i es más intensa que la la autoinhibición del nodo i) y la conexión será *débil* si $W_{ij} > -1$ (el escenario de inhibición contrario).

Consideramos las funciones f_i definidas como

$$f_i(x) := \sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + b_i, \quad (3.1.2)$$

y dado un subconjunto $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ llamaremos

$$S_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) < 0 \Leftrightarrow i \in \sigma\}. \quad (3.1.3)$$

Al mismo tiempo escribimos

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i f_i(x) > 0\} \text{ y } S_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i f_i(x) \leq 0\}. \quad (3.1.4)$$

Finalmente, las variedades de transición estarán dadas por

$$\Sigma_i = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0\}. \quad (3.1.5)$$

La siguiente proposición caracteriza la dinámica básica de estas redes TLN:

Proposición 3.1.1. *Dado un sistema como (3.1.1), supongamos que posee una matriz de conectividad W con entradas negativas y el input $b \in \mathbb{R}^n$ tiene coordenadas positivas. Definimos $B = \prod_{i=1}^n [0, b_i]$ y tomamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ como condición inicial. Entonces*

- (I) *Si $x_0 \in B$, la solución $x(t)$ es acotada.*
- (II) *Para $t > 0$ tendremos $x(t) \in B$.*
- (III) *Sea x^* un punto de equilibrio, entonces $x^* \in B$.*

Demostración. Probaremos item por item.

- (I) Como $\dot{x}_i + x_i = [W_i x + b_i]_+$, tendremos $\frac{d}{dt}(e^t x_i) = e^t [W_i x + b_i]_+$. Integrando obtenemos

$$x_i(t) = e^{-t} \left(\int_0^t e^s [W_i x(s) + b_i]_+ ds + x_i(0) \right). \quad (3.1.6)$$

De la última ecuación concluimos $x_i(t) \geq e^{-t} x_i(0) \geq 0$. Entonces obtenemos $\sum W_{ik} x_k \leq 0$, entonces $[W_i x + b_i]_+ \leq b_i$. Finalmente, concluimos

$$x_i(t) \leq e^{-t} (b_i e^t - b_i + x_i(0)).$$

(II) Sigue de las dos inecuaciones del inciso anterior.

(III) Necesariamente vale $x_i^* = [W_i x + b_i]_+ \geq 0$. Entonces $\sum W_{ik} x_k \leq 0$, y podemos concluir $x_i^* = [W_i x + b_i]_+ \leq b_i$.

□

Observación 3.1.2. *De la proposición anterior obtenemos que la caja B determinada por el input $b \in \mathbb{R}^n$ es el escenario natural para buscar conexiones heteróclinas y homóclinas. Por ello las simulaciones numéricas que realizaremos se reducirán a esa región del espacio.*

Observación 3.1.3. *Si P es una matriz de permutación que conmuta con W y el input b tiene todas sus componentes iguales, entonces la aplicación $x \mapsto Px$ resulta un automorfismo del sistema dinámico (3.1.1).*

Dada una red de tipo TLN competitiva con matriz de conectividad W , podemos asociarle un grafo dirigido G_W a través de la siguiente regla:

$$G_W \text{ tiene una arista } j \rightarrow i \Leftrightarrow W_{ij} > -1 \quad (3.1.7)$$

En el artículo [53], las autoras consideran únicamente redes TLN competitivas que poseen solo dos valores para las conexiones, ambos negativos: un cierto valor $W_{ij} = -1 - \delta < -1$, y otro $W_{ij} = -1 + \epsilon > -1$. A tales redes las denominan CTLN (*combinatorial threshold linear networks*). Así, a cada grafo dirigido G de n vértices y para cada $0 < \epsilon < 1$ y $\delta > 0$, resulta asociada una matriz de conectividad $W = W(G, \epsilon, \delta)$, de tamaño $n \times n$, definida como sigue:

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ -1 + \epsilon & \text{si } j \rightarrow i \\ -1 - \delta & \text{si } j \nrightarrow i \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Claramente, para las redes CTLN vale $G_W = G$. Finalmente, para cada $b \in \mathbb{R}^n$ con entradas positivas y un grafo dirigido G , podemos obtener una red de tipo CTLN.

3.2. El caso modificado

Dado un grafo dirigido G de n nodos, procedemos de manera similar al caso descrito en las reglas (3.1.8), y definimos un sistema lineal a trozos de la siguiente manera: fijamos $\alpha > 0$, $0 < \epsilon < \alpha$ y $\delta > 0$, y definimos

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ -\alpha + \epsilon & \text{si } j \rightarrow i \\ -\alpha - \delta & \text{si } j \nrightarrow i \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Finalmente, tomamos el sistema (3.1.1), con matriz de conectividad W .

Construyendo la red de esta manera, aún resulta posible clasificar las conexiones inhibitorias en fuertes o débiles, diferenciándolas según ocurra $W_{ij} < -\alpha$ ó $W_{ij} > -\alpha$ respectivamente, donde α es un *umbral* o *threshold* arbitrario para comparar inhibiciones. Aunque procediendo de esta forma, se pierde la clasificación obtenida de medir la inhibición de un nodo sobre otro comparándolo con la autoinhibición (aunque este escenario se recupera para $\alpha = 1$).

Nos centraremos en estudiar el caso donde la inhibición de cada nodo supera la auto-inhibición. Para esto, basta tomar $\alpha > 1 + \epsilon$.

Consideremos el grafo completo de tres nodos, orientado en sentido antihorario, véase la figura 3.1. En este caso, la matriz de conectividad tiene la forma

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha - \delta & -\alpha + \epsilon \\ -\alpha + \epsilon & 0 & -\alpha - \delta \\ -\alpha - \delta & -\alpha + \epsilon & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Dado $\lambda > 0$, consideremos el TLN con matriz de conectividad W e input $b = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Notemos que la matriz de conectividad conmuta con las matrices de permutación P_{312} y P_{231} (que son las matrices correspondientes a las permutaciones $\{312\}$ y $\{231\}$ respectivamente). Queda así definida una acción de \mathbb{Z}_3 sobre el sistema (cf.3.1.3).

Escribiremos como eq_i el punto de equilibrio del sector S_i , véase el cuadro 3.1. Si $\alpha > 1 + \epsilon$ hay siete equilibrios coexistiendo, tres de los cuales son estables, es decir

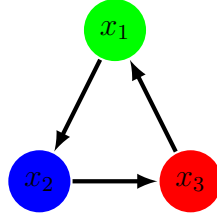


Figura 3.1: Grafo orientado.

Región	Equilibrio	Inestabilidad	Tipo
S_0	$eq_0 = \left(\frac{\lambda}{(1+2\alpha+\delta-\epsilon)}, \frac{\lambda}{(1+2\alpha+\delta-\epsilon)}, \frac{\lambda}{(1+2\alpha+\delta-\epsilon)} \right)$	2	Foco.
S_1	$eq_1 = \left(0, \frac{\lambda(\alpha+\delta-1)}{\alpha^2+\alpha(\delta-\epsilon)-\delta\epsilon-1}, \frac{\lambda(\alpha-\epsilon-1)}{\alpha^2+\alpha(\delta-\epsilon)-\delta\epsilon-1} \right)$	1	Saddle.
S_2	$eq_2 = \left(\frac{\lambda(\alpha-\epsilon-1)}{\alpha^2+\alpha(\delta-\epsilon)-\delta\epsilon-1}, 0, \frac{\lambda(\alpha+\delta-1)}{\alpha^2+\alpha(\delta-\epsilon)-\delta\epsilon-1} \right)$	1	Saddle.
S_3	$eq_3 = \left(\frac{\lambda(\alpha+\delta-1)}{\alpha^2+\alpha(\delta-\epsilon)-\delta\epsilon-1}, \frac{\lambda(\alpha-\epsilon-1)}{\alpha^2+\alpha(\delta-\epsilon)-\delta\epsilon-1}, 0 \right)$	1	Saddle.
S_{12}	$eq_{12} = (0, 0, \lambda)$	0	Nodo.
S_{23}	$eq_{23} = (\lambda, 0, 0)$	0	Nodo.
S_{31}	$eq_{31} = (0, \lambda, 0)$	0	Nodo.

Cuadro 3.1: Tabla de los equilibrios del sistema modificado.

que el sistema presenta *multiestabilidad*. También resulta sencillo verificar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1+\epsilon} eq_1 = eq_{31}. \quad (3.2.3)$$

Análogamente $eq_2 \rightarrow eq_{12}$ y $eq_3 \rightarrow eq_{23}$. Notemos además que $eq_{12} \in \Sigma_3$, $eq_{31} \in \Sigma_2$ y $eq_{23} \in \Sigma_1$ si $\alpha > 1 + \epsilon$, y son nodos estables (*permitted sets*, en la nomenclatura de [19, 20]). Cuando $\alpha = 1 + \epsilon$ el punto de equilibrio eq_j colisiona con eq_{ij} , y ambos desaparecen para $\alpha < 1 + \epsilon$. El único equilibrio que perdura en todos los escenarios es eq_0 .

Observación 3.2.1. *Notemos que todos los equilibrios inestables del nuevo sistema se encuentran dentro de la caja $B = [0, \lambda]^3$. Entonces, en virtud de la proposición 3.1.1 concluimos que todas las posibles conexiones homóclinas o heteróclinas sólo pueden hallarse dentro de B .*

Para ciertos valores $\alpha > 1 + \epsilon$ encontramos ciclos heteróclinos. En tales ciclos, eq_0 se encuentra conectado con todos los otros puntos heteróclinos. Para otros valores $\alpha > 1 + \epsilon$, solamente encontramos un ciclo límite estable. Lo que conjeturamos es que existe un valor $\alpha_0 > 1 + \epsilon$ tal que los ciclos heteróclinos existen para $\alpha \geq \alpha_0$.

En el caso opuesto solo habrá un ciclo límite y conexiones heteróclinas aisladas.

Recordemos que restringido a las regiones S_i o S_{ij} el sistema es lineal. Entonces, si hay un equilibrio en en la región S_i o S_{ij} , sus variedades estable e inestable serán variedades lineales restringidas a la región correspondiente. Escribiremos como \mathcal{W}_i^s o \mathcal{W}_i^u tales variedades. En particular, si $n = 3$, lo que obtendremos serán planos o rectas, estables o inestables. Escribiremos como N_i (N_{ij}) a la matriz principal del sistema restringida a la región. Además, podremos considerar $\lambda = 1$ sin pérdida de generalidad.

3.2.1. El ciclo límite

El ciclo límite aparece para $\alpha < \alpha_0$ y se mantiene aún para $\alpha < 1 + \epsilon$, y se contrae hasta que $\alpha = 1 + \frac{(\epsilon - \delta)}{2}$ y colapsa sobre eq_0 , que se torna un centro inestable. En el caso $\alpha = 1$, obtenemos el ciclo ya reportado en [53].

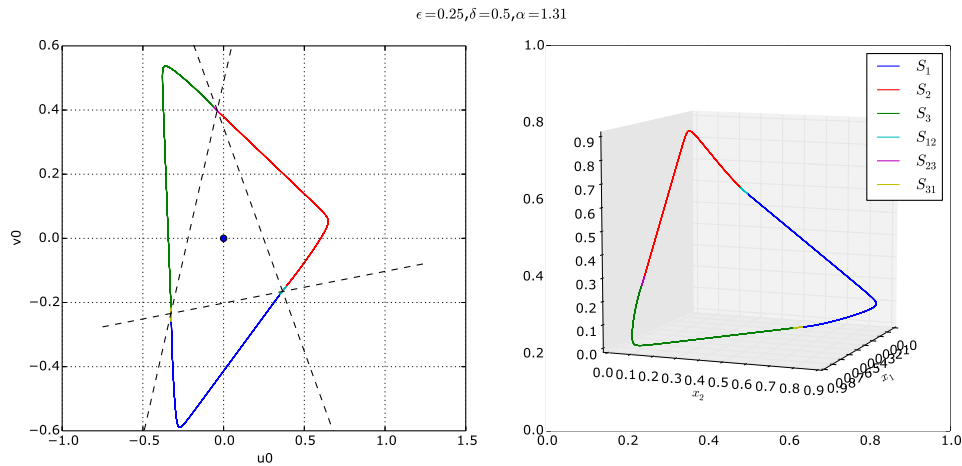


Figura 3.2: Proyección del ciclo límite sobre el plano inestable de eq_0 (los ejes corresponden a las direcciones inestables principales del equilibrio) y su gráfica en 3D.

La orientación del ciclo es antihoraria, y tenemos el siguiente itinerario (correspondiente al orden en que cruza las variedades de transición Σ):

$$S_{12} \xrightarrow{\Sigma_1} S_2 \xrightarrow{\Sigma_3} S_{23} \xrightarrow{\Sigma_2} S_3 \xrightarrow{\Sigma_1} S_{31} \xrightarrow{\Sigma_3} S_1 \xrightarrow{\Sigma_2} S_{12} \quad (3.2.4)$$

Notemos que el ciclo es un conjunto invariante por las permutaciones del sistema: P_{231} lo rota en sentido horario y P_{312} en el sentido antihorario. En la figura 3.3

puede verse la dependencia entre el valor del parámetro α y período T_α del ciclo correspondiente.

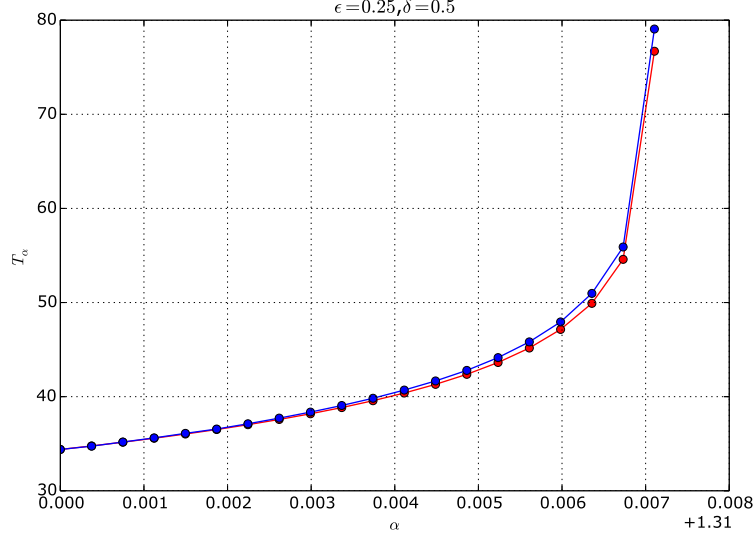


Figura 3.3: Curva azul: crecimiento del período del ciclo a medida que α se acerca al valor crítico α_0 por izquierda. Curva roja: gráfica de la función $6,95 \log\left(\frac{1}{\alpha-\alpha_0}\right)$ ($\alpha_0 \approx 1,31712123845$). El código utilizado para realizar esta figura se encuentra en el apéndice.

3.2.2. Los ciclos heteróclinos

En esta sección haremos una descripción de los ciclos heteróclinos basándonos en simulaciones numéricas, y además exhibiremos un efecto que denominamos de *enroscamiento* (reportado como “*twisting effect*” en [13]), que será probado en la próxima sección.

Cuando el valor crítico α_0 es superado, observamos la aparición de un ciclo heteróclino, representado en el esquema 3.4 y la figura 3.5, compuesto por conexiones entre los equilibrios eq_i con los eq_{ij} (líneas sólidas y punteadas simples de la figura), e infinitas conexiones entre eq_0 y los eq_{ij} (líneas punteadas dobles). La figura exhibida es válida para valores de α no muy cercanos al valor crítico α_0 . Señalemos que las conexiones sólidas son robustas y existen para todo $\alpha > 1 + \epsilon$, mientras que las conexiones representadas por líneas punteadas sufren el *enroscamiento* cuando $\alpha \rightarrow \alpha_0^+$.

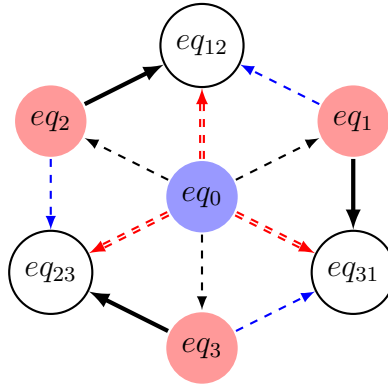


Figura 3.4: Esquema del ciclo heteroclino para valores de α mayores y no muy cercanos a α_0 .

Conexiones de los eq_i con eq_{ki}

Consideremos las conexiones representadas por líneas sólidas en la figura 3.4. Tomemos por ejemplo la conexión de eq_2 con eq_{12} , tal conexión se encuentra dentro de la región S_2 . El equilibrio eq_2 tiene $u_2 = \left(-\frac{\sqrt{(\alpha+\delta)(\alpha-\epsilon)}}{\alpha+\delta}, 0, 1 \right)$ como dirección inestable. Entonces tenemos la siguiente parametrización de la variedad inestable (dentro de la región):

$$\mathcal{W}_2^u = tu_2 + eq_2. \quad (3.2.5)$$

Si $t > 0$, la línea apunta a la variedad de transición Σ_1 y corta en un único punto q . A partir de allí, la trayectoria se encuentra dentro de la región S_{12} , donde el equilibrio eq_{12} es asintóticamente estable. Entonces la conexión heteroclínica nace.

Las conexiones $eq_1 \rightarrow eq_{31}$ y las $eq_3 \rightarrow eq_{23}$ siguen de la invariancia del sistema bajo las permutaciones P_{231} y P_{312} respectivamente.

Señalemos que cada una de esas conexiones existen para $\alpha > 1 + \epsilon$.

Conexiones de eq_0 con los eq_i

La existencia de las líneas punteadas negras en la figura 3.4 están sugeridas por la figura 3.6. Notemos que a medida que nos aproximamos al borde entre las regiones de distinto color, las conexiones heteroclínicas con origen en eq_0 están cada vez más cerca de los equilibrios eq_i . Por esto, conjeturamos que las conexiones coinciden con estas fronteras.

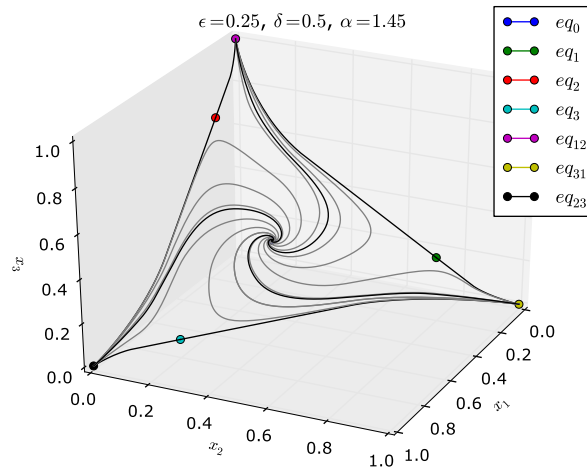


Figura 3.5: Ciclo heteróclino.

Las conexiones restantes

Las restantes conexiones (cf. la figura 3.4) de los eq_i con los eq_{ik} (las líneas azules), y las conexiones de eq_0 con los eq_{ij} (líneas rojas) fueron obtenidas numéricamente. Señalamos además que simular estas conexiones resulta mucho más sencillo que las conexiones anteriormente mencionadas.

En la figura 3.7 puede observarse las curvas de bifurcación en el espacio de parámetros (ϵ, α) .

El efecto de enroscamiento

Las figuras 3.8 a 3.10, en las que mostramos como “luce” el efecto que llamamos de *enroscamiento*, están organizadas para valores del parámetro α y simulan la conexión punteada de la figura 3.4 con origen en eq_2 (las otras conexiones heteróclina con origen en eq_1 y eq_3 tienen similar comportamiento por la simetría del sistema). Debemos señalar que para valores de α cercanos a α_0 (para estas simulaciones estimamos $\alpha_0 = 1,31712123845$ para $\epsilon = 0,25$ y $\delta = 0,5$), las conexiones se enroscan alrededor del triángulo formado por los equilibrios eq_1 , eq_2 , eq_3 y varían su extremo final, creando así nuevos ciclos (representados en las figuras 3.12 y 3.13). En la figura 3.11 las órbitas están visualmente *desenroscadas* a través de añadir

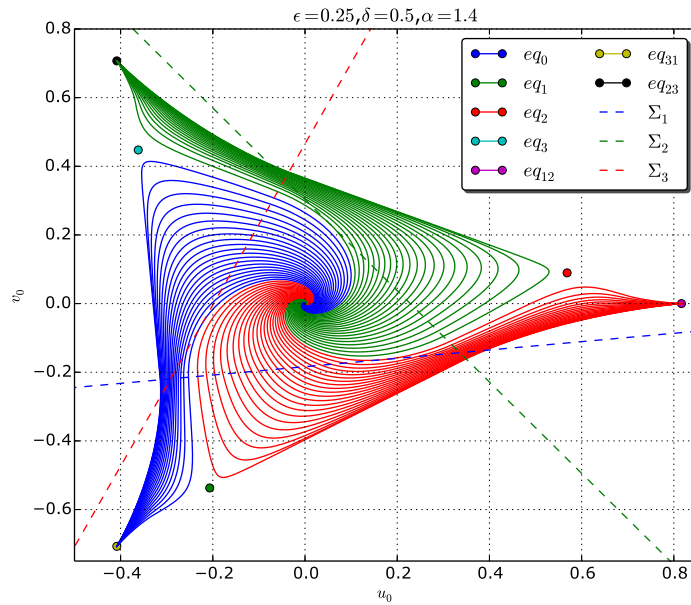


Figura 3.6: Proyección del ciclo heteróclino sobre el plano inestable de eq_0 . Los ejes u_0 y v_0 corresponden a las direcciones inestables principales. Las líneas puntuadas marcan la intersección de este plano con las variedades de transición Σ .

una función positiva creciente a la solución calculada (también los equilibrios fueron adecuadamente movidos).

Debemos señalar también que cerca del valor crítico α_0 las simulaciones son susceptibles de un mayor error numérico. Basados en las simulaciones, conjeturamos el siguiente teorema:

Teorema 3.2.2 (Efecto de enroscamiento). *Dado $n \in \mathbb{N}$, existe un valor $\alpha = \alpha(n) > \alpha_0$ y una órbita heteróclina que conecta eq_k ($k = 1, 2, 3$) con algún nodo eq_{ij} o saddle eq_i que cruza n veces las variedades de transición Σ_j .*

En las figuras 3.14, 3.15 y 3.16, puede ser observado el efecto de enroscamiento para conexiones con origen en eq_0 , y valores $\epsilon = 0,15$, $\delta = 0,5$ y un valor crítico estimado en $\alpha_0 = 1,2139083785$.

En la figura 3.23 se exhibe un gráfico de la trayectoria “desenroscada”.

A través de este efecto de enroscamiento, las conexiones con origen en los eq_i cambian su equilibrio final a medida que el parámetro $\alpha \rightarrow \alpha_0^+$, produciéndose así una *cascada de bifurcaciones* cerca del valor crítico.

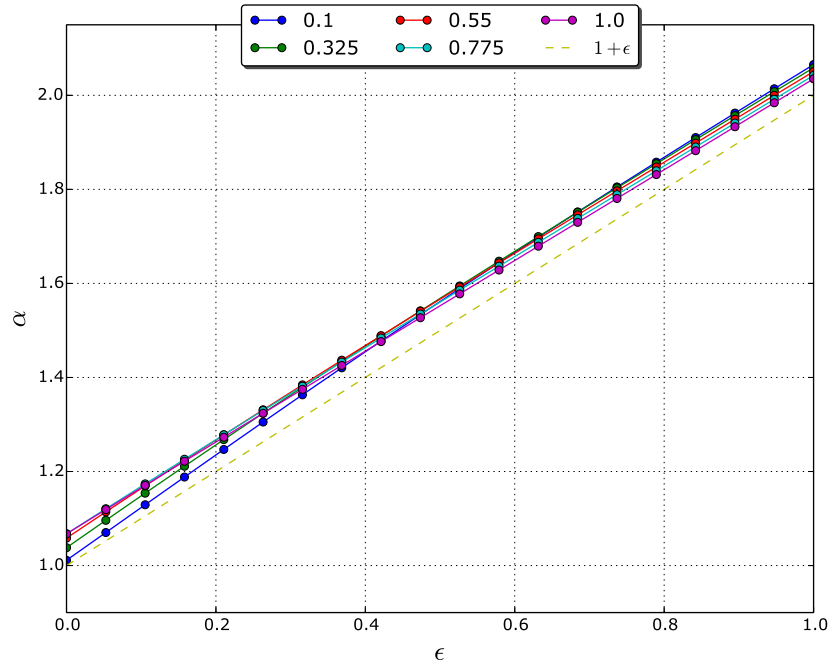


Figura 3.7: Curvas de bifurcación de ϵ vs. α ($\delta = 0,5$).

3.2.3. Análisis de las conexiones *saddles*

Ahora haremos un cambio de variables adecuado para estudiar el sistema, de manera tal que las variedades de transición coincidan con los planos coordenados, y así las regiones coincidirán con los cuadrantes. Entonces tomamos la transformación afín:

$$x \mapsto z = Wx + b. \quad (3.2.6)$$

En las nuevas coordenadas el sistema tendrá la forma

$$\dot{z} = -z + b + W[z]_+. \quad (3.2.7)$$

Conexiones entre los eq_i y eq_{ji}

Notemos con $\Sigma_i^- = \{z_i = 0, z_{(i+1 \bmod 3)} < 0\}$ y consideremos sin pérdida de generalidad el equilibrio eq_1 . Denotamos con Γ_α la rama de la variedad inestable $\mathcal{W}^u(eq_1)$ que apunta en la dirección opuesta al equilibrio eq_{31} . Entonces tomamos $\alpha = 1 + 2\epsilon$. Para tal valor del parámetro por simulación obtenemos que eq_1 se encuentra

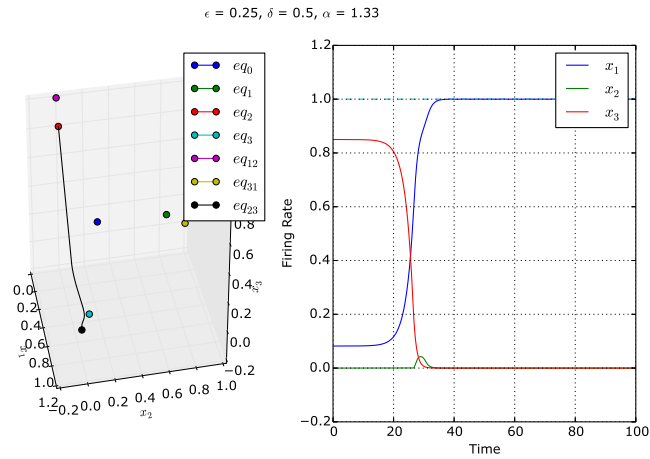


Figura 3.8: Conexión heteróclina simple entre eq_2 y eq_{23}

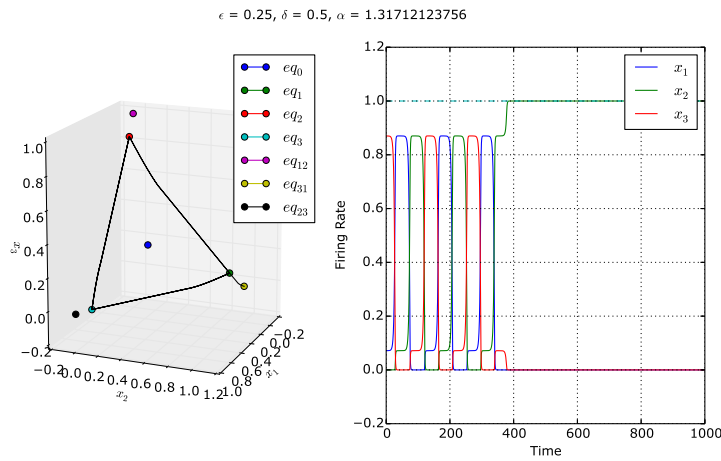


Figura 3.9: Conexión heteróclina *enroscada* entre eq_2 y eq_{31}

conectado con el equilibrio eq_{12} . Entonces $\Gamma_{\alpha=1+2\epsilon}$ es una conexión heteróclina, que comienza en la región S_1 y finaliza en la región S_{12} . Luego, en esta situación, la trayectoria debe intersectar la variedad Σ_2 .

Lo que observamos (nuevamente por simulación) es lo siguiente (véase la figura 3.18): existen valores $\beta < \alpha_0 < \alpha^* < 1 + 2\epsilon$ para los cuales, si $\alpha \in (\alpha^*, \infty)$ la trayectoria Γ_α cruza Σ_2 y alcanza el equilibrio eq_{12} . Por el otro lado, si $\alpha \in (\beta, \alpha^*)$, tendremos que Γ_α (dependiendo de si es una conexión heteróclina o no) primero interseca Σ_2 y luego Σ_1 , ingresando en la región S_2 . Consideremos $\alpha < \alpha^*$. Sea $Q_\alpha^1 \in \Gamma_\alpha \cap \Sigma_1^-$ el punto donde la trayectoria primero corta a la variedad Σ_1 .

Si Q_α^1 se encuentra sobre el plano estable de eq_2 (línea puntuada de la figura

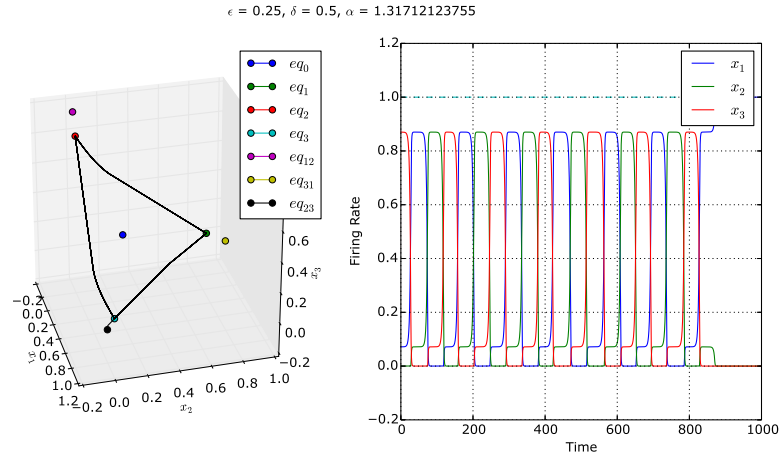


Figura 3.10: Conexión heteróclina *enroscada* entre eq_2 y eq_{23}

3.19), entonces la trayectoria se aproximará a tal equilibrio hasta que finalmente resulta capturada por la dirección inestable (línea roja punteada) y finalmente es arrastrada hacia el nodo estable eq_{12} .

Si $Q_\alpha^1 \in \mathcal{W}_2^s$, es decir, si se encuentra dentro del plano estable de eq_2 , la trayectoria finalizará en eq_2 y tendremos una conexión *saddle* de codimensión 1.

Finalmente, si Q_α^1 se encuentra debajo del plano estable de eq_2 , la trayectoria se aproximará hasta ese equilibrio hasta resultar capturada por la dirección inestable y continuará en tal dirección. Véase la figura 3.20.

Bifurcaciones heteróclinas y homóclinas

Comenzando del último caso descrito en la sección anterior, consideremos el diagrama expuesto en la figura 3.21, tendremos que el punto Q_α^1 está debajo de $\mathcal{W}_2^s \cap \{z_2 = 0\}$. Entonces la trayectoria es arrastrada por la dirección inestable del equilibrio eq_2 y continúa en esa dirección hasta cortar el plano $\Sigma_3 = \{z_3 = 0\}$, y luego corta el semiplano Σ_2^- , donde interactúa con la variedad estable \mathcal{W}_3^s . Entonces obtenemos escenarios similares a los de la sección previa, es decir: tenemos un nuevo punto Q_α^2 que puede estar encima, debajo o sobre $\mathcal{W}_3^s \cap \Sigma_3$. De esta manera obtenemos que puede ocurrir

- a) Q_α^2 corta sobre la variedad estable de eq_3 y emerge una conexión heteróclina con eq_{23} .

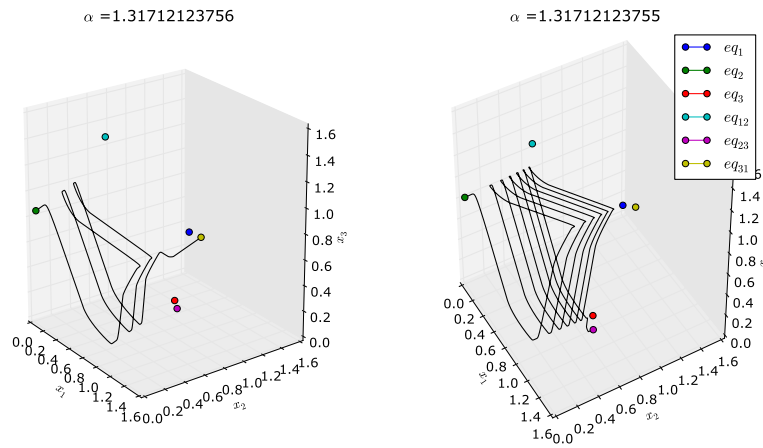


Figura 3.11: Solución $+ \frac{\sqrt{t}}{700} (1, 1, 1)$

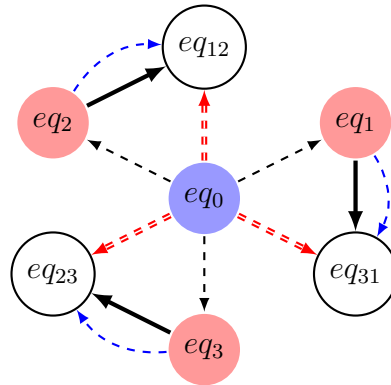


Figura 3.12: Esquema de uno de los nuevos ciclos heteróclinos que aparecen para valores de α suficientemente cercanos a α_0 .

- b) Q_α^2 corta el plano Σ_2^- coincidiendo con la variedad estable de eq_3 y emerge una conexión entre los *saddles* eq_1 y eq_3 .
- c) Q_α^2 corta por debajo del plano estable de eq_3 , entonces la trayectoria es arrastrada por la dirección inestable de eq_3 y continúa. Finalmente corta Σ_1 y Σ_3^- .

En el último caso, la trayectoria iniciada en eq_1 debe interactuar con la variedad inestable de eq_1 . Entonces nuevamente, dependiendo de si la altura de corte de la trayectoria respecto de Σ_3^- está sobre la variedad, habrá una nueva conexión con el nodo eq_{31} , entonces tendremos una doble conexión heteróclina entre eq_1 y eq_{31} .

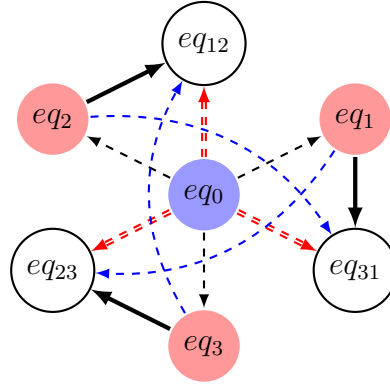


Figura 3.13: Esquema de otro de los nuevos ciclos heteroclínicos que aparecen para valores de α suficientemente cercanos a α_0 .

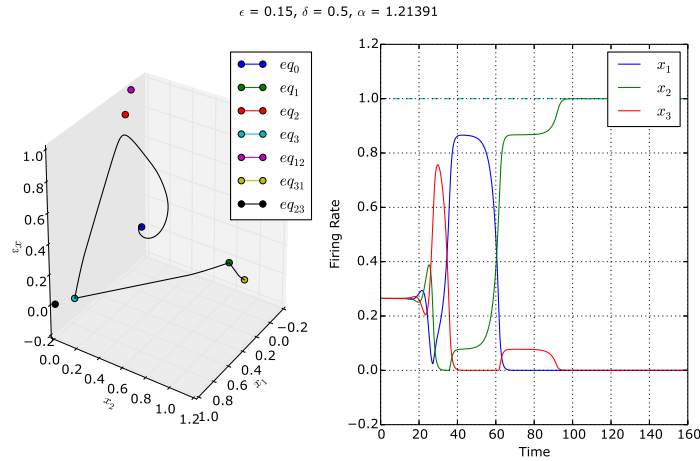


Figura 3.14: Conexiones heteroclínicas entre eq_0 y eq_{31} .

Pero si el punto de corte Q_α^3 de la trayectoria con el plano Σ_3^- se encuentra sobre la variedad estable, tendremos una *conexión homoclina*.

Tal conexión homoclina desaparecerá cuando el parámetro α varíe y el punto Q_α^3 se encuentre debajo de la intersección $\mathcal{W}_1^s \cap \{z_3 = 0\}$ y continúe siendo arrastrada por la dirección inestable. De allí la trayectoria continuará hasta cortar la variedad Σ_2 y luego Σ_1^- en un punto Q_α^4 que puede estar por encima, debajo o sobre la intersección $\mathcal{W}_2^s \cap \{z_1 = 0\}$.

Obtenemos así que hay un *efecto de enroscamiento* de las trayectorias que inician (que tienen condición inicial) sobre la dirección inestable de los eq_i , efecto que da origen a la aparición de conexiones heteroclínicas u homoclínicas a medida que nos aproximamos al valor crítico α_0 .

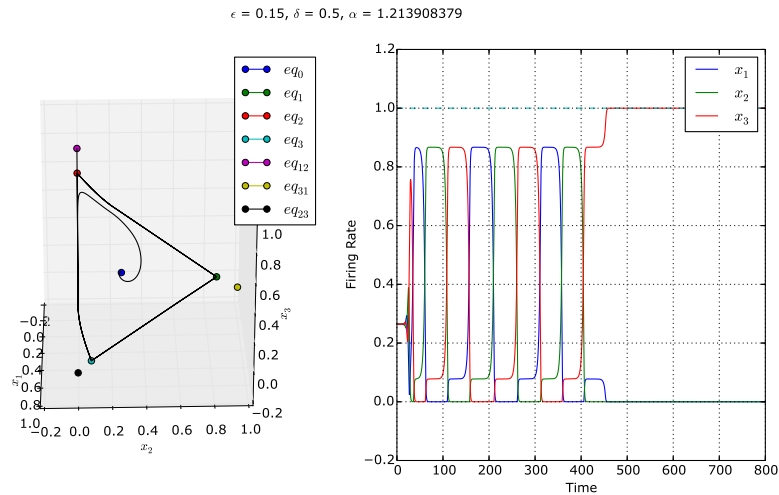


Figura 3.15: Conexiones heteróclinas entre eq_0 y eq_{12} .

3.2.4. Resultado principal

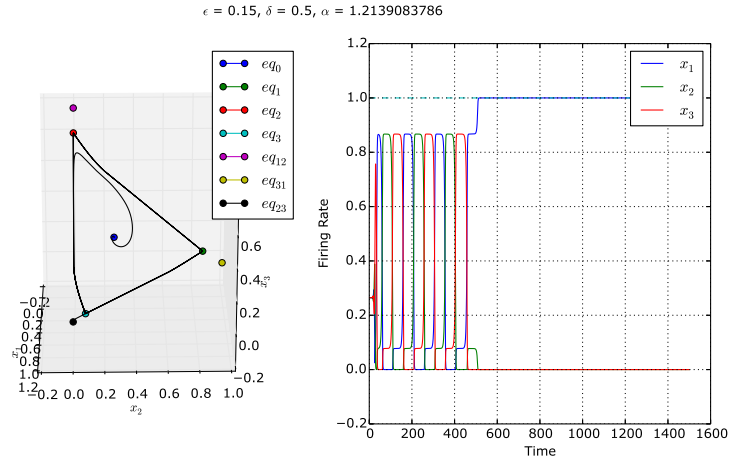
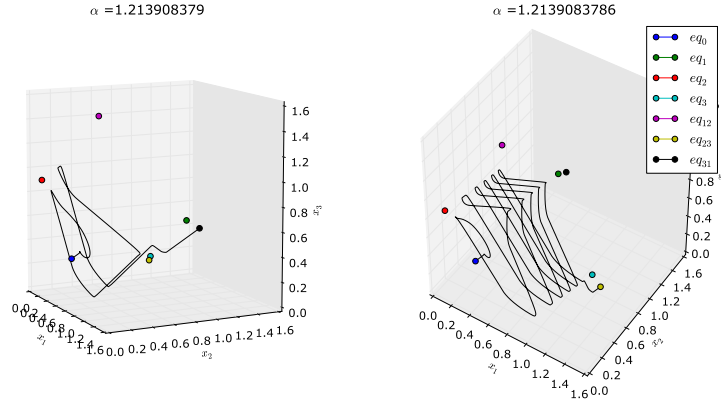
Como señalamos antes, hay una acción de $\mathbb{Z}_3 = \{P_{231}, P_{312}, \mathbb{I}_3\}$ sobre el sistema. Esta acción intercambia los equilibrios eq_i entre ellos mismos (y otro tanto ocurre con los eq_{ij}), junto a las distintas conexiones heteróclinas que los unen. Por ello, para probar el teorema 3.2.2, alcanza demostrarlo para un único equilibrio, por ejemplo eq_1 , y luego, por la acción mencionada, el resultado resulta generalizado a los restantes equilibrios.

Consideremos entonces la siguiente versión particular del teorema 3.2.2.

Teorema 3.2.3. *Tomemos sin pérdida de generalidad, la conexión heteróclina Γ_α con origen en eq_1 y que apunta en la dirección opuesta al nodo eq_{31} . Entonces existen infinitos valores $\alpha > \alpha_0$ tales que Γ_α finaliza en cualquiera de los equilibrios (salvo eq_0), y corta tanta veces como querramos la variedad de transición Σ_1^- (a esto lo denominamos enroscamiento).*

Con el fin de probar el resultado arriba mencionado, continuaremos con la construcción realizada en la subsección previa y la generalizaremos: definimos una familia de puntos Q_α^i como aquellos puntos de corte entre la trayectoria y la variedad correspondiente cada vez que interactúa con el plano estable de algún equilibrio y corta al semiplano Σ_j^- . Entonces tendremos

$$Q_\alpha^i \in \Sigma_{(i \bmod 3)}^- \quad (3.2.8)$$

Figura 3.16: Conexiones heteróclinas entre eq_0 y eq_{23} .Figura 3.17: Solución $+\frac{(\exp(-t)+1)\sqrt{t}}{700}(1, 1, 1)$.

Por construcción, si existe $Q_{\alpha_i}^i$, y $i = 3k + l$ donde $l \equiv i \pmod{3}$, entonces la trayectoria tiene que haber atravesado $k + 1$ veces el semiplano Σ_i^- . Así, la prueba del teorema 3.2.3 quedará reducida a encontrar condiciones para las cuales Q_{α}^i esté bien definido, y demostrar que tales condiciones se cumplen.

Por otro lado, tendremos que la línea que resulta de la intersección

$$\mathcal{W}_{(i+1 \pmod{3})}^s \cap \Sigma_i^-,$$

siempre es constante en la componente $z_{(i+1 \pmod{3})}$, y desde que z_i es cero, sigue que la posición del punto Q_{α}^i respecto del plano estable depende únicamente de la com-

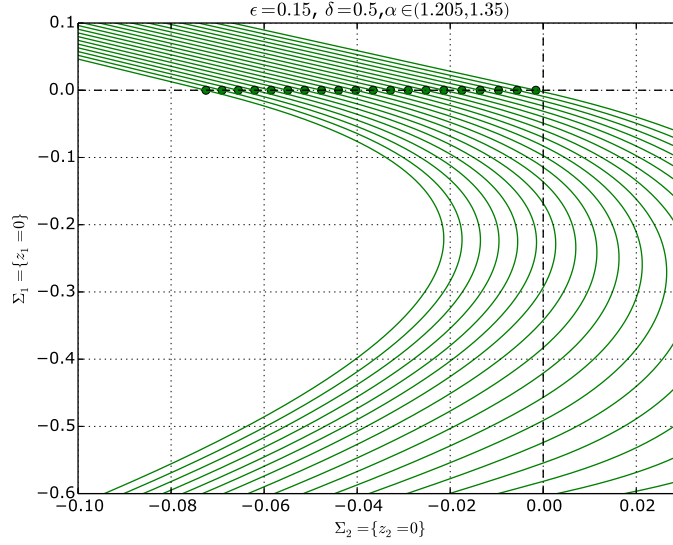


Figura 3.18: Los puntos verdes muestran la localización del primer punto de intersección entre Γ_α y Σ_2 para diferentes valores de α . El punto de corte se mueve de izquierda a derecha a medida que el valor de α decrece.

ponente $z_{(i+2 \bmod 3)}$. Para ver esto, basta tomar las direcciones estables $u_{(i+1 \bmod 3)}$ y $v_{(i+1 \bmod 3)}$ correspondientes a $eq_{(i+1 \bmod 3)}$ y observar que el vector normal al plano estable, $w_{(i+1 \bmod 3)} = u_{(i+1 \bmod 3)} \times v_{(i+1 \bmod 3)}$, satisface que su componente $(i+1 \bmod 3)$ es nula.

En otras palabras, tendremos que

$$\mathcal{W}_{(i+1 \bmod 3)}^s \cap \Sigma_i^- = \{z_i = 0, \quad z_{(i+2 \bmod 3)} = C_\alpha, \quad z_{(i+1 \bmod 3)} < 0\}, \quad (3.2.9)$$

donde

$$C_\alpha := \frac{\langle w_{(i+1 \bmod 3)}; eq_i \rangle}{\langle w_{(i+1 \bmod 3)}; e_{(i+2 \bmod 3)} \rangle}. \quad (3.2.10)$$

Notemos que para cada i el valor de $C_\alpha > 0$ es el mismo por simetría

Dado el punto $Q_\alpha^i \in \Sigma_{(i \bmod 3)}^-$ donde la trayectoria interactúa con la variedad estable $eq_{(i+1 \bmod 3)}$, escribiremos como q_α^i al valor de su componente que determina si el punto Q_α^i se encuentre por encima, por debajo o en $W_{(i+1 \bmod 3)}^s$, es decir:

$$q_\alpha^i = \langle e_{(i+1 \bmod 3)}, Q_\alpha^i \rangle. \quad (3.2.11)$$

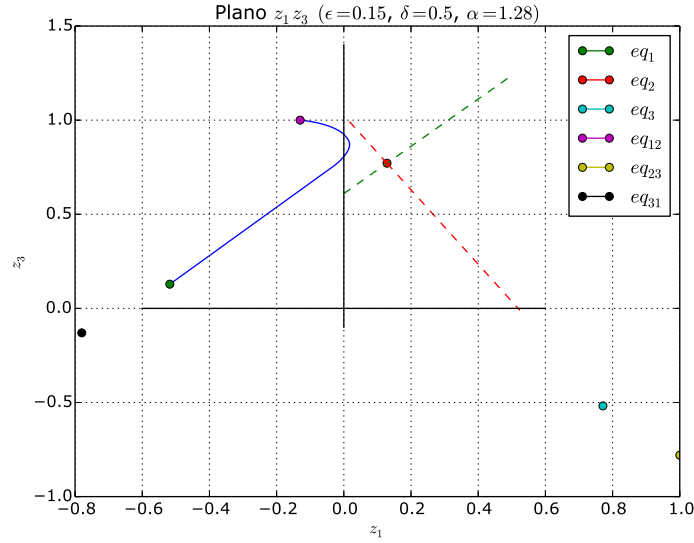


Figura 3.19: La trayectoria corta arriba del plano estable de eq_2 y emerge una conexión heteróclina. La línea punteada verde es el plano estable de eq_2 y la línea roja punteada la dirección inestable.

La familia q_α^i

Como establecimos arriba, tendremos funciones q_α^i . Es inmediato que dado α se encuentra definido q_α^{i+1} si y solo si $q_\alpha^i < C_\alpha$. Entonces tenemos

$$\text{Dom}(q_\alpha^{i+1}) \subset \text{Dom}(q_\alpha^i) \quad (3.2.12)$$

La continuidad de las funciones q_α^i respecto del parámetro α sigue de la continuidad de las soluciones del sistema (3.2.7) respecto del parámetro.

Por construcción de q_α^i resulta inmediato siguiente resultado:

Teorema 3.2.4. *Dada la familia q_α^i , tomemos el valor $\alpha \in (\beta, \infty)$. Entonces*

- (I) *hay una conexión heteróclina entre eq_1 y $eq_{(i \bmod 3, i+1 \bmod 3)}$ sii $q_\alpha^i > C_\alpha$.*
- (II) *hay una conexión saddle entre eq_1 y $eq_{(i+1 \bmod 3)}$ sii $q_\alpha^i = C_\alpha$. En particular, si $i+1 \equiv 0 \pmod 3$ la trayectoria será una conexión homóclina.*
- (III) *la trayectoria tiende a un ciclo límite estable sii q_α^i se encuentra definido para cada $i \in \mathbb{N}$. Necesariamente vale $q_\alpha^i < C_\alpha$ y, en particular, $\alpha < \alpha_0$.*

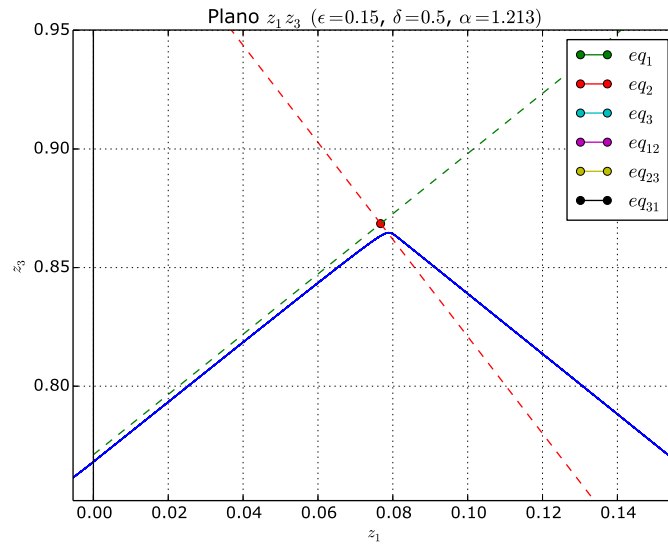


Figura 3.20: La trayectoria corta por debajo del plano estable de eq_2 .

Demostración. Los dos primeros items son inmediatos. En el tercero, la implicación derecha es inmediata. La recíproca sigue del hecho de que no hay otros atractores posibles (o al menos, no han sido hallados por simulación). \square

En lo siguiente, propondremos dos hipótesis que garantizan el comportamiento regular de la familia $\{q_\alpha^i\}$. Tales hipótesis postulan el crecimiento monótono de las funciones y tornan posible determinar el signo de q_α^i cuando esta función esté definida.

Hipótesis 3.2.5. *Supongamos $q_\alpha^i - C_\alpha$ es monótonamente creciente. Entonces, si $q_\alpha^{(i+1)}$ existe también será monótonamente creciente.*

Hipótesis 3.2.6. *Dado $i \in \mathbb{N}$ existe $\delta = \delta(i)$ tal que, si $0 < C_\alpha - q_\alpha^i < \delta$ entonces $q_\alpha^{(i+1)} > C_\alpha$.*

Proposición 3.2.7. *Supongamos la validez de [H3.2.5] y [H3.2.6]. Entonces*

$$\text{Dom}(q_\alpha^i) = (\beta, \alpha_i), \quad (3.2.13)$$

donde α_i es tal que $q_{\alpha_i}^{(i-1)} - C_{\alpha_i} = 0$.

Demostración. Procederemos por inducción. Primero observemos que $q_\alpha^1 - C_\alpha$ es monótonamente creciente (véase la figura 3.22), y que $\text{Dom}(q_\alpha^1) = (\beta, \alpha_1)$. Entonces,

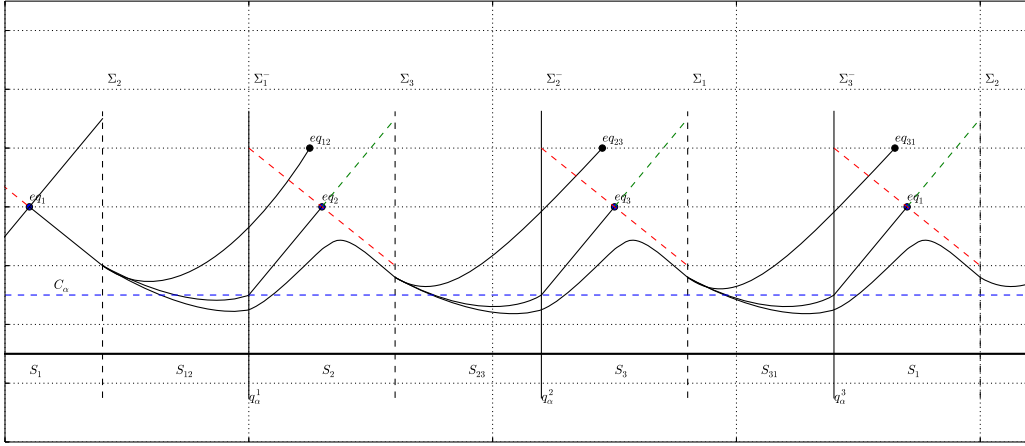


Figura 3.21: Diagrama esquemático de todas las posibles trayectorias. Cuando la trayectoria corta alguna variedad Σ_i^- hay tres posibles alturas de corte, y dependiendo de ello diferentes conexiones nacen o la trayectoria continúa.

por inducción (usando [H3.2.5]) sigue que, siempre que esté definida, $q_\alpha^i - C_\alpha$ será monótonamente creciente.

Supongamos que $\text{Dom}(q_\alpha^i) = (\beta, \alpha_i)$. Como $C_{\alpha_i} = q_{\alpha_i}^{(i-1)}$, por [H3.2.6] existe γ tal que dado $\gamma < \alpha < \alpha_i$ sigue $q_\alpha^i > C_\alpha$.

Por otro lado, si tomamos ρ tal que $\beta < \rho < \alpha_0$, tendremos un ciclo límite y necesariamente sigue $C_\rho > q_\rho^i$.

Como q_α^i es monótonamente creciente, obtenemos que existe un único valor $\alpha_{(i+1)}$ tal que $q_{\alpha_{(i+1)}}^i = C_{\alpha_{(i+1)}}$. Entonces, $q_\alpha^{(i+1)}$ se encuentra definida en $(\beta, \alpha_{(i+1)})$. \square

El siguiente resultado demuestra el *efecto de enroscamiento*.

Lema 3.2.8. *Supongamos la validez de [H3.2.5] y [H3.2.6], entonces para todo i existe un valor α tal que q_α^i está definido.*

Demostración. Nuevamente procedemos por inducción. Primero notemos que dado $\alpha \in (\beta, \alpha_1)$ siempre resulta definido q_α^1 .

Entonces, asumiendo la existencia de q_α^i y repitiendo los argumentos de la demostración de la proposición 3.2.7, sigue que existen valores tal que $q_\alpha^{(i+1)}$ está definido. \square

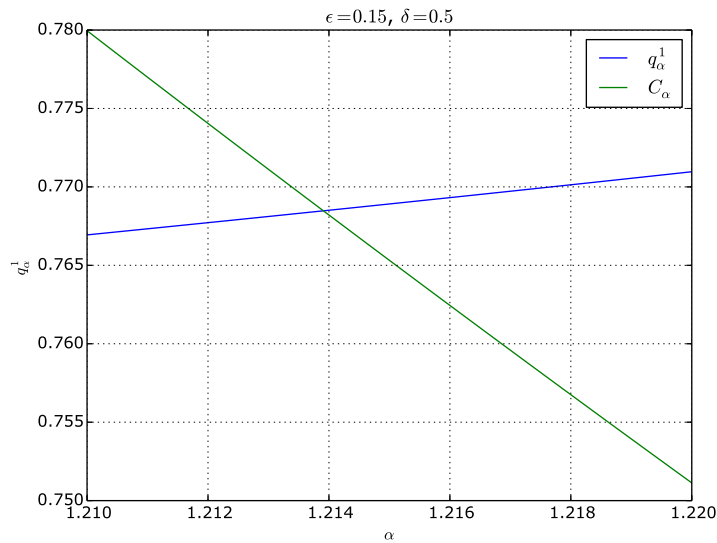


Figura 3.22: La curva azul muestra la función monótona q_α^1 .

3.3. El fenómeno de coloración

Consideremos $\alpha > \alpha_0$. Cada órbita heteroclina que comienza en eq_0 finaliza en alguno de los tres equilibrios estables (salvo unas pocas órbitas que finalizan en los *saddles* eq_i). Elegimos un color para cada equilibrio estable, y con él pintamos cada una de las conexiones heteroclina que comienzan en eq_0 de acuerdo al equilibrio en el que finalizan. Luego, si tomamos un círculo contenido en el plano inestable de eq_0 y que no corte ninguna variedad de transición, tendremos coloreado todo el círculo (pues cada punto del círculo, excepto eq_0 , se encuentra sobre una única heteroclina). Así, para cada valor del parámetro α tendremos una coloración particular del círculo. A medida que nos aproximamos al valor α_0 observamos la aparición de patrones de coloración cada vez más “complejos”.

En las figuras 3.23 a 3.26 podemos observar la simulación de coloraciones para α cercanos a un cierto α_0 estimado numéricamente. En las figuras los colores rojo, verde y azul corresponden a los equilibrios eq_{12} , eq_{23} y eq_{31} respectivamente. Las conexiones que finalizan en algún eq_i no son capturadas, por lo cual no les fue asignado un color en la simulación. El código utilizado para las simulaciones puede encontrarse en el apéndice.

Como hemos visto en secciones previas, los bordes entre dos regiones con diferen-

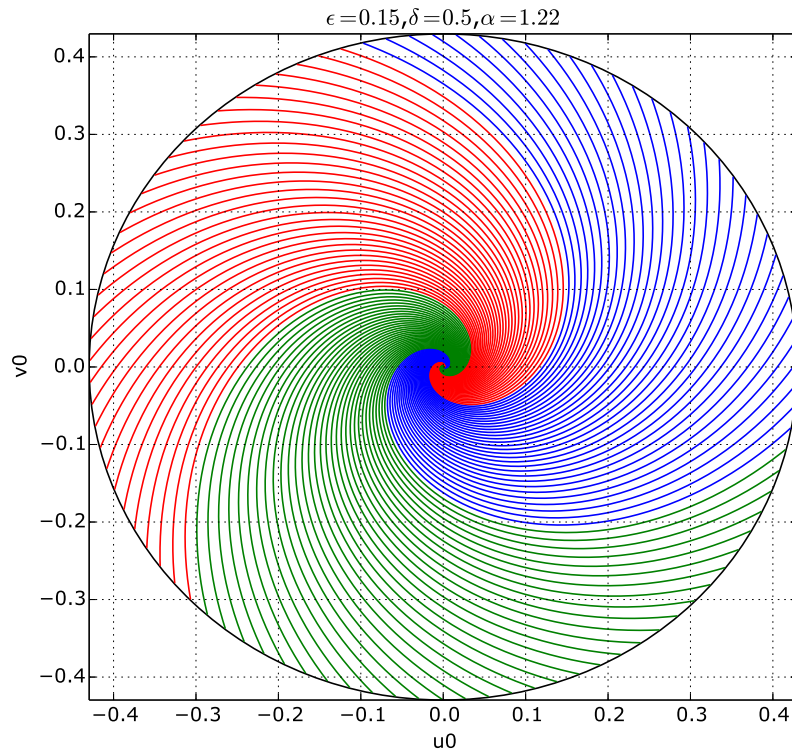
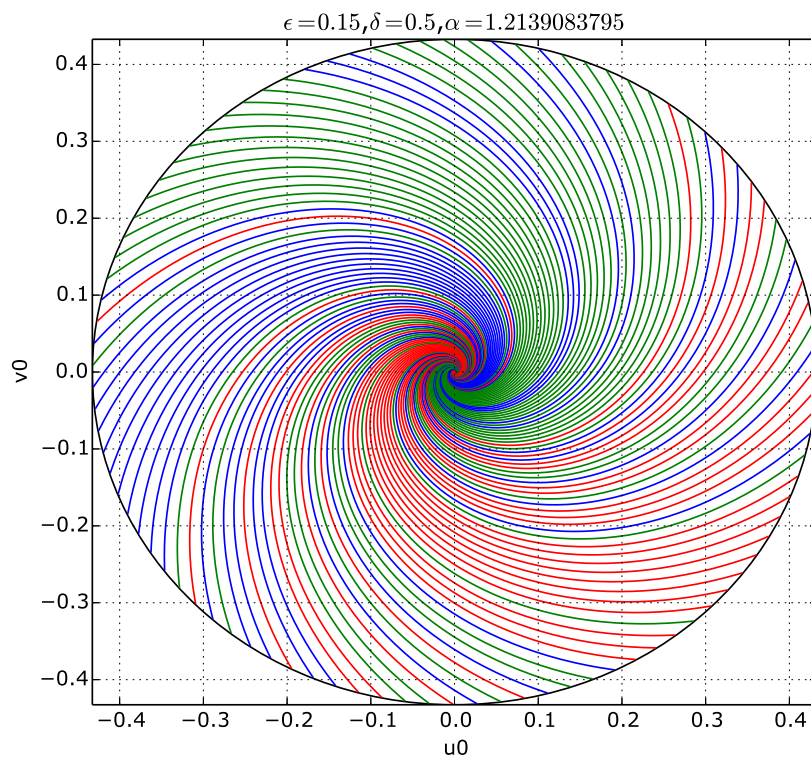


Figura 3.23: Fenómeno de coloración para $\alpha = 1,22$

te color se encuentran formados por heteróclinas entre eq_0 y algún eq_i . Entonces, a medida que se multiplican las regiones rojas, verdes y azules, necesariamente emergen nuevas conexiones entre los eq_0 y los eq_i .

Al mismo tiempo, no hemos podido observar ningún patrón en la aparición y modificación de estas coloraciones.

Figura 3.24: Fenómeno de coloración para $\alpha = 1,2139083795$

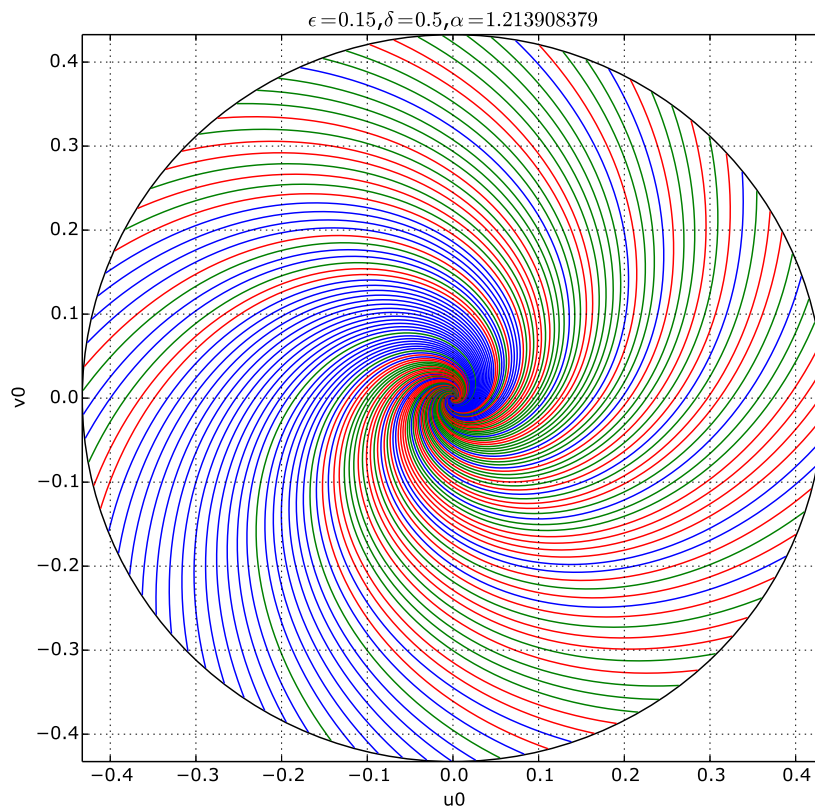
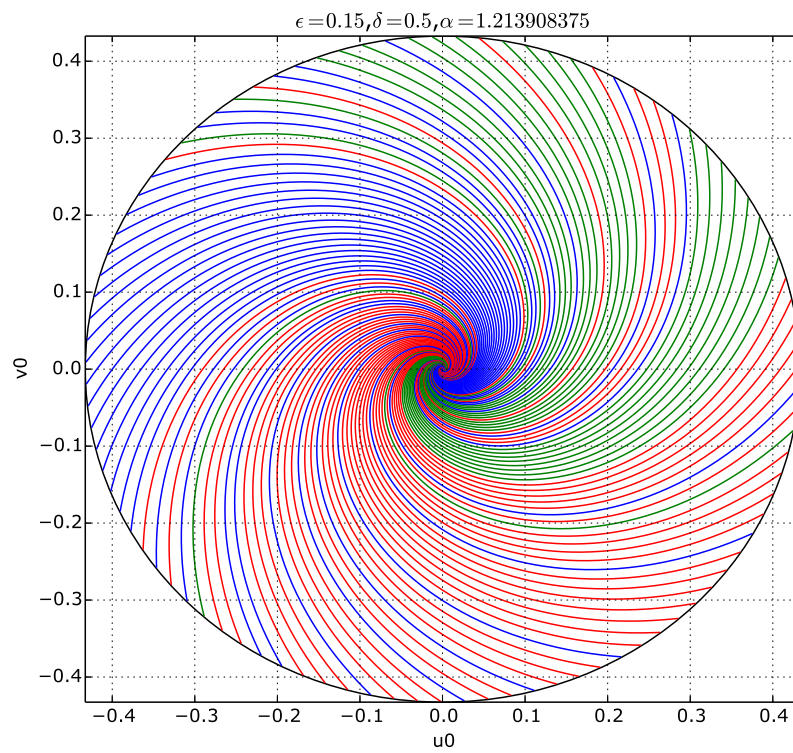


Figura 3.25: Fenómeno de coloración para $\alpha = 1,213908379$

Figura 3.26: Fenómeno de coloración para $\alpha = 1,213908375$

Capítulo 4

Sincronía en redes TLN

La sincronización es uno de los fenómenos más universales de los sistemas no lineales y sus aplicaciones. Desde los estudios pioneros de Huygens en el siglo XVII, el fenómeno de sincronización de un sistema ha resultado de interés para una gran variedad de disciplinas: para la física experimental o teórica [64, 44], para estudiar modelos químicos [73, 49] o biológicos [62], o sistemas informáticos [15] y criptográficos [70].

En particular, la sincronía es un fenómeno que puede ser reconocido y observado fácilmente en una amplia variedad de redes recurrentes de todo tipo: desde aquellas que representan sistemas físicos, como el modelo clásico de Kuramoto exhibido en el capítulo preliminar, hasta aquellos de interés biológicos relacionados con el comportamiento de poblaciones de neuronas [10, 27, 75]. También, el fenómeno de sincronización ha sido reportado en ciertos sistemas no suaves en ejemplos particulares [3, 5].

Cabe aclarar, que en la mayoría de los trabajos, la sincronía suele ser exhibida y analizada meramente a través de simulaciones numéricas. Y aunque también recurriremos al enfoque numérico, en este capítulo estudiaremos el fenómeno de sincronía en las TLN, y basándonos en ciertas características de su construcción, demostraremos algunos resultados que garantizan la sincronía de la red.

En la primera y segunda sección del capítulo damos las definiciones básicas de sincronía de sistemas y mostramos su relación con las simetrías que presenta el sistema y la estabilidad de ciertos ciclos límites; luego estudiamos el fenómeno en ciertos ejemplos concretos.

El resultado principal que presentamos en este capítulo es un teorema que aporta condiciones suficientes para la sincronía de ciertas redes TLN. Su demostración, así como el enunciado de ciertas hipótesis requeridas, se encuentran en las secciones tercera y cuarta.

Finalmente, en la última sección de este capítulo, presentamos un ejemplo de sincronía de TLN en ausencia de simetrías del sistema, y a través de su análisis exhibimos la existencia de otros mecanismos de sincronía distintos a los estudiados hasta ahora.

4.1. Sincronización y simetría

Presentamos las dos definiciones tradicionales de sincronía [3].

Definición 4.1.1. *Dado un sistema $\dot{x} = f(x, t)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, y un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, diremos que las variables x_i y x_j sincronizan en fase sobre \mathcal{C} si existe ρ tal que para cualquier $x(0) \in \mathcal{C}$ vale*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t + \rho) - x_j(t) = 0. \quad (4.1.1)$$

Si el $\rho = 0$, decimos que las variables x_i y x_j sincronizan completamente.

En este capítulo nos restringiremos al fenómeno de la sincronía completa.

Proposición 4.1.2. *Consideremos un sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$, y sean g un automorfismo del sistema y Δ el conjunto de sus puntos fijos. Entonces Δ es un conjunto invariante.*

Demostración. Tomemos $x_0 \in \Delta$ y la solución $x(t)$ tal que $x(0) = x_0$. Tendremos que $g \circ x(s)$ también es solución del sistema y vale que $g \circ x(0) = x_0 = x(0)$. Por principio de superposición $g \circ x = x$. Luego la trayectoria $x(s)$ está contenida en Δ . □

Consideremos nuevamente el TLN combinatorio (3.1.1) expuesto en la sección 3.1 del capítulo anterior, transformado a través de la aplicación (3.2.6):

$$\dot{x} = -x + b + W[x]_+ =: F(x), \quad (4.1.2)$$

donde W es la matriz de conectividad y satisface $W_{ii} = 0$, el input b tiene todas sus componentes iguales y positivas.

Observemos que dos variables del sistema (4.1.2) podrían estar sincronizadas por ser atraídas hacia un punto de equilibrio común. Sin embargo, en este trabajo, estudiaremos la sincronía de soluciones oscilatorias (que corresponden a los distintos ciclos límites que pueden aparecer en el sistema, cf. [53]).

Recordemos que si P es una matriz de permutación tal que $PW = WP$, entonces P es un automorfismo del sistema (4.1.2) (véase 3.1.3). Notaremos con Δ_P el conjunto de sus puntos fijos (que forman un subespacio lineal). Además, como se demostró en 3.1.1 del capítulo anterior, existe un poliedro B invariante del sistema (3.1.1) y a través de la transformación lineal afín (3.2.6) se transforma en un poliedro invariante \mathcal{B} del sistema (4.1.2). De la proposición 4.1.2 sigue inmediatamente el siguiente resultado:

Proposición 4.1.3. *Sea una permutación P que intercambia $x_i \leftrightarrow x_j$. Si $x(0) \in \Delta_P$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i - x_j) = 0$.*

Demostración. Si P intercambia $x_i \leftrightarrow x_j$, tendremos que $\Delta_P \subset \{x_i = x_j\}$. Por la invariancia de Δ_P sigue que $x_i(t) = x_j(t)$. \square

Proposición 4.1.4. *El TLN (4.1.2) es disipativo (el volumen en el espacio de fase se contrae bajo la acción del flujo)*

Demostración. Consideremos un volumen $V(t)$ en el espacio de fase. Por el teorema de la divergencia tendremos

$$\dot{V} = \int_{\partial V} \langle F, \mathbf{n} \rangle dS = \int_V \nabla \cdot F dV. \quad (4.1.3)$$

Para un TLN tendremos

$$\nabla \cdot F = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = -n < 0 \quad (4.1.4)$$

Luego resulta $\dot{V} = -n \cdot V$, de lo que sigue $V(t) = V(0) \exp(-nt)$. \square

Del resultado anterior obtenemos:

Proposición 4.1.5. *El TLN (4.1.2) tiene un atractor \mathcal{A} dentro del conjunto invariante \mathcal{B} .*

De los dos resultados previos sigue:

Proposición 4.1.6. *Consideremos el CTLN (4.1.2) y sea P una permutación del sistema, entonces $\mathcal{A} \cap \Delta_P \neq \emptyset$.*

Demostración. Tenemos que $\Delta_P \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Por la contracción de volumen, resulta que \mathcal{A} es el conjunto límite de \mathcal{B} , y por la invariancia de Δ_P sigue lo deseado. \square

Finalmente tendremos el siguiente resultado:

Proposición 4.1.7. *Si $\mathcal{A} \subset \Delta_P$, entonces dos variables que permutan también sincronizan sobre B .*

Sin embargo no siempre sucede que $\mathcal{A} \subset \Delta_P$. En el capítulo anterior, al estudiar el TLN de tres dimensiones, construimos un sistema en el cual se tiene

$$\mathcal{A} = \{eq_0, eq_1, eq_2, eq_3, eq_{12}, eq_{23}, eq_{31}\}.$$

A su vez el sistema sólo posee dos permutaciones, para las cuales vale $\Delta_P = \{x_1 = x_2 = x_3\}$. Y ocurre que $\mathcal{A} \cap \Delta_P = \{eq_0\}$. De allí un contraejemplo a la conexidad de \mathcal{A} y a su inclusión en Δ_P .

Dado un CTLN con matriz de conectividad W , notemos con S_W al grupo de permutaciones que actúa sobre el sistema. Definimos

$$\Delta_W = \bigcap_{P \in S_W} \Delta_P. \quad (4.1.5)$$

Lema 4.1.8. *Sea $a \in \mathcal{A} \cap \Delta_W$ y supongamos que a no es un equilibrio. Entonces la componente conexa de a en \mathcal{A} está contenida en Δ_W .*

Demostración. Como a está en el atractor, su trayectoria debe ser densa dentro de su componente conexa. Al mismo tiempo, la trayectoria debe estar contenida en Δ_W por la invariancia del conjunto. Como Δ_W es un conjunto cerrado, contiene la clausura de la órbita, que es precisamente la componente conexa de a respecto del atractor \mathcal{A} . \square

Del lema anterior y la proposición (4.1.6), sigue:

Corolario 4.1.9. *Si el atractor es una unión de ciclos límites estables, al menos uno está contenido en Δ_W y hay sincronización dentro de su cuenca de atracción.*

Con todos los resultados anteriores tendremos el siguiente teorema que aporta una primera caracterización de la sincronía en redes TLN:

Teorema 4.1.10. *Consideremos un TLN como (4.1.2), con una órbita periódica Γ y sea \mathcal{C} su cuenca de atracción. Sea P una permutación del sistema que intercambia $x_i \leftrightarrow x_j$. Entonces x_i, x_j sincronizan sobre \mathcal{C} si $\Gamma \cap \Delta_P \neq \emptyset$.*

En virtud del teorema anterior, podemos ver que la sincronización de variables oscilatorias en los TLN resulta equivalente a la conjunción de dos condiciones: una condición dinámica (la atractividad del ciclo límite) y otra geométrica (su intersección con la variedad lineal Δ_P).

Sin embargo, aplicar el corolario (4.1.9) no siempre resulta posible. De hecho la hipótesis de que el atractor sea una unión de ciclos límites no siempre resulta satisfecha: puede ocurrir que el sistema posea equilibrios $x^* \in \mathcal{A} \cap \Delta_W$, tal como lo demuestra la siguiente observación:

Observación 4.1.11. *Si hay un equilibrio x^* en S_0 , entonces $x^* \in \Delta_W$. Deberá valer*

$$x^* = (I - W)^{-1} b. \quad (4.1.6)$$

Puesto que todo elemento de S_W permuta con $(I - W)$ sigue lo observado.

4.2. Ejemplos

En esta sección daremos unos pocos ejemplos de sincronización en redes de tipo CTLN, haciendo hincapié en las que presentan conexión simétrica, que son las que estudiaremos en más detalle en la sección siguiente.

Veamos la Figura 4.1. En el grafo de la izquierda hay sincronía entre los nodos pintados del mismo color. Notemos que tales nodos son simétricos, y las conexiones entre ellos no son simétricas. En el grafo derecho, podemos observar tres clases distintas de sincronía: la de los nodos (2,3,4), la de los nodos (5,6,7), y la de (9,10). Notemos que aquí hay conexión simétrica entre nodos que sincronizan, tanto en el caso en que la conexión es fuerte (clases (2,3,4) y (9,10)) como en el caso en que es débil (clase (5,6,7)). Véase la Figura 4.2, donde los puntos iniciales son escogidos de manera aleatoria.

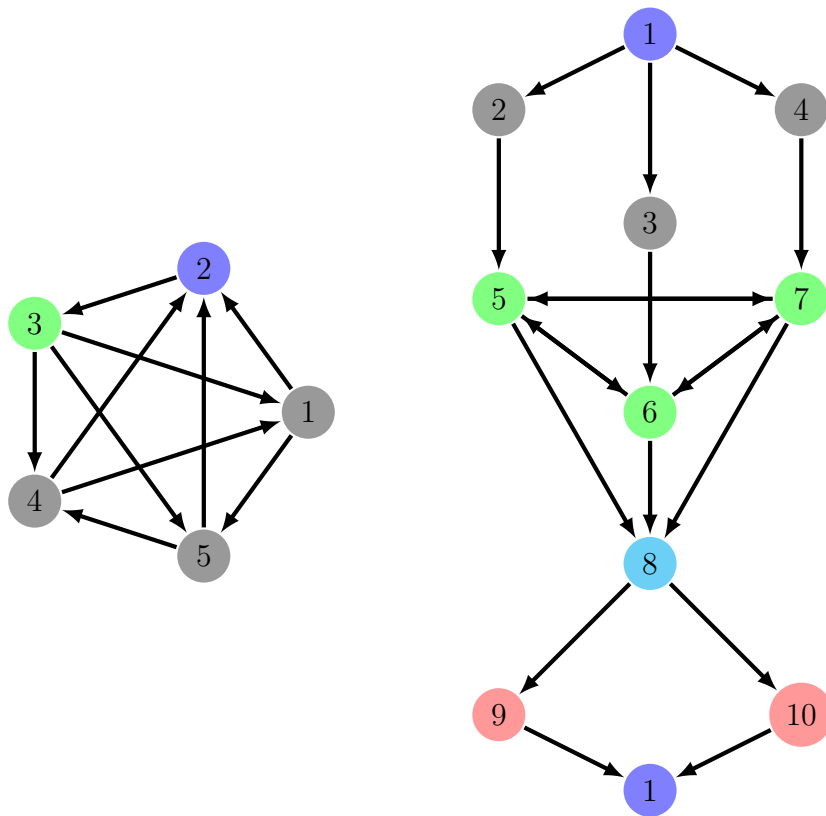


Figura 4.1: Los vértices del mismo color significan que sincronizan. Puede observarse cómo la clase de sincronía y la de simetría coinciden. En el grafo de la derecha, la etiqueta repetida del nodo 1 significa que fue dibujado dos veces, con el fin de una mejor representación gráfica.

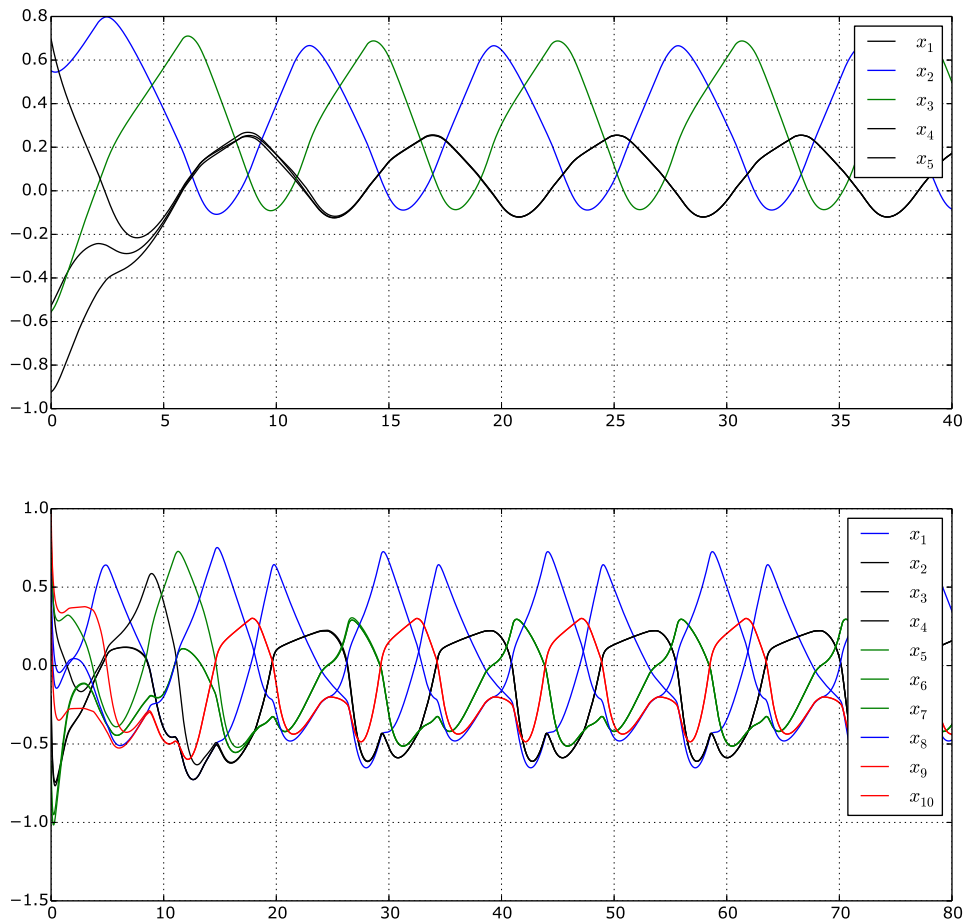


Figura 4.2: Gráfica de la actividad de la red en el espacio (t, x) , el eje horizontal representa la actividad de la variable $x_i(t)$. En la figura superior se observa la sincronía entre las variables x_1 , x_2 y x_3 . En la segunda figura puede apreciarse la presencia de varias clases de sincronía. Las simulaciones fueron realizadas con $\epsilon = 0,25$, $\delta = 0,5$.

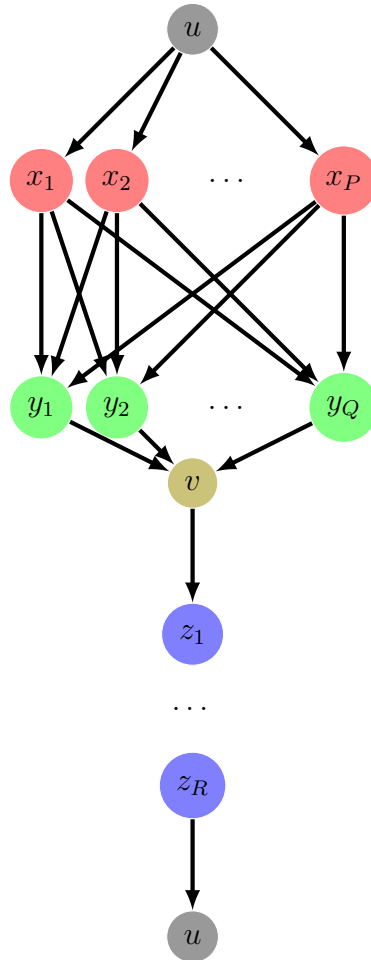


Figura 4.3: Representación esquemática del grafo (P,Q,R) . Nuevamente, con el fin de una mejor representación gráfica se ha dibujado dos veces el nodo u .

Ahora veamos el siguiente ejemplo, construido de manera adecuada a fin de obtener grafos con más de una clase de simetría y que tales clases involucren una cantidad mayor de nodos (véase la Figura 4.3).

Tenemos varias capas de nodos: una primera capa compuesta por el nodo u , conectado con todos los nodos de la capa siguiente, llamada $X = \{x_p\}$. A su vez cada nodo x_p de la segunda capa está conectado con cada nodo de y_q de la tercera capa (llamada $Y = \{y_q\}$). Y finalmente cada nodo de la tercera capa está conectado a un único nodo v . Finalmente el nodo v inicia el camino

$$v \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_R \rightarrow u$$

Obtenemos así un grafo que estará determinado por la terna (P, Q, R) , donde P

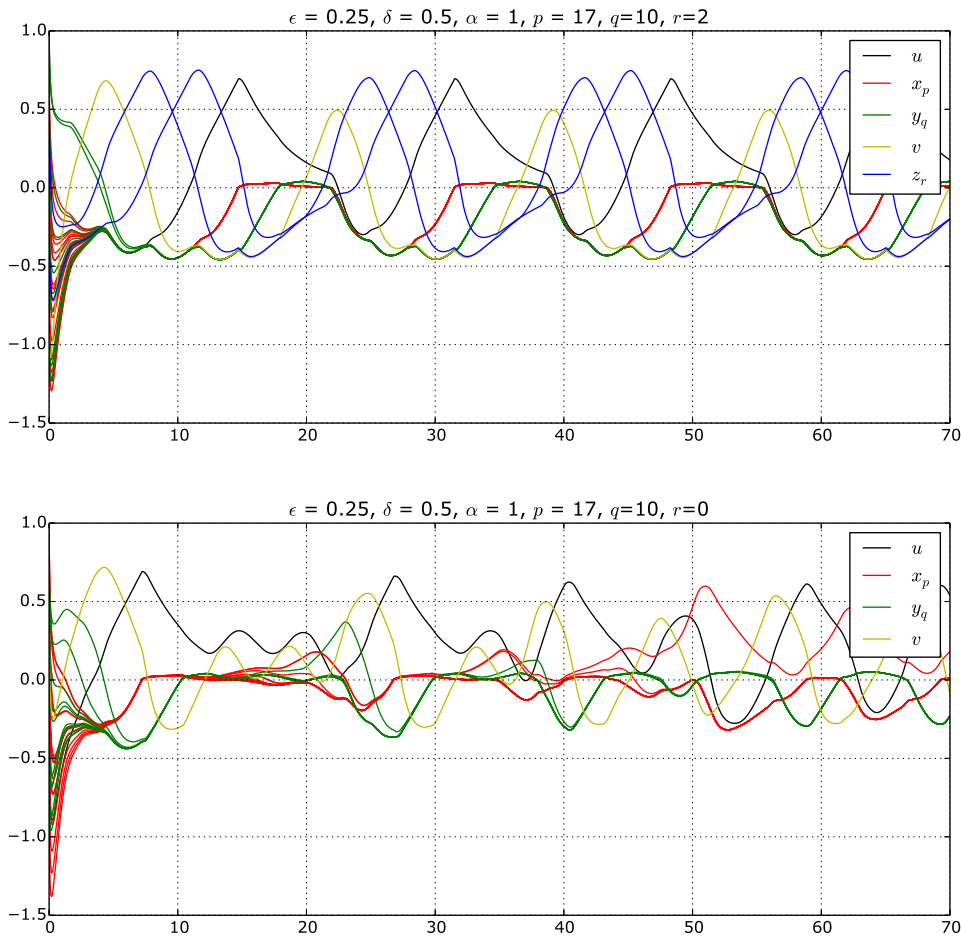


Figura 4.4: En la primera figura se observa la sincronía de las clases de simetría x_p y las y_q . En la segunda se observa que las variables y_q siguen sincronizando todas con todas, pero dentro de la clase de simetría de las x_p no todas sincronizan.

es la cantidad de nodos de tipo x_p , Q la cantidad de nodos y_q y R la cantidad de nodos z_r . Observemos que es un grafo con dos clases de simetría: la correspondiente a la capa de X y la de Y , y no hay ni sumideros ni fuentes. Notemos que las conexiones entre dos nodos que permutan son simétricas y débiles (según la clasificación de conexiones dadas en la sección 3.1 del capítulo anterior). En la figura 4.4 pueden observarse dos ejemplos de sincronía, allí podemos ver dos casos: uno donde ocurre sincronía dentro de las distintas clases de simetría y otro donde la sincronía no tiene lugar dentro de la clase X .

4.3. Redes con conexión simétrica

En esta sección plantearemos un sistema de ecuaciones que nos permitirá estudiar la sincronía de variables x_i cuando se cumplan ciertas hipótesis.

Asumamos que tenemos un ciclo límite atractivo en un TLN (4.1.2) con cuenca de atracción \mathcal{C} , y consideremos dos variables x_i, x_j que permutan. Supondremos además que $x(t_0) \in \mathcal{C}$, y también que el *input* b satisface que $b_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces tendremos

$$\dot{x}_i = -x_i + 1 + W_{ij} [x_j]_+ + f_i^j(x_{k \neq i,j}) \quad (4.3.1)$$

Donde $f_i^j(x) =: \sum_{k \neq i,j} W_{ik} [x_k]_+$ es una función que tiende a una periódica (pues hay un ciclo límite) y es no positiva (notemos que cada término es menor o igual que 0).

Supondremos además que la conexión entre las variables es simétrica (como en el último ejemplo de la sección anterior), es decir, se verifica que $W_{ik} = W_{jk}$ para $k \neq i, j$. Entonces resultará que las colas de las ecuaciones (4.3.1) son iguales. Es decir $f_i^j = f_j^i$.

Observación 4.3.1. *Supongamos que tenemos un sistema autónomo de dos dimensiones*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Entonces, si consideramos el sistema no autónomo

$$\begin{cases} \dot{v} = g(x(t), v) \\ v(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

tendremos que $y(t) = v(t)$. Esto se generaliza de manera inmediata a sistemas de mayor dimensión.

Escribamos $\tilde{f}(t) := -f_i^j(t)$ y consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + W_{ij} [y]_+ + 1 - \tilde{f}(t) \\ \dot{y} = -y + W_{ji} [x]_+ + 1 - \tilde{f}(t). \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Entonces en vistas de la observación 4.3.1, tomando idénticas condiciones iniciales tendremos que $x_i(t) = x(t)$ y $x_j(t) = y(t)$.

Observación 4.3.2. *Si hay un ciclo límite estable, dada una trayectoria $x(t)$ del sistema, cualquier cola (de la variable que sea) convergerá a una función periódica. Llamaremos $f(t)$ a la función periódica a la cual tiende $\tilde{f}(t) = f_i^j(x(t))$.*

En vista de lo anterior, resulta natural estudiar la sincronía del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - a [y]_+ + 1 - f(t) \\ \dot{y} = -y - a [x]_+ + 1 - f(t). \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Donde f es una función periódica no negativa, y $a = W_{ij} > 0$. Observemos que tal sistema es un TLN forzado y el conjunto $\Delta = \{x = y\}$ es invariante. Y tanto en el sistema (4.3.5) como en el sistema (4.3.4), la sincronía de las variables x, y resulta equivalente a que el conjunto límite de $(x(t), y(t))$ esté contenido en Δ .

4.3.1. Análisis asintótico.

En esta sección daremos condiciones suficientes para que la sincronía de las variables del sistema (4.3.5) garantice la sincronía del sistema (4.3.4).

Llamemos X a las soluciones del sistema anterior (4.3.5). Supongamos además que tal sistema tiene un ciclo límite $\Gamma(t)$ asintóticamente estable y contenido en el conjunto Δ . De manera que $\Gamma = (\gamma, \gamma)$. Definamos $u = X - \Gamma$. Tendremos que:

$$\dot{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + a \underbrace{\begin{pmatrix} [\gamma]_+ - [u_2 + \gamma]_+ \\ [\gamma]_+ - [u_1 + \gamma]_+ \end{pmatrix}}_{r(u,t)} \quad (4.3.6)$$

Observación 4.3.3. *Como Γ es un conjunto asintóticamente estable, tendremos que el punto $u = 0$ será un equilibrio asintóticamente estable del sistema (4.3.6).*

Consideremos ahora el sistema (4.3.4) y llamemos $b(t) = f(t) - \tilde{f}(t)$. Entonces al sistema anterior lo podremos escribir como

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - a[y]_+ + 1 - f(t) + b(t) \\ \dot{y} = -y - a[x]_+ + 1 - f(t) + b(t). \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Llamemos Y a las soluciones de dicho sistema. Y definamos $v = Y - \Gamma$. Tendremos el siguiente sistema:

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} [\gamma]_+ - [v_2 + \gamma]_+ \\ [\gamma]_+ - [v_1 + \gamma]_+ \end{pmatrix} + b(t) \quad (4.3.8)$$

Llamemos $V(t)$ a las soluciones del sistema $\dot{v} = Av$. Entonces utilizando la fórmula de variación de las constantes tendremos que:

$$v(t) = \underbrace{V(t) \left(V^{-1}(\tau)v(\tau) + \int_{\tau}^t V^{-1}(s)r(v(s), s)ds \right)}_{\text{solución de (4.3.6)}} + V(t) \int_{\tau}^t V^{-1}(s)b(s)ds \quad (4.3.9)$$

Los dos primeros términos son solución de (4.3.6), por lo que tienden a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.

Trabajando sobre el tercer término tenemos que el punto $v = 0$, aún sin ser un equilibrio, es un punto asintóticamente estable, porque $b(t) \rightarrow 0$. Observamos también que:

$$V(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad (4.3.10)$$

Ahora consideremos la aplicación

$$\begin{cases} \pi_{i,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \pi_{i,j}(x_1, \dots, x_n) = (x_i, x_j). \end{cases} \quad (4.3.11)$$

Finalmente podemos enunciar el principal resultado de este capítulo:

Teorema 4.3.4. *Sea la órbita Γ de (4.3.5) asintóticamente estable con base de atracción \mathcal{D} y supongamos que vale*

$$\lim_{t \rightarrow 0} V(t) \int_{\tau}^t V^{-1}(s)b(s)ds = 0, \quad (4.3.12)$$

entonces hay sincronía completa en el sistema (4.3.7) sobre el conjunto $\mathcal{C} \cap \pi_{i,j}^{-1}(\mathcal{D})$.

Demostración. Si $x_0 \in \mathcal{C}$ tendremos que $b(t) \rightarrow 0$ y además, si $\pi_{i,j}(x_0) \in \mathcal{D}$ entonces la trayectoria de (4.3.5) que comienza en x_0 es atraída por $\Gamma(t)$. Con las hipótesis mencionadas y el sistema (4.3.5) tenemos que las órbitas de (4.3.7) convergen a un conjunto asintóticamente estable contenido en Δ . \square

En consecuencia, para ver la sincronía del sistema (4.3.7) alcanzará con analizar dos cuestiones:

1. ver la existencia y estabilidad asintótica de la órbita $\Gamma(t)$,
2. verificar la condición (4.3.12).

El primero de los items, lo veremos en la sección siguiente. Ahora deduciremos una condición suficiente para el segundo item.

Recordemos que escribimos $b(t) = \tilde{f}(t) - f(t)$, donde

$$\tilde{f}(t) = f_i^j(x(t)) = \sum_{k \neq i,j} W_{ik} [x_k(t)]_+ \quad (4.3.13)$$

siendo $x(t)$ una trayectoria del sistema original. Por otro lado, si tenemos un ciclo límite $\gamma(t)$ tendremos

$$f(t) = f_i^j(\gamma(t)) = \sum_{k \neq i,j} W_{ik} [\gamma_k(t)]_+. \quad (4.3.14)$$

Utilizando la relación

$$|[a]_+ - [b]_+| \leq |a - b| \quad (4.3.15)$$

tendremos que

$$|b(t)| = |\tilde{f}(t) - f(t)| \leq n \max\{|W_{ij}|\} \|x(t) - \gamma(t)\|. \quad (4.3.16)$$

Por lo que para verificar la validez de la expresión (4.3.12) será suficiente probar que $\|x(t) - \gamma(t)\| \sim \mathcal{O}(e^{-t})$.

Observación 4.3.5. *La dificultad de corroborar lo anterior de modo numérico reside en el hecho de que si $\gamma(t)$ es una solución periódica del sistema, también lo será $\gamma(t +$*

k) para k real. Entonces, para obtener una simulación adecuada deberemos acertar con la parametrización correcta del ciclo $\gamma(t)$, de manera que $x(t) - \gamma(t) \rightarrow 0$.

Sin embargo, teniendo en cuenta que una solución $x(t)$ es exponencial a trozos, resulta natural asumir que la convergencia al atractor deba ser de orden exponencial.

4.4. Existencia y estabilidad de ciclos límites

Ahora estudiaremos la existencia y estabilidad asintótica del ciclo límite $\Gamma(t)$ del sistema (4.3.5). Primero demostraremos la existencia en general del ciclo para el sistema, y luego, para estudiar la estabilidad distinguiremos dos casos según a sea mayor o menor que 1 (que corresponde a los casos en que la conexión es fuerte o débil, tal como antes hemos comentado).

4.4.1. Existencia del ciclo

En esa sección demostramos el siguiente resultado:

Teorema 4.4.1. *Consideremos el sistema (4.3.5), con $a > 0$. Entonces hay un ciclo límite incluido en Δ .*

Demostración. Observemos que restringido al conjunto invariante Δ el sistema se torna unidimensional:

$$\dot{x} = -x - a[x]_+ + \underbrace{1 - f(t)}_{g(t)}. \quad (4.4.1)$$

Podemos ver también que el sistema es contractivo sobre la recta, es decir, la distancia entre dos soluciones cualesquiera tiende a 0. En efecto, si $x_0 > y_0$ entonces $x(t) > y(t)$ para todo t , caso contrario deberá existir t^* tal que $x(t^*) = y(t^*)$ lo cual es absurdo por unicidad de la solución. Luego tendremos que $[x] - [y] > 0$, y en consecuencia:

$$\dot{x} - \dot{y} = -(x - y) - a([x]_+ - [y]_+) < 0. \quad (4.4.2)$$

Así, la distancia $|x(t) - y(t)| = x(t) - y(t)$ es decreciente y tiende a 0.

Notemos además que si $x(t)$ es solución, también lo será $x(t + 2\pi)$, y por contractividad del flujo tendremos que $x(t) - x(t + 2\pi) \rightarrow 0$. En particular, si existe t_0 tal que $x(t_0) = x(t_0 + 2\pi)$ es inmediato que $x(t) = x(t + 2\pi)$ y la función es periódica.

Escribamos como $x(t_0, x_0, t)$ la solución de (4.4.1) con condiciones iniciales en (t_0, x_0) . Entonces podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{cases} \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi(r) = x(0, r, 2\pi). \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Es inmediata la continuidad de la aplicación ϕ por continuidad de la solución del sistema respecto de los datos iniciales, además por las observaciones anteriores sabemos que es contractiva. Luego posee un punto fijo r^* . Así resulta que $x(0, r^*, 0) = r^* = \phi(r^*) = x(0, r^*, 2\pi)$ y la solución $x(0, r^*, t)$ es periódica. \square

4.4.2. Estabilidad del ciclo

Ahora expondremos algunas consideraciones sobre la estabilidad del ciclo del sistema (4.3.5), cuya existencia fue demostrada en la sección anterior. Para describir los mecanismos de estabilidad recurriremos al análisis de la dinámica de ciertos puntos, que se comportan de manera similar a los *saddles* y nodos del campo $\dot{x} = f(x, t_0)$ donde t_0 es un valor fijo (coloquialmente diremos que el sistema está *congelado* en el instante t_0). En las simulaciones realizadas para ilustrar estos resultados, se consideró el input periódico $f(t) = [\sin(t)]_+$.

Como señalamos arriba, distinguiremos dos casos (correspondiente al caso de conexión débil o fuerte).

Caso de conexión fuerte $a > 1$

Tomemos $a > 1$, que corresponderá al caso en que los nodos x_i y x_j sean variables conectadas de manera fuerte (el caso $W_{ij} = W_{ji} = -1 - \delta$).

Para cada $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existen tres puntos P_t , C_t^+ y C_t^- tales que el campo (4.3.5) es nulo en el instante t . Sea $H(\cdot)$ la función de Heaviside.

Tendremos que $P_t = (p_t, p_t) \in \Delta$ donde

$$p_t = \begin{cases} \frac{1 - f(t)}{1 + a} & \text{si } f(t) \leq 1 \\ 1 - f(t) & \text{si } f(t) > 1. \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Por otro lado, tendremos que

$$\begin{aligned} C_t^+ &= (1 - f(t), (1 - a)(1 - f(t))) \\ C_t^- &= ((1 - a)(1 - f(t)), 1 - f(t)). \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Donde el jacobiano del campo en cualquier punto $P = (x, y)$ es

$$J(P) = \begin{pmatrix} -1 & -aH(y) \\ -aH(x) & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.4.6)$$

y sus autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1(x, y) &= -1 + aH(x)H(y) \\ \lambda_2(x, y) &= -1 - aH(x)H(y). \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Observación 4.4.2. Como $P_t \in \Delta$ tendremos que $v = (1, 1)$ es un autovector con autovalor λ_2 , que siempre es negativo. Además el punto P_t se comporta como un “saddle” del sistema congelado.

Los puntos C^+ y C^- son “nodos estables” del sistema congelado (es inmediato ver que tienen a -1 como autovalor doble). Y sólo existen cuando $f(t) < 1$. Para $f(t) = 1$ son nulos, coincidiendo con P_t y continúan coincidiendo mientras $f(t) > 1$.

Al mismo tiempo, la dinámica del sistema no autónomo (4.3.5), se encuentra regida por el recorrido de P_t , lo que da origen a ciclos a partir del siguiente mecanismo:

denotemos con S^+ al cuadrante positivo (es decir, el cuadrante donde todas las coordenadas de los puntos son positivas), y con S^- a la unión de los restantes. Tomemos un punto P_0 . Mientras $f(t) < 1$ tendremos que $P_t \in S^+$, y además existirán los C_t^\pm , y la trayectoria del punto se verá atraída hacia alguno de ellos. A medida que $f(t) \rightarrow 1$ el punto continuará acercándose a los C_t^\pm , pero al mismo tiempo tales “equilibrios” se acercarán cada vez más al conjunto Δ . Finalmente cuando $f(t) \geq 1$, tendremos que los puntos C_t^\pm desaparecen colisionando con $P_t \in S^-$, y desde ese instante el punto se torna atractivo, por lo cual la trayectoria se acercará a $P_t \in \Delta$. Cuando finalmente vuelva a ocurrir que $f(t) < 1$ y tenga lugar la aparición nuevamente de los puntos C_t^\pm , la trayectoria volverá a acercarse a algún C_t^\pm y se repetirá el proceso.

Entonces tendremos dos posibilidades: la primera es que $f(t) > 1$ durante suficiente tiempo y la trayectoria caerá cada vez más cerca de Δ a medida que el proceso descrito anteriormente se repite. Así el ciclo contenido en tal conjunto resulta estable. La segunda posibilidad es que el tiempo en que $f(t) > 1$ no alcance para compensar el acercamiento de la trayectoria a los puntos C_t^\pm , dando como resultado la aparición de dos ciclos estables, simétricos entre si y distintos al que está contenido en Δ .

Observación 4.4.3. *Supongamos el caso en que $f(t) = cg(t)$, donde $c > 1$ y g es una función periódica, positiva y con máximo igual a 1. Notemos que cuanto mayor sea $c > 1$ tendremos que f “pasa más tiempo” siendo mayor que 1. Por lo que el punto P_t está en la parte atractiva de Δ durante más tiempo. Por ello, cuanto mayor sea c también lo será la velocidad de sincronización.*

El siguiente resultado es conjeturado a partir de distintas simulaciones numéricas realizadas con el sistema (4.3.5) para distintos valores de los parámetros (véase la figura 4.5):

Conjetura 4.4.4. *Consideremos el sistema (4.3.5) con $a > 1$, $f(t) = cg(t)$ donde $c > 0$ y g es periódica, positiva y su máximo vale 1. Entonces existe $c^*(a)$ tal que para cada $c > c^*$ hay sincronía (numéricamente obtenemos que $c^* > a$).*

Observación 4.4.5. *A través de las simulaciones numéricas observamos que para valores $c < c^*$ el ciclo contenido en Δ es inestable y hay dos ciclos estables (simétricos). Al acercarse c al valor crítico c^* tales ciclos se “achatan” y se acercan cada vez más al conjunto Δ . En $c = c^*$ tales ciclos colisionan y dando como resultado la estabilidad del ciclo contenido en Δ , que es el único que permanece para valores $c \geq c^*$. Concluimos entonces que en esta situación, la sincronía tiene lugar a través de una bifurcación, determinada por la colisión de los dos ciclos simétricos (véase la figura 4.6) y el cambio de estabilidad del ciclo contenido en Δ .*

Caso de conexión débil $a < 1$

Observemos que si $a < 1$, los resultados demostrados en la sección (4.4.1) siguen valiendo. Además los puntos C_t^\pm no existen, y el punto P_t resulta atractivo en todo

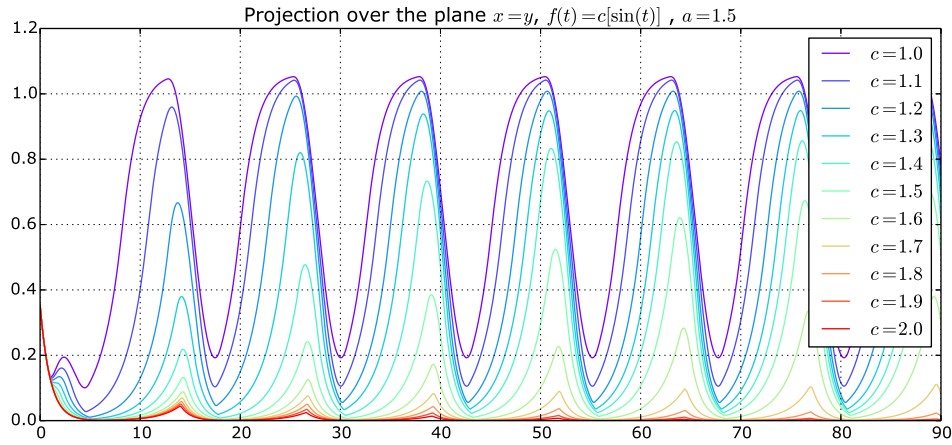


Figura 4.5: Ejemplo de la conjetura 4.4.4 con $f(t) = c[\sin(t)]_+$. En la gráfica el eje vertical corresponde a la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\{x, y\}$, el eje horizontal es el tiempo. Vemos cómo las soluciones decaen hacia el plano a medida que el valor de c crece.

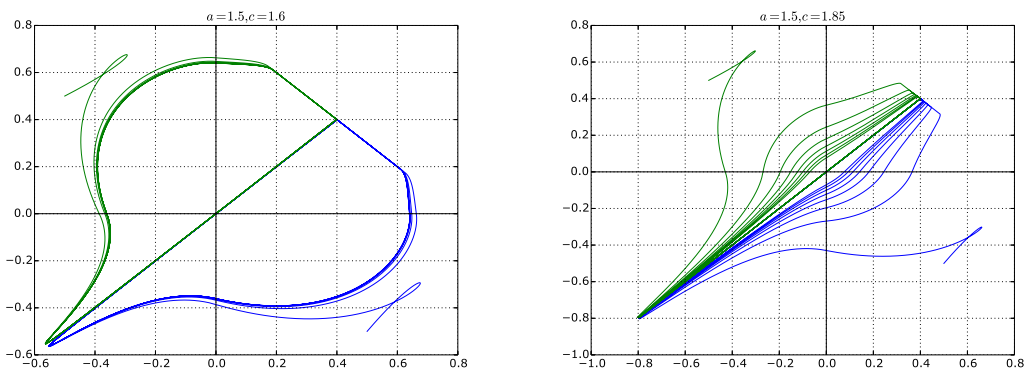


Figura 4.6: Observamos la aparición/desaparición de ciclos ($f(t) = c[\sin(t)]_+$)

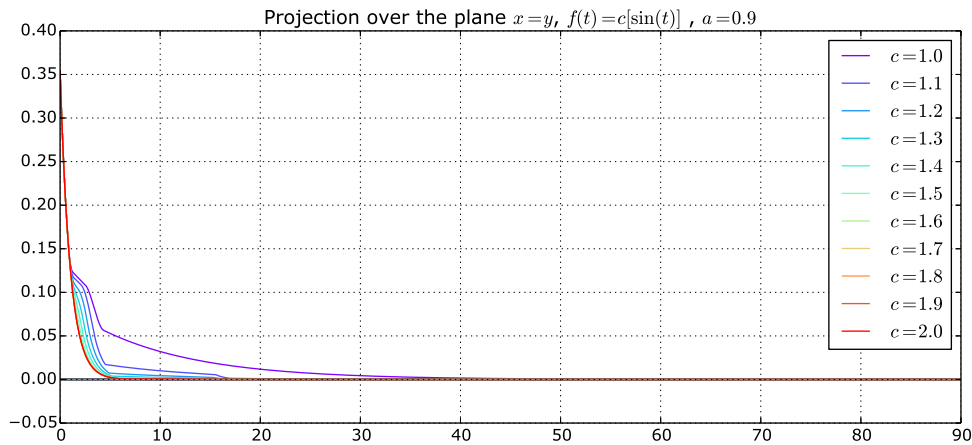


Figura 4.7: Podemos ver que la convergencia al ciclo contenido en Δ es inmediata.

instante. Así, al moverse de manera periódica, da origen al comportamiento oscilatorio del campo. Luego resulta que hay sincronía, independientemente del valor de c . Véase figura 4.7.

4.5. Sincronía sin simetría

En las secciones previas estudiamos la emergencia de sincronía debido a las simetrías del sistema (determinadas a su vez por las simetrías del grafo que describe la arquitectura de la red). En tales casos, la *clase de sincronía*¹ de un nodo se encuentra incluida en su clase de simetría.

Sin embargo, la simetría de un grafo no agota todos los posibles mecanismos a través de los cuales la sincronía puede ocurrir. En el siguiente ejemplo, véase la Figura 4.8, podemos observar dos nodos (nodos 6 y 7) que claramente no son simétricos. Sin embargo en las simulaciones vemos que hay una sincronía robusta entre ambos nodos y se mantiene para un amplio rango de los parámetros ϵ y δ , véase la figura 4.9.

En este ejemplo podemos observar que la sincronización de las variables x_6 y x_7 significa que el conjunto límite del sistema está contenido en el hiperplano $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^7 : x_6 = x_7\}$ (señalemos que el hiperplano no es un conjunto invariante del sistema). Haciendo el cambio de variables $u = (x_6 + x_7)/\sqrt{2}$ y $v = (x_6 - x_7)/\sqrt{2}$ (v es la variable en la dirección normal al hiperplano Δ) obtenemos:

¹Es decir, el conjunto de los nodos que sincronizan con uno dado.

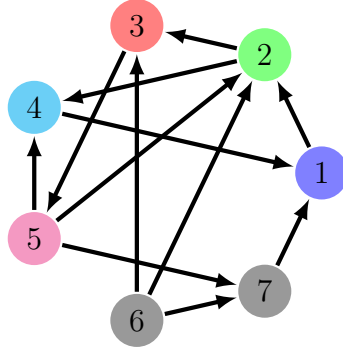


Figura 4.8: Red en la cual los nodos 6 y 7 son claramente no simétricos.

$$\dot{v} = -v - \frac{(\epsilon + \delta)}{\sqrt{2}}[x_5]_+ - \frac{(1 + \delta)}{2}[u - v]_+ + \frac{(1 - \epsilon)}{2}[u + v]_+. \quad (4.5.1)$$

Podemos ver que cerca del hiperplano el campo apunta hacia el hiperplano, convergiendo al conjunto límite contenido en él. Primero, supongamos que $v_0 > 0$, entonces los primeros tres términos de (4.5.1) son negativos. El último término podría ser positivo, pero la función

$$f(u, v) = -v - \frac{(1 + \delta)}{2}[u - v]_+ + \frac{(1 - \epsilon)}{2}[u + v]_+, \quad (4.5.2)$$

es negativa para el rango de parámetros determinados por el poliedro invariante \mathcal{B} (véase la sección 3.1, y la Figura 4.10). Un razonamiento análogo puede hacerse para $v_0 < 0$, entonces x_6 y x_7 resultan sincronizados.

Por último, señalemos que para detectar si la sincronía observada en la dinámica corresponde a una simetría del sistema, no disponemos de otro modo más que el análisis exhaustivo del grafo a fin de obtener las clases de simetría, para luego compararlas con las de sincronía.

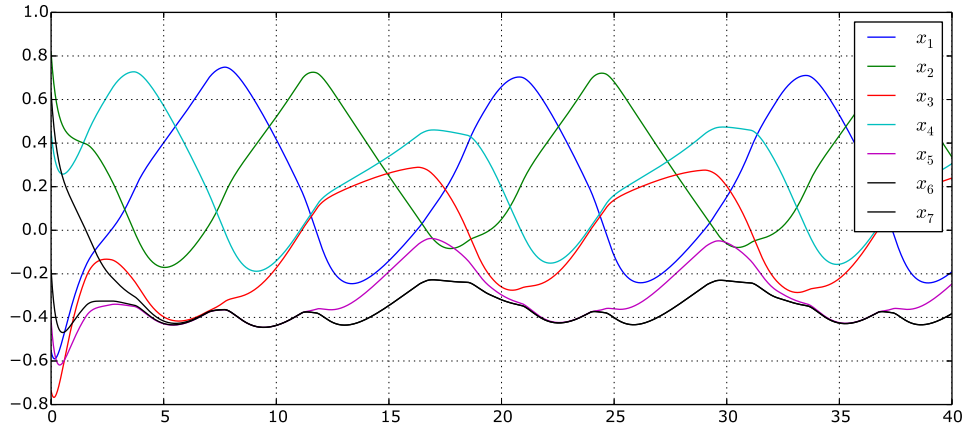


Figura 4.9: Actividad del CTLN asociado al grafo 4.8, en el espacio $(t, x_i(t))$. En color negro observamos la sincronía entre las variables correspondientes a los nodos 6 y 7.

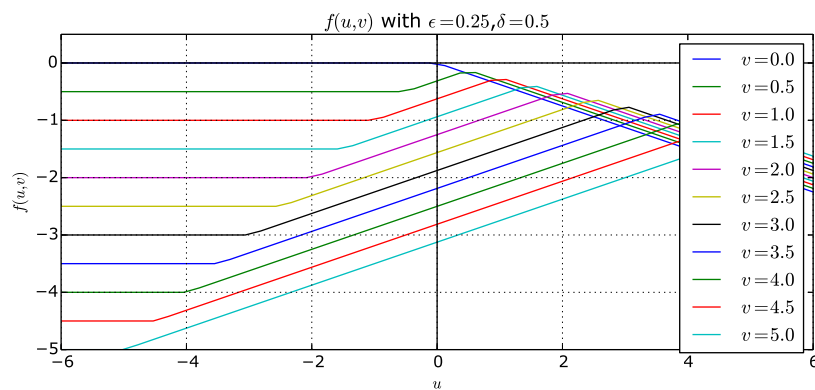


Figura 4.10: En la figura podemos observar como la función $f(u, v)$ es negativa dentro del rango de las variables u y v determinados por el poliedro invariante \mathcal{B} .

Capítulo 5

Caos en sistemas no suaves

En este capítulo presentaremos algunos tópicos sobre dinámica caótica de sistemas no suaves. Aunque el tema es de interés propio, esta exposición será realizada con el objetivo principal de introducir técnicas y ejemplos a los que recurriremos en el capítulo 6. El lector interesado en el estudio sistemático de la dinámica caótica de sistemas no suaves, puede consultar Di Bernardo [22] o Kunze [43].

Haremos hincapié en algunos ejemplos de sistemas híbridos y de impacto que presentan comportamiento caótico y sobre todo, expondremos dos métodos, ya bien establecidos en la literatura, útiles para calcular el exponente maximal de Lyapunov en estos casos. Para la fundamentación rigurosa de la teoría de Lyapunov, remitiremos luego al lector a la bibliografía específica correspondiente.

En la primera sección daremos algunos ejemplos de sistemas híbridos caóticos. En la segunda haremos un breve comentario sobre la teoría de Lyapunov para sistemas no suaves. La tercera sección la dedicaremos al método de Stefansky para estimar el coeficiente maximal de Lyapunov y comentaremos su aplicación numérica a un ejemplo. Finalmente en la cuarta sección, explicaremos brevemente el formalismo de la matriz de salto (*saltation matrix*), exhibiremos su cálculo y lo aplicaremos concretamente al estudio de un oscilador con dinámica discontinua.

5.1. Sistemas no suaves caóticos

Mientras que en el caso *suave*, hay una teoría que aporta criterios (por ejemplo, los dados por Devaney [35]) para definir rigurosamente que se entiende por dinámica

caótica, hay una ausencia de criterios generales para sistemas no suaves como los expuestos en la sección 2.2.

Sin embargo, es posible encontrar en varios de estos sistemas discontinuos comportamientos similares a los presentes en los clásicos sistemas caóticos suaves: cascadas de doble período, mapas de retorno caóticos, la posibilidad de definir algún tipo de mapa ergódico o la presencia de atractores extraños. Y es a partir de la detección de alguno de estos fenómenos que un sistema no suave resulta clasificado como *caótico*. Es decir, una dinámica no suave caótica será aquella que presente similitudes, en algún aspecto cualitativo, con la dinámica de algún sistema caótico suave.

Sin embargo, tal definición tiene la limitación de ser puramente fenomenológica: suele ocurrir que un comportamiento común a un sistema suave y otro no-suave son producidos por mecanismos completamente distintos, por lo que la mera comparación de esos dos tipos de sistemas a menudo poco aporta al estudio de su dinámica. De allí la necesidad de una teoría específica de sistemas dinámicos para el caso no suave, y en particular, para aquellos que presenten dinámica caótica. Distintos intentos de sistematizaciones para responder a esta necesidad pueden hallarse en Awrejcewicz [4], Simpson [65], Di Bernardo [22], Kunze [43], destacándose esta última por presentar una exposición teórica más completa y no tan enfocada en ejemplos numéricos.

A continuación exponemos algunos sistemas no suaves caóticos.

5.1.1. Ejemplos

Oscilador de impacto forzado

Consideremos el oscilador de impacto ya mencionado en la sección 2.2.2:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \mu\dot{x} + \omega^2x = \cos(\omega_f t) \\ x(t^-) = \sigma \Rightarrow -r\dot{x}(t^+) = \dot{x}(t^-). \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Recordemos que el coeficiente de recuperación satisface $0 < r < 1$, μ es la fricción del sistema, ω su frecuencia y $\cos(\omega_f t)$ el forzamiento externo.

Como podemos ver en la figura 5.1, el oscilador de impacto presenta una cascada de doble período variando la frecuencia $\frac{\omega_f}{2\pi}$ del forzamiento, exhibiendo dos ventanas

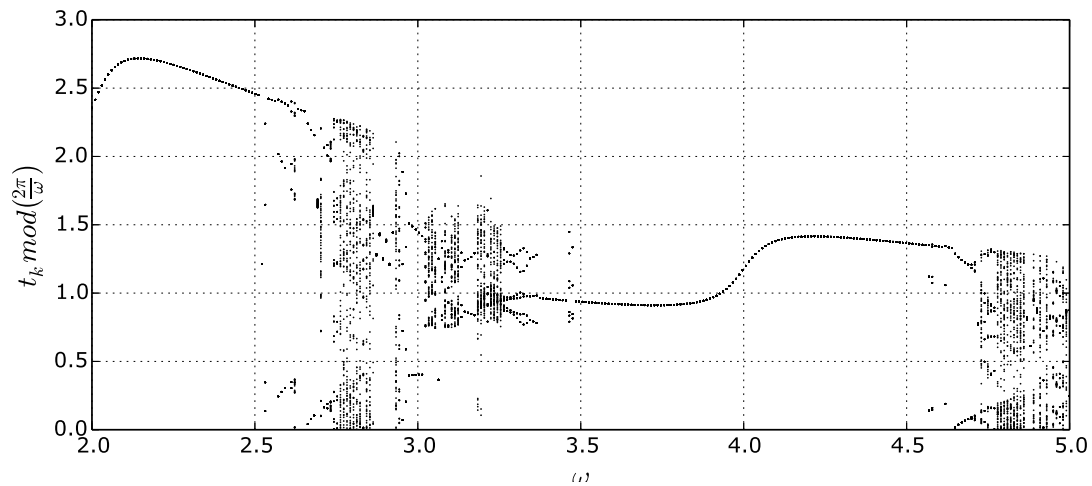


Figura 5.1: Cascada de doble período del oscilador de impacto forzado (parámetros: $r = 0,8$, $\sigma = 0$, $\mu = 0$, $\omega = 1$ y $\omega_f \in [2, 5]$).

caóticas para el intervalo $\omega \in (2,5; 3,5)$ y otro que comienza en $\omega = 4,5$. Además dentro de cada uno de estos intervalos, la descripción gráfica de la aparición de nuevos períodos guarda cierta similitud con el clásico mapa logístico (cf. capítulo 10 de Strogatz [70]). Similares resultados se obtienen variando el coeficiente de restitución r o la frecuencia del oscilador ω .

La presencia de este tipo de ruta al caos para este oscilador híbrido se halla sistemáticamente estudiada en [58, 57].

Sistema lineal a trozos

Consideremos el siguiente sistema lineal a trozos introducido en la sección 2.2.1 (que a su vez, es una modificación propia de uno de los sistemas presentes en el capítulo 3 de Di Bernardo [22]). El sistema está dado por las ecuaciones (2.2.2), donde las matrices A_1 y A_2 son las siguientes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -0,57 & 0 & 1 \\ -0,09 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0,1 & 10 & \beta \\ -0,2 & 0 & 1 \\ -60 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y $M = (0, 0, -0,05)$, siendo $\beta \in \mathbb{R}$.

Como podemos ver en la figura 5.2, para distintos valores de β se alternan la aparición de ciclos límites con distintos períodos y atractores extraños. Como ve-

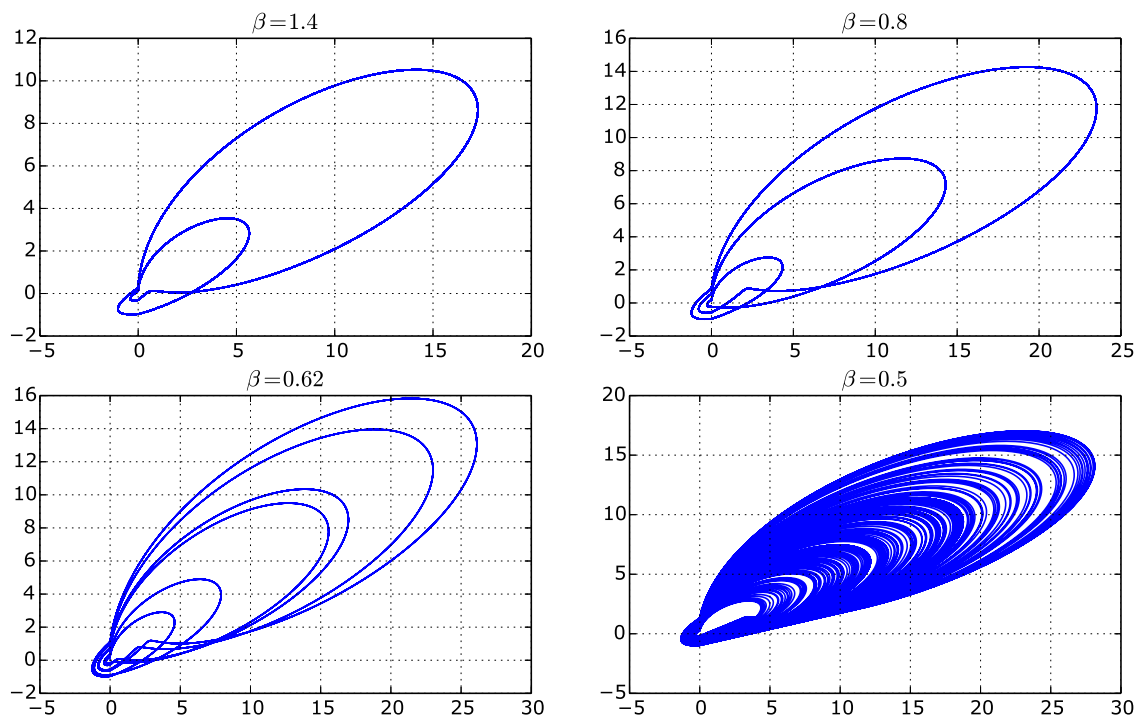


Figura 5.2: Proyección sobre el plano $x_1 - x_3$ de órbitas del sistema lineal a trozos para distintos valores de β . Podemos ver cómo a medida que variamos tal parámetro ocurre la aparición de nuevos períodos.

remos en la próxima sección, aquí también ocurre el escenario de cascada de doble período como ruta al caos, y a través de la estimación del coeficiente maximal de Lyapunov podremos garantizar el comportamiento caótico de este sistema.

Modelo PWL-IF

Consideremos el siguiente sistema híbrido denominado *piecewise linear integrate and fire model* (PWL-IF) estudiado por Stephen Coombes en [16, 18], en el contexto de caricaturas planas *piecewise* de modelos neuronales y su dinámica de *spike* (véase [40]): sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, y consideremos

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_1 \mathbf{x} + \mu & \text{si } x_1 > 0 \\ \dot{\mathbf{x}} = A_2 \mathbf{x} + \mu & \text{si } x_1 \leq 0 \\ x_1^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{x}^+ = (v_R, x_2^- + k). \end{cases} \quad (5.1.2)$$

donde v_R, v_{th}, k son constantes reales, y

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega\beta & -\omega \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -s & -1 \\ \omega\beta & -\omega \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1.3)$$

Como ha sido reportado en [16, 18, 56], el sistema anterior presenta una gran variedad de órbitas periódicas estables de distintos valores de los parámetros. Y para ciertos valores, pueden observarse atractores extraños, indicando la presencia de comportamientos caóticos, véase la figura 5.3.

Observemos que este sistema, si bien es híbrido, posee una regla de reseteo distinta a la del oscilador de impacto. Mientras en el sistema (5.1.1) el reseteo se da a lo largo de una misma variedad, en el sistema PWL-IF, hay dos variedades involucradas en el *reset* de la dinámica: una variedad umbral v_{th} (o variedad de impacto, o variedad de *threshold*), y una variedad de reseteo v_R . Además de los parámetros de las matrices del sistema (5.1.2), la distancia entre estas dos variedades juega un rol importante en la aparición/desaparición de órbitas caóticas como la exhibida en la figura 5.3.

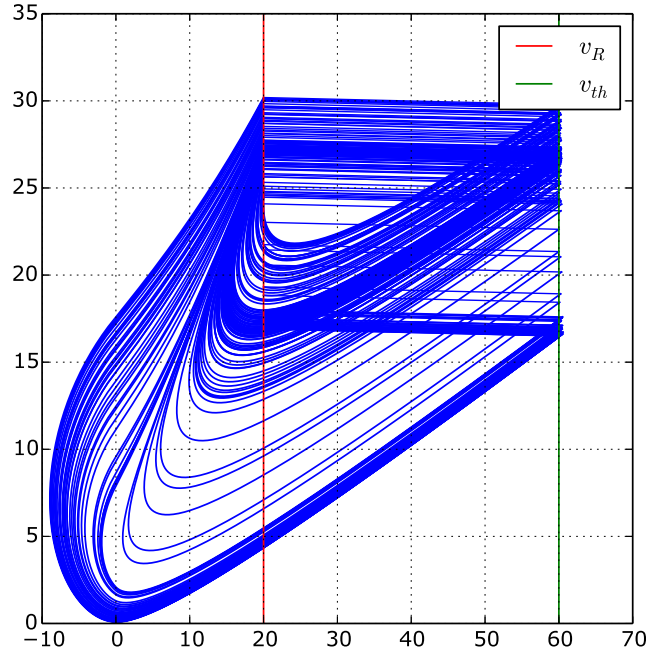


Figura 5.3: Órbita caótica asociada al sistema (5.1.2) (parámetros: $\beta = 0,9$, $\omega = 0,4$, $s = 0,35$, $k = 0,4$, $I = 4$, $v_R = 20$ y $v_{th} = 60$).

Oscilador de Nakano-Saito

Consideremos el siguiente oscilador híbrido desarrollado en [55] por Nakano y Saito:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ x_1^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{x}^+ = R\mathbf{x}^- + I, \end{cases} \quad (5.1.4)$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ -1 & \rho \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} v_R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este oscilador estudiado en el contexto de redes de circuitos con dinámica *Integrate-and-Fire*, tiene la particularidad de exhibir ventanas de oscilaciones de *bursting* a lo largo de su evolución (véase [40]), tal como puede apreciarse en la figura 5.4. Además, como fue demostrado en [55] (a través del estudio de su mapa de retorno y ciertos teoremas ergódicos), el sistema presenta comportamiento caótico robusto para un cierto rango del parámetro $0 < \rho$. Una órbita caótica y el mapa de retorno

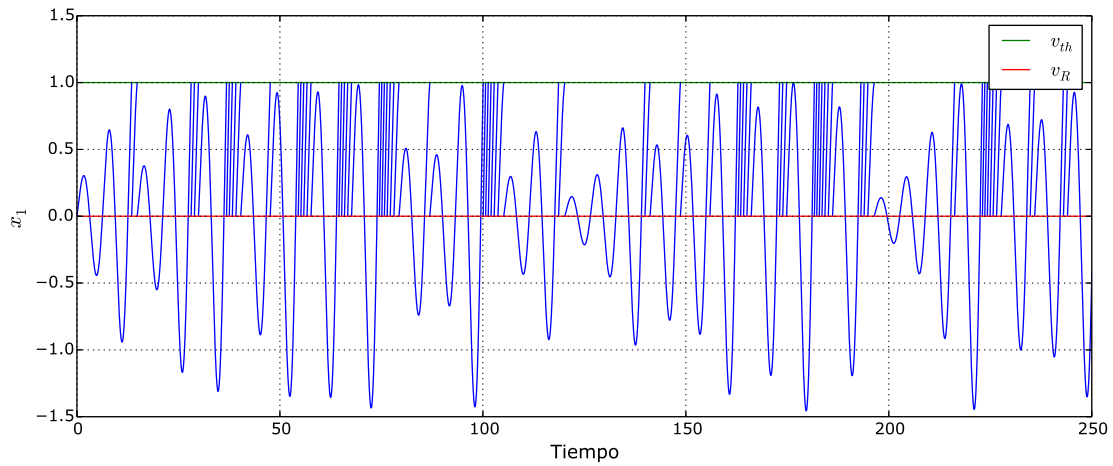


Figura 5.4: Régimen de *bursting* correspondiente a la variable x_1 del oscilador caótico de Nakano-Saito (parámetros: $\rho = 0,125$, $b = 0,1$, $v_{th} = 1$, $v_R = 0$).

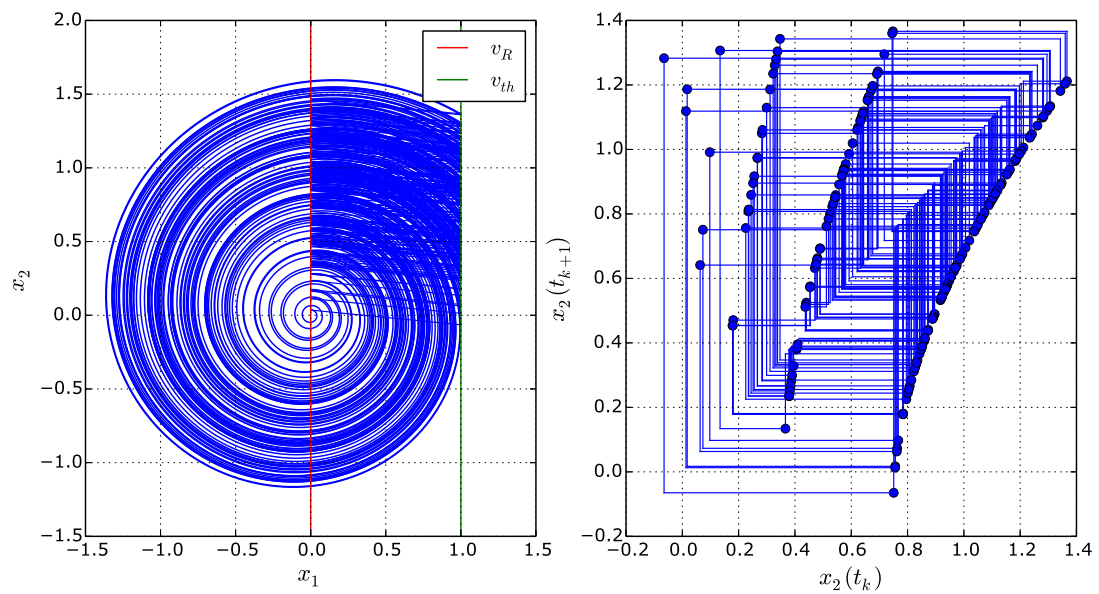


Figura 5.5: Atractor del oscilador caótico de Nakano-Saito y su mapa de retorno (parámetros: $\rho = 0,1$, $b = 0,1$, $v_{th} = 1$, $v_R = 0$).

del sistema (5.1.4) puede verse en la figura 5.5.

5.2. Teoría de Lyapunov

La estimación de los exponentes de Lyapunov es uno de los principales objetivos del estudio de los sistemas dinámicos. Si bien fueron introducidos para sistemas suaves $\dot{x} = f(x)$ por Lyapunov en 1892 en su tesis doctoral [48], la fundamentación rigurosa de este enfoque recién ocurre a mediados del siglo XX gracias al trabajo de Oseledec [59]. Así mismo, el desarrollo de algoritmos numéricos para la estimación de los exponentes comienza a principios de 1980 debido a Wolf [76] y Benettin [7].

Recién a mediados de la década de 1990 comienza a extenderse esta teoría para el caso de sistemas no suaves, principalmente debido a los trabajos de Müller [54], Hinrichs [32, 58] y más tardíamente, Stefanski [68, 69]¹. En estos trabajos resultan propuestos algunos métodos para estimar los exponentes de Lyapunov, aunque debemos señalar que varios de los formalismos desarrollados sólo se aplican a cierta clase de sistemas no suaves o resultan numéricamente viables únicamente para ciertos casos.

En todos estos enfoques, los exponentes de Lyapunov de un sistema siguen siendo interpretados como una medida del radio de divergencia de dos trayectorias vecinas en un cierto espacio de fase, y al igual que el caso suave, toma centralidad el problema de estimar el exponente maximal de Lyapunov $\lambda_{\text{máx}}$. Así mismo se considera la condición $\lambda_{\text{máx}} > 0$ como indicador de un comportamiento caótico del sistema. Sin embargo, la cuestión de su buena definición, la construcción de un sistema ortonormal y el planteo de una ecuación variacional adecuada, requiere un enfoque distinto en el caso no suave. Para una exposición específica y rigurosa de la extensión de la teoría de Lyapunov al caso no suave, remitimos al lector a Kunze [43].

En la siguiente sección expondremos y ejemplificaremos dos de los principales enfoques presentes en la literatura.

¹Aunque a primera vista pareciera que la extensión al caso no suave de la teoría de Lyapunov es de interés tardío, debemos recordar que el estudio formal de los sistemas discontinuos comienza con la obra de Filippov [24] a fines de 1960, aunque ya había estudios pioneros de Andronov, Czech y su escuela. Por otra parte, el redescubrimiento de la academia occidental de estos trabajos recién ocurre a principios de 1980.

5.3. Método de Stefanski

Este método, caracterizado por su sencillez, resulta bastante práctico al implementarlo numéricamente. Fue originalmente desarrollado por Stefanski en [68] y posteriormente mejorado en [69] y permite dar una estimación del exponente maximal de Lyapunov de un sistema no suave utilizando la sincronía de sistemas caóticos. A su vez, este enfoque se encuentra motivado en un trabajo teórico de Fujisaka y Yamada [28]. Ellos encontraron una dependencia lineal entre el valor de sincronía del coeficiente de acoplamiento de dos osciladores idénticos y el exponente maximal de Lyapunov de los sistemas acoplados.

5.3.1. Caso suave

Consideremos dos sistemas suaves n -dimensionales e idénticos acoplados de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) - \frac{\sigma}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} = F(\mathbf{y}) - \frac{\sigma}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Tomamos la variable $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, entonces derivando F y tomando el desarrollo de Taylor de primer orden podremos escribir:

$$\dot{\mathbf{z}} = DF(\mathbf{x}(t))\mathbf{z} - \sigma\mathbf{z} + \mathcal{O}(\|\mathbf{z}\|^2). \quad (5.3.2)$$

Conservando la parte lineal de la expresión anterior obtenemos la ecuación variacional de primer orden:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = DF(t)\boldsymbol{\xi} - \sigma\mathbb{I}_n\boldsymbol{\xi}. \quad (5.3.3)$$

Sin embargo observemos que el primer término de la expresión anterior resulta ser la ecuación variacional de primer orden del sistema $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$. Luego la norma de ese término la podremos acotar mediante el uso del exponente maximal de Lyapunov $\lambda_{\text{máx}}$:

$$\begin{aligned} \left\| \exp \left(\int_{t_0}^t (DF(s) - \sigma\mathbb{I}_n) ds \right) \right\| &= \left\| \exp \left(\int_{t_0}^t DF(s) ds \right) \exp(-\sigma(t - t_0)) \right\| \\ &\leq \exp((\lambda_{\text{máx}} - \sigma)(t - t_0)). \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Luego, en base a la expresión anterior tendremos que $\xi \rightarrow 0$ siempre que se verifique $\sigma > \lambda_{\text{máx}}$.

De esta manera, si para un σ_0 obtenemos que $\xi \not\rightarrow 0$, podremos afirmar $\sigma_0 \leq \lambda_{\text{máx}}$. Con lo cual resulta posible estimar (con mayor o menor precisión dependiendo el caso) cotas inferiores para valores de $\lambda_{\text{máx}}$.

Este enfoque, cuya exposición la tomamos de [6], fue desarrollado por Fujisaka y Yamada en [28] en condiciones más generales, y aplicado al oscilador caótico de Lorenz.

5.3.2. El caso no suave

Dado un sistema no suave $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$, la propuesta de Stefanski es rescatar el enfoque anterior y utilizar la sincronía del sistema acoplado (5.3.1) a fin de dar una estimación inferior σ_c del exponente $\lambda_{\text{máx}}$.

La dificultad surge del hecho de que en general, en sistemas no suaves (los sistemas híbridos por ejemplo), no resulta posible derivar el flujo del sistema a lo largo de una trayectoria, o sólo resulta posible durante ciertos intervalos de tiempo, por lo que la formulación de la ecuación variacional no resulta sencilla.

En [68, 69] Stefanski demuestra que el método anterior acota adecuadamente $\lambda_{\text{máx}}$ aún en el caso no suave. Mediante la construcción de un sistema de coordenadas adecuado, Stefanski prueba la validez del método sin necesidad de derivar, aunque debe recurrir a un análisis geométrico bastante intrincado del elemento de volumen en el espacio de fase,

Por otro lado, en [6] puede hallarse una formulación más precisa y realizada recurriendo a la teoría de inclusiones diferenciales. Allí utilizando cierta derivada de Radón, los autores logran formular una ecuación variacional como (5.3.3), a través de una adecuada distribución de $\frac{d\mathbf{x}}{d\mu}$ que permite salvar las discontinuidades presentes en las trayectorias no suaves del sistema.

Finalmente en los artículos mencionados, se ilustra el método a través de su aplicación al oscilador de Duffing con impacto.

Como ilustración del método, en la figura 5.6 puede observarse una estimación del coeficiente $\lambda_{\text{máx}}$ en función del parámetro β para el sistema lineal a trozos mencionado en la sección 5.1.1. Aunque en este sistema particular, el error espúreo en

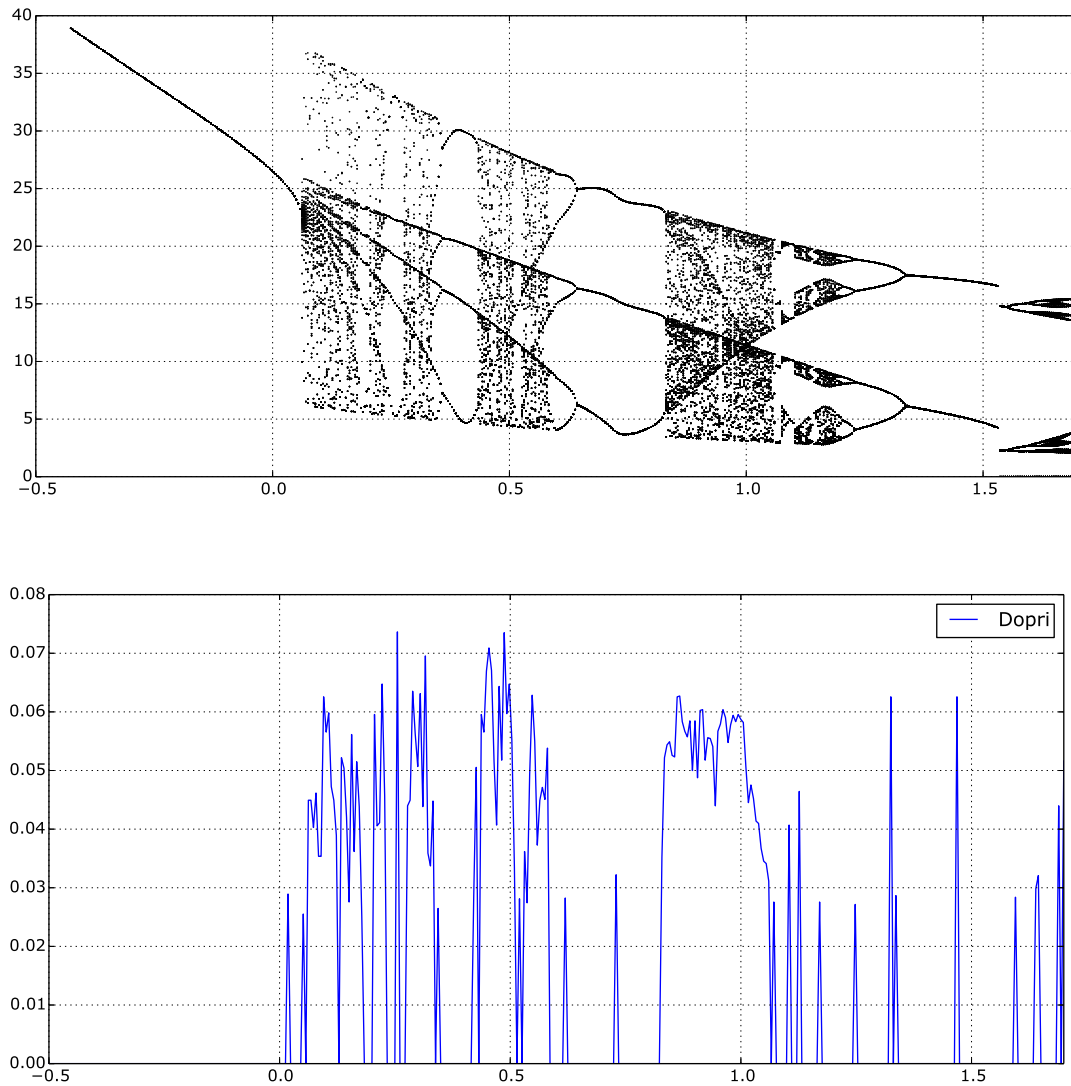


Figura 5.6: En la figura superior podemos ver la cascada de períodos del sistema lineal a trozos 5.1.1 y compararla con la estimación de su coeficiente λ_{\max} en función del parámetro β (figura inferior). La simulación se realizó utilizando el paquete de integración Dopri.

algunas zonas es elevado, podemos ver una buena estimación del coeficiente $\lambda_{\text{máx}}$ para la ventana caótica en torno del valor $\beta = 1$, o en las que se encuentran en el intervalo $\beta \in (0,05; 0,5)$.

5.4. La matriz de salto

Este método se aplica en general a sistemas híbridos y fue originalmente propuesto por Müller en [54], aunque posteriormente se redescubrieron resultados previos obtenidos por Shilnikov en la década de 1950 [17]. Una buena exposición, y es la que aquí seguimos, puede hallarse en la sección 2.5 del libro de Di Bernardo [22].

Consideremos un sistema híbrido. Y supongamos que hay dos regiones $S_{1,2}$, delimitadas por la variedad de *switch* $\Sigma = \{h(\mathbf{x}) = 0\}$ con $h \in \mathcal{C}^1$, y además el flujo $\phi_{1,2}$ de cada una está determinado por el sistema $\dot{\mathbf{x}} = F_{1,2}(\mathbf{x})$. Asumamos que el sistema cruza Σ pasando de la región S_1 a S_2 , y que al cortar la variedad las trayectorias sufren un reseto dado por $\mathbf{x} \rightarrow R(\mathbf{x})$.

Tomemos entonces $\mathbf{x}_0 \in S_1$, y supongamos que la trayectoria $\mathbf{x}(t) = \phi_1(\mathbf{x}_0, t)$ corta de manera transversal la variedad Σ en el instante t_1 , es decir $\mathbf{x}(t_1) \in \Sigma$ y $F_1(\mathbf{x}(t_1)) \cdot h_x(\mathbf{x}(t_1)) \neq 0$, donde $h_x = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$.

Consideramos ahora una perturbación $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, donde $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0$, que corta la variedad Σ de manera transversal en un tiempo $\tilde{t}_1 > t_1$ (un argumento similar se utiliza cuando $\tilde{t}_1 < t_1$). Entonces tendremos que la ecuación variacional de $\delta\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ será

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = DF_1(\mathbf{x}(t))\delta\mathbf{x} \quad (5.4.1)$$

mientras $t < t_1$. Es decir que

$$\delta\mathbf{x}(t) = \mathcal{F}_1(t - t_0)\delta\mathbf{x}_0, \quad t < t_1, \quad (5.4.2)$$

donde escribimos $\mathcal{F}_1(t - t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t DF_1(\mathbf{x}(s))ds\right)$. A partir de ese momento la variación $\delta\mathbf{x}$ sufrirá una *discontinuidad* debido al salto de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$. Tal como se expone rigurosamente en [22], esa discontinuidad se podrá corregir a través de la *matriz de salto* (*saltation matrix*) $\mathcal{Q}(t_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de manera que

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = F_2(\mathbf{x}(t))\mathcal{Q}(t_1)\delta\mathbf{x}(t_1), \quad t > t_1. \quad (5.4.3)$$

Entonces, definiendo \mathcal{F}_2 de manera similar a \mathcal{F}_1 , podremos escribir

$$\delta \mathbf{x}(t) = \mathcal{F}_2(t - t_1) \mathcal{Q}(t_1) \mathcal{F}_1(t_1 - t_0) \delta \mathbf{x}_0 \quad \text{para } t_1 < t < t_2, \quad (5.4.4)$$

siendo t_2 el instante donde $\mathbf{x}(t)$ corta nuevamente alguna variedad de *switch*.

Supongamos ahora que la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ recorre sucesivas regiones S_i , donde el flujo está dado por $\dot{\mathbf{x}} = F_i$, y escapa de la región atravesando transversalmente variedades de *switch* Σ_i en los instantes t_i , es decir $\mathbf{x}(t_i) \in \Sigma_i$. Entonces, escribiendo

$$\mathcal{F}_i(t - t_k) = \exp \left(\int_{t_k}^t DF_i(\mathbf{x}(s)) ds \right)$$

podremos expresar la variación del siguiente modo

$$\delta \mathbf{x}(t) = \mathcal{F}_i(t - t_{i-1}) \mathcal{Q}(t_{i-1}) \dots \mathcal{F}_2(t_2 - t_1) \mathcal{Q}(t_1) \mathcal{F}_1(t_1 - t_0) \delta \mathbf{x}_0, \quad (5.4.5)$$

para $t_{i-1} < t < t_i$. Y así sucesivamente.

Las matrices $\mathcal{Q}(t_i)$ se denominan *matrices de salto correspondientes a las variedades* Σ_i .

En [22] se da la siguiente fórmula explícita: para una trayectoria que pasa de la región S_i a S_j en el instante t_* atravesando transversalmente la variedad $\Sigma = \{h(\mathbf{x}) = 0\}$, cortándola en el punto $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}(t_*)$ y experimentando un reseteo R , la matriz de salto está dada por la siguiente expresión

$$\mathcal{Q}(t_*) = R_x(\mathbf{x}_*) + \frac{(F_j(R(\mathbf{x}_*)) - R_x(\mathbf{x}_*)F_i(\mathbf{x}_*)) h_x(\mathbf{x}_*)}{h_x(\mathbf{x}_*)F_i(\mathbf{x}_*)}. \quad (5.4.6)$$

Notemos que la hipótesis de corte transversal de la variedad Σ se utiliza para garantizar que el denominador de la expresión anterior no sea nulo.

Finalmente, podremos recurrir a la fórmula (5.4.6), para estimar el exponente maximal de Lyapunov mediante la estimación del siguiente límite (ver [54]):

$$\lambda_{\text{máx}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log \left(\frac{\|\delta \mathbf{x}(t_k)\|}{\|\delta \mathbf{x}_0\|} \right). \quad (5.4.7)$$

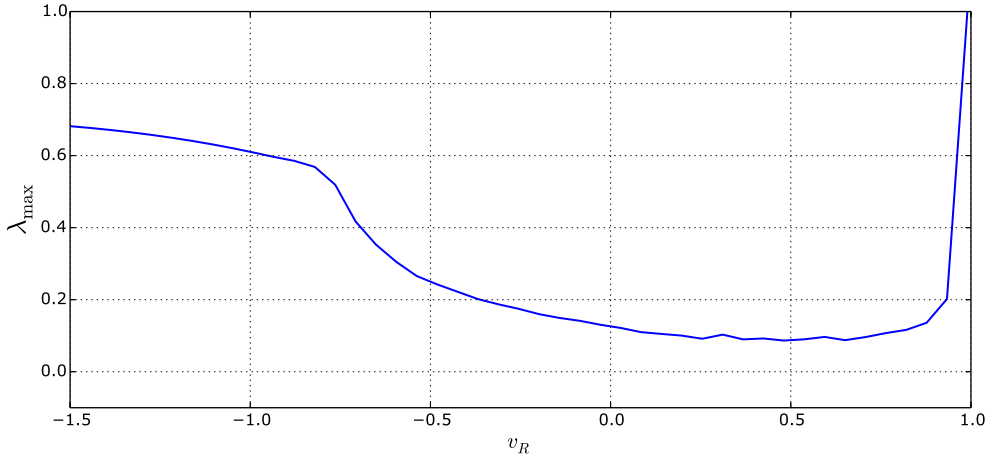


Figura 5.7: Exponente $\lambda_{\text{máx}}$ en función del parámetro de reseteo v_R . El punto de inflexión a la izquierda del gráfico se debe comienzo de un comportamiento de *bursting* constante a partir de $v_R \approx -0,8$. El salto abrupto en el extremo derecho, es debido a la cercanía al valor crítico $v_R = v_{th}$ para el cual el sistema deja de estar definido. Parámetros: $\rho = 0,07$, $b = 0$, $v_{th} = 1$. El cociente (5.4.7) se estimó tomando hasta $k = 200$ y $\delta_0 = 10^{-8}$.

5.4.1. Oscilador de Nakano-Saito

Aplicando el desarrollo anterior para el caso del oscilador caótico de Nakano-Saito (ya introducido en (5.1.4)) y recurriendo a la fórmula (5.4.6), obtenemos la siguiente expresión para la *saltation matrix* de tal sistema:

$$\mathcal{Q}(t_k) = \begin{pmatrix} -\frac{\rho v_R + y_k + b}{\rho v_{th} + y_k} & 0 \\ -\frac{v_{th} - v_R + \rho b}{\rho v_{th} + y_k} & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.4.8)$$

donde $y_k := x_2(t_k^-)$.

En la figura 5.7 puede observarse la estimación de $\lambda_{\text{máx}}$ utilizando la matriz de salto (5.4.8) para v_R variable.

Señalemos por último que el cálculo numérico de $\lambda_{\text{máx}}$ a través del método de la matriz de salto resulta mucho más “estable” y preciso que utilizando el método de Stefanski, aunque su programación resulte mucho más sofisticada.

Retomaremos este sistema y el método de la matriz de salto en el próximo capítulo al considerar redes de osciladores híbridos acoplados.

Capítulo 6

La MSF y aplicaciones

En este capítulo haremos uso de una poderosa herramienta para el estudio de sincronía de redes de osciladores, conocida como *función maestra de estabilidad* (*Master Stability Function, MSF*), introducida por Pecora y Carroll en [60, 61]. En esos trabajos el problema de la sincronía es reducido a uno de estabilidad de atractores (similar a lo realizado la sección 4.3). Posteriormente esta herramienta fue generalizada para nuevos tipos de redes y osciladores [11, 17, 56], convirtiéndose en una herramienta estándar para el análisis numérico de la sincronía.

En la primera sección exponemos los elementos básicos necesarios para definir la MSF. En la segunda sección discutimos brevemente los principales desarrollos de la MSF realizados en los últimos años. En la tercera sección, presentamos un tipo particular de red recurrente a las que denominamos *redes híbridas*, caracterizadas por presentar una dinámica de tipo *Integrate-and-Fire*. Luego de estudiar su dinámica, expandimos el formalismo de la MSF para poder dar cuenta de la sincronía completa de estas redes, y como ejemplo de aplicación, a través del formalismo de la *matriz de salto* expuesto en 5.4, evaluamos el mapa de sincronía de una red híbrida cuyo estado de sincronía es un oscilador de Nakano-Saito.

En la cuarta sección realizamos una discusión acerca de la posibilidad de extender la MSF a redes con conectividades no lineales. Haciendo hincapié en restricciones que surgen incluso en los casos más sencillos de conectividad no suave, conseguimos exponer cuáles son aquellas condiciones que imposibilitan la generalización de la MSF en este caso. Finalmente en la quinta sección exhibimos algunos resultados sobre la sincronía de pares de osciladores conectados de manera no suave.

6.1. Construcción de la MSF

La gran ventaja de la *Master Stability Function* (MSF) reside en que brinda la posibilidad de estudiar el problema de la sincronía de redes de osciladores a través del conjunto de autovalores de su matriz de conectividad, esto es, mediante la reducción del problema de la sincronía a uno de estabilidad, y este último a uno algebraico.

Para dar cuenta del formalismo de este método, conviene asumir una red de n nodos (osciladores) idénticos, cada uno descrito por un vector de estado $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$ cuya dinámica *aislada* está dada por la EDO $\dot{\mathbf{x}}_i = F(\mathbf{x}_i)$. A su vez, la dinámica de la red estará dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_i = F(\mathbf{x}_i) + \epsilon \sum_{j=1}^n l_{ij} (G(\mathbf{x}_j) - G(\mathbf{x}_i)), \quad (6.1.1)$$

donde $F, G \in \mathcal{C}^1$, $0 < \epsilon < 1$.

La elección de un sistema como el anterior (que fue el originalmente estudiado por Pecora y Carroll en [60]), corresponde al hecho de que satisface cuatro condiciones canónicas propuestas por los autores:

- (1) Los n osciladores son idénticos.
- (2) La misma función evaluada sobre las componentes de los osciladores, es utilizada para acoplar (aunque pueden variar los pesos).
- (3) La variedad de sincronía es una variedad invariante del sistema (6.1.1)
- (4) Los nodos se encuentran acoplados de una manera arbitraria que puede ser *aproximada por un operador lineal* en las cercanías del estado de sincronización.

Notemos que el sistema (6.1.1) define un flujo en algún subconjunto de $\mathbb{R}^{n \times m}$. Un conjunto importante del espacio de fase es el siguiente:

Definición 6.1.1. *Dada una red como (6.1.1), el conjunto $\{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \dots = \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^{n \times m}$ se denomina variedad de sincronía. Una solución del sistema de la forma $\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}_1 = \dots = \mathbf{x}_n$, se denomina solución de sincronía o sincrónica.*

Es inmediato ver que en el sistema (6.1.1), tomando $\mathbf{s}(t)$ la solución del oscilador *aislado* $\dot{\mathbf{s}} = F(\mathbf{s})$, la solución de sincronía $\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}_1(t) = \dots = \mathbf{x}_n(t)$ es solución del sistema, y en consecuencia la sincronía es un comportamiento posible de la red.

Consideremos entonces una perturbación $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{s}(t) + \delta\mathbf{x}_i(t)$, y luego, haciendo un desarrollo de Taylor, resultará el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{x}}_i &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{s}} \\
&= F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{s}) + \epsilon \sum_{j=1}^n l_{ij} (G(\mathbf{x}_j) - G(\mathbf{s}) - (G(\mathbf{x}_i) - G(\mathbf{s}))) \\
&= DF(t)\delta\mathbf{x}_i + \epsilon \sum_{j=1}^n l_{ij} DG(t) (\delta\mathbf{x}_j - \delta\mathbf{x}_i) + \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{x}_i\|^2) \\
&= DF(t)\delta\mathbf{x}_i - \epsilon DG(t) \sum_{j=1}^n L_{ij} \delta\mathbf{x}_j + \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{x}_i\|^2),
\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

donde $DF(t)$ y $DG(t)$ son las derivadas de F y G evaluadas sobre $\mathbf{s}(t)$, y L es la matriz de Laplace $L_{ij} = -l_{ij} + \delta_{ij} \sum_k l_{ik}$. Observemos que, por construcción, valdrá $\sum_k L_{ik} = 0$.

Ahora podemos reorganizar todo de un modo más conveniente, tomando una matrix P tal que $L = PAP^{-1}$, siendo $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matriz diagonal de los autovalores de L . Llamemos $\delta\mathbf{x} = (\delta\mathbf{x}_1, \dots, \delta\mathbf{x}_n)$ y $F(\mathbf{x}) = (F(\mathbf{x}_1), \dots, F(\mathbf{x}_n))$. Entonces, descartando los términos de orden cuadrático $\mathcal{O}(\|\delta\mathbf{x}_i\|^2)$, y a través del producto matricial de Kronecker \otimes , podremos escribir el sistema variacional *lineal*:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbb{I}_n \otimes DF(t)\delta\mathbf{x} - \epsilon (L \otimes DG(t)) \delta\mathbf{x} \\
&= \mathbb{I}_n \otimes DF(t)\delta\mathbf{x} - \epsilon (P\Lambda P^{-1} \otimes DG(t)) \delta\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Tomando el cambio de variables $\boldsymbol{\xi} = (P \otimes \mathbb{I}_m)^{-1} \delta\mathbf{x}$, el sistema anterior se transforma finalmente en

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbb{I}_n \otimes DF(t)\boldsymbol{\xi} - \epsilon \Lambda \otimes DG(t)\boldsymbol{\xi}. \tag{6.1.4}$$

Las dos matrices que aparecen resultan ser matrices diagonales en bloques. Y cada bloque corresponde a un *modo normal* $\boldsymbol{\xi}_i$. Resulta entonces posible el desacople en n sistemas de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i = DF(t)\boldsymbol{\xi}_i - \epsilon \lambda_i DG(t)\boldsymbol{\xi}_i. \tag{6.1.5}$$

Observemos que la expresión anterior no es otra cosa que el sistema escrito en torno a la variedad de sincronía. Como $\sum_j L_{ij} = 0$ tendremos que $\lambda_1 = 0$, por lo

que el primer sistema corresponde al movimiento a lo largo de la variedad, mientras que los restantes $n - 1$ sistemas corresponden a las direcciones transversales a la variedad de sincronía y dan cuenta de su *estabilidad*.

Para una matriz arbitraria L , los autovalores λ pueden ser complejos, lo que nos lleva a considerar el sistema

$$\dot{\xi} = (DF(t) - \lambda DG(t)) \xi. \quad (6.1.6)$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definición 6.1.2. *La MSF del sistema (6.1.1) para el valor $\lambda \in \mathbb{C}$ se define como el mayor coeficiente de Lyapunov (o de Floquet) del sistema variacional (6.1.6).*

Observación 6.1.3. *Notemos que en el sistema (6.1.6), los pesos l_{ij} de las conexiones entre nodos y el peso del acoplamiento ϵ se encuentran absorbidos por el número complejo λ . Así tenemos que la ecuación (6.1.6) es un sistema genérico asociado a cualquier red cuyos osciladores sean de la forma $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ y se encuentren acoplados a través de la función $G(\mathbf{x})$, independientemente de la arquitectura de la red.*

De la observación anterior, obtenemos que dada una red particular con pesos w_{ij} sincronizará si la matrix “laplanizada” $L_{ij} = -w_{ij} + \delta_{ij} \sum_k w_{ik}$ posee todos sus autvalores no nulos en la zona donde la $MSF(\lambda) < 0$ (si se tomaron los coeficientes de Lyapunov) ó $|MSF(\lambda)| < 1$ (si se consideraron los de Floquet).

Ejemplo

El primer ejemplo (y que se ha convertido en el canónico) trabajado por Pecora y Carroll en [60], es el de la MSF asociada al oscilador caótico de Rössler:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_1x_3 - cx_3 \end{cases} \quad (6.1.7)$$

acoplados por la función $G(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$. Véase la figura 6.1. Cabe señalar que este es uno de los osciladores caóticos para los cuales más sencilla resulta la computación de su MSF.

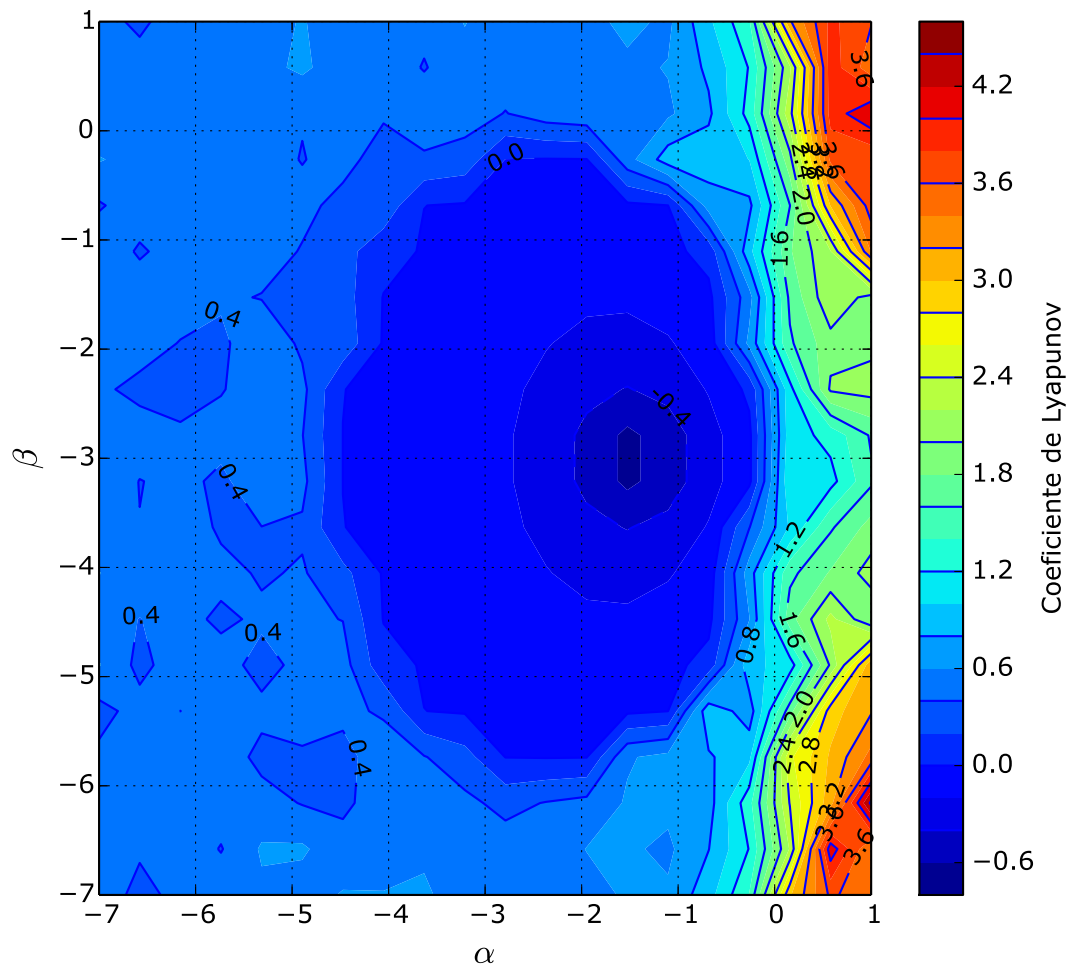


Figura 6.1: *Master Stability Function* evaluada para el oscilador caótico de Rössler con $a = 0,2$, $b = 0,2$ y $c = 7,0$. La región oscura del centro de la imagen se corresponde con su *región de sincronía*. Los ejes corresponden a la parte real e imaginaria de los posibles autovalores $\lambda = \alpha + i\beta$.

6.2. Discusión de la MSF

En el artículo seminal de Pecora y Carrol ([60]), los autores realizan el desarrollo previo, aunque restringen su aplicación a redes de osciladores de Rössler donde G es un operador lineal (ver el ejemplo anterior). A su vez, las arquitecturas de red estudiados son grafos completos, estrellas y anillos. El mismo camino realizan y amplían para distintas matrices G en [61].

Posteriormente Chen [12] investiga el caso donde el acoplamiento es lineal, pero con la característica de que $\epsilon = \epsilon(t)$ es una función *on-off*. En tal caso, sigue siendo posible escribir el sistema (6.1.6) como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (DF(t) - \epsilon(t)DG(t)) \boldsymbol{\xi}. \quad (6.2.1)$$

Lo peculiar expuesto en ese trabajo, es cierta relación que el autor observa e investiga entre la frecuencia de la función $\epsilon(t)$ y el fenómeno de la sincronía en determinadas redes de osciladores caóticos.

Una generalización natural de la MSF es expuesta por Boccaletti [8], allí se considera como acoplamiento a toda una familia $\{G(t)\}$ de matrices simétricas. A través de imponer conmutatividad a la familia, los autores garantizan los mismos modos normales para cada matriz y la posibilidad de definir la MSF correspondiente a tal red. Utilizando un tratamiento similar, Sorrentino [67] consigue extender la MSF para *hiperredes* (*hypernetworks*) en el caso que las diferentes arquitecturas subyacentes de la hiperred conmuten entre sí, aunque lo ejemplifica únicamente con el caso en que uno de los niveles de la hiperred corresponda al grafo completo.

Otros interesantes trabajos que podemos citar, son los de Fink [25] y Sun [71]. En el primero, se logra reducir la evaluación aproximada de la MSF al análisis de la sincronía del grafo completo de tres nodos; mientras que en el segundo los autores proponen una construcción particular de la MSF aplicable a una familia *casi idéntica* (*nearly identical*) de osciladores $\dot{\boldsymbol{x}} = F_{\alpha}(\boldsymbol{x})$. Aunque ambos trabajos continúan estudiando la MSF en el caso del acoplamiento G lineal.

Una peculiar variación del acoplamiento es considerada por Burbano [9]. Allí se estudian dos tipos de conexiones *funcionales*. Los autores proponen estudiar dos tipos de acoplamientos: el *PI-coupling* (conexión proporcional a la integral) y el *PD-coupling* (proporcional a la derivada), dados por las expresiones

$$\begin{cases} G(\mathbf{x}) = \alpha\Gamma_P\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} & \text{(PI)} \\ \dot{\mathbf{y}} = \Gamma_I\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}(0) = 0, \end{cases} \quad (6.2.2)$$

y

$$\begin{cases} G(\mathbf{x}) = \alpha\Gamma_P\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} & \text{(PD)} \\ \mathbf{y} = \Gamma_D\dot{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (6.2.3)$$

donde $\Gamma_{P,I,D}$ son matrices y α, β escalares. Notemos que aunque en este caso el acoplamiento G es un operador funcional, aún sigue siendo de tipo lineal. Finalmente, a través de estas dos nuevas conexiones, los autores evalúan las MSF correspondientes a los osciladores clásicos de Lorenz y de Duffing, y desarrollan un estudio orientado al control de redes de osciladores en el caso de que sean de la misma familia pero no idénticos.

Más recientemente, Coombes y su grupo en [18, 17, 56] (manteniendo el acoplamiento lineal) recurren a la teoría de Lyapunov para sistemas no suaves (véase la sección 5.4) para extender la MSF al caso en que el oscilador $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ se encuentra definido por un flujo no suave. Y finalmente, logran extender la aplicación de la MSF al contexto del *problema de los clusters*¹. Esta nueva generalización, les permite a los autores estudiar la MSF asociada a osciladores continuos a trozos.

Motivados por estos últimos trabajos mencionados, en la próxima sección desarrollaremos un nuevo tipo de red con dinámica discontinua, fuertemente relacionada con cierto tipo de osciladores continuos a trozos, y al mismo tiempo daremos una extensión de la MSF para este nuevo caso.

6.3. Sincronía de redes híbridas

Consideremos la siguiente red *híbrida* (usamos tal nombre porque el sistema es *híbrido* en la nomenclatura introducida en los capítulos previos) de n osciladores lineales $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz de Laplace (es decir, la suma de cualquiera de sus filas es nula; en tal caso se dice que la red se encuentra

¹El problema de los *clusters* consiste en determinar cuáles serán las clases de sincronía que surgirán durante la dinámica de una red recurrente.

balanceada) y $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la matriz que selecciona las variables que acoplan:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = A\mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^n l_{ij} E\mathbf{x}_j \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_k^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{x}_j^+ = R\mathbf{x}_j^- + I, \end{cases} \quad (6.3.1)$$

además tendremos que $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz de *reseteo* y llamaremos *input* al vector $I \in \mathbb{R}^m$.

En este capítulo estudiaremos el caso en que la red es simétrica y no dirigida. Entonces $l_{ij} = l_{ji}$.

Supongamos ahora que hay una solución de sincronía (o solución sincrónica) $\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}_1(t) = \dots = \mathbf{x}_n(t)$. Debido a que la suma de cada fila de la matriz L es nula, tal solución se obedece al sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{s}} = A\mathbf{s} \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{s}^+ = R\mathbf{s}^- + I. \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Observemos que esta solución $\mathbf{s}(t)$ no es solución del oscilador aislado, sino que emerge de la actividad propia de la red.

Consideremos la *variable promedio* $\mathbf{u} =: \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{x}_i$, que es la utilizada para representar la actividad global de la red en la condición de reseteo. Utilizando que la suma de cada fila de la matriz simétrica L es nula, tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{x}}_i = A\mathbf{u} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij} E\mathbf{x}_j \\ &= A\mathbf{u} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n l_{ij} \right) E\mathbf{x}_j \\ &= A\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Además las condiciones de reinicio se transforman de la siguiente manera:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_j^- = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{u}^+ = R\mathbf{u}^- + I. \quad (6.3.4)$$

Así resulta que la solución promedio obedece al sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u} \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{u}^+ = R\mathbf{u}^- + I. \end{cases} \quad (6.3.5)$$

Observando que los sistemas (6.3.2) y (6.3.5) son idénticos, obtenemos que *la solución sincrónica coincide con el promedio de los nodos*.

Esta última observación dista de ser trivial: muestra en qué medida la condición de reseteo determina la dinámica de la red. Además, esta condición, permite localizar con facilidad la solución de sincronía, lo cual simplifica notablemente la simulación numérica de la red.

6.3.1. Extensión de la MSF

A continuación generalizaremos el formalismo de la MSF a las redes híbridas. A diferencia de los sistemas previos citados en la sección 6.2, aquí hay presente un régimen de reseteo en la dinámica de la red. Por lo cual, deberemos analizar en detalle cómo resulta transformada la regla de reseteo cuando realizamos la descomposición en modos normales.

Tomemos la variación $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{s}$. Usando que

$$\sum_{j=1}^n l_{ij}(E\mathbf{x}_j - E\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^n l_{ij}E\delta \mathbf{x}_j,$$

(porque la suma de las filas de L es nula debido a la hipótesis de balanceo de L) y que $\mathbf{s}^+ = R\mathbf{s}^- + I$, tendremos que la ecuación variacional toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = A\delta \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^n l_{ij}(E\mathbf{x}_j - E\mathbf{s}) = A\delta \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^n l_{ij}E\delta \mathbf{x}_j \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \delta \mathbf{x}_i^+ = R\delta \mathbf{x}_i^-. \end{cases} \quad (6.3.6)$$

Observemos que el sistema anterior es un sistema híbrido cuyo reseteo es independiente del estado del sistema y solo depende de la frecuencia de $\mathbf{s}(t)$. Es decir, que la evolución de la variación y el reseteo se encuentran “desacoplados”.

Escribamos ahora todo con el producto de Kronecker habitual. Llamemos $\delta \mathbf{x} =$

$(\delta \mathbf{x}_i, \dots, \delta \mathbf{x}_n)$, y tendremos

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = (\mathbb{I}_n \otimes A)\delta \mathbf{x} + (L \otimes E)\delta \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \delta \mathbf{x}^+ = (\mathbb{I}_n \otimes R)\delta \mathbf{x}^-. \end{cases} \quad (6.3.7)$$

Sea $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $L = P\Lambda P^{-1}$ donde Λ es diagonal, y tomemos el cambio de variables $(P \otimes \mathbb{I}_m)\boldsymbol{\xi} = \delta \mathbf{x}$.

Entonces tendremos

$$(P \otimes \mathbb{I}_m)\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbb{I}_n \otimes A)(P \otimes \mathbb{I}_m)\boldsymbol{\xi} + (P\Lambda P^{-1} \otimes E)(P \otimes \mathbb{I}_m)\boldsymbol{\xi}. \quad (6.3.8)$$

Usando las propiedades del producto de Kronecker resulta

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbb{I}_n \otimes A)\boldsymbol{\xi} + (\Lambda \otimes E)\boldsymbol{\xi}. \quad (6.3.9)$$

Y para las condiciones de reseteo obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \boldsymbol{\xi}^+ &= (P \otimes \mathbb{I}_m)^{-1}(\mathbb{I}_n \otimes R)(P \otimes \mathbb{I}_m)\boldsymbol{\xi}^- \\ &= (P^{-1} \otimes \mathbb{I}_m)(P \otimes R)\boldsymbol{\xi}^- \\ &= (\mathbb{I}_n \otimes R)\boldsymbol{\xi}^-. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Finalmente, sabiendo que la matriz Λ es diagonal, podremos desacoplar en los distintos modos normales de la manera usual. Sean $\lambda_i = \alpha + i\beta$ y $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\eta}$, tendremos que cada bloque obedece a la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = A\boldsymbol{\eta} + (\alpha + i\beta)E\boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \boldsymbol{\eta}_i^+ = R\boldsymbol{\eta}^-, \end{cases} \quad (6.3.11)$$

donde, recordemos, la órbita \mathbf{s} está dada por el sistema (6.3.2). De esta manera, se obtiene un nuevo sistema híbrido (6.3.11), que proviene de la red, con el cual resulta posible definir la MSF del modo usual, y así podremos analizar la estabilidad de la solución de sincronía.

6.3.2. Cálculo de la MSF

Para evaluar la MSF de una red híbrida, combinamos el sistema previo (6.3.11) con (6.3.2):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{s}} = A\mathbf{s} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = A\boldsymbol{\eta} + (\alpha + i\beta)E\boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{w}\mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{s}^+ = R\mathbf{s}^- + I \\ \boldsymbol{\eta}^+ = R\boldsymbol{\eta}^- \end{cases} \end{cases} \quad (6.3.12)$$

Tomemos el sistema (6.3.12) y utilicemos una notación más compacta, esto es $\lambda = \alpha + i\beta$:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A + \lambda E \end{pmatrix}, \bar{R} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \bar{I} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde 0 representa una matriz nula de tamaño adecuado.

Definimos entonces la variable $\bar{\boldsymbol{\eta}} = (\mathbf{s}, \boldsymbol{\eta})^T$.

De esta manera, el sistema (6.3.12) resulta:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}} = \bar{A}\bar{\boldsymbol{\eta}} \\ \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}}^- = v_{th} \rightarrow \boldsymbol{\eta}^+ = \bar{R}\boldsymbol{\eta}^- + \bar{I}. \end{cases} \quad (6.3.13)$$

Sean $t_k, k \in \mathbb{N}$ los instantes donde hay un reseto de la variable $\bar{\boldsymbol{\eta}}$, y llamemos $\mathcal{Q}(t)$ a la *matriz de salto* del sistema (6.3.13) (véase el capítulo 2 de [22], o la sección 5.4). Escribamos $G(t) = \exp \bar{A}t$, entonces tendremos la siguiente aproximación para la variación $\delta\bar{\boldsymbol{\eta}}$:

$$\delta\bar{\boldsymbol{\eta}}(t_n) = \mathcal{Q}(t_n)G(t_n - t_{n-1})\dots\mathcal{Q}(t_1)G(t_1 - t_0)\delta\bar{\boldsymbol{\eta}}(t_0). \quad (6.3.14)$$

Como deseamos evaluar el coeficiente de Lyapunov maximal de (6.3.11), considera-

remos solamente variaciones iniciales de la forma

$$\delta\bar{\boldsymbol{\eta}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \delta\boldsymbol{\eta}_1(0) \\ \dots \\ \delta\boldsymbol{\eta}_m(0) \end{pmatrix} \quad (6.3.15)$$

y, como se expuso previamente en la sección 5.4, usaremos la fórmula (6.3.14) para estimar el límite

$$\lambda_{\text{máx}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log \left(\frac{\|\delta\bar{\boldsymbol{\eta}}(t_k)\|}{\|\delta\bar{\boldsymbol{\eta}}(0)\|} \right). \quad (6.3.16)$$

La implementación de la fórmula anterior, requiere una expresión precisa de la matriz de salto, lo cual no siempre es posible. Sin embargo, en el caso de las redes híbridas, algunas simplificaciones facilitan obtener una forma cerrada para \mathcal{Q} .

6.3.3. La matriz de salto

Escribamos $[A, B] = AB - BA$, donde A, B son matrices cuadradas del mismo tamaño. También escribamos como $\bar{\boldsymbol{\eta}}_* = (\mathbf{s}_*, \boldsymbol{\eta}_*)$ a los puntos de corte en los cuales las variables $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ sufren el reseteo. Entonces, de acuerdo a la fórmula dada para la matriz de salto \mathcal{Q} of (6.3.13) (véase nuevamente la sección 5.4), tendremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\bar{\boldsymbol{\eta}}_*) &= \bar{R} + \frac{(\bar{A}\bar{R}\bar{\boldsymbol{\eta}}_* + \bar{A}\bar{I} - \bar{R}\bar{A}\bar{\boldsymbol{\eta}}_*) \bar{\mathbf{w}}^\top}{\bar{\mathbf{w}}^\top \bar{A}\bar{\boldsymbol{\eta}}_*} \\ &= \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathbf{w}^\top A \mathbf{s}_*} \begin{pmatrix} [A, R] \mathbf{s}_* \mathbf{w}^\top + I \mathbf{w}^\top & 0 \\ [A + \lambda E, R] \boldsymbol{\eta}_* \mathbf{w}^\top & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

Como usamos la fórmula (6.3.14) con una variación inicial (6.3.15), nos basta con conservar únicamente el cuarto bloque de la matriz (6.3.17):

$$\mathcal{Q}' = R, \quad (6.3.18)$$

Sea $G'(t) = \exp(A + \lambda E)t$, ahora podemos usar la ecuación (6.3.16). Entonces

será suficiente evaluar el cociente

$$\frac{1}{t_k} \log \left(\frac{\|\mathcal{Q}'(t_k)G'(t_k - t_{k-1})\dots\mathcal{Q}'(t_1)G'(t_1)\delta\boldsymbol{\eta}(0)\|}{\|\delta\boldsymbol{\eta}(0)\|} \right), \quad (6.3.19)$$

para un valor $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Notemos que, debido a la identidad (6.3.18), la evaluación de (6.3.19) queda reducida a la de los instantes t_k . A su vez, el error en la estimación del $\lambda_{\text{máx}}$, dependerá sensiblemente de la precisión con que sean calculados los t_k .

6.3.4. Aplicación al oscilador de Nakano-Saito

Consideremos el caótico e híbrido de Nakano y Saito ya introducido en la sección 5.1.1:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_1^- = v_{th} \rightarrow \boldsymbol{x}^+ = R\boldsymbol{x}^- + I, \end{cases} \quad (6.3.20)$$

donde

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ -1 & \rho \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} v_R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Estudiaremos la red híbrida de osciladores de la forma $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, acoplados por una matriz de Laplace simétrica, y donde

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3.21)$$

Considerando una red como (6.3.1) con las matrices mencionadas arriba, obtenemos una red híbrida cuya solución de sincronía $\boldsymbol{s}(t)$ es un oscilador de Nakano-Saito dado por (6.3.20).

Como podemos ver en la figura 6.2, la sincronía y la no sincronía son comportamientos posibles en estas redes.

Aplicando el formalismo de la sección previa, podemos evaluar la MSF para la red híbrida (6.3.1) de este oscilador.

En las simulaciones utilizamos la fórmula (6.3.19), tomando $k = 100$ para obtener el mapa de la MSF graficado en la figura 6.3. Como podemos observar, alcanza que

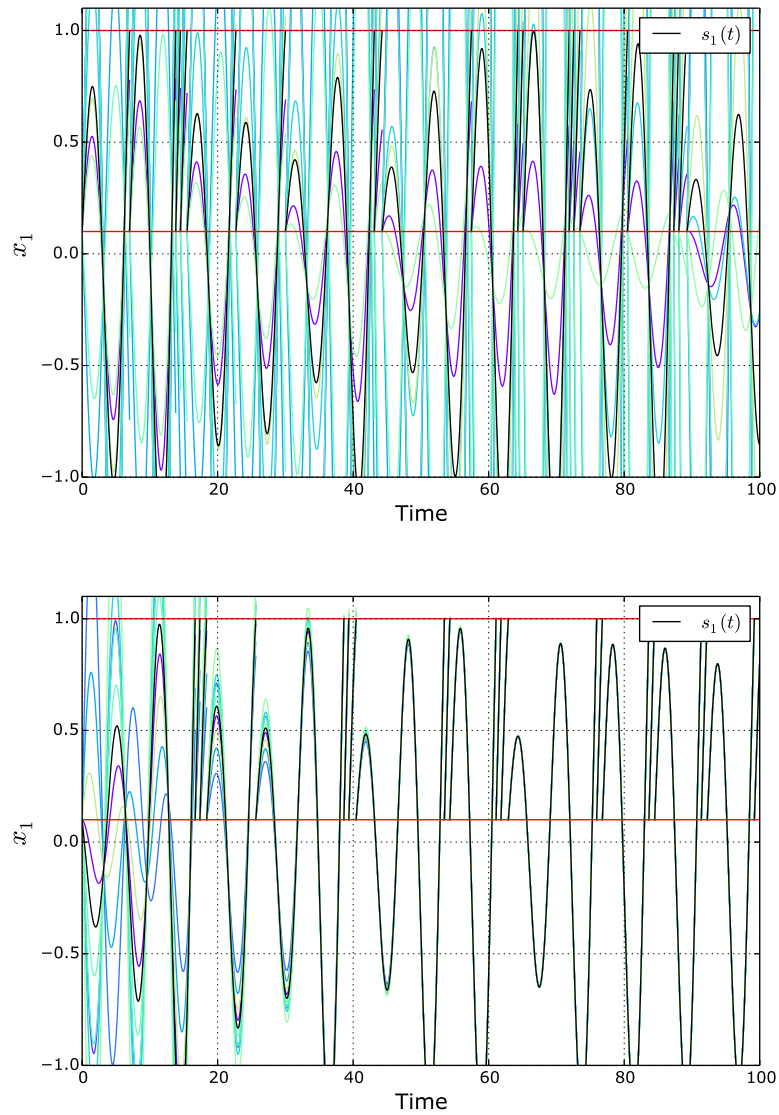


Figura 6.2: Comportamiento sincrónico y no sincrónico de la variable x_1 , de una red con estructura de grafo completo no dirigido y valores aleatorios para los pesos de los acoplamiento. En negro, se encuentra graficada la primera variable de la solución de sincronía (parámetros : $\rho = 0,1$, $b = 0,1$, $v_{th} = 1$, $v_R = 0$).

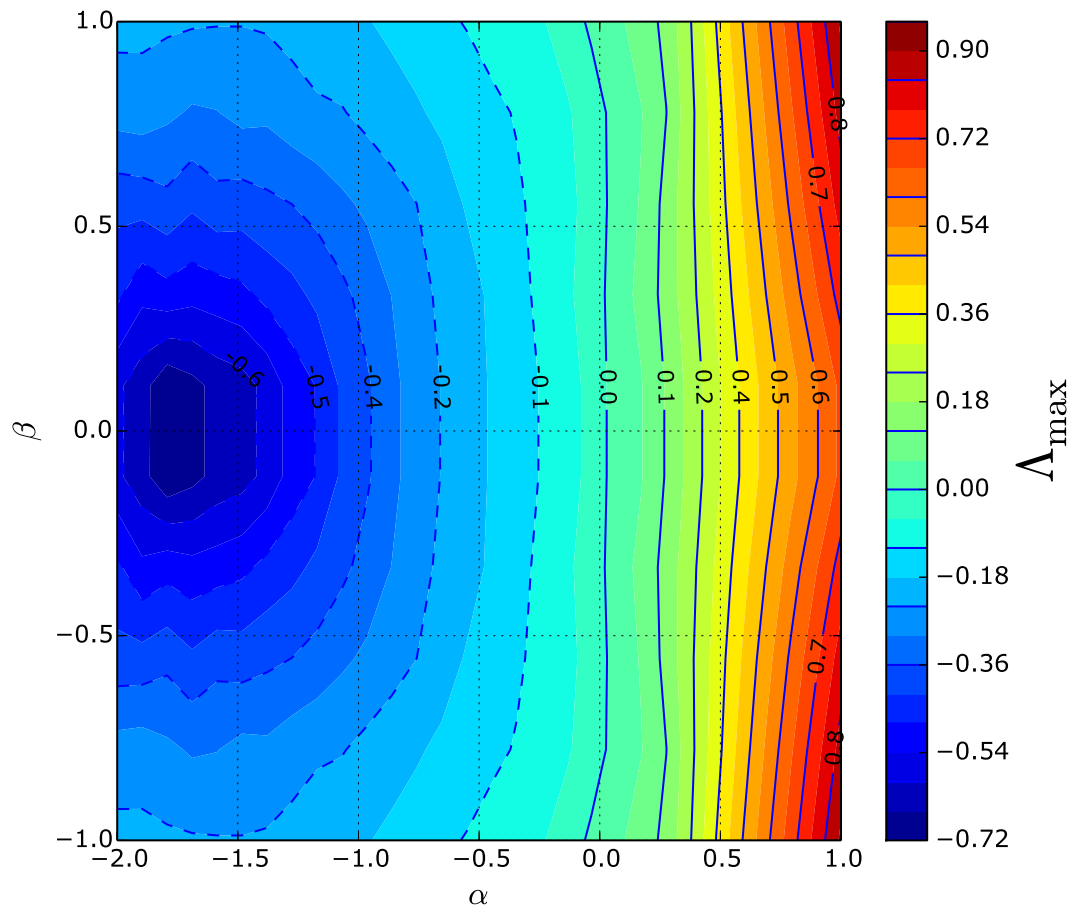


Figura 6.3: MSF de la red híbrida cuyo estado de sincronía es un oscilador caótico de Nakano-Saito (parámetros: $\rho = 0,1$, $b = 0,1$, $v_{th} = 1$, $v_R = 0$).

la matriz L posea autovalores con parte real negativa ligeramente menor que cero para garantizar la sincronía de la red. Además, como es habitual en los mapas de la MSF, hay una región *pozo* (la región azul oscuro de la figura) donde la sincronía es más robusta.

6.4. Un sistema con acoplamiento no lineal

La MSF desarrollada en [60] y expuesta en la primera sección de este capítulo depende fuertemente de la posibilidad de encontrar modos normales para descomponer el espacio de las variaciones. En esta sección veremos la imposibilidad de generalizar esa construcción a nuevos tipos de acoplamientos. Lo haremos analizando el siguiente caso: tomamos n osciladores m -dimensionales idénticos \mathbf{x}_i , acoplados a través de la matriz $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = F(\mathbf{x}_i) + \epsilon \phi \left(\sum_{j=1}^n l_{ij} E(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \right), \quad (6.4.1)$$

donde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable que cumple $\phi(0) = 0$. Abusaremos de la notación entendiendo que, dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^K$, $\phi(\mathbf{v})$ es la evaluación componente a componente. Nuevamente $L = (l_{ij})$ es una matriz de Laplace.

Claramente cualquier solución de sincronía $\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}_1 = \dots = \mathbf{x}_n$ es solución del sistema (6.4.1) siempre que \mathbf{s} sea solución del oscilador aislado. La ecuación variacional alrededor de una trayectoria de sincronía será

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_i = DF(t) \delta \mathbf{x}_i + \epsilon \phi \left(\sum_{j=1}^n l_{ij} E(\delta \mathbf{x}_j - \delta \mathbf{x}_i) \right). \quad (6.4.2)$$

Definiendo $\delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_N)^\top$ (los vectores están yuxtapuestos), podemos reescribir el sistema variacional como

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbb{I}_N \otimes DF(s) \delta \mathbf{x} + \epsilon \phi(L \otimes E \delta \mathbf{x}). \quad (6.4.3)$$

Supongamos a L diagonalizable de manera que existe P tal que $L = P \Lambda P^{-1}$, con Λ

diagonal. Entonces

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = (P \otimes \mathbb{I}_n)(\mathbb{I}_N \otimes DF(s))(P^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)\mathbf{x} + \epsilon \phi \left((P \otimes \mathbb{I}_n)(\Lambda \otimes E)(P^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)\mathbf{x} \right). \quad (6.4.4)$$

Haciendo el cambio de variables $\boldsymbol{\xi} = (P^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)\mathbf{x}$, obtenemos el sistema

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbb{I}_N \otimes DF(s))\boldsymbol{\xi} + \epsilon(P^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)\phi \left((P \otimes \mathbb{I}_n)(\Lambda \otimes E)\boldsymbol{\xi} \right). \quad (6.4.5)$$

Llamando P_i a las filas de la matriz P obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.4.1. *La red (6.4.1) admitirá modos normales si y solo si para todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ y para todo $i = 1, \dots, N$ vale*

$$\phi(\langle P_i, \mathbf{v} \rangle) = \langle P_i, \phi(\mathbf{v}) \rangle. \quad (6.4.6)$$

Llamando $a_{ij} =: P_{ij}$, la ecuación (6.4.6) puede escribirse como

$$\phi \left(\sum_k a_{ik} \mathbf{v}_k \right) = \sum_k a_{ik} \phi(\mathbf{v}_k). \quad (6.4.7)$$

Observemos también que la ecuación (6.4.6) expresa una relación entre la función de acoplamiento ϕ y la conectividad L , sin importar la naturaleza de los osciladores acoplados.

Se puede demostrar sin dificultad que en el caso de cumplir la ecuación (6.4.6), la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función aditiva, es decir que satisface la ecuación de Cauchy

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \quad (6.4.8)$$

Esta función no necesariamente es lineal, pero en tal caso sería una función patológica: lineal sobre \mathbb{Q} y no lineal sobre \mathbb{R} , por lo que resulta imposible de evaluar y simular mediante alguna expresión cerrada.

A través de herramientas del álgebra, puede probarse la existencia de funciones aditivas reales mediante bases de Hamel del espacio vectorial \mathbb{R} sobre el cuerpo \mathbb{Q} . Para más detalles remitimos al lector a Kuczma [42].

Por otro lado, si ϕ es continua, automáticamente será lineal y nos encontramos en el caso estudiado en la primera sección.

De esta manera, concluimos la imposibilidad de la descomposición en modos normales de un sistema como (6.4.1) para algún caso relevante o simulable numéricamente.

Sin embargo, sería relevante tener alguna metodología para poder estudiar sincronía en el caso de acoplamientos no lineales, en particular, aquellos no suaves. En la siguiente sección, daremos algunos resultados en este sentido.

6.5. Conectividad piecewise en pares de osciladores

Como vimos en la sección anterior, en el caso de acoplamiento no lineal la imposibilidad de hallar modos normales impide definir una MSF para el oscilador acoplado. Consideremos ahora el caso más simple de una red de *dos* osciladores, donde resulta posible dar cuenta de la sincronía. Lo ejemplificaremos con el acoplamiento rampa $[\cdot]_+$.

Consideremos primero el tradicional acoplamiento lineal entre osciladores acoplados: tomamos dos osciladores unidimensionales $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$, donde este último se encuentra gobernado por la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = f(\mathbf{x}_2, t) + \epsilon(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (6.5.1)$$

Entonces tendremos que si $\mathbf{x}_1 > \mathbf{x}_2$ el término de acoplamiento será positivo y el oscilador \mathbf{x}_2 tenderá a acelerarse. Caso contrario, a retardarse. Si se logra un equilibrio se habrá obtenido la sincronía con el oscilador \mathbf{x}_1 , y compartirán el mismo estado.

Comparémoslo ahora con el acople tipo rampa:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= f(\mathbf{x}_1, t) + \epsilon[\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1]_+ \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= f(\mathbf{x}_2, t) + \epsilon[\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2]_+ \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

Entonces, a menos que los osciladores coincidan, *siempre habrá uno que esté evolucionando libremente*. Cosa que no ocurre cuando el acople es lineal.

Notemos que la solución de sincronía $s(t) = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, donde $s(t)$ es el ciclo

estable de los osciladores libres, sigue siendo una solución del sistema (6.5.2), y resultan satisfechas (1), (2) y (3) señaladas en 6.1. Veamos cómo funciona un acople del tipo rampa en un sistema de solamente dos osciladores bidimensionales.

6.5.1. Caso Master-Slave

Tomemos un acoplamiento *master-slave* entre dos osciladores bidimensionales idénticos. Supondremos que libres, los osciladores poseen una solución T -periódica estable $\mathbf{s}(t) = (s(t), \tilde{s}(t))$. Así los osciladores $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ estarán dados por los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F(x_1, y_1) \\ \dot{y}_1 = G(x_1, y_1), \end{cases} \quad (6.5.3)$$

para el oscilador maestro; el oscilador esclavo estará dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = F(x_2, y_2) + \epsilon [x_1 - x_2]_+ \\ \dot{y}_2 = G(x_2, y_2). \end{cases} \quad (6.5.4)$$

Podemos escribir las ecuaciones variacionales tomando $\delta x_i = x_i - s$ y $\delta y_i = y_i - \tilde{s}$. Tendremos:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = F_x \delta x_1 + F_y \delta y_1 \\ \delta \dot{y}_1 = G_x \delta x_1 + G_y \delta y_1, \end{cases} \quad (6.5.5)$$

para el primer oscilador, y para el segundo

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_2 = F_x \delta x_2 + F_y \delta y_2 + \epsilon [\delta x_1 - \delta x_2]_+ \\ \delta \dot{y}_2 = G_x \delta x_2 + G_y \delta y_2. \end{cases} \quad (6.5.6)$$

Las derivadas se encuentran evaluadas sobre la solución periódica del oscilador libre $(s(t), \tilde{s}(t))$. Tomemos la diferencia $u = x_1 - x_2 = \delta x_1 - \delta x_2$ y $v = y_1 - y_2 = \delta y_1 - \delta y_2$. Entonces las ecuaciones serán:

$$\begin{cases} \dot{u} = F_x u + F_y v - \epsilon [u]_+ \\ \dot{v} = G_x u + G_y v. \end{cases} \quad (6.5.7)$$

Sabemos que con el primer oscilador ocurre $(x_1(t), y_1(t)) \rightarrow (s(t), \tilde{s}(t))$. Supongamos, tal como observamos en simulaciones, que hay sincronía en fase. Entonces el

segundo oscilador tiende también a una órbita periódica $(x_2(t), y_2(t)) \rightarrow (\gamma(t), \tilde{\gamma}(t))$. Entonces, como $\delta x_1 \rightarrow 0$ (por la estabilidad del oscilador libre) tendremos que $u(t) \rightarrow s(t) - \gamma(t) = R(t)$. Escribimos

$$[u(t)]_+ = H(R(t))u(t) + \underbrace{(H(u(t)) - H(R(t)))}_{r(t)} u(t) \quad (6.5.8)$$

Por simplicidad escribamos $I(t) = H(R(t))$, de esta manera el sistema (6.5.7) resulta expresado como

$$\begin{cases} \dot{u} = (F_x - \epsilon I(t))u + F_y v + r(t)u \\ \dot{v} = G_x u + G_y v. \end{cases} \quad (6.5.9)$$

Supondremos que $r(t)$ tiene una convergencia a 0 *suficientemente rápida* para no modificar la estabilidad (cf. la observación 4.3.5 del capítulo anterior).

Sea ρ el coeficiente de Floquet del oscilador libre. Sabemos que $\rho < 1$. Sean $\rho_{1,2}$ los coeficientes de Floquet del sistema (6.5.9). Asumiendo $\epsilon > 0$ y utilizando la fórmula de la traza, finalmente obtendremos

$$0 < \rho_1 \rho_2 = \rho e^{-\epsilon \int_0^T I(t) dt} < \rho < 1. \quad (6.5.10)$$

Si ocurriese $\epsilon < 0$ la fórmula anterior generaría la desigualdad inversa y no daría lugar a la sincronía de estado (este último escenario se ve muy claramente en las simulaciones, donde se observa sincronía en antifase).

6.5.2. Conexión simétrica

Consideremos ahora el caso simétrico, con $i, j = 1, 2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F(x_i, y_i) + \epsilon [x_j - x_i]_+ \\ \dot{y}_i = G(x_i, y_i) \end{cases} \quad (6.5.11)$$

Realizando un desarrollo similar al caso *master-slave* para un oscilador bidimensional, consideramos el cambio de variables $u = x_1 - x_2 = \delta x_1 - \delta x_2$ y $v = y_1 - y_2 =$

$\delta y_1 - \delta y_2$. Entonces las ecuaciones serán:

$$\begin{cases} \dot{u} = F_x u + F_y v - \epsilon u \\ \dot{v} = G_x u + G_y v. \end{cases} \quad (6.5.12)$$

Notemos que la no diferenciabilidad del acoplamiento desaparece. Hacemos nuevamente el cálculo de Floquet y de manera similar al caso anterior, obtenemos

$$0 < \rho_1 \rho_2 = \rho e^{-\epsilon T} < \rho < 1, \quad (6.5.13)$$

de donde sigue

$$\frac{\log \rho}{T} < \epsilon, \quad (6.5.14)$$

que resulta una condición necesaria para la sincronía en este caso. Notemos que el miembro izquierdo de la desigualdad, es un valor que depende únicamente de la naturaleza del oscilador que hayamos acoplado. También señalemos que en general, no resulta posible controlar ninguno de los parámetros ρ y T por separado, si no que sus valores se encuentran fuertemente relacionados.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis nos abocamos al estudio de las bifurcaciones globales y el fenómeno de sincronía presentes tanto en redes no suaves como en redes de osciladores no suaves acoplados. Además logramos generalizar alguna de las principales herramientas que la teoría de los sistemas dinámicos debió desarrollar para abordar sistemas con dinámicas discontinuas.

En particular se estudiaron las bifurcaciones globales y el fenómeno de sincronía para redes TLN, y se lograron establecer resultados que dan cuenta de tales comportamientos y aportan condiciones suficientes para garantizar la sincronía o la aparición/desaparición de conexiones heteróclinas u homóclinas. Además se expuso un fenómeno, que llamamos de coloración que tiene lugar en un ejemplo particular de estas redes, y que resulta indicativo de la aparición/desaparición de dichas conexiones.

Además se consideraron distintos ejemplos de sistemas no suaves y caóticos, exhibiendo gráficamente algunas de sus similitudes con los sistemas caóticos suaves. También se presentaron dos metodologías para estimar el exponente maximal de Lyapunov en este tipo de sistemas: el método de Stefanski y el método de la matriz de salto.

Se consideró la MSF clásica, y se consiguió expandir su definición para ser aplicada en un nuevo tipo de red con un fuerte comportamiento no suave: las redes híbridas. A través del método de la matriz de salto se realizó la evaluación de la MSF para un tipo particular de red híbrida caótica. También se estudió la posibilidad de expandir la MSF a redes que presentan un acoplamiento no lineal, mostrando

que tal generalización no es posible. Por último, se investigó la sincronía en un sistema de dos osciladores acoplados de manera lineal a trozos, y mediante adaptaciones posibles en este caso, se obtuvieron algunas condiciones necesarias para la sincronía.

La simulación numérica, a lo largo de la tesis, resultó fundamental en el estudio de varios de los casos mencionados, por lo que, algunos de los principales códigos desarrollados para el estudio de los distintos sistemas son incorporados como apéndices.

7.1. Líneas futuras de trabajo

A continuación presentamos algunas líneas de estudio futuro que fueron surgiendo durante el desarrollo de esta tesis, y que son un camino posible para dar continuidad a lo ya expuesto:

- Desarrollar el método de la matriz de salto para dar cuenta de las cascadas de períodos, en particular en sistemas como los osciladores de impacto o en los sistemas lineales a trozos.
- Estudiar un tipo particular de redes híbridas donde el oscilador aislado sea un sistema no autónomo, es decir, tenga la forma $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$. Donde considerar un carácter no continuo de $A(t)$ permitiría obtener dinámicas más ricas.
- Generalizar las redes híbridas para nuevos tipos de resets. En particular, sustituir la condición $\sum_k E\mathbf{x}_k = v_{th}$ por algún otro funcional lineal que aún permita la descomposición en modos normales.
- Introducir alguna condición con retardo en el reseteo de los distintos sistemas no suaves expuestos o en las redes híbridas (similar a lo realizado en [10, 41]), junto con la adaptación o desarrollo de metodologías que permitan caracterizar las bifurcaciones globales o la sincronía de estos sistemas.

Apéndice A

Códigos del capítulo 3

Los siguientes códigos se encuentran escritos en lenguaje Python, y recurren a la librería científica SciPy.

A.1. Períodos de los ciclos límites

Código con el que se generó la figura 3.3.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import gridspec
import matplotlib.cm as cm
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.integrate import odeint
import math
from time import time
from tempfile import TemporaryFile
#primero generaremos el ciclo
#correspondiente a cada valor de alpha
datos_ciclo_alp_variable = TemporaryFile()
tiempo_inicial= time()
#####
eps = 0.25
delt = 0.5
```

```

alpha = np.linspace(1.31,1.317105,20)
b = 1.0
lam = 1
theta = [lam, lam, lam]
t = np.linspace(0,1000,100000)
solnT = np.zeros((len(alpha),len(t),3))
#####
for i in range(len(alpha)):
    alp = alpha[i]
    W=np.array([[0,-alp-delt,-alp+eps],
                [-alp+eps,0,-alp-delt],
                [-alp-delt,-alp+eps,0]])
    def F(P): #funcion rampa
        x,y,z = P
        return (np.absolute(W.dot(P)+theta)
                +(W.dot(P)+theta))/2
    def E(P,t):
        x,y,z = P
        Q = np.array(P)
        return -b*Q+F(Q)
    #equilibrio eq0
    eq0 = [lam/(1.0+2.0*alp+delt-eps),
           lam/(1.0+2.0*alp+delt-eps),
           lam/(1.0+2.0*alp+delt-eps)]
    #buscamos las orbitas que 'salen' de eq0
    r = 0.0001
    u0 = [-0.5,-0.5,1] #direcciones del plano estable
    v0 = [1,-1.0,0]
    P0 = np.array(eq0)-r*np.array(u0)/np.linalg.norm(u0)
    soln = odeint(E,P0,t)
    j = 0
    while j < 10:
        P0 = soln[len(t)-1,:]

```



```

        soln = odeint(E,P0,t)
        j = j+1
        solnT[i,:,:] = soln
    ##
    np.savez_compressed('datos_ciclo_alp_variable.npz',
                       delt = delt, eps = eps,
                       alpha = alpha, t = t,
                       solnT = solnT)

    ##### Ahora reconocemos los periodos y graficamos
    loaded = np.load('datos_ciclo_alp_variable.npz')
    eps = loaded['eps']
    alpha = loaded['alpha']
    delt = loaded['delt']
    solnT = loaded['solnT']
    t = loaded['t']
    #####
    plt.figure()
    periodo = np.zeros(len(alpha))
    dif = np.ones(len(alpha))
    for j in range(len(alpha)):
        if alpha[j]<1.31:
            error = 10**-2
            i = 150 #descarto los primeros elementos
                # para situarme sobre el ciclo
            dif = dif[j]
            while (i< len(t)) and (dif > error):
                u = np.array(solnT[j,0,:])
                v = np.array(solnT[j,i,:])
                dif = np.linalg.norm(u-v)
                i = i+1
            periodo[j] = i*t[len(t)-1]/len(t)
        else:
            error = 10**-3

```

```

    i = 150 #
    dif = diff[j]
    while (i < len(t)) and (dif > error):
        u = np.array(solnT[j,0,:])
        v = np.array(solnT[j,i,:])
        dif = np.linalg.norm(u-v)
        i = i+1
    periodo[j] = i*t[len(t)-1]/len(t)

##
a0 = 1.31712123845#valor aproximado de bifurcacion
def F(x):
    return math.log(1.0/(a0-x))
y = np.zeros(len(alpha))
for j in range(len(alpha)):
    y[j] = periodo[0]*F(alpha[j])/F(alpha[0])
##
plt.plot(alpha, y, color = 'r', marker = 'o')
plt.plot(alpha,periodo, color = 'b',marker = 'o')
plt.xlabel(r'$\alpha$')
plt.ylabel(r'$T_\alpha$')
plt.title(r'$\epsilon = %s$, $\delta = %s$'%(eps,delt))
plt.grid()
plt.show()

```

A.2. Simulación del fenómeno de coloración

Código utilizado para simular el fenómeno de coloración.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import gridspec
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.integrate import odeint
import math

```

```

##
eps = 0.15
delt = 0.5
alp = 1.213908375
b = 1.0
lam = 2
W=np.array([[0,-alp-delt,-alp+eps],
            [-alp+eps,0,-alp-delt],
            [-alp-delt,-alp+eps,0]])
theta = [lam, lam, lam]
#direcciones principales del plano inestable de eq0
u0 = [-0.5,-0.5,1]/np.linalg.norm([-0.5,-0.5,1])
v0 = [1,-1.0,0]/np.linalg.norm([1,-1,0])
def F(P): #funcion inhibitoria
    x,y,z = P
    return (np.absolute(W.dot(P)+theta)
            +(W.dot(P)+theta))/2
def E(P,t):
    x,y,z = P
    Q = np.array(P)
    return -b*Q+F(Q)
fig = plt.figure(1)
#equilibrios del sistema
eq0 = [lam/(1.0+2.0*alp+delt-eps),
       lam/(1.0+2.0*alp+delt-eps),
       lam/(1.0+2.0*alp+delt-eps)]
eq1 = [0.0,
       (-1.0+alp+delt)*lam/(-1.0+alp**2+alp*(delt-eps)-delt*eps),
       (-1.0+alp-eps)*lam/(-1.0+alp**2+alp*(delt-eps)-delt*eps)]
eq2 = [(-1.0+alp-eps)*lam/(-1.0+alp**2+alp*(delt-eps)-delt*eps),
       0.0,
       (-1.0+alp+delt)*lam/(-1.0+alp**2+alp*(delt-eps)-delt*eps)]
eq3 = [(-1.0+alp+delt)*lam/(-1.0+alp**2+alp*(delt-eps)-delt*eps),

```

```

        (-1.0+alp-eps)*lam/(-1.0+alp**2+alp*(delt-eps)-delt*eps),
        0.0]
eq12 = [0, 0, lam]
eq13 = [0, lam, 0]
eq23 = [lam, 0, 0]
#ploteamos el equilibrio eq0 proyectado
#sobre el plano inestable
peq0 = [np.dot(eq0,u0),np.dot(eq0,v0)]
plt.plot([peq0[0]],[peq0[1]],marker = 'o', label = 'eq0')
#buscamos las orbitas que 'salen' de eq0
r = 0.0001
t = np.linspace(0,1000,100000)
th = np.linspace(0,2*math.pi,96)
W1 = [0,-alp-delt,-alp+eps]
R = (np.dot(W1,eq0)+lam)/math.sqrt(np.dot(W1,u0)**2
                                   +np.dot(W1,v0)**2)
R2 = R**2
for i in range(len(th)-1):
    P0 = np.array(eq0)+
        r*math.cos(th[i])*np.array(u0)+
        r*math.sin(th[i])*np.array(v0)
    soln = odeint(E,P0,t)
    pu0 = np.dot(soln,u0).astype(np.double)
    pv0 = np.dot(soln,v0).astype(np.double)
    v1 = np.linalg.norm(soln[len(t)-1,:]-eq12)
    v2 = np.linalg.norm(soln[len(t)-1,:]-eq23)
    v3 = np.linalg.norm(soln[len(t)-1,:]-eq13)
    v = np.amin([v1,v2,v3])
    radio = np.array(pu0**2+pv0**2)
    for j in range(len(t)-1):
        if (radio[j]>=R2):
            pu0[j] = None
            pv0[j] = None

```

```

np.seterr('ignore')#anula los mensajes de error
if v == v1:
    plt.plot(pu0,pv0, color = 'r')
else:
    if v == v2:
        plt.plot(pu0,pv0, color = 'g')
    else:
        plt.plot(pu0,pv0, color = 'b')
##ahora definimos el circulo
ax=fig.add_subplot(1,1,1)
circ=plt.Circle((np.dot(eq0,u0),np.dot(eq0,v0)),
                radius= R ,color='k',
                fill=False)
ax.add_patch(circ)
np.seterr('ignore')
plt.xlabel('u0')
plt.ylabel('v0')
plt.xlim(-R,R)
plt.ylim(-R,R)
plt.title(r'\epsilon=%s$, \delta = %s$, \alpha = %s$'
          %(eps,delt,alp))
plt.grid()
plt.show()

```


Apéndice B

Códigos del capítulo 5

Los siguientes códigos se encuentran escritos en lenguaje Python, y recurren a la librería científica SciPy.

B.1. Exponentes de Lyapunov del sistema de Nakano-Saito

Código con el que se generó la figura 5.7.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from scipy.integrate import odeint
from numpy.linalg import *
import itertools
from tempfile import TemporaryFile
from time import time
#primero calculamos los exponentes y los guardamos
#en un archivo desde el cual se podran plotear
tiempo_inicial = time()
datos_lyapunov_nakano_VR = TemporaryFile()
###
rho = 0.07
b = 0.0
```

```

v_th = 1.0
V_R = np.linspace(-1.5,0.99,45)#
def E(P,t):
    x,y,s = P
    dx = rho*x+y
    dy = -x+rho*y
    ds = 1
    return [dx,dy,ds]
##funcion invertida respecto de x
def E_in(P,t):
    x,y,s = P
    dx = 1
    dy = (-x+rho*y)/(rho*x+y)
    ds = 1/(rho*x+y)
    return [dx,dy,ds]
##busqueda de impactos
tol = 10000
def loc(P0):#localiza el punto de corte
    j = 0
    while j<tol:
        t_k = P0[2]
        ti = np.linspace(t_k,t_k+0.005,100)
        soln = odeint(E,P0,ti)
        Q = soln[len(ti)-1,:]
        x = Q[0]
        if x<v_th:
            P0 = Q
            j = j+1
        else:
            xspan = np.linspace(x,v_th,2000)
            calc = odeint(E_in,Q,xspan)
            P0 = [v_th,calc[len(xspan)-1,1],
                calc[len(xspan)-1,2]]

```



```

        j = tol
    return P0
A = np.array([[rho,1],[-1,rho]])#matriz que se exponencia
lya_VR = np.zeros(len(V_R))
K = 200
v0 = 0.25
d0 = 10**-8#distancia original
#V_R variable
for j in range(len(V_R)):
    v_R = V_R[j]
    def salto(P):#funcion de reseteo
        x,y,s = P
        return [v_R,y+b,s]#
##busqueda de instantes de impactos
    def Yt(v0,K):
        P0 = [v_R,v0,0]
        Yt = np.zeros((K,2))
        Yt[0,:]=[0,v0]#primer paso desde donde arranco
        k = 1
        while k<K:
            Q = loc(P0)
            Yt[k,:] = [Q[2],Q[1]]#primero guardo t_k, luego y_k
            P0 = salto(Q)
            k = k+1
        return Yt
#matriz de salto
    def Q(y):
        SM = [[-(rho*v_R+y+b)/(rho*v_th+y),0],
              [-(v_th-v_R+rho*b)/(rho*v_th+y),1]]
        return np.array(SM)
    def F(P,t):
        P = np.array(P)
        T = A.dot(P)

```

```

    return T
P0 = [v_R, v0+d0]
imp = Yt(v0, K)
for i in range(1, K):
    tspan = np.linspace(imp[i-1, 0], imp[i, 0], 1000)
    soln = odeint(F, P0, tspan)
    D0 = soln[len(tspan)-1, :]
    P0 = Q(imp[i, 1]).dot(D0)
lya_VR[j] = np.log(np.linalg.norm(D0)/d0)/imp[K-1, 0]
###
np.savez_compressed('datos_lyapunov_nakano_VR.npz',
                   rho = rho, b = b, V_R = V_R,
                   lya_VR = lya_VR)
##
tiempo_final = time()
tiempo_total = tiempo_final - tiempo_inicial
print 'el tiempo de ejecucion es (segundos)', tiempo_total
###

```

Apéndice C

Códigos del capítulo 6

Los siguientes códigos se encuentran escritos en lenguaje Python, y recurren a la librería científica SciPy.

C.1. Código para $\lambda_{\text{máx}}$

Código con el que evaluamos el coeficiente $\lambda_{\text{máx}}$. El método utilizado es el denominado *método de las dos partículas*, para una discusión sobre su precisión consúltese [72].

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from matplotlib import gridspec
from scipy.integrate import odeint
#descripcion de las variables:
# F: funcion,
#P0: condicion sobre el atractor,
#d0: separacion inicial,
#v: direccion de la perturbacion inicial,
#N: cantidad de iteraciones del algoritmo,
# M: cantidad de pasos en el rango temporal
def Lyapunov(F,P0,d0,v,N,M):
    t = np.linspace(0,1,M)
```

```

l = np.zeros(N)
P = P0+d0*v
n = 0
K = 1
while n<N:
    Sa = odeint(F,P0,t)
    xa = Sa[M-1,:]
    Sb = odeint(F,P,t)
    xb = Sb[M-1,:]
    d = np.linalg.norm(xa-xb)
    if d == 0:
        l[n]=0
        K = n+1
        n = N
        L = np.mean(l)*N/K
        return L
    else:
        l[n] = np.log2(d/d0)#base estandar, no afecta al signo
        K = n+1
        P0 = xa
        P = xa+d0*(xb-xa)/d
        n = n+1
return np.mean(l)

```

C.2. MSF del sistema de Rössler

Códigos con los que se calcularon los datos de la MSF del sistema de Rössler y se realizó la figura 6.1.

C.2.1. Datos

En el siguiente código, la línea

```
from rutina_lyapunov import *
```

invoca la función definida por el código de la sección anterior.

```

import numpy as np
import math
import random
from scipy.integrate import odeint
from time import time
from tempfile import TemporaryFile
from rutina_lyapunov import *
### Calculo de datos
MSF_rossler = TemporaryFile()
tiempo_inicial = time()
#parametros del sistema
a = 0.2
b = 0.2
c = 7.0
#matriz de coupling
E = np.matrix([[1,0,0],[0,0,0],[0,0,0]])
def F(P,t):#sistema rossler
    x1,x2,x3 = P
    dx1 = -x2-x3
    dx2 = x1+a*x2
    dx3 = b+x1*x3-c*x3
    return [dx1,dx2,dx3]
def Jac_F(P,t):
    x1,x2,x3 = P
    JF = np.array([[0,-1,-1],
                  [1,a,0],
                  [x3,0,x1-c]])
    return JF
def mod_nor(P,t):
    x1,x2,x3,u1,u2,u3,v1,v2,v3 = P
    dx1 = -x2-x3
    dx2 = x1+a*x2

```

```

dx3 = b+x1*x3-c*x3
du1 = -u2-u3+alp*u1-bet*v1
du2 = u1+a*u2
du3 = x3*u1+(x1-c)*u3
dv1 = -v2-v3+bet*u1+alp*v1
dv2 = v1+a*v2
dv3 = x3*v1+(x1-c)*v3
return [dx1,dx2,dx3,du1,
        du2,du3,dv1,dv2,dv3]
#nos paramos sobre el atractor para evaluar el jacobiano
ts = np.linspace(0,3000, 300000)
P0 = np.random.rand(3)
soln = odeint(F,P0,ts)
X0 = soln[len(ts)-1,:]#punto "sobre" el atractor
U0 = 10**(-10)*np.ones(3)
V0 = 10**(-10)*np.ones(3)
P0 = np.concatenate((X0,U0,V0),axis = 0) #condicion inicial
#####
d0 = 10**(-10)#distancia original
N = 10000
M = 2000
v = np.array([0,0,0,1,0,0,0,0,0])
###
K = 40
H = 40
alp_v = np.linspace(-7,1,K)
bet_v = np.linspace(-3,3,H)
MSF = np.zeros((len(alp_v),len(bet_v)))
for i in range(0,len(alp_v)):
    for j in range(0,len(bet_v)):
        alp = alp_v[i]
        bet = bet_v[j]
        MSF[i,j] = Lyapunov(mod_nor,P0,d0,v,N,M)

```

```

tiempo_final = time()
tiempo_total= tiempo_final-tiempo_inicial
print 'el tiempo de ejecucion es (segundos)', tiempo_total
np.savez_compressed('MSF_rossler_datos.npz',
                    alp_v=alp_v,bet_v=bet_v,MSF=MSF)

```

C.2.2. Gráfica

```

import matplotlib.pyplot as plt
from tempfile import TemporaryFile
from matplotlib.mlab import griddata
from matplotlib import cm
from matplotlib.colors import ListedColormap
from matplotlib.colors import LinearSegmentedColormap
from collections import OrderedDict
##Graficamos la MSF
loaded = np.load('MSF_rossler.npz')
x = loaded['alp_v']
y = loaded['alp_v']
Z = loaded['MSF']
Y,X = np.meshgrid(y,x)
origin = 'image'
###
my_dpi = 96
fig, ax = plt.subplots(1,1,figsize=(800/my_dpi, 800/my_dpi),
                       dpi=my_dpi)
CS = ax.contourf(X, Y, Z, 30, cmap=plt.cm.jet,
                 origin=origin)
CS2 = ax.contour(CS, levels=CS.levels[:,2],
                 colors='b',
                 origin=origin)
cbar = fig.colorbar(CS, ax=ax, shrink=1.0)
cbar.ax.set_ylabel('Coeficiente de Lyapunov')

```

```

cbar.add_lines(CS2)
ax.clabel(CS2, fmt='%1.1f',
          colors='k',
          fontsize=11)
plt.xlabel(r'$\alpha$', fontsize=16)
plt.ylabel(r'$\beta$', fontsize=16)
plt.grid()
plt.show()

```

C.3. MSF de la red híbrida

Código con el que se simularon los datos de la figura 6.3. Para la gráfica se utilizó el mismo código que en C.2.2.

C.3.1. Datos

```

import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint
from time import time
from tempfile import TemporaryFile
##MSF de la red híbrida
tiempo_inicial = time()
datos_MSF_nakano_arreglado = TemporaryFile()
### parametros del sistema
rho = 0.1
b = 0.1
v_th = 1.0
v_r = 0.0
###
def E(P,t):
    x,y,s = P
    dx = rho*x+y
    dy = -x+rho*y

```



```

    ds = 1
    return [dx,dy,ds]
##funcion de reseteo
def salto(P):
    x,y,s = P
    return [v_r,y+b,s]
##funcion invertida en x
def E_in(P,t):
    x,y,s = P
    dx = 1
    dy = (-x+rho*y)/(rho*x+y)
    ds = 1/(rho*x+y)
    return [dx,dy,ds]
##
tol = 10000
def loc(P0):#localizamos los puntos de corte
    j = 0
    while j<tol:
        t_k = P0[2]
        ti = np.linspace(t_k,t_k+0.005,100)
        soln = odeint(E,P0,ti)
        Q = soln[len(ti)-1,:]
        x = Q[0]
        if x<v_th:
            P0 = Q
            j = j+1
        else:
            xspan = np.linspace(x,v_th,2000)
            calc = odeint(E_in,Q,xspan)
            P0 = [th,calc[len(xspan)-1,1], calc[len(xspan)-1,2]]
            j = tol
    return P0
###calculamos los puntos

```

```

def Yt(v0,K):
    P0 = [r,v0,0]
    Yt = np.zeros((K,2))
    Yt[0,:]=[0,v0]#primer paso desde donde arranco
    k = 1
    while k<K:
        Q = loc(P0)
        Yt[k,:] = [Q[2],Q[1]]#primero guardo t_k, luego y_k
        P0 = salto(Q)
        k = k+1
    return Yt

###matrices auxiliares
I = np.identity(2)
As = np.array([[rho,1],[-1,rho]])
Ec = np.array([[1,0],[0,0]])
R = np.array([[0,0],[0,1]])
bR = np.kron(I,R)

##calculo de la MSF
def MSF_ev(v0,d0,K):
    MSF = np.zeros((len(Alp),len(Bet)))
    yt = Yt(v0,K)#calculo puntos de cortes y tiempo
    for i in range(len(Alp)):
        for j in range(len(Bet)):
            D0 = np.array([d0,0,0,0])
            alp = Alp[i]
            bet = Bet[j]
            def Sist(P,t):
                P = np.array(P)
                A = np.kron(I,As)
                M = np.array([[alp,-bet],[bet,alp]])
                D = np.kron(M,Ec)
                return A.dot(P)+D.dot(P)
            k = 1

```

```

    while k<K:
        ts = np.linspace(yt[k-1,0],yt[k,0],50)
        soln = odeint(Sist,D0,ts)
        D0_=soln[len(ts)-1,:]
        D0 = bR.dot(D0_)
        k = k+1
    calk = np.linalg.norm(D0)/d0
    if calk<tol_lya:
        calk_lya = tol_lya
    else:
        calk_lya = calk
    L = np.log2(calk_lya)/yt[K-1,0]
    MSF[i,j] = L

return MSF

###
Alp = np.linspace(-7.0,2,90)
Bet = np.linspace(-1.0,1.0,10)
d0 = 10**(-8)
tol_lya = 10**(-100)

###
MSF = MSF_ev(0.25,d0,50)
np.savez_compressed('datos_MSF_nakano.npz', Alp = Alp,
                   Bet = Bet,MSF = MSF)

tiempo_final = time()
tiempo_total= tiempo_final-tiempo_inicial
print 'el tiempo de ejecucion es (segundos)', tiempo_total

```


Bibliografía

- [1] S. Allesina and J. Levine. A competitive network theory of species diversity. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 108(14):5638–5642, 2011.
- [2] D. Amit. *Modeling brain function: The world of attractor neural networks*. Cambridge University Press, 1989.
- [3] Paolo Arena, Arturo Buscarino, Luigi Fortuna, and Mattia Frasca. Separation and synchronization of piecewise linear chaotic systems. *Physical Review E*, 74(2):026212, 2006.
- [4] Jan Awrejcewicz and Claude-Henri Lamarque. *Bifurcation and chaos in nonsmooth mechanical systems*. World Scientific, 2003.
- [5] Antônio M Batista, Sandro E de S Pinto, Ricardo L Viana, and Sergio R Lopes. Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear map lattices with power-law coupling. *Physical Review E*, 65(5):056209, 2002.
- [6] Michael Baumann and Remco I Leine. Synchronization-based estimation of the maximal lyapunov exponent of nonsmooth systems. *Procedia Iutam*, 20:26–33, 2017.
- [7] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, Antonio Giorgilli, and Jean-Marie Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Mechanica*, 15(1):9–20, 1980.
- [8] Stefano Boccaletti, D-U Hwang, Mario Chavez, Andreas Amann, Jürgen Kurths, and Louis M Pecora. Synchronization in dynamical networks: Evolution along commutative graphs. *Physical Review E*, 74(1):016102, 2006.

- [9] Daniel Alberto Burbano Lombana and Mario di Bernardo. Synchronization and local convergence analysis of networks with dynamic diffusive coupling. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 26(11):116308, 2016.
- [10] Guanrong Chen, Jin Zhou, and Zengrong Liu. Global synchronization of coupled delayed neural networks and applications to chaotic cnn models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(07):2229–2240, 2004.
- [11] L Chen, C Qiu, and HB Huang. Synchronization with on-off coupling: Role of time scales in network dynamics. *Physical Review E*, 79(4):045101, 2009.
- [12] Y.M. Chen and J.K. Liu. A study of homotopy analysis method for limit cycle of van der Pol equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(5):1816–1821, 2009.
- [13] U. Chialva and W. Reartes. Heteroclinic cycles in a competitive network. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(12):1730044, 2017.
- [14] U. Chialva and W. Reartes. Synchronicity in non-smooth competitive networks with threshold nonlinearities. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics (forthcoming)*, 2019.
- [15] Ted H Clark, Steven C Malisewski, Patrick R Cooper, William Caldwell Crosswy, and Larry J Crochet. System for automatic synchronization of common file between portable computer and host computer via communication channel selected from a plurality of usable channels there between, September 9 1997. US Patent 5,666,530.
- [16] Stephen Coombes. Neuronal networks with gap junctions: A study of piecewise linear planar neuron models. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 7(3):1101–1129, 2008.
- [17] Stephen Coombes and Ruediger Thul. Synchrony in networks of coupled non-smooth dynamical systems: Extending the master stability function. *European Journal of Applied Mathematics*, 27(6):904–922, 2016.

- [18] Stephen Coombes, Ruediger Thul, and Kyle CA Wedgwood. Nonsmooth dynamics in spiking neuron models. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(22):2042–2057, 2012.
- [19] C. Curto, A. Degeratu, and V. Itskov. Flexible memory networks. *Bulletin of Mathematical Biology*, 74(3):590–614, 2012.
- [20] C. Curto, A. Degeratu, and V. Itskov. Encoding binary neural codes in networks of threshold-linear neurons. *Neural Comput.*, 25(11):2858–2903, November 2013.
- [21] C. Curto and K. Morrison. Pattern completion in symmetric threshold-linear networks. *Neural Comput.*, 28(12):2825–2852, 2016.
- [22] M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth Dynamical Systems. Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, 2008.
- [23] Mario di Bernardo, Chris Budd, and Alan Champneys. Grazing, skipping and sliding: analysis of the non-smooth dynamics of the dc/dc buck converter. *Nonlinearity*, 11(4):859, 1998.
- [24] AF Filippov. Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side. *SIAM Journal on Control*, 5(4):609–621, 1967.
- [25] Kenneth S Fink, Gregg Johnson, Tom Carroll, Doug Mar, and Lou Pecora. Three coupled oscillators as a universal probe of synchronization stability in coupled oscillator arrays. *Physical Review E*, 61(5):5080, 2000.
- [26] Richard FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical journal*, 1(6):445–466, 1961.
- [27] Pascal Fries, John H Reynolds, Alan E Rorie, and Robert Desimone. Modulation of oscillatory neuronal synchronization by selective visual attention. *Science*, 291(5508):1560–1563, 2001.
- [28] Hirokazu Fujisaka and Tomoji Yamada. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of theoretical physics*, 69(1):32–47, 1983.

- [29] S. Grossberg. Nonlinear neural networks: Principles, mechanisms, and architectures. *Neural networks*, 1(1):17–61, 1988.
- [30] R. H. R. Hahnloser, H. S. Seung, and J. J. Slotine. Permitted and forbidden sets in symmetric threshold-linear networks. *Neural Computation*, 15(3):621–638, 2003.
- [31] R. L. T. Hahnloser. On the piecewise analysis of networks of linear threshold neurons. *Neural Networks*, 11(4):691–697, 1998.
- [32] N Hinrichs, M Oestreich, and K Popp. Dynamics of oscillators with impact and friction. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(4):535–558, 1997.
- [33] M. W. Hirsch. Systems of differential equations which are competitive or cooperative: I. limit sets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 13(2):167–179, 1982.
- [34] Morris W Hirsch. Systems of differential equations which are competitive or cooperative: Iii. competing species. *Nonlinearity*, 1(1):51, 1988.
- [35] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [36] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conductance and excitation in nerve. *Journal of Physiology*, 117:500–544, 1952.
- [37] J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 79(8), 1982.
- [38] Robert C Hudson and CR Finfgeld. Laplace transform solution for the oscillator damped by dry friction. *American Journal of Physics*, 39(5):568–570, 1971.
- [39] V. Itskov, C. Curto, E. Pastalkova, and G. Buzsáki. Cell assembly sequences arising from spike threshold adaptation keep track of time in the hippocampus. *The Journal of Neuroscience*, 31(8):2828–2834, 2011.
- [40] Eugene M Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience*. MIT press, 2007.

- [41] Wolfgang Kinzel, Anja Englert, Georg Reents, M Zigzag, and I Kanter. Synchronization of networks of chaotic units with time-delayed couplings. *Physical Review E*, 79(5):056207, 2009.
- [42] Marek Kuczma. *An introduction to the theory of functional equations and inequalities: Cauchy's equation and Jensen's inequality*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [43] Markus Kunze. *Non-smooth dynamical systems*, volume 1744. Springer Science & Business Media, 2000.
- [44] Y Kuramoto and H Araki. Proceedings of the international symposium on mathematical problems in theoretical physics, 1975.
- [45] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 1995.
- [46] I Richard Lapidus. Motion of a harmonic oscillator with sliding friction. *American Journal of Physics*, 38(11):1360–1361, 1970.
- [47] J. Levine, P. Adler, and S. Allesina. Beyond pairwise mechanisms of species coexistence in complex communities. *Nature*, 546(7656):56–64, 2017.
- [48] AM Lyapunov. Obschaya zadacha ob ustoicivosti dvizeniya (in russian)[the general problem of the stability of motion]. *Kharkov Mathematical Society, Kharkov*, 1892.
- [49] Milos Marek and Ivan Stuchl. Synchronization in two interacting oscillatory systems. *Biophysical chemistry*, 3(3):241–248, 1975.
- [50] HP McKean Jr. Nagumo's equation. *Advances in mathematics*, 4(3):209–223, 1970.
- [51] Catherine Morris and Harold Lecar. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophysical journal*, 35(1):193–213, 1981.
- [52] K. Morrison, A. Degeratu, V. Itskov, and C. Curto. Diversity of emergent dynamics in competitive threshold-linear networks: a preliminary report. *arXiv*, page 12 pp, 2016.

- [53] K. Morrison, A. Degeratu, V. Itskov, and C. Curto. Diversity of emergent dynamics in competitive threshold-linear networks: a preliminary report. *arXiv preprint arXiv:1605.04463*, 2016.
- [54] Peter C Müller. Calculation of lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(9):1671–1681, 1995.
- [55] Hidehiro Nakano and Toshimichi Saito. Basic dynamics from a pulse-coupled network of autonomous integrate-and-fire chaotic circuits. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(1):92–100, 2002.
- [56] Rachel Nicks, Lucie Chambon, and Stephen Coombes. Clusters in nonsmooth oscillator networks. *Physical Review E*, 97(3):032213, 2018.
- [57] Arne B Nordmark. Existence of periodic orbits in grazing bifurcations of impacting mechanical oscillators. *Nonlinearity*, 14(6):1517, 2001.
- [58] M. Oestreich, N. Hinrichs, and K. Popp. Bifurcation and stability analysis for a non-smooth friction oscillator. *Archive of Applied Mechanics*, 66(5):301–314, 1996.
- [59] Valery Iustynovich Oseledec. A multiplicative ergodic theorem. liapunov characteristic number for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19:197–231, 1968.
- [60] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical review letters*, 80(10):2109, 1998.
- [61] Lou Pecora, Tom Carroll, Gregg Johnson, Doug Mar, and Kenneth S Fink. Synchronization stability in coupled oscillator arrays: Solution for arbitrary configurations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(02):273–290, 2000.
- [62] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, Jurgen Kurths, and Jürgen Kurths. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, volume 12. Cambridge university press, 2003.
- [63] Y. Rondelez. Competition for catalytic resources alters biological network dynamics. *Physical review letters*, 108(1):018102, 2012.

- [64] Rajarshi Roy and K Scott Thornburg Jr. Experimental synchronization of chaotic lasers. *Physical Review Letters*, 72(13):2009, 1994.
- [65] D. J. W. Simpson. *Bifurcations in piecewise-smooth continuous systems*. World Scientific, 2010.
- [66] Steve Smale. On the differential equations of species in competition. *Journal of Mathematical Biology*, 3(1):5–7, 1976.
- [67] Francesco Sorrentino. Synchronization of hypernetworks of coupled dynamical systems. *New Journal of Physics*, 14(3):033035, 2012.
- [68] Andrzej Stefanski. Estimation of the largest lyapunov exponent in systems with impacts. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(15):2443–2451, 2000.
- [69] Andrzej Stefański and Tomasz Kapitaniak. Estimation of the dominant lyapunov exponent of non-smooth systems on the basis of maps synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, 15(2):233–244, 2003.
- [70] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications To Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press, 1994.
- [71] Jie Sun, Erik M Bollt, and Takashi Nishikawa. Master stability functions for coupled nearly identical dynamical systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 85(6):60011, 2009.
- [72] G Tancredi, A Sánchez, and F Roig. A comparison between methods to compute lyapunov exponents. *The Astronomical Journal*, 121(2):1171, 2001.
- [73] Annette F Taylor, Mark R Tinsley, Fang Wang, Zhaoyang Huang, and Kenneth Showalter. Dynamical quorum sensing and synchronization in large populations of chemical oscillators. *Science*, 323(5914):614–617, 2009.
- [74] JMT Thompson and Rf Ghaffari. Chaos after period-doubling bifurcations in the resonance of an impact oscillator. *Physics Letters A*, 91(1):5–8, 1982.
- [75] Francisco Varela, Jean-Philippe Lachaux, Eugenio Rodriguez, and Jacques Martinerie. The brainweb: phase synchronization and large-scale integration. *Nature reviews neuroscience*, 2(4):229, 2001.

- [76] Alan Wolf, Jack B Swift, Harry L Swinney, and John A Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3):285–317, 1985.