



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Departamento de Ingeniería

TESIS DE MAGISTER EN INGENIERÍA

**VIBRACIONES LIBRES DE PÓRTICOS CON
VINCULACIÓN ELÁSTICA**

POR

RATAZZI ALEJANDRO RUBEN

BAHÍA BLANCA ARGENTINA

2017

Este trabajo se llevó a cabo bajo la supervisión:

De la Dra. Ing. Diana Virginia Bambill, Profesora Titular del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur e Investigadora Independiente del CONICET, en carácter de Directora de Tesis.

Del Dr. Ing. Carlos Adolfo Rossit, Profesor Titular del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur e Investigador Independiente del CONICET, en carácter de Co-Director de Tesis.

Prefacio:

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Magister en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Área de Estabilidad, dependiente del Departamento de Ingeniería, durante el período comprendido entre octubre de 2011 y agosto de 2017, bajo la dirección de la Dra. Ing. Diana Virginia Bambill, Profesora Titular del Área de Estabilidad, en el Departamento Ingeniería de la UNS, y del Dr. Ing. Carlos Adolfo Rossit, Profesor Titular del Área de Estabilidad, en el Departamento de Ingeniería de la UNS.

17 de Noviembre 2017

Departamento de Ingeniería

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Alejandro R. Ratazzi

Agradecimiento

Quisiera agradecer a los Doctores Diana V. Bambill y Carlos A. Rossit quienes han dedicado su valioso tiempo en la dirección de esta tesis con la mejor predisposición y entusiasmo, brindándome sus consejos y conocimientos.

Al Magister Santiago Maiz, jefe del Laboratorio de Vibraciones. Por su predisposición a compartir sus conocimientos en la obtención de los resultados experimentales. También extender mi agradecimiento a Gabriel Leguizamon, Técnico del Laboratorio de Vibraciones. Por su colaboración y excelente predisposición.

A la Universidad Nacional del Sur y en especial al Departamento de Ingeniería, que generosamente brindó su prestigioso marco e infraestructura, tanto para el desarrollo de mi carrera de grado como para mis estudios de posgrado.

A mi querida esposa María Emma porque sin la ayuda, el cariño y la paciencia que me brindó nada de esto sería realidad.

A mis compañeros de oficina y del área, por brindarme su amistad y compañía.

Resumen.

El este trabajo se analiza el comportamiento dinámico de una estructura aporticada, con una de sus vinculaciones externas con propiedades elásticas y una rótula elástica intermedia en el dintel. El procedimiento analítico para estudiar la conducta dinámica de la estructura se desarrolló en base al cálculo de variaciones, obteniendo así las ecuaciones diferenciales gobernantes y el problema de contorno de la estructura estudiada. El método de separación de variables fue utilizado para hallar las frecuencias y las formas modales.

Los resultados obtenidos fueron comparados con valores disponibles en la literatura. También se obtuvieron resultados a través de un modelo experimental de laboratorio construido al efecto y por medio de un modelo de código de elementos finitos de carácter comercial.

En el Capítulo I para introducir el cálculo de variaciones, se ejemplifica la resolución de un problema relativamente sencillo como es el de vibraciones libres de una viga de dos tramos con vínculos elásticos externos e internos. De esta manera se obtienen las ecuaciones diferenciales y el problema de contorno de la viga.

En el Capítulo II se analiza el comportamiento dinámico de un pórtico formado por una columna y un dintel vinculados rígidamente entre sí, con una de sus vinculaciones externas con propiedades elásticas y una rótula elástica intermedia en el dintel. El procedimiento para estudiar la conducta dinámica de la estructura se desarrolla en base al cálculo de variaciones, obteniendo así las ecuaciones diferenciales gobernantes y el problema de contorno del pórtico en L. El método de separación de variables es utilizado para hallar las frecuencias y las formas modales.

Los resultados numéricos son calculados por medio de algoritmos realizados con el software Wolfram Mathematica (2012). Estos resultados se presentan en dos secciones: En primera sección se le da diferentes valores a las constantes de los resortes de los vínculos elásticos, y se los compara con resultados similares en la literatura. En segundo lugar se toma diferentes constantes de las condiciones de vínculo para estudiar su influencia en el comportamiento dinámico de la estructura.

Las estructuras de acero sujetas a cargas variables o repetidas pueden fallar estando en servicio con cargas significativamente menores a su resistencia estática. Este tipo de falla, resultan del crecimiento de las fisuras que se encuentran sometidas a cargas variables.

A través del estudio de las propiedades dinámicas de una estructura, se pueden desarrollar métodos no destructivos que nos permitan acotar la zona de búsqueda de una falla.

En el Capítulo III se estudia en forma experimental el comportamiento dinámico de un marco de dos tramos con una fisura en una posición genérica, con el objetivo de determinar un procedimiento analítico que permita predecir los parámetros dinámicos de una estructura fisurada.

Se miden en el laboratorio las primeras frecuencias naturales de un modelo fisurado con diferentes vínculos externos, empotrado-empotrado y empotrado-libre.

Para el modelo matemático se separa la viga horizontal en dos tramos y en el lugar de la grieta se coloca un resorte rotacional. El desarrollo consiste en una simplificación de una grieta en donde no se involucran los parámetros reales de la misma. Es importante trabajar con la teoría de vigas y suavizar la continuidad con las condiciones de borde.

Para expresar la flexibilidad del resorte utilizamos la teoría propuesta por Chondros (1998), ya que es la más utilizada en la literatura.

En el Capítulo IV, a modo de introducción al tema, se estudia de forma experimental el comportamiento dinámico de una viga cantiléver. Con el objetivo de, por medio de un caso sencillo, introducir la aplicación de la Transformada Wavelet (TW) al procesado de señales e imágenes que es otra herramienta, muy reciente en el tiempo, para la detección temprana de fisuras en una estructura. El cual será desarrollado con mayor profundidad en futuros trabajos.

Publicaciones que han resultado como consecuencia de esta tesis

De los estudios desarrollados durante el trabajo de tesis han surgido las siguientes publicaciones:

En Revistas:

Rossit C.A., Bambill D.V., Ratazzi A.R., y Maiz S., “Vibrations of L-Shaped Beam Structures With a Crack: Analytical Approach and Experimental Validation”, *Experimental Techniques*, 40 (3), pp. 1033-1043. 2016.

Ratazzi A. R., Bambill D. V., y Rossit C. A., “Free Vibrations of Beam System Structures with Elastic Boundary Conditions and an Internal Elastic Hinge”, *Chinese Journal of Engineering*, vol. 2013 Article ID 624658, 10 pages , 2013. DOI: 10.1155/2013/624658. 2013.

En Congreso Internacional:

Ratazzi A. R., Bambill D. V., y Rossit C. A., “Dynamic behavior of framed structures with anelastic internal hinge”, *Blucher Mechanical Engineering Proceedings*, 10th World Congress on Computational Mechanics (WCCM) , Sao Pablo, Brasil,. vol. 1, pp. 4483–4498. 2014.

En Congresos Nacionales:

Ratazzi A. R., Bambill D. V., Rossit C. A. y Maiz S., “Aplicación de transformada continua wavelet en la detección de fisuras en estructuras de vigas” *Mecánica Computacional*, vol. 34, pp. 713-728, XXIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2016), Ciudad de Córdoba. 2016.

Ratazzi A. R., Bambill D. V., y Rossit C. A., “Vibrations of a frame structure with a crack” *Mecánica Computacional*, vol. 32, pp. 3563-3574, XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2013), Ciudad de Mendoza. 2013.

Ratazzi A. R., Bambill D. V., Rossit C. A. y Ciccioli C., “Vibraciones Libres de Pórticos con Vínculos y Uniones Flexibles” *Mecánica Computacional*, vol 32, pp. 2279-2298. XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2013), Ciudad de Mendoza. 2013.

Ratazzi A. R., Bambill D. V. y Rossit C. A., “Vibraciones en pórticos con conexiones intermedias elásticas”, *Mecánica Computacional*, vol. 31, pp. 2511–2627, X Congreso Argentino de Mecánica Computacional (MECOM 2012), Ciudad de Salta. 2012.

Ratazzi A. R., Grossi R. O. y Bambill D. V., “Vibraciones de una estructura aporticada con una rotula intermedia elásticamente restringida contra rotación y traslación”, *Mecánica Computacional*, vol. 30, pp. 2499–2516, XIX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2011), Rosario. 2011.

También se mencionan a continuación dos colaboraciones en trabajos realizados al inicio de mis estudios de magister sobre temas de vinculación elástica de estructuras. Los trabajos fueron publicados y en ambos que soy coautor.

Co autor de dos trabajos relacionados al tema de vínculos elásticos:

Bambill, D. V., Felix, D. H., Rossi, R. E. y Ratazzi, A. R., *Free Vibration Analysis of Centrifugally Stiffened Non Uniform Timoshenko Beams*, Mechanical Engineering, Dr. Murat Gokcek (Ed.), InTech, DOI: 10.5772/34631. (Chapter 13) Available from: <https://www.intechopen.com/books/mechanical-engineering/free-vibration-analysis-of-centrifugally-stiffened-non-uniform-timoshenko-beams>. 2012.

Bambill, D.V., Rossit, C.A., Rossi, R.E., Felix, D.H. y Ratazzi, A.R., "Transverse free vibration of non uniform rotating Timoshenko beams with elastically clamped boundary conditions", *Meccanica*, 48(6), 1289-1311. 2013.

	Páginas
CAPÍTULO I: El cálculo de Variaciones	1
1.1 Introducción	1
1.1.1 Un breve comentario sobre la historia del cálculo de variaciones	1
1.2 Aplicación del cálculo de Variaciones: Problema de Contorno.	3
1.2.1 Viga de dos tramos con vínculos elásticos	3
1.2.2 Energía interviniente en el sistema.	4
1.2.3 Modelo Adimensional	5
1.2.4 Construcción del Funcional: Principio de Hamilton.	6
1.3 Conclusiones	16
1.4 Referencias	17
CAPÍTULO II: Semi-pórtico con vinculación elástica. Análisis dinámico mediante el método variacional.	18
2.1 Introducción.	18
2.2 Descripción del modelo estructural propuesto	19
2.3 Desarrollo analítico para la obtención del problema de contorno.	21
2.3.1 Adimensionalizado de las variables y parámetros.	22
2.3.2 Funcional del sistema estructural.	23
2.3.3 Problema de contorno: Ecuaciones Diferenciales Gobernantes y Condiciones de Borde	24
2.4 Comparación del modelo analítico con otros modelos.	26
2.4.1 Verificación del procedimiento analítico	26
2.4.1.1 Modelo experimental:	26
2.4.1.2 Modelo de Elementos Finitos:	29
2.4.2 Comparación del modelo con vinculación externa clásica.	29
2.4.2.1 Modelos: Empotrado-Empotrado y Empotrado Libre	30

2.4.2.2 Modelo Empotrado-Articulado	32
2.5 Análisis dinámico de la estructura: Combinación de diferentes condiciones en los vínculos elásticos del extremo F.	34
2.6 Análisis dinámico de la estructura: Combinación de diferentes condiciones en el resorte rotacional en el punto P.	42
2.7 Conclusiones.	54
2.8 Referencias	55
CAPÍTULO III: Simulación analítica de una Fisura, Validación experimental	58
3.1 Introducción.	58
3.2 Modelo Analítico: Teoría de resorte Chondros & Dimarogonas.	60
3.2.1 Flexibilidad local en el centro de la viga.	60
3.3 Modelo Experimental de Laboratorio.	62
3.4 Resultados Numéricos.	64
3.5 Detección de fisuras: Método inverso.	72
3.6 Aplicación del método inverso al modelo de laboratorio	73
3.7 Conclusiones.	79
3.8 Referencias	80
Capitulo IV: Conclusiones Generales e introducción a futuras líneas de investigación.	83
4.1 Conclusiones Generales	83
4.2 Introducción a futuras líneas de investigación. Aplicación de La transformada de Wavelets a señales	84
4.2.1 Breve revisión bibliográfica.	84
4.3 Detección de fisuras por transformada especial de wavelet.	85
4.3.1 Transformada de Wavelets: Conceptos Generales.	85
4.3.2 Características y propiedades de las Wavelets.	85
4.3.3 Clasificación de wavelets.	87
4.3.4 Transformada de wavelets.	87

4.4 Modelo experimental	88
4.5 Adquisición experimental de la línea de deflexión de la viga fisurara	88
4.6 Aplicación de la transformada de wavelet a la señal.	90
4.7 Conclusiones	92
4.8 Referencias	93
Apéndice I (Trabajos publicados en revistas)	94

1 Capítulo I: El cálculo de Variaciones

1.1 Introducción

1.1.1. Un breve comentario sobre la historia del cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones es una rama clásica de las matemáticas que se ocupa del desarrollo de formas óptimas, estados o procesos en los que el criterio de optimización se da en la forma de una integral que implica una función desconocida. Éste es utilizado para demostrar la existencia o deducir las propiedades de alguna función que realiza el valor óptimo para esta integral. Además permite la obtención en forma precisa y eficaz de las ecuaciones diferenciales y problemas de contorno, que se describen en la teoría y aplicación de sistemas mecánicos vibrantes.

La primera persona que se considera resolvió un problema científico de minimización fue Hero de Alejandría que trabajó sobre problemas de óptica y vivió en el primer siglo de nuestra era.

Pappus, trabajó sobre problemas isoperimétricos a partir de la idea de algunos reyes de regalar a sirvientes y militares, porciones de tierra que ellos puedan trabajar en un período de tiempo dado. Nace entonces, el problema de encerrar con una curva plana la mayor superficie posible. Si bien Pappus no fue el primero en trabajar con este tema, él en sus libros recolectó y sistematizó resultados de otros autores como Euclid, Arquimides, Zenodorus y Hypsicles todos estos en un período aproximado que va desde el 300 a C al 140 a C.

Más tarde aportes importantes fueron desarrollados en Europa en el siglo XVII, tales como el trabajo de Fermat en el año 1662 sobre geometría óptica, el problema desarrollado por Newton en el año 1685 para estudiar los cuerpos en movimiento en un fluido. Uno de los problemas más famoso es el de las curvas de Braquistócrona , es la curva entre dos puntos que es recorrida en menor tiempo, por un cuerpo que comienza en el punto inicial con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto, bajo acción de una fuerza de gravedad constante y suponiendo que no existe fricción. Ésta fue formulada por Jhoann Bernoulli en 1696 e inspirada por un problema similar planteado por Galileo en 1638.

En 1744, Leonhard Euler, publicó su libro “Método de búsqueda de líneas curvas con propiedades de máximo o mínimo, o la resolución del problema isoperimétrico tomado en su sentido más amplio”, muchos matemáticos consideran en éste el inicio del Cálculo de Variaciones.

Posteriormente Lagrange realizó un amplio desarrollo del tema y publicó en 1762 una memoria en donde introduce el concepto de variación de una integral con el símbolo δ para representarla.

Luego diversos autores trabajaron sobre el tema: Bliss, Bolza, Carathéodory, Clebsch, Hahn, Hamilton, Hilbert, Kneser, Jacobi, Mayer, Weierstrass, sólo para citar algunos.

En el siglo XIX en paralelo con algunos de los trabajos mencionados anteriormente surge uno de los trabajos más célebres del cálculo de variaciones, el estudio de la integral de Dirichlet, éste era un problema de integrales múltiples y fue motivado por su relación con la ecuación de Laplace. Muchas de las contribuciones importantes fueron hechas por Dirichlet, Gauss, Thompson y Riemann entre otros. Fue Hilbert que, a la vuelta del siglo XX, resolvió el problema y fue inmediatamente después imitado por Lebesgue y luego Tonelli. Sus métodos para resolver el problema eran, en esencia, lo que ahora se conoce como los métodos directos del cálculo de variaciones.

Podemos enumerar diversos ejemplos sobre funcionales, para el desarrollo de nuestro trabajo nos basaremos en el ejemplo del funcional para sistemas mecánicos.

Si tenemos N partículas con sus respectivas masas m_i y sus posiciones en el tiempo t son dadas por $u_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)) \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n \Rightarrow$ la energía cinética es

$$T(u') = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i \times |u'|^2,$$

y $U=U(t,u)$ la energía potencial, entonces nos queda el funcional

$$f(t,u,\xi) = T(\xi) - U(t,u)$$

En este capítulo, se presentará el cálculo de variaciones aplicado a un problema de vibraciones libres tratados en libros clásicos como: Timoshenko S. y Young D.H.,(1956), Warburton, G.B., (1976) y Blevins, R., (1993) . El propósito será desarrollar, por medio de una estructura de baja complejidad, las ecuaciones diferenciales y el problema de contorno de una viga de dos tramos con vínculos elásticos y una rótula elástica intermedia utilizando dicho método.

1.2. Aplicación del cálculo de Variaciones: Problema de Contorno.

1.2.1. Viga de dos tramos con vínculos elásticos

Su aplicación al estudio de estructuras resistentes ha sido extensamente desarrollada en los trabajos de investigación de Dr. Ricardo Oscar Grossi y sus colaboradores, debiendo consignarse un libro de texto en donde el tema es tratado rigurosamente, Grossi, R.O, (2010).

Otros autores que trataron el tema son; Wang, C.Y. y Wang, C.M, (2001), Bernal (2004), Albarracín C. M. y Grossi R. O (2005), Chang, T.P., Lin, G.L. y Chang, E.(2006), Grossi R. O. y Quintana M. V. (2008), Wu, J.J,(2011), Raffo, J. F.(2013), Grossi R. O.(2013).

No obstante y para dar completitud a la presente tesis, se ejemplifica la utilización del cálculo variaciones en la resolución de un problema relativamente sencillo como es el de vibraciones libres de una viga de dos tramos con vínculos elásticos externos e internos.

Como se muestra en la Figura 1 el sistema coordinado tiene su origen en el extremo izquierdo de la viga. La viga está compuesta por dos tramos de viga de distinta longitud, y corresponden a las secciones transversales comprendidas entre $[0, c]$ para el primer tramo y $[c, l]$ para el segundo en donde l es la longitud total de la viga. En la sección $x=c$, unión de ambos tramos, hay una rótula elástica representada mediante un resorte a rotación de constante r_m y un resorte a traslación de constante t_m . También se consideran propiedades elásticas para los vínculos exteriores de la estructura. Las condiciones elásticas se representan mediante resortes a traslación, con constantes t_{wi} y t_{ui} , y a rotación, con constantes r_i .

Tomando conceptos del trabajo realizado por Ricardo Oscar Grossi (2010), consideramos que el comportamiento flexional de los miembros de la viga es adecuadamente descrito por la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y simultáneamente se tendrá en cuenta la deformación axial.

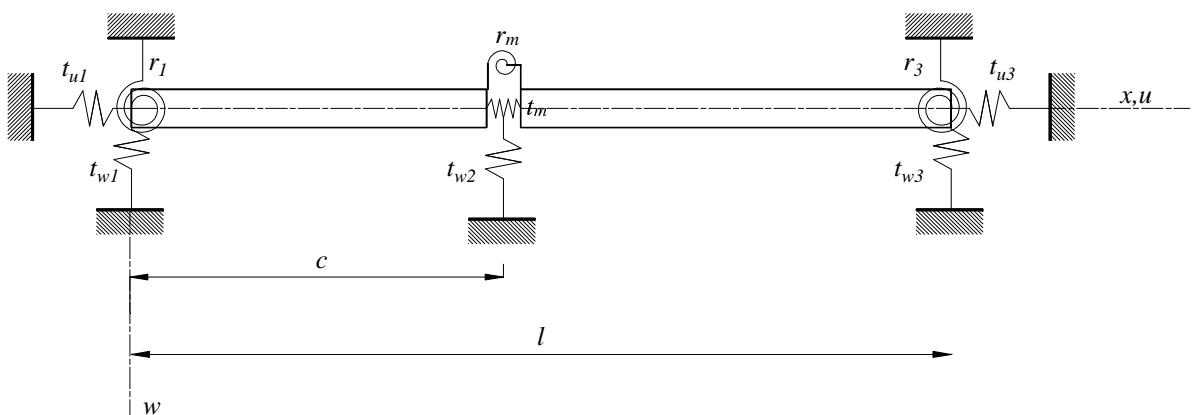


Figura 1.1: Viga de dos tramos elásticamente restringida

1.2.2. Energía interviniente en el sistema.

Si tenemos en cuenta los vínculos elásticos externos: t_{w1} , t_{w2} , t_{w3} , t_{u1} , t_{u3} , r_1 , r_3 y los vínculos intermedios entre los tramos de viga: r_m , t_m , y consideramos que los desplazamientos transversal w y axial u de la línea media de la viga están descriptos por las funciones:

$$w = w(x, t), \quad u = u(x, t), \quad \forall x \in [0, l]. \quad (1.1)$$

El mecanismo de funcionamiento de la rótula requiere que los desplazamientos transversales de la viga sean continuos en el punto $x=c$, esto es

$$w_1(c^+, t) = w_2(c^-, t),$$

y las secciones transversales a las que está vinculada puedan desplazarse longitudinalmente y girar libremente, es decir que generan una discontinuidad

$$\begin{aligned} u_1(c^+, t) &\neq u_2(c^-, t) \\ \frac{\partial w_1}{\partial x}(c^+, t) &\neq \frac{\partial w_2}{\partial x}(c^-, t), \end{aligned}$$

donde la notación c^+ indica cuando x se aproxima a c para valores mayores que c y c^- cuando x se acerca a c para valores menores que esta.

La energía potencial del sistema estructural estará dada por

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \left(\int_0^c \left[E_1 I_1 \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(x, t) \right]^2 + E_1 A_1 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, t) \right]^2 \right] dx + \right. \\ & \int_c^l \left[E_2 I_2 \left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(x, t) \right]^2 + E_2 A_2 \left[\frac{\partial u_2}{\partial x}(x, t) \right]^2 \right] dx + \\ & t_{u1} [u_1(0, t)]^2 + t_{w1} [w_1(0, t)]^2 + r_1 \left[\frac{\partial w_1}{\partial x}(0, t) \right]^2 + \\ & t_{w2} [w_1(c, t)]^2 + r_m \left[\frac{\partial w_2}{\partial x}(c^-, t) - \frac{\partial w_1}{\partial x}(c^+, t) \right]^2 + t_m [u_2(c^-, t) - u_1(c^+, t)]^2 \\ & \left. + t_{u3} [u_2(l, t)]^2 + t_{w3} [w_2(l, t)]^2 + r_3 \left[\frac{\partial w_2}{\partial x}(l, t) \right]^2 \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde E_i es el módulo de elasticidad de Young, I_i es el momento de inercia de la sección transversal respecto a su eje de flexión y A_i es el área de la sección transversal. Con el subíndice $i = 1$ ó 2 se indica la pertenencia al tramo 1 o al tramo 2 respectivamente.

Los términos:

$$\begin{aligned}
& t_{u1} [u_1(0,t)]^2 + t_{w1} [w_1(0,t)]^2 + r_1 \left[\frac{\partial w_1}{\partial x}(0,t) \right]^2 + \\
& t_{w2} [w_1(c,t)]^2 + t_{u3} [u_2(l,t)]^2 + t_{w3} [w_2(l,t)]^2 + r_3 \left[\frac{\partial w_2}{\partial x}(l,t) \right]^2,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

representan la contribución a la energía de deformación de los vínculos elásticos externos de la viga. En tanto los términos:

$$r_m \left[\frac{\partial w_2}{\partial x}(c^-,t) - \frac{\partial w_1}{\partial x}(c^+,t) \right]^2 + t_m [u_2(c^-,t) - u_1(c^+,t)]^2, \tag{1.4}$$

representan la contribución a la energía de deformación de la unión elástica entre ambos tramos de viga, en ellas aparecen las constantes de los resortes correspondientes: r_m y t_m , que están ubicados a una distancia c del origen.

La energía cinética está dada por la expresión

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \int_0^c \rho_1 A_1 \left(\left[\frac{\partial w_1}{\partial t}(x,t) \right]^2 + \left[\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) \right]^2 \right) dx \\
& + \frac{1}{2} \int_c^l \rho_2 A_2 \left(\left[\frac{\partial w_2}{\partial t}(x,t) \right]^2 + \left[\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t) \right]^2 \right) dx.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

En donde ρ_i es la densidad del material del tramo i de viga ($i=1,2$).

1.2.3. Modelo Adimensional

Para el trabajo analítico, por conveniencia se adimensionalizó la coordenada espacial que indica la posición de las distintas secciones de cada viga y los desplazamientos w y u , respecto a la longitud total

$$X_i = \frac{x_i}{l}, W_i = \frac{w_i(X_i, t)}{l}, U_i = \frac{u_i(X_i, t)}{l}. \tag{1.6}$$

En cuanto a las características físicas y geométricas de las vigas se definieron parámetros adimensionales según se indica

$$v_{li} = \frac{l_i}{l}, v_{EIi} = \frac{(EI)_i}{EI}, v_{EAi} = \frac{(EA)_i}{EA}, v_{\rho Ai} = \frac{(\rho A)_i}{\rho A}, \quad i = 1, 2; \tag{1.7}$$

donde $l_1=c$; $l_2=l-c$; $(EI)_i=E_i I_i$; $E=E_1$; $I=I_1$; $A=A_1$; $\rho=\rho_1$.

Finalmente las constantes de rigidez de los vínculos elásticos fueron adimensionalizados según se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
T_{w_j} &= t_{w_j} \frac{l^3}{EI} \text{ con } j=1,2,3. \\
T_{u_j} &= t_{u_j} \frac{l^3}{EI}, R_j = r_j \frac{l}{EI} \text{ con } j=1,3. \\
T_m &= t_m \frac{l^3}{EI}, R_m = r_m \frac{l}{EI}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

1.2.4. Construcción del Funcional: Principio de Hamilton.

El principio de Hamilton requiere que entre dos instantes t_0 y t_1 para los cuales las posiciones del sistema son conocidas, éste ejecute un movimiento que hace estacionario el funcional

$$J(W, U) = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt;$$

donde $L = (T - U)$ es el conocido lagrangiano del movimiento. El funcional en el que vamos a trabajar, está compuesto por funciones reales definidas en ciertos subconjuntos de espacios vectoriales.

Teniendo en cuenta las expresiones de la energía, la integral del lagrangiano viene dada por

$$\begin{aligned}
J(W_1, W_2, U_1, U_2) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^c \left[(\rho_1 A_1) l_1^3 \left(\left[\frac{\partial W_1}{\partial t}(X, t) \right]^2 + \left[\frac{\partial U_1}{\partial t}(X, t) \right]^2 \right) - \right. \right. \\
&\left. \left(\frac{E_1 I_1}{l_1} \frac{v_{E1}}{v_{l_1}} \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(X, t) \right]^2 + \frac{E_1 A_1}{l_1} \frac{v_{EA_1}}{v_{l_1}} \left[\frac{\partial U_1}{\partial X_1}(X, t) \right]^2 \right) \right] dX - \\
&\frac{E_1 I_1}{l_1} \left(R_1 \left[\frac{\partial W_1}{\partial X_1}(0, t) \right]^2 + T_{w1} [W_1(0, t)]^2 + T_{w2} [W_1(c^+, t)]^2 \right) - \\
&\frac{E_1 A_1}{l_1} T_{u1} [U_1(0, t)]^2 + \int_c^l \left[\rho_2 A_2 l_2^3 v_{\rho A_2} v_{l_2}^3 \left(\left[\frac{\partial W_2}{\partial t}(X, t) \right]^2 + \left[\frac{\partial U_2}{\partial t}(X, t) \right]^2 \right) - \right. \\
&\left. \left(\frac{E_2 I_2}{l_2} \frac{v_{E2}}{v_{l_2}} \left[\frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(X, t) \right]^2 + \frac{E_2 A_2}{l_2} \frac{v_{EA_2}}{v_{l_2}} \left[\frac{\partial U_2}{\partial X_2}(X, t) \right]^2 \right) \right] dX - \\
&\frac{E_2 I_2}{l_2} \left(R_3 \left[\frac{\partial W_2}{\partial X_2}(l, t) \right]^2 + T_{w3} [W_2(l, t)]^2 + \right. \\
&\left. R_m \left[\frac{\partial W_2}{\partial X_2}(c^-, t) - \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(c^+, t) \right]^2 \right) - \frac{E_2 A_2}{l_2} \left(T_{u3} [U_2(l, t)]^2 + T_m [U_2(c^-, t) - U_1(c^+, t)]^2 \right) \left. \right\} dt.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Por simple observación, (1.9) revela que define un funcional que depende de cuatro funciones reales: U_i, W_i con $i, 1, 2$

Por lo tanto, es conveniente introducir las siguientes funciones vectoriales:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{w}), \mathbf{u} = (U_1, U_2), \mathbf{w} = (W_1, W_2), \tag{1.10}$$

Si G es un conjunto acotado de \mathbb{R}^n y su entorno es ∂G se denota con $\bar{G}=G\cup\partial G$. Entonces, la notación $C^k(\bar{G})$ indica al sub conjunto del espacio $C^k(G)\cap C(\bar{G})$ compuesto por la funciones que son continuas en el cerrado \bar{G} y sus derivadas parciales hasta las de orden k inclusive, son continuas en el abierto G y admite extensiones continuas hasta el entorno ∂G . Por lo tanto decimos que:

$$U_i(X,t) \in C^2(\bar{G})$$

Y

$$W_i(X,t) \in C^4(\bar{G}), i=1,2,$$

con

$$\bar{G} = [0,1] \times [t_0, t_1].$$

Luego si introducimos los siguientes espacios vectoriales

$$S_U = (C^2(\bar{G}))^3 \text{ y } S_W = (C^4(\bar{G}))^3 \quad (1.11)$$

Tendremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in S_U, \\ \mathbf{w} &\in S_W, \\ \mathbf{v} &\in S_U \times S_W. \end{aligned}$$

Por lo tanto nuestro funcional ahora nos queda en función de \mathbf{v} , y lo escribimos $J = J(\mathbf{v})$.

Para poder realizar la variación del funcional, éste debe estar definido en un espacio lineal. El espacio producto usado en (1.11) puede ser transformado en un espacio lineal si se introducen las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}) + (\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)}) &= (\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{w}^{(2)}), \forall \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)} \in S_U, \forall \mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)} \in S_W, \\ c(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= (c\mathbf{u}, c\mathbf{w}), \forall \mathbf{u} \in S_U, \forall \mathbf{w} \in S_W, \forall c \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

Después de haber considerado todo lo expuesto anteriormente estamos en condiciones de decir que el espacio admisible del funcional es

$$D^L = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in S_U \times S_W, \mathbf{v}(x, t_0) = \mathbf{h}_0(x), \mathbf{v}(x, t_1) = \mathbf{h}_1(x) \forall x \in [0,1]\}. \quad (1.12)$$

Ahora definimos la variación del funcional $J = J(\mathbf{v})$ en el punto \mathbf{v} y en la dirección $\tilde{\mathbf{v}}$ como la derivada

$$\delta J(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\mathbf{v} + \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) \right|_{\varepsilon=0} \quad (1.13)$$

El punto $\mathbf{v} \in D^L$ y la dirección $\tilde{\mathbf{v}} \in D_a^L$.

Las direcciones admisibles \tilde{v} en el punto $v \in D^L$ son aquellas para las cuales $v + \varepsilon \tilde{v} \in D^L$ para todo ε suficientemente pequeño y existe $\delta J(v; \tilde{v})$.

En consecuencia, en vista de (1.12), \tilde{v} es una dirección admisible en v para D^L sí y solo si $\tilde{v} \in D_a^L$. Como v y \tilde{v} son continuas al igual que sus derivadas en cada tramo y de las condiciones de continuidad vistas anteriormente, el espacio de direcciones admisibles está dado por

$$D_a^L = \{ \tilde{v}; \tilde{v} \in S_U \times S_w, \tilde{v}(X, t_0) = \tilde{v}(X, t_1) = 0, \forall X \in [0, 1] \} \quad (1.14)$$

esto nos lleva a

$$\begin{aligned} \delta J(v; \tilde{v}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^c \left(\rho_1 A_1 l_1^3 \left(\frac{\partial W_1}{\partial t}(X, t) \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial t}(X, t) + \frac{\partial U_1}{\partial t}(X, t) \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial t}(X, t) \right) - \right. \\ & \left. \frac{E_1 I_1}{l_1} \frac{v_{E1}}{v_{l1}} \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(X, t) \frac{\partial^2 \tilde{W}_1}{\partial X_1^2}(X, t) - \frac{E_1 A_1}{l_1} \frac{v_{EA1}}{v_{l1}} \frac{\partial U_1}{\partial X_1}(X, t) \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_1}(X, t) \right] dX - \\ & \frac{E_1 I_1}{l_1} \left(R_1 \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(0, t) \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial X_1}(0, t) + T_{w1} W_1(0, t) \tilde{W}_1(0, t) - T_{w2} W_1(c^+, t) \tilde{W}_1(c^+, t) \right) - \\ & \frac{E_1 A_1}{l_1} T_{u1} U_1(0, t) \tilde{U}_1(0, t) + \\ & \int_c^l \left[\rho_2 A_2 l_2^3 v_{\rho A_2} v_{l_2}^3 \left(\frac{\partial W_2}{\partial t}(X, t) \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial t}(X, t) + \frac{\partial U_2}{\partial t}(X, t) \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial t}(X, t) \right) - \right. \\ & \left. \frac{E_2 I_2}{l_2} \frac{v_{E2}}{v_{l2}} \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(X, t) \frac{\partial^2 \tilde{W}_2}{\partial X_2^2}(X, t) - \frac{E_2 A_2}{l_2} \frac{v_{EA2}}{v_{l2}} \frac{\partial U_2}{\partial X_2}(X, t) \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_2}(X, t) \right] dX - \\ & \frac{E_2 I_2}{l_2} \left(R_3 \frac{\partial W_2}{\partial X_2}(l, t) \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial X_2}(l, t) - T_{w3} W_2(l, t) \tilde{W}_2(l, t) - \right. \\ & \left. R_m \left(\frac{\partial W_2}{\partial X_2}(c^-, t) - \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(c^+, t) \right) \left(\frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial X_2}(c^-, t) - \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial X_1}(c^+, t) \right) \right) - \\ & \left. \frac{E_2 A_2}{l_2} \left(T_{u3} U_2(l, t) \tilde{U}_2(l, t) - T_m \left(U_2(c^-, t) - U_1(c^+, t) \right) \left(\tilde{U}_2(c^-, t) - \tilde{U}_1(c^+, t) \right) \right) \right\} dt \end{aligned} \quad (1.15)$$

La condición de estacionario establece que

$$\delta J(v; \tilde{v}) = 0 \forall \tilde{v} \in D_a^L \quad (1.16)$$

Si consideramos la primera integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \rho_1 A_1 \int_0^c \frac{\partial W_1}{\partial t}(X, t) \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial t}(X, t) dX dt \quad (1.17)$$

Como v y $\tilde{v} \in C^4(\bar{G})$ se puede integrar por partes con respecto a t y al aplicar la condición

$$\tilde{v}(X, t_0) = \tilde{v}(X, t_1) = 0, \forall X \in [0, 1],$$

se obtiene

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^c \frac{\partial W_1}{\partial t}(X,t) \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial t}(X,t) dX dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^c \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}(X,t) \tilde{W}_1(X,t) dX dt \quad (1.18)$$

La misma condición $\mathbf{v} \tilde{\mathbf{v}} \in C^4(\bar{G})$ nos permite integrar por partes dos veces respecto a x

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^c \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(X,t) \frac{\partial^2 \tilde{W}_1}{\partial X_1^2}(X,t) dX dt \quad (1.19)$$

De donde obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^c \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(X,t) \frac{\partial^2 \tilde{W}_1}{\partial X_1^2}(X,t) dX dt = \\ & \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^c \frac{\partial^4 W_1}{\partial X_1^4}(X,t) \tilde{W}_1(X,t) dX + \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(X,t) \frac{\partial^2 \tilde{W}_1}{\partial X_1^2}(X,t) \Big|_0^c - \frac{\partial^3 W_1}{\partial X_1^3}(X,t) \tilde{W}_1(X,t) \Big|_0^c \right] dt \end{aligned} \quad (1.20)$$

Lo mismo obtenemos para

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^c \frac{\partial U_1}{\partial t}(X,t) \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial t}(X,t) dX dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^c \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}(X,t) \tilde{U}_1(X,t) dX dt, \\ & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^c \frac{\partial U_1}{\partial X}(X,t) \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X}(X,t) dX dt = \\ & \int_{t_0}^{t_1} \left[- \int_0^c \frac{\partial^2 U_1}{\partial X^2}(X,t) \tilde{U}_1(X,t) dX + \frac{\partial U_1}{\partial X}(X,t) \tilde{U}_1(X,t) \Big|_0^c \right] dt, \end{aligned} \quad (1.21)$$

Si hacemos las mismas integrales dobles para el tramo $c-l$ y remplazamos en la ecuación (1.13) tendremos:

$$\begin{aligned}
\delta J(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^c \rho_1 A_1 l_1^3 v_{\rho A_1} v_{l_1}^3 \left(-\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}(X, t) \tilde{W}_1(X, t) - \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}(X, t) \tilde{U}_1(X, t) \right) dX \\
& - \frac{E_1 I_1}{l_1} \frac{v_{EI_1}}{v_{l_1}} \int_0^c \frac{\partial^4 W_1}{\partial X_1^4}(X, t) \tilde{W}_1(X, t) dX + \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(X, t) \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial X_1}(X, t) \Big|_0^1 - \frac{\partial^3 W_1}{\partial X_1^3}(X, t) \tilde{W}_1(X, t) \Big|_0^1 \\
& - \frac{E_1 A_1}{l_1} \frac{v_{EA_1}}{v_{l_1}} \int_0^c \frac{\partial U_1^2}{\partial X_1^2}(X, t) \tilde{U}_1(X, t) dX \\
& - \frac{E_1 I_1}{l_1} R_1 \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(0, t) \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial X_1}(0, t) + T_{w1} W_1(0, t) \tilde{W}_1(0, t) - T_{w2} W_1(c^+, t) \tilde{W}_1(c^+, t) \\
& - E_1 A_1 \frac{\partial U_1}{\partial X}(X, t) \tilde{U}_1(X, t) \Big|_0^1 - T_{u1} U_1(0, t) \tilde{U}_1(0, t) \\
& + \int_c^l \rho_2 A_2 l_2^3 v_{\rho A_2} v_{l_2}^3 \left(-\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}(X, t) \tilde{W}_2(X, t) - \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}(X, t) \tilde{U}_2(X, t) \right) dX \\
& - \frac{E_2 I_2}{l_2} \frac{v_{EI_2}}{v_{l_2}} \int_0^c \frac{\partial^4 W_2}{\partial X_2^4}(X, t) \tilde{W}_2(X, t) dX + \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(X, t) \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial X_2}(X, t) \Big|_0^1 - \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(X, t) \tilde{W}_2(X, t) \Big|_0^1 \\
& - \frac{E_2 A_2}{l_2} \frac{v_{EA_2}}{v_{l_2}} \int_0^c \frac{\partial U_2^2}{\partial X_2^2} \tilde{U}_2(X, t) dX \\
& - \frac{E_2 A_2}{l_2} \frac{v_{EA_2}}{v_{l_2}} \frac{\partial U_2}{\partial X}(X, t) \tilde{U}_2(X, t) \Big|_0^1 \\
& - T_{u3} U_2(l, t) \tilde{U}_2(l, t) - T_m (U_2(c^-, t) - U_1(c^+, t)) (\tilde{U}_2(c^-, t) - \tilde{U}_1(c^+, t)) \Big\} dt
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Si ahora definimos

$$B_i = \rho_i A_i l_i^3 v_{\rho A_i} v_{l_i}^3, C_i = \frac{E_i l_i}{l_i} \frac{v_{EI_i}}{v_{l_i}} \text{ y } D_i = \frac{E_i A_i}{l_i} \frac{v_{EA_i}}{v_{l_i}}$$

Agrupando en la ecuación (1.23) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\delta J(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^c \left(-B_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}(X, t) - C_1 \frac{\partial^4 W_1}{\partial X_1^4}(X, t) \right) \tilde{w}_1(X, t) dX + \right. \\
& \int_0^c \left(-D_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial X^2}(X, t) \tilde{U}_1 dX - B_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}(X, t) \right) \tilde{U}_1(X, t) dX - \\
& C_1 \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2} \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial X_1} \Big|_0^1 - \frac{\partial^3 W_1}{\partial X_1^3} \tilde{W}_1 \Big|_0^1 - R_1 \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(0, t) \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial X_1}(0, t) + \right. \\
& T_{w_1} W_1(0, t) \tilde{W}_1(0, t) - T_{w_2} W_1(c, t) \tilde{W}_1(c, t) \Big) - \\
& D_1 \left[T_{u_1} U_1(0, t) \tilde{U}_1(0, t) - \frac{\partial U_1}{\partial X} \tilde{U}_1 \Big|_0^1 \right] + \\
& \int_c^l \left(-B_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}(X, t) - C_2 \frac{\partial^4 W_2}{\partial X_2^4}(X, t) \right) \tilde{W}_2(X, t) dX + \\
& \int_0^c \left(-D_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial X^2}(X, t) \tilde{U}_2 dX - B_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}(X, t) \right) \tilde{U}_2(X, t) dX - \\
& C_2 \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(X, t) \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial X_2} \Big|_0^1 - \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(X, t) \tilde{W}_2(X, t) \Big|_0^1 \right. \\
& - R_3 \frac{\partial W_2}{\partial X_2}(0, t) \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial X_2}(0, t) - T_{w_3} W_2(l, t) \tilde{W}_2(l, t) \\
& \left. - R_m \left(\frac{\partial W_2}{\partial X_2}(c^-, t) - \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(c^+, t) \right) \left(\frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial X_2}(c^-, t) - \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial X_1}(c^+, t) \right) \right) \Big) - \\
& D_2 \left[T_m (U_2(c^-, t) - U_1(c^+, t)) (\tilde{U}_2(c^-, t) - \tilde{U}_1(c^+, t)) - \right. \\
& \left. T_m - T_{u_3} U_2(l, t) \tilde{U}_2(l, t) - \frac{\partial U_2}{\partial X_2} \tilde{U}_2 \Big|_0^1 \right] \Big\} dt
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Luego de la condición de funcional estacionario resulta:

$$\begin{aligned}
\delta J(\mathbf{v}; \tilde{\mathbf{v}}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^c \left(-B_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}(X, t) - C_1 \frac{\partial^4 W_1}{\partial X_1^4}(X, t) \right) \tilde{W}_1(X, t) dX + \right. \\
& \int_c^l \left(-B_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}(X, t) - C_2 \frac{\partial^4 W_2}{\partial X_2^4}(X, t) \right) \tilde{W}_2(X, t) dX + \\
& \int_0^c \left(-D_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial X^2}(X, t) \tilde{U}_1(X, t) dX - B_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}(X, t) \right) \tilde{U}_1(X, t) dX + \\
& \left. \int_0^c \left(-D_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial X^2}(X, t) \tilde{U}_2(X, t) dX - B_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}(X, t) \right) \tilde{U}_2(X, t) dX \right] dt = 0, \\
\text{con } \mathbf{w} = \mathbf{w}^L = 0, \forall \tilde{W} \in D_a^L.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Como $w, \bar{w} \in (C^4(\bar{G}))^3$ y verifican la condición (1.12), podemos aplicar el lema fundamental del cálculo de variaciones generalizadas en R^n , de donde se deducen que las funciones w_i y u_i deben satisfacer las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

$$\begin{aligned}
& -B_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}(X, t) - C_1 \frac{\partial^4 W_1}{\partial X_1^4}(X, t) = 0, \forall X \in (0, 1), \forall t > 0, \\
& -B_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}(X, t) - C_2 \frac{\partial^4 W_2}{\partial X_2^4}(X, t) = 0, \forall X \in (0, 1), \forall t > 0, \\
& -D_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial X^2}(X, t) - B_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}(X, t) = 0, \forall X \in (0, 1), \forall t > 0, \\
& -D_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial X^2}(X, t) - B_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}(X, t) = 0, \forall X \in (0, 1), \forall t > 0.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Por lo que la función w_i y u_i debe satisfacer la ecuación (1.13) y la condición para funcional estacionario se reduce

$$\begin{aligned}
\delta J(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = & \int_0^1 \left\{ -C_1 \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(X, t) \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial X_1}(X, t) \right) \Big|_0^1 - \frac{\partial^3 W_1}{\partial X_1^3}(X, t) \tilde{W}_1(X, t) \Big|_0^1 \right. \\
& - R_1 \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(0, t) \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial X_1}(0, t) + T_{w1} v_4 W_1(0, t) \tilde{W}_1(0, t) - T_{w2} v_2 W_1(c^+, t) \tilde{W}_1(c^+, t) \Big) \\
& D_1 \left[T_{u1} v_4 U_1(0, t) \tilde{U}_1(0, t) - \frac{\partial U_1}{\partial x}(X, t) \tilde{U}_1(X, t) \Big|_0^1 \right] \\
& - C_2 \left[\frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(X, t) \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial X_2}(X, t) \Big|_0^1 - R_3 \frac{\partial W_2}{\partial X_2}(0, t) \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial X_2}(0, t) - \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(X, t) \tilde{W}_2(X, t) \Big|_0^1 - \right. \\
& T_{w3} v_2 W_2(l, t) \tilde{W}_2(l, t) - R_m \left(\frac{\partial W_2}{\partial X_2}(c^-, t) - \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(c^+, t) \right) \left(\frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial X_2}(c^-, t) - \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial X_1}(c^+, t) \right) \Big] \\
& D_2 \left[T_m (U_2(c^-, t) - U_1(c^+, t)) (\tilde{U}_2(c^-, t) - \tilde{U}_1(c^+, t)) - \right. \\
& \left. T_{u3} U_2(l, t) \tilde{U}_2(l, t) - \frac{\partial U_2}{\partial X_2}(X, t) \tilde{U}_2(X, t) \Big|_0^1 \right] \Big\} dt = 0
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Agrupando los términos de la ecuación (1.26) y realizando los desarrollos algebraicos adecuados. Obtenemos por un lado las siguientes condiciones de borde naturales y de compatibilidad:

$$T_{w_1} v_{l_1} W_1(0,t) - C_1 \frac{\partial^3 W_1}{\partial X_1^3}(0,t) = 0 \quad (1.27)$$

$$T_{u_1} U_1(0,t) - D_1 \frac{\partial U_1}{\partial X_1}(0,t) = 0 \quad (1.28)$$

$$R_1 \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(0,t) - C_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(0,t) = 0 \quad (1.29)$$

$$W_1(c^+,t) - W_2(c^-,t) = 0 \quad (1.30)$$

$$T_{w_2} W_1(c^+,t) - \left[C_2 \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(c^-,t) - C_1 \frac{\partial^3 W_1}{\partial X_1^3}(c^+,t) \right] = 0 \quad (1.31)$$

$$D_1 \frac{\partial U_1}{\partial X_1}(c^+,t) - T_m (U_2(c^-,t) - U_1(c^+,t)) = 0 \quad (1.32)$$

$$D_2 \frac{\partial U_2}{\partial X_2}(c^-,t) - T_m (U_2(c^-,t) - U_1(c^+,t)) = 0 \quad (1.33)$$

$$C_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(c^+,t) - R_m \left(\frac{\partial W_2}{\partial X_2}(c^+,t) - \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(c^+,t) \right) = 0 \quad (1.34)$$

$$C_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(c^-,t) - R_m \left(\frac{\partial W_2}{\partial X_2}(c^+,t) - \frac{\partial W_1}{\partial X_1}(c^+,t) \right) = 0 \quad (1.35)$$

$$T_{w_3} v_{l_2} W_2(l,t) - C_2 \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(l,t) = 0 \quad (1.36)$$

$$T_{u_3} U_2(l,t) - D_2 \frac{\partial U_2}{\partial X_2}(l,t) = 0 \quad (1.37)$$

$$R_3 \frac{\partial W_2}{\partial X_2}(l,t) - C_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(l,t) = 0 \quad (1.38)$$

Luego teniendo en cuenta las ecuaciones diferenciales (1.25) tenemos que:

$$\frac{\partial^4 W_i}{\partial X_i^4}(X,t) - k_i^4 \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}(X,t) = 0, \forall X \in (0,1), \forall t > 0, i = 1, 2 \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial X_i^2}(X,t) - p_i^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}(X,t) = 0, \forall X \in (0,1), \forall t > 0 \quad (1.40)$$

Con:

$$k_i^4 = \frac{v_{\rho A_i}}{v_{EI_i}} v_{l_i}^4; p_i^2 = \frac{v_{\rho A_i}}{v_{EI_i}} \frac{I}{Al^2} v_{l_i}^4; i = 1, 2$$

Aplicando el método de separación de variables, la solución de las ecuaciones diferenciales nos queda de la forma

$$W_i(X_i, t) = T(t) \cdot \bar{W}_i(X_i), \quad (1.41)$$

$$U_i(X_i, t) = T(t) \cdot \bar{U}_i(X_i). \quad (1.42)$$

Si reemplazamos en (1.39) y (1.40)

$$\frac{1}{k^4} \bar{W}^{IV} T = -\ddot{T} \bar{W} \Rightarrow \frac{1}{k^4} \frac{\bar{W}^{IV}}{\bar{W}} = -\frac{\ddot{T}}{T} = \omega^2 \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{p^2} \bar{U}'' T = \ddot{T} \bar{U} \Rightarrow \frac{1}{p^2} \frac{\bar{U}''}{\bar{U}} = \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2 \quad (1.44)$$

Luego nos queda:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial X_i^2}(X) + \lambda_i^2 \bar{U}_i(X) = 0, \forall X \in (0, 1), i = 1, 2 \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial^4 \bar{W}_i}{\partial X_i^4}(X) - \lambda_i^4 \bar{W}_i(X) = 0, \forall X \in (0, 1), i = 1, 2 \quad (1.46)$$

Con:

$$\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} l^4 \omega^2; i = 1, 2$$

En donde ω es la frecuencia natural en radianes por segundo.

Si asumimos que es una oscilación armónica, entonces será:

$$T(t) = e^{i\omega t}.$$

Si consideramos que W_{in} y U_{in} como los modos naturales de vibración transversal y longitudinal de las vigas.

$$W_{1n}(X_1) = C_1 \cosh(\lambda_{1n} \alpha_1 X_1) + C_2 \sinh(\lambda_{1n} \alpha_1 X_1) + C_3 \cos(\lambda_{1n} \alpha_1 X_1) + C_4 \sin(\lambda_{1n} \alpha_1 X_1), \quad (1.47)$$

$$U_{1n}(X_1) = C_5 \cos(\lambda_{n1}^2 \beta_1 X_1) + C_6 \sin(\lambda_{n1}^2 \beta_1 X_1), \quad (1.48)$$

$$W_{2n}(X_2) = C_7 \cosh(\lambda_{2n} \alpha_2 X_2) + C_8 \sinh(\lambda_{2n} \alpha_2 X_2) + C_9 \cos(\lambda_{2n} \alpha_2 X_2) + C_{10} \sin(\lambda_{2n} \alpha_2 X_2), \quad (1.49)$$

$$U_{2n}(X_2) = C_{11} \cos(\lambda_{n2}^2 \beta_2 X_2) + C_{12} \sin(\lambda_{n2}^2 \beta_2 X_2). \quad (1.50)$$

En donde α_i y β_i son parámetros adimensionales dados por las características físico-geométrico

de las vigas y están definidos por las expresiones:

$$\alpha_i = \sqrt[4]{\frac{v_{\rho Ai}}{v_{Ei}}} v_{li}; \beta_i = \sqrt[2]{\frac{v_{\rho Ai}}{v_{Ei}} \frac{I}{Al^2}} v_{li}; \text{ para } i = 1, 2, 3$$

Si consideramos que los coeficientes de rigidez rotacional y traslacional puedan asumir valores tales que

$$0 \leq R_i < \infty, 0 \leq T_i < \infty, 0 \leq T_m < \infty \text{ y } 0 \leq R_m < \infty$$

Las condiciones de contorno son todas naturales. A su vez al hacer $T_i, R_i \rightarrow \infty$, se obtienen las condiciones geométricas. Al hacer variar las constantes de rigidez de los resortes, podemos ir generando vigas con distintas condiciones de apoyo en los extremos de los tramos.

Si se reemplazan las ecuaciones de las expresiones (1.47)-(1.50) en las de las condiciones de borde y de continuidad dadas por las expresiones (1.27)-(1.38), se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo lineal de 12 constantes C_1 a C_{12} .

De la condición de no trivialidad del sistema, resulta un determinante-ecuación en los autovalores λ del problema, que serán los coeficientes adimensionales de frecuencia.

1.3. Conclusiones

Se obtuvieron las ecuaciones diferenciales y el problema de contorno de una viga de dos tramos con vínculos elásticos en sus extremos y una rótula elástica intermedia. Podemos ver que el método del cálculo de variaciones aplicado a una estructura básica, nos permite llegar con rapidez a las ecuaciones gobernantes y es muy permeable a la hora de realizar modificaciones a ese modelo. En particular es compatible con propuestas estructurales que involucran uniones o vínculos externos con características elásticas.

En el capítulo siguiente aplicaremos el método del cálculo de variaciones para obtener los coeficientes de las frecuencias naturales de un pórtico en L, y para analizar cómo el comportamiento dinámico de la estructura es afectado por la incorporación de propiedades elásticas a los vínculos externos.

Más adelante nos centraremos en el estudio de una rótula elástica intermedia en la estructura, y cómo ésta se puede utilizar para asemejar a una fisura.

1.4. Referencias

- Albarracín, C. M., Grossi, R. O., “Vibrations of elastically restrained frames”, *Journal of Sound and Vibration*, 285: 467-476, 2005.
- Bernal, D., “*Introduction of the Calculus of Variations*”, Imperial College Press, 2004.
- Blevins, R., “*Formulas for natural frequency and mode shape*”, Krieger Melbourne, FL, 1993.
- Chang, T.P., Lin, G.L. y Chang, E., “Vibrations analysis of a beam with an internal hinge subjected to a random moving oscillation”, *International Journal of Solid and Structures*, 43:6398-6412, 2006.
- Grossi, R.O., “*Calculus of Variations: Theory and Applications (in Spanish)*”, CIMNE, Barcelona, Spain, 2010.
- Grossi R. O. y Albarracín C. M., “Variational approach to vibration of frames with inclined members”, *Applied Acoustics*, 74:325-334, 2013.
- Grossi R. O. y Quintana M. V., “The conditions in the dynamics of elastically restrained beams”, *Journal of Sound and Vibration*, 316:274-297, 2008.
- Raffo, J. F. y Grossi R. O., “Variational Approach of Timoshenko Beams with Internal Elastic Restraints”, *Journal of Mechanics Engineering and Automation* 3 :491-498 , 2013
- Timoshenko S. y Young D.H., “*Vibration Problems in Engineering*”, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1956.
- Wang, C.Y. y Wang, C.M., “Vibrations of a beam with an internal hinge”, *Internacional Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1:163-167, 2001.
- Warburton, G.B., “*The dynamical behaviour of structures*” (2nd. edition), PergamonPress Ltd., Oxford, 1976.
- Wu, J.J., “Use of the elastic-and-rigid-combined beam element for dynamic analysis of a two-dimensional frame with arbitrarily distributed rigid beam segments”, *Applied Mathematical Modelling*, 35:1240-1251, 2011.

2. Capítulo II: Semi-pórtico con vinculación elástica. Análisis dinámico mediante el método variacional.

2.1. Introducción

El estudio de las propiedades dinámicas de pórticos simples es muy importante en el campo del diseño estructural ya que se constituye en la piedra fundamental de muchas estructuras resistentes de utilidad en varios campos de la ingeniería.

En efecto, los encontramos tanto en grandes construcciones como puentes y edificios ubicados en regiones sísmicamente activas como en micromarcos utilizados en modernos equipos electrónicos sometidos a entornos vibratorios, Morghadam, A. et al. (2013).

Como puntualizaron Laura, P. y colaboradores en 1987, el tema había sido tratado en excelentes libros, hoy clásicos, algunos reeditados: Timoshenko, S. y Young, D. (1990), Warburton, G. (1976), Blevins, R. (2001) y Clough, R. y Penzien, J. (2010). Más reciente y con abundante información es la obra de Karnovsky y Lebed (2004).

En los trabajos de investigación sobre vibración de pórticos, pueden mencionarse las contribuciones de Filipich, C. (1987) y Laura, P et al. (1987) que analizan vibraciones de pórticos planos con vínculos elásticos o masas adosadas, obteniendo soluciones aproximadas mediante métodos variacionales. Lin, H. y Ro, J. (2003) propusieron un método híbrido, analítico numérico, para analizar entramados planos. Wu, J. (2011) presentó una combinación de elementos vigas, elásticos y rígidos, para determinar las características dinámicas de un pórtico plano. Mei, C. (2011) analizó las vibraciones de un pórtico plano de varios pisos desde el punto de vista de la vibración de ondas.

En el caso particular del pórtico de dos tramos (“L- Shaped structure”), los primeros trabajos corresponden a Bang, H. (1996), Gürgöze, M. (1998) y Oguamanam, D. et al. (1998). Este último fue extendido en 2003 (Heppler, G. et al.) relajando las restricciones en el movimiento del pórtico abierto. Dos trabajos que merecen destacarse son los de Lee, Y. y Ng, T. (1994) y Albarracín, C. y Grossi, R. (2005). En el primero de ellos se utilizó el método de Rayleigh-Ritz en conjunto con la introducción de resortes lineales artificiales a traslación y a rotación para evaluar las frecuencias naturales de pórticos de complejidad diversa. En el segundo trabajo se analiza un pórtico de dos tramos con vinculación externa elástica. Aplican la técnica de análisis variacional con el clásico método de separación de variables para la determinación de autovalores (frecuencias) y autovectores (formas modales).

La presencia de una articulación interna elástica ha sido tratada por varios autores. Wang, C. y Wang, C. (2001), Lee, Y. et al. (2003), Grossi, R. y Quintana, M. (2008) y Quintana, M. et al. (2010) estudiaron vigas con distintos vínculos externos y un vínculo elástico intermedio.

El caso de marcos con vínculos elásticos intermedios fue estudiado entre otros por Santana, C. (2009), Reyes-Salazar, A. (2012) y Gorgun, H. (2013). También se consignan las contribuciones surgidas de la presente investigación: Ratazzi, A. et al. (2011), (2012, (2013), (2014).

En este capítulo se analiza el comportamiento dinámico de un pórtico formado por una columna y un dintel vinculados rígidamente entre sí, con una de sus vinculaciones externas con propiedades elásticas y una rótula elástica intermedia en el dintel. El procedimiento para estudiar la conducta dinámica de la estructura se desarrolló en base al cálculo de variaciones, obteniendo así las ecuaciones diferenciales gobernantes y el problema de contorno del pórtico en L. El método de separación de variables fue utilizado para hallar las frecuencias y las formas modales.

Los resultados numéricos fueron calculados por medio de algoritmos realizados con el software Wolfram Mathematica (2012). Estos resultados se presentan en dos secciones: En primer lugar se le dio diferentes valores a las constantes de los resortes de los vínculos elásticos, y se los comparó con resultados similares en la literatura y de esta forma se validó el modelo matemático propuesto. En segundo lugar se adoptaron diferentes constantes de las condiciones de vínculo para estudiar su influencia en el comportamiento dinámico de la estructura.

2.2.Descripción del modelo estructural propuesto.

El pórtico en L de la Figura 1 se considera formado por tres tramos o vigas. El tramo FO , de longitud l_1 , es vertical y tiene vinculación elástica externa en F . El segundo tramo OP , de longitud l_2 , es horizontal y está rígidamente unido al tramo FO en el extremo O y vinculado con una rótula elástica en su extremo P al tercer tramo, que también es horizontal. Finalmente el tercer tramo PH , tiene longitud l_3 , está unido al tramo OP a través de la rótula elástica y en su extremo H se encuentra rígidamente empotrado.

El modelo estructural se planteó utilizando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y no se tuvo en cuenta la deformación axil de las vigas. La condición de infinita rigidez axil es una hipótesis razonable en la resolución de este tipo de problemas. Las vigas se denominaron como 1, 2 y 3, comenzando desde el extremo F . Las condiciones elásticas de la vinculación se representaron con resortes traslacionales y rotacionales y se ubicaron en los extremos F y P de las vigas componentes. En la viga 1, la vinculación externa en F , fue representada por tres resortes

orientados como se indica en la Figura 1. Dos resortes traslacionales cuyas constantes de rigidez son t_u y t_w , restringen los desplazamientos en dirección del eje del tramo x_1 y en dirección transversal a él, w_1 . El giro de esa sección de la viga está controlado por un resorte rotacional de constante r_z . Las vigas 2 y 3 están unidas en P por una rótula cuya condición elástica está representada por un resorte rotacional de constante de rigidez r_m .

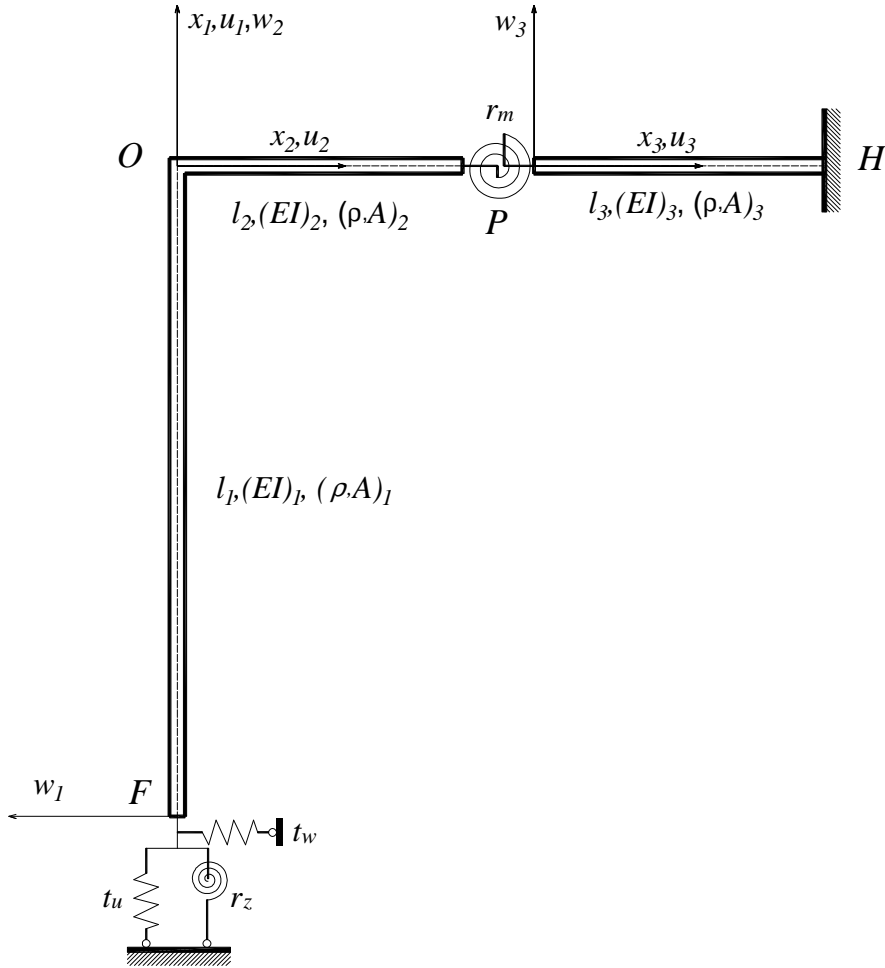


Figura 2.1: Modelo estructural

Con el subíndice $i=1, 2$ ó 3 se indicó la pertenencia a cada una de las vigas. De esta forma x_i es la correspondiente coordenada axial. Los desplazamientos transversales al eje en el instante t , en cada caso fueron indicados como $w_i = w_i(x_i, t)$; $i=1, 2, 3$. Los sentidos positivos de las coordenadas y los desplazamientos son los indicados en la Figura 2.1.

El desplazamiento rígido de la viga 1 en dirección de su eje bajo la hipótesis de rigidez axial se relaciona directamente con el desplazamiento transversal de la viga 2 en el extremo O a través de la relación: $u_1 = u_1(x_1, t) = w_2(0, t)$; $\forall x_1$.

Los mismos subíndices también se utilizaron para denominar las propiedades físicas y geométricas de cada viga, así $\rho_i A_i$ es la masa por unidad de longitud en donde ρ_i es la densidad del material y A_i es el área de la sección transversal, $E_i I_i$ la rigidez a flexión de la viga, donde E_i e I_i son el módulo de elasticidad del material y el momento de inercia de la sección transversal, respectivamente.

2.3. Desarrollo analítico para la obtención del problema de contorno.

La teoría de vigas de Euler Bernoulli, no considera los efectos de la deformación por corte, ni de la inercia rotatoria.

La energía total del sistema estructural se puede agrupar en energía cinética (que es la energía debida al movimiento) y energía de deformación elástica (que es la energía potencial almacenada en la estructura que deforma elásticamente).

La energía cinética total de la estructura del pórtico se expresa como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \left[\rho_i A_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 \right] dx_i + \frac{\rho_i A_i l_1}{2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial t}(0, t) \right)^2 \quad (2.1)$$

El último término de la expresión de la energía cinética se debe a la traslación de cuerpo rígido de la viga 1 de longitud l_1 , debido a la hipótesis de infinita rigidez axial.

La presencia de la rótula elástica entre los dos tramos de la viga horizontal no afecta la condición de desplazamiento transversal único en el punto de concurrencia, y se cumple la condición de continuidad:

$$w_2(l_2, t) = w_3(0, t), \quad (2.2)$$

y establece una relación entre los giros de las secciones de los dos tramos concurrentes a dicha unión elástica y el esfuerzo resultante en el resorte rotacional, proporcional a la diferencia entre esos giros. A su vez, el esfuerzo interno en el resorte rotacional, se relaciona con el momento flector de cada viga en el punto de concurrencia, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
E_2 I_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(l_2, t) - r_m \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_3}(0, t) - \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(l_2, t) \right) &= 0; \\
E_3 I_3 \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2}(0, t) - r_m \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_3}(0, t) - \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(l_2, t) \right) &= 0;
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

La energía potencial total del pórtico está dada por la expresión:

$$\begin{aligned}
U = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left[EI \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right)^2 \right] dx_i \right\} + \\
+ \frac{r_z}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(0, t) \right)^2 + \frac{t_w}{2} (w_1(0, t))^2 + \frac{t_u}{2} (w_2(0, t))^2 + r_m \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(l_2, t) - \frac{\partial w_3}{\partial x_3}(0, t) \right)^2,
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

2.3.1. Adimensionalizado de las variables y parámetros.

Para facilitar el tratamiento analítico, como ya vimos en el capítulo 1, adimensionalizamos las variables y los parámetros utilizados en el modelo. De acuerdo a ello, la coordenada espacial que indica la posición de las distintas secciones de cada viga, se relaciona con la respectiva longitud del tramo, según sigue:

$$X_i = \frac{x_i}{l_i}; \quad i = 1, 2, 3$$

Es así que los desplazamientos transversales adimensionales asumen la forma:

$$W_i = \frac{w_i(X_i, t)}{l_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad X_i \in [0, 1]$$

En cuanto a las características físicas y geométricas de las vigas se definieron las relaciones “v”, según se muestra a continuación:

$$v_{l_i} = \frac{l_i}{l}, \quad v_{EI_i} = \frac{E_i I_i}{EI}, \quad v_{\rho A_i} = \frac{\rho_i A_i}{\rho A}, \quad \text{con } i = 1, 2, 3$$

Donde $l=l_i, I=I_i, A=A_i, E=E_i$ y $\rho=\rho_i$.

Los parámetros que definen las constantes de rigidez de los vínculos elásticos fueron adimensionalizados según se indica, en función de características de la viga:

$$T_w = t_w \frac{l^3}{EI}; \quad T_u = t_u \frac{l^3}{EI}; \quad R_z = r_z \frac{l}{EI}; \quad R_m = r_m \frac{l}{EI}$$

Finalmente, las expresiones de los esfuerzos internos de corte y de momento flector de las vigas en función de los corrimientos transversales quedan expresados como sigue:

$$\frac{\partial^3 W_i}{\partial X_i^3} = \frac{Q_i}{E_i I_i}, \quad \frac{\partial^2 W_i}{\partial X_i^2} = \frac{M_i}{E_i I_i}$$

La convención adoptada para esfuerzos internos positivos está indicada en la Figura 2.2.

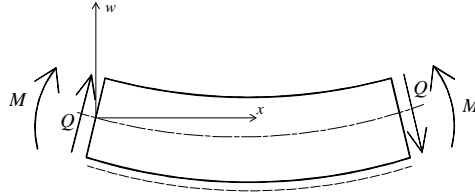


Figura 2.2: Esfuerzos internos positivos:

2.3.2. Funcional del sistema estructural.

Teniendo en cuenta las energías potencial y cinética dadas por las ecuaciones (2.1) y (2.4), se escribe el funcional del sistema estructural con la integral del lagrangiano usando las adimensionalizaciones

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (T-U) dt = & \frac{1}{2} \rho A l^3 \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^3 \int_0^1 \left[v_{\rho A_i} v_{l_i}^3 \left(\frac{\partial W_i}{\partial t}(X_i, t) \right)^2 - \frac{EI}{l} \frac{v_{EI_i}}{v_{l_i}} \left(\frac{\partial W_i}{\partial X_i}(X_i, t) \right)^2 \right] dX_i \right. \\ & + v_{\rho A_i} v_{l_i} v_{l_2}^2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial t}(0, t) \right)^2 \\ & - \frac{1}{2} \frac{EI}{l} \left[R_z \left(\frac{\partial W_1}{\partial X_1}(X_1, t) \right)^2 + T_w (v_{l_i})^2 (W_1(X_1, t))^2 + T_u (v_{l_i})^2 (W_2(X_2, t))^2 \right. \\ & \left. \left. + R_m \left(\frac{\partial W_2}{\partial X_2}(X_2, t) - \frac{\partial W_3}{\partial X_3}(X_3, t) \right)^2 \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En donde t_0 y t_1 , según el principio de Hamilton como fue enunciado en el capítulo I, son dos instantes para los cuales las posiciones del sistema son conocidas.

El espacio de funciones admisibles está incluido en el conjunto de funciones siguientes:

$$W_i(X_i, t) \in C^4(\bar{G}_i), i = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

$$\bar{G}_i = G_i \cup \{0, l_i\}, \bar{G}_1 = [0, 1] \times [t_0, t_1], \bar{G}_2 = [0, 1] \times [t_0, t_1], \bar{G}_3 = [0, 1] \times [t_0, t_1]$$

Además, estas funciones deben satisfacer las condiciones de borde y de continuidad para los miembros del pórtico y las correspondientes condiciones geométricas o esenciales

2.3.3. Problema de contorno: Ecuaciones Diferenciales Gobernantes y Condiciones de Borde

En esta sección se aplicaron los conceptos sobre el cálculo de variaciones presentadas en el Capítulo 1, para realizar el desarrollo analítico que corresponde a la expresión de la variación del funcional.

De esta manera se obtuvieron las siguientes ecuaciones diferenciales que representan el problema del semi-pórtico vibrante (2.7) y las ecuaciones de las condiciones de borde y de continuidad, expresadas en función de los desplazamientos W_i : (2.9 a 2.20)

$$\frac{\partial^4 W_i}{\partial X_i^4}(X_i, t) + k_i^4 \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}(X_i, t) = 0, \quad \forall X_i \in (0, 1), \quad \forall t > 0, i = 1, 2, 3; \quad (2.7)$$

con

$$k_i^4 = \frac{\rho_i A_i}{E_i I_i} l^4, \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

Y

$$\frac{v_{EI_1}}{(v_{l_1})^3} \frac{\partial^3 W_1}{\partial X_1^3}(0, t) + T_w W_1(0, t) = 0; \quad (2.9)$$

$$\frac{v_{EI_2}}{(v_{l_2})^3} \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(0, t) + T_u W_2(0, t) - k_1^4 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}(0, t) = 0; \quad (2.10)$$

$$\frac{v_{EI_1}}{v_{l_1}} \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(0, t) - R_z \left(\frac{\partial W_1}{\partial X_1}(0, t) \right) = 0; \quad (2.11)$$

$$v_{l_1} W_1(1, t) = 0; \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial X_1}(1,t) - \frac{\partial W_2}{\partial X_2}(0,t) = 0; \quad (2.13)$$

$$\frac{v_{EI_1}}{v_{I_1}} \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(1,t) - \frac{v_{EI_2}}{v_{I_2}} \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(0,t) = 0; \quad (2.14)$$

$$v_{I_2} W_2(1,t) = v_{I_3} W_3(0,t); \quad (2.15)$$

$$\frac{v_{EI_2}}{v_{I_2}} \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(1,t) - R_m \left(\frac{\partial W_3(0,t)}{\partial X_3} - \frac{\partial W_2(1,t)}{\partial X_2} \right) = 0; \quad (2.16)$$

$$\frac{v_{EI_3}}{v_{I_3}} \frac{\partial^2 W_3}{\partial X_3^2}(0,t) - R_m \left(\frac{\partial W_3(0,t)}{\partial X_3} - \frac{\partial W_2(1,t)}{\partial X_2} \right) = 0; \quad (2.17)$$

$$\frac{v_{EI_2}}{v_{I_2}^2} \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(1,t) - \frac{v_{EI_3}}{v_{I_3}^2} \frac{\partial^3 W_3}{\partial X_3^3}(0,t) = 0; \quad (2.18)$$

$$v_{I_3} W_3(1,t) = 0; \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial X_3}(1,t) = 0. \quad (2.20)$$

En las expresiones precedentes se han tenido en cuenta las relaciones que existen entre los corrimientos transversales y los esfuerzos internos de corte y de momento flector de las vigas. En la ecuación (2.10) el tercero de los términos del primer miembro, representa la fuerza de inercia por el movimiento de cuerpo rígido que provoca el tramo FO .

Utilizando el método de separación de variables, la solución de las ecuaciones (2.7) se asumió de la forma:

$$W_1(X_1,t) = \overline{W}_1(X_1) e^{i\omega t}; \quad (2.21)$$

$$W_2(X_2, t) = \overline{W}_2(X_2) e^{i\omega t}; \quad (2.22)$$

$$W_3(X_3, t) = \overline{W}_3(X_3) e^{i\omega t}. \quad (2.23)$$

Donde las funciones \overline{W}_1 , \overline{W}_2 , \overline{W}_3 son las llamadas “funciones admisibles”¹ de los desplazamientos y representan los modos naturales de vibración transversal de las vigas, están dadas por las expresiones:

$$W_1(X_1) = C_1 \cosh(\lambda \alpha_1 X_1) + C_2 \sinh(\lambda \alpha_1 X_1) + C_3 \cos(\lambda \alpha_1 X_1) + C_4 \sin(\lambda \alpha_1 X_1); \quad (2.24)$$

$$W_2(X_2) = C_5 \cosh(\lambda \alpha_2 X_2) + C_6 \sinh(\lambda \alpha_2 X_2) + C_7 \cos(\lambda \alpha_2 X_2) + C_8 \sin(\lambda \alpha_2 X_2); \quad (2.25)$$

$$W_3(X_3) = C_9 \cosh(\lambda \alpha_3 X_3) + C_{10} \sinh(\lambda \alpha_3 X_3) + C_{11} \cos(\lambda \alpha_3 X_3) + C_{12} \sin(\lambda \alpha_3 X_3). \quad (2.26)$$

donde $\alpha_i = v_i \sqrt[4]{\frac{v \rho A_i}{v_{EI_i}}}$; para $i = 1, 2, 3$; y $\lambda_n = \sqrt[4]{l^4 \omega_n^2 \rho A / EI}$; con ω_n frecuencias naturales del sistema estructural; y C_1, C_2, \dots, C_{12} constantes. Reemplazando las ecuaciones (2.24-2.26), en las ecuaciones (2.21-2.23), y luego en las ecuaciones (2.9-2.20), se llegó a un sistema homogéneo de ecuaciones lineales en las constantes C_1 a C_{12} . La solución no trivial del sistema de ecuaciones planteado requiere que su determinante sea nulo, y permite obtener los coeficientes de frecuencia λ_n y los valores de frecuencia natural circular ω_n .

2.4. Comparación del modelo analítico con otros modelos.

En esta sección se presentan resultados numéricos de coeficientes de frecuencias naturales del pórtico en forma de L de la Figura 1, para una serie de ejemplos convenientemente elegidos. Los resultados de los coeficientes de frecuencias naturales, se determinaron para diferentes valores de las constantes de los resortes a traslación y rotación T_u , T_w , R_z y R_m , que representan los vínculos elásticos en el extremo F de la estructura y en la unión de los tramos de viga 2 y 3.

2.4.1. Verificación del procedimiento analítico

Además de comparar con valores disponibles en la literatura, se obtuvieron resultados a través de un modelo experimental construido al efecto y por medio de un código de elementos finitos de carácter comercial.

¹ Una función desplazamiento se considera admisible si no viola ninguna restricción geométrica y puede representar el desplazamiento del tramo de viga sin ninguna discontinuidad.

2.4.1.1. Modelo experimental:

En el laboratorio se construyó un pórtico en L con una planchuela de acero laminada en frío de $5/8 \text{ "} \times 1/8 \text{ "}$ ($b=15.875 \text{ mm}$, $h= 3.175 \text{ mm}$), y sección transversal $4.064 \times 10^{-5} \text{ m}^2$. La longitud de cada tramo es de 420 mm . Es necesario además el valor del módulo de Elasticidad E y de la densidad ρ del material empleado.

Debido a que en aplicaciones dinámicas, estos parámetros están siempre involucrados a través de la relación $\sqrt{E/\rho}$, se optó por el siguiente procedimiento:

Se construyó con el mismo material del pórtico, una viga de 417 mm de longitud libre y rígidamente empotrada en uno de sus extremos. Como es sabido que el primer autovalor de una viga cantiléver es igual a 1.8751 , se midió experimentalmente el valor de la primera frecuencia de ese modelo. Se realizaron varias mediciones; el promedio de los valores medidos en el modelo fue 14.85 Hz , con ello fue posible determinar la relación buscada, utilizando la conocida expresión de la ecuación de vibraciones libres:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad \frac{I}{A} = \frac{h^2}{12};$$
$$14.85 \text{ Hz} = \frac{1}{2\pi} \frac{(1.8751)^2}{(0.417 \text{ m})^2} \sqrt{\frac{E(0.003175 \text{ m})^2}{\rho 12}};$$
$$\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5034,73 \frac{\text{m}}{\text{seg}}.$$

Esta relación, que es la velocidad de una onda longitudinal en acero, fue utilizada en los parámetros mecánicos de los modelos experimentales de laboratorio y en los modelos simulados mediante elementos finitos.

El modelo de laboratorio, para el caso de vinculación externa empotrado-empotrado, fue montado sobre un perfil *UPN N° 100*, y sujeto por dos prensas tal como se muestra en las Figuras 2.3 y 2.4. El modelo de estructura vinculado con un empotramiento en uno de sus extremos y libre en el otro, es también sujeto por una prensa a la mesa de ensayos como se muestra en la figura 2.5. Con el fin de no perturbar el comportamiento de la estructura, las mediciones se tomaron con un proximíter. El dispositivo empleado fue un Pro vibtech, TMO 180. La señal de desplazamiento fue leída y procesada con un analizador de vibraciones de dos canales VIBXPERT II, con 24bits de resolución y 1.000 Hz de frecuencia de muestreo. La estructura fue excitada por medio de un impacto. En la figuras 2.6 y 2.7 podemos ver los espectros de las 10 primeras frecuencias obtenidos por el analizador, empotrado-empotrado y libre-empotrado respectivamente.

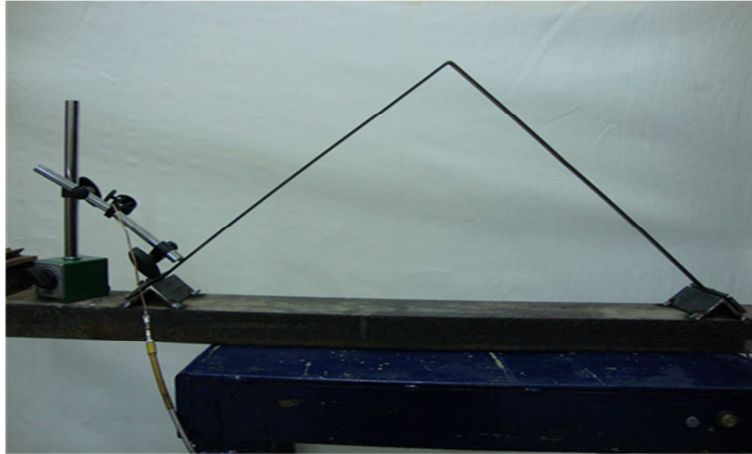


Figura 2.3: Estructura montada sobre perfil UPN 100. Pórtico biempotrado.



Figura 2.4: Prensa de anclaje de la estructura



Figura 2.5: Pórtico Empotrado-Libre

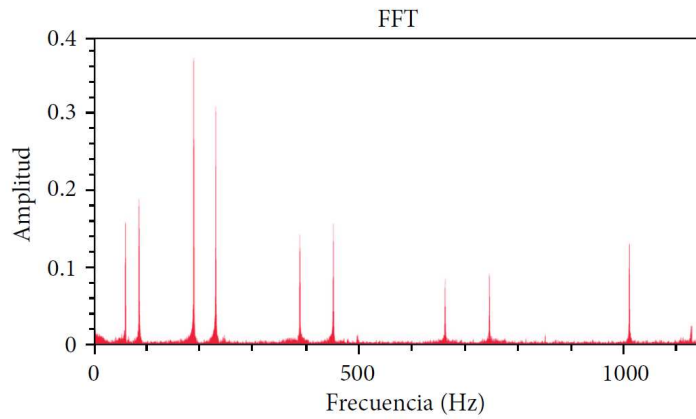


Figura 2.6: Espectro de las 10 primeras frecuencias naturales del modelo Empotrado-Empotrado

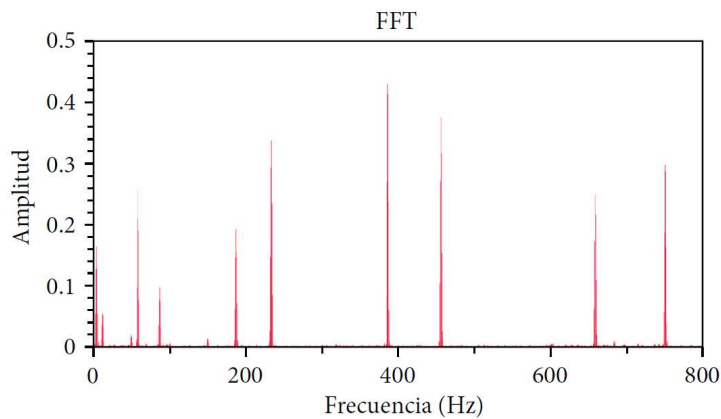


Figura 2.7: Espectro de las 10 primeras frecuencias naturales del modelo Libre-Empotrado

2.4.1.2. Modelo de Elementos Finitos

Para construir el modelo de elementos finitos se utilizó software Algor 2009.

Los tres miembros de la estructura son divididos en 100 elementos viga, cada elemento viga tiene tres grados de libertad. La rótula de condición elástica, representada por un resorte rotacional, es modelada por un elemento viga 300 veces menor que el elemento viga de los tramos. El momento de inercia de la sección se varió a fin de obtener valores de rigidez que son equivalentes a la rigidez de las constantes del resorte que conectan las dos secciones en el punto P .

2.4.2. Comparación del modelo con vinculación externa clásica.

A continuación se muestran una serie de valores numéricos obtenidos, que por medio de la comparación con resultados de la literatura científica, nos permitieron evaluar la precisión de los resultados arrojados por el procedimiento analítico.

2.4.2.1. Modelos: Empotrado-Empotrado y Empotrado – Libre

La variación de los valores de las constantes de resorte en los vínculos elásticos, produce una alteración en los coeficientes de frecuencia de la estructura. En la Tabla 2.1, se presentan los resultados de los coeficientes de frecuencia para los dos valores límites que adoptaron las constantes en el extremo F : Empotrado, las constantes de los resortes tienden a infinito; Libre, las constantes de los resortes tienden a cero. Para la constante de la rótula en P , tomamos $Rm \rightarrow \infty$, ya que los modelos con que se comparan tienen continuidad en el tramo OH . Las longitudes de los tramos se consideran iguales, de acuerdo a: $l_1 = l_2 + l_2$.

Luego, los resultados de la solución analítica exacta presentada se comparan; (1) con los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos, (2) con las lecturas tomadas del modelo experimental de laboratorio y (3) con resultados publicados en la literatura. En el caso del pórtico libre-empotrado (L-E), se observa la buena concordancia con los valores de Lin, H. et al., (2003). Para el caso E-E se compara con el presentado por Albarracín, C. et al. (2005). Los valores experimentales de frecuencia f_1 medidos en Hz , han sido transformados a valores adimensionales comparables a través de la expresión: $\lambda_1 = a^4 \sqrt{f_1^2}$ y se identifican como “Experimental (2)”.

		1	2	3	4	5	Método	
a)	λ	1.0820	1.7863	3.9680	4.8031	7.0981	Solución analítica exacta	
	λ	1.0854	1.7903	3.9753	4.8077	7.0956	MEF(1)	
	L-E	λ	1.0811	1.7985	3.9907	4.8537	7.0986	Experimental(2)
	f	(4.30)	(11.90)	(58.59)	(86.67)	(185.38)	Experimental(Hz)	
	λ	1.0880	1.7869	3.9685	4.8021	7.0915	Lin et al.. (2003) (3)	
b)	λ	3.9229	4.7227	7.0528	7.8249	10.1595	Solución analítica exacta	
	λ	3.9319	4.7295	7.0613	7.8187	10.1580	MEF(1)	
	E-E	λ	3.9270	4.7214	7.0432	7.8357	10.1900	Experimental(2)
	f	(56.76)	(82.10)	(182.5)	(225.88)	(382.08)	Experimental(Hz)	
	λ	3.9222	4.7142	7.0376	7.7588	10.0069	Albarracín et al.(2005) (3)	

Tabla 2.1: Comparación de los coeficientes de frecuencia natural λ_n de un pórtico en L de dos tramos iguales: a) Libre-Empotrado (L-E) y b) Empotrado-Empotrado (E-E).

En las Figuras 2.8 y 2.9 podemos ver las formas modales de las cinco primeras frecuencias naturales para los casos de vinculación externa del pórtico, empotrado-empotrado y libre-

empotrado respectivamente. Las formas modales fueron obtenidas con el software Algor 2009.

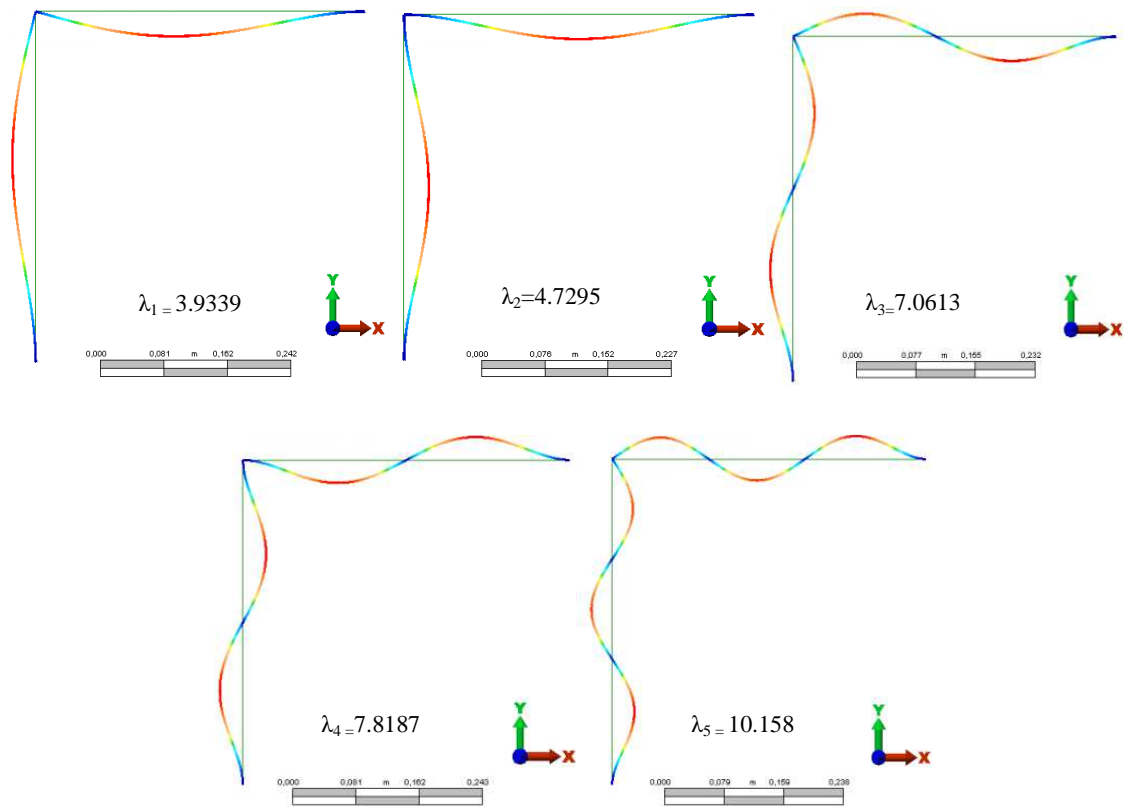


Figura 2.8: Primeras cinco formas modales del pórtico Empotrado-Empotrado (E-E),

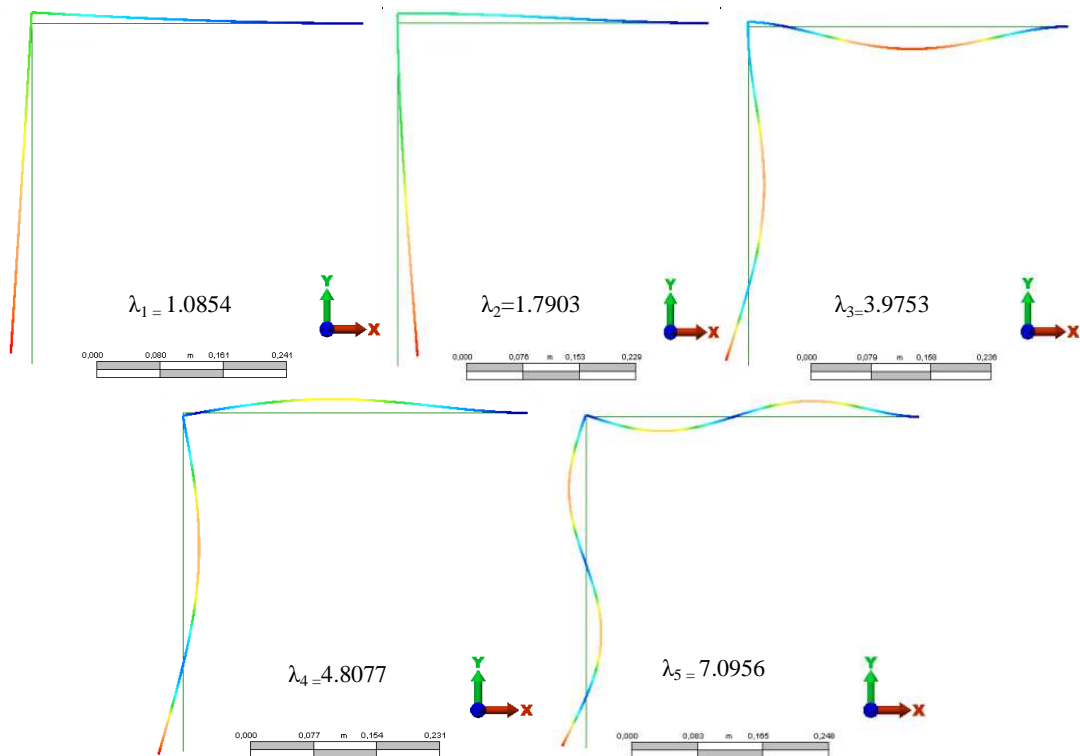


Figura 2.9: Primeras cinco formas modales del pórtico Libre- Empotrado (L-E),

Por último, tomamos un caso propuesto por Morales, C. (2009). En su trabajo Morales analiza un semi-pórtico empotrado-libre por medio del método Raleigh-Ritz-Meirovitch substructure synthesis method (RRMSSM), y obtiene las primeras cinco frecuencias naturales del modelo.

En la Tabla 2.2, se muestra los resultados de los cinco primeros coeficientes de frecuencia natural obtenidos por medio del método de cálculo de variaciones, y los obtenidos por Morales. Las características del modelo son; longitudes de los tramos 2.215 m y 4.249 m , respectivamente; y las otras propiedades adoptadas son, $EI_1=0,0147Nm,^2$ $EI_3=EI_3=0,0267Nm,^2$ $m_1=6\times 10^{-3}kg/m$; $m_2=m_3=4,5\times 10^{-5}kg/m$. Para modelar este ejemplo numérico con la solución exacta se adoptaron: $l_1=2,215m$; $l_2=2,249m$; $l_3=2,000m$ y como parámetros adimensionales a: $v_{l_1}=1$; $v_{EI_1}=1$; $v_{\rho A_1}=1$; $v_{l_2}=1,0153$; $v_{EI_2}=1,8163$; $v_{\rho A_2}=0,0075$; $v_{l_3}=0,0903$; $v_{EI_3}=1,8163$; $v_{\rho A_3}=0,0075$; $T_w=0$; $R_z=0$; $T_u=0$; $R_m\rightarrow\infty$,

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	Método
1,0301	1,9062	3,5186	5,1798	6,1299	Solución analítica
1,0385	1,9198	3,5277	5,1787	6,1156	MEF
1,0229	1,9229	3,5337	5,18442	6,13302	Morales, (2009) (12-DOF RRMSSM)
1,0229	1,9229	3,5337	5,18442	6,13301	Morales, (2009) (60-DOF FEM)
1,0229	1,9229	3,5337	5,1841	6,13290	Morales, (2009) (Analytical)

Tabla 2.2: Los primeros cinco coeficientes adimensionales de frecuencia natural λ_n de un pórtico en L, Libre-Empotrado (L-E) comparación de resultados.

2.4.3. Modelo Empotrado-Articulado

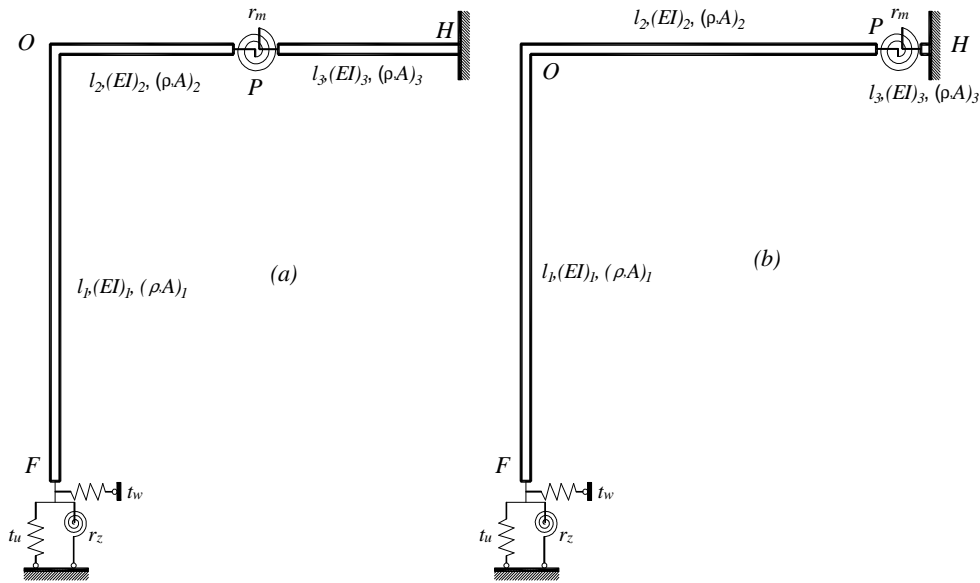
El siguiente caso numérico corresponde al pórtico en L articulado-empotrado en sus extremos. Para ello se asignaron valores a los parámetros de manera de modelar alternativamente condiciones de articulación en uno de los extremos del pórtico y empotramiento perfecto en el otro. Se idealizaron dos modelos para la solución analítica exacta con el fin de verificar resultados, Ellos son:

a) $v_{EI_i}=1$; $v_{\rho A_i}=1$; $\forall i=1, 2, 3$; y $v_{l_2}=v_{l_3}=\frac{1}{2}$; $T_w\rightarrow\infty$; $T_u\rightarrow\infty$; $R_z=0$; $R_m\rightarrow\infty$.

Figura 2.10.a

b) $v_{EI_i}=1$; $v_{\rho A_i}=1$; $\forall i=1, 2, 3$; y $v_{l_2}=0,99$; $v_{l_3}=0,01$; $T_w\rightarrow\infty$; $T_u\rightarrow\infty$; $R_z\rightarrow\infty$; $R_m=0$.

Figura 2.10.b. En este, se ha ubicado la rótula P muy próxima al extremo H y con constante Rm nula.



Figura

2.10: Pórtico en L. Empotrado-Articulado

La utilización de las dos alternativas evidencian la variedad de casos particulares que se pueden analizar con el modelo propuesto.

En la Tabla 2.3 se muestran los coeficientes de frecuencia obtenidos para las dos combinaciones de parámetros (a) y (b); y se complementa la Tabla con los valores calculados con el método de elementos finitos. La diferencia porcentual entre las dos soluciones analíticas se indica en la fila $\Delta\%$,

$$|\Delta| \% = \left(\left| \frac{(b)-(a)}{(b)} \right| \right) \%$$

Si bien el caso modelado con ambas propuestas corresponde a un mismo pórtico articulado-empotrado, las diferencias entre las soluciones (a) y (b), mínimas por cierto, se deben a la imposibilidad, por perturbaciones numéricas, de hacer coincidir la articulación con el extremo H . En este ejemplo los resultados numéricos se calcularon con seis cifras significativas, utilizando el software Mathematica 10, Wolfram, (2012) para resolver las ecuaciones analíticas.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	Método
3,3920	4,4566	6,5383	7,5702	9,6637	Solución analítica exacta (a)
3,3943	4,4266	6,5798	7,5666	9,6584	Solución analítica exacta (b)
0,07%	0,68%	0,63%	0,05%	0,05%	Diferencia $ \Delta =(b)-(a))/(b)\%$
3,3900	4,4266	6,5292	7,5608	9,6301	MEF

Tabla 2.3: Los primeros cinco coeficientes adimensionales de frecuencia natural λ_n de un pórtico en L de dos tramos iguales, Articulado-Empotrado(A-E) modelado de dos distintas maneras,

En la Figura 2.11 se muestran las formas modales de las cinco frecuencias naturales del pórtico de la Figura 2.10 (b), empotrado en el punto H y articulado en F .

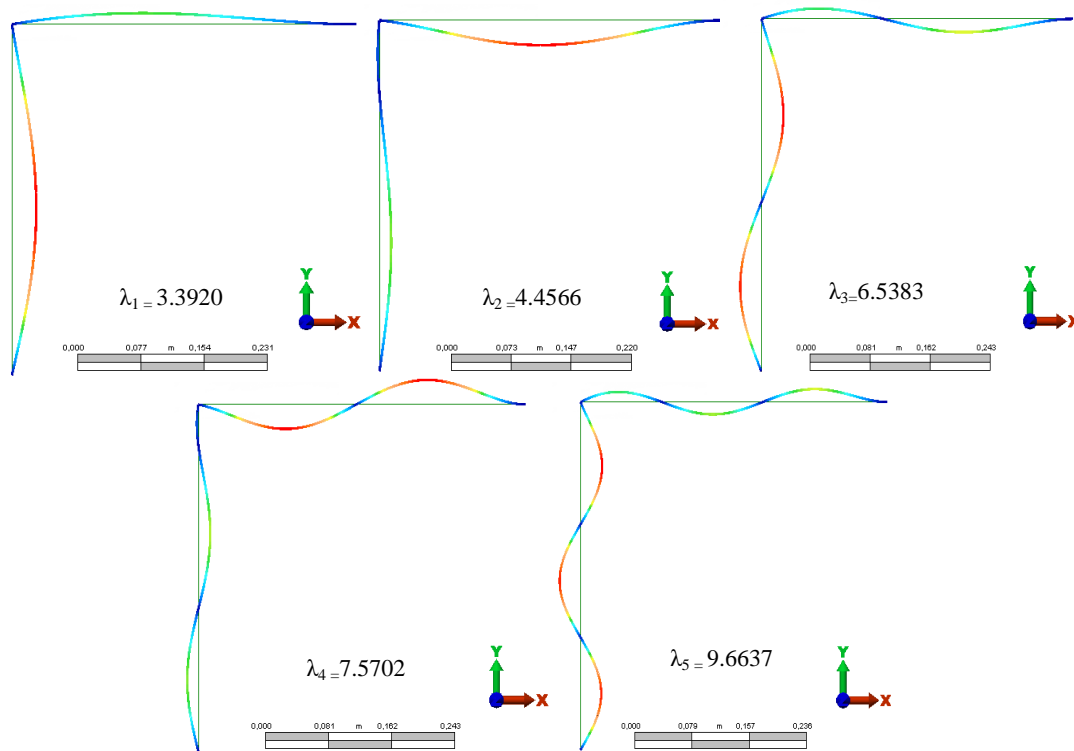


Figura 2.11: Formas modales de la estructura A-E, con $R_m \rightarrow \infty$

2.5. Análisis dinámico de la estructura: Combinación de diferentes condiciones en los vínculos elásticos del extremo F .

En esta sección, analizaremos la influencia de la variación de la rigidez de los vínculos externos en el comportamiento dinámico de la estructura. Para ello se combinaron diferentes valores de las constantes de los vínculos elásticos T_u , T_w , R_z ubicados en el extremo F .

Para todos los casos que siguen se tomaron los siguientes valores de los parámetros adimensionales de las vigas de la Figura 2.1: $l_2=l_3$; $\nu_{I1}=\nu_{I2}=1/2$; $\nu_{EI(2)}=\nu_{EI(3)}=1$; $\nu_{\rho A(2)}=\nu_{\rho A(3)}=1$.

En los modelos de vinculación que se analizarán en esta sección se ha adoptado la condición de infinita rigidez para el resorte rotacional que actúan en el punto P , dando continuidad al tramo horizontal

.Caso 1: $T_w=0$

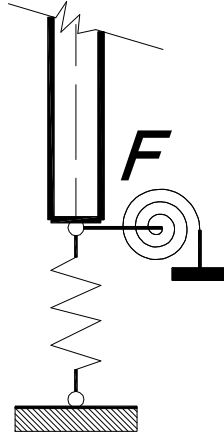


Figura 2.12: Caso 1 de vinculación en el borde F externo de la viga 1. $T_w=0$.

En la Tabla 2.4 se presentan algunos valores característicos de los coeficientes de frecuencias naturales calculados para el pórtico en L. Se varió la constante de rigidez del resorte a traslación en sentido vertical T_u , mientras que se mantuvieron fijos los valores de $T_w=0$ y de $R_z \rightarrow \infty$ (Figura 2.12).

T_w	T_u	R_z		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
0	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	Analítico	2,0293	4,1935	5,2372	7,3158	8,3709
			MEF	2,0336	4,1981	5,2364	7,2835	8,3214
0	5000	$\rightarrow \infty$	Analítico	2,0291	4,1867	5,2330	7,2173	8,1727
0	1000	$\rightarrow \infty$	Analítico	2,0282	4,1361	5,1517	5,5755	7.4307
0	500	$\rightarrow \infty$	Analítico	2,0268	4,0098	4,7187	5,3033	7,4137
0	100	$\rightarrow \infty$	Analítico	2,0147	2,9966	4,3363	5,2697	7,4036
0	50	$\rightarrow \infty$	Analítico	1,9945	2,5775	4,3185	5,2677	7,4025
0	10	$\rightarrow \infty$	Analítico	1,7377	2,1394	4,3084	5,2670	7,4018
0	0	$\rightarrow \infty$	Analítico	1,3404	2,0945	4,3058	5,2666	7,4016

Tabla 2.4: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural λ_n . Variando T_u , con T_w y R_z fijos.

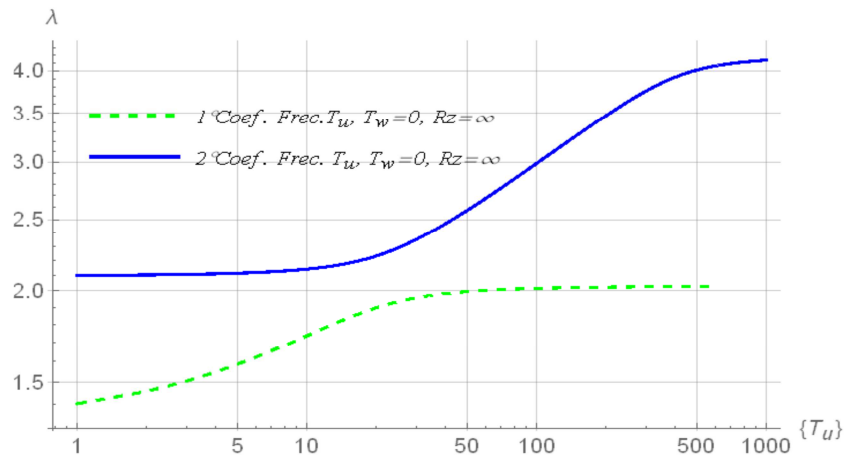


Figura 2.13. Efecto de rigidez de la condición de vínculo T_u en los dos primeros coeficientes de frecuencia

Observando los valores de la Tabla 2.4, se nota que a partir de $T_u = 5000$, las magnitudes de las tres primeras frecuencias naturales se mantienen prácticamente constante. En consecuencia puede suponerse que a partir de ese valor numérico se alcanza la condición de vínculo rígido.

En la Figura 2.13 podemos ver las curvas que representan la variación de los dos primeros coeficientes de frecuencia a partir del cambio de rigidez del vínculo elástico analizando T_u .

Por otro lado, es posible observar en la misma Figura 2.13 que se ha producido una especie de intercambio o salto entre los valores del primero y segundo coeficiente de frecuencia. El coeficiente de la primer frecuencia a partir de $T_u = 50$ adoptó un valor constante y similar, al valor de la segunda frecuencia para coeficientes T_u menores a 10.

La Figura 2.14 muestra que la influencia de la variación de rigidez del vínculo traslacional vertical T_u y para el mismo caso con $T_w = 0$, es similar para los casos extremos de valores de rigidez del resorte rotacional ($R_z = 0$ y $R_z \rightarrow \infty$). Obviamente los valores para el caso de mayor rigidez, son mayores.

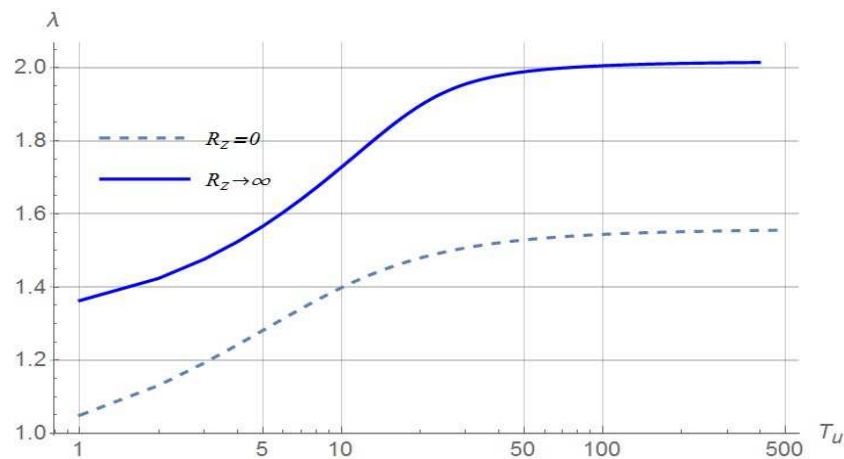


Figura 2.14: Curvas del primer coeficiente de frecuencia variando T_u con $R_z = 0$ y $R_z \rightarrow \infty$

Caso 2: $T_u = 0$

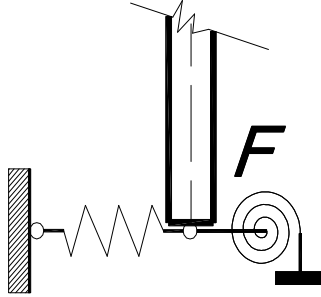


Figura 2.15: Caso 2 de vinculación en el borde F externo de la viga 1. $T_u=0$.

La Tabla 2.5 contiene los coeficientes de frecuencias naturales correspondientes al caso de vinculación en el extremo F (Figura 2.15) asumiendo rigidez infinita para el resorte rotacional $R_z \rightarrow \infty$. La constante del resorte a traslación en sentido transversal T_w adopta diferentes valores entre infinito y cero también en este caso, el resorte rotacional en el punto P se supone infinitamente rígido, $R_m \rightarrow \infty$. Asimismo se consideró la ausencia de vinculación traslacional vertical.

T_w	T_u	R_z		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1,5479	3,9692	4,8158	7,0877	7,9012
			MEF	1,5513	3,9744	4,8178	7,0752	7,8709
5000	0	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1,5477	3,9636	4,8091	7,0545	7,8674
1000	0	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1,5469	3,9330	4,7741	6,8161	7,6965
500	0	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1,5459	3,8905	4,7269	6,4760	7,5714
100	0	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1,5381	3,5193	4,4874	5,5645	7,4334
50	0	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1,5290	3,1909	4,3989	5,4053	7,4171
10	0	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1,4765	2,4930	4,3237	5,2920	7,4046
0	0	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1,3404	2,0945	4,3058	5,2666	7,4016

Tabla 2.5: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural λ_n . Variando T_w , con T_u y R_z fijos.

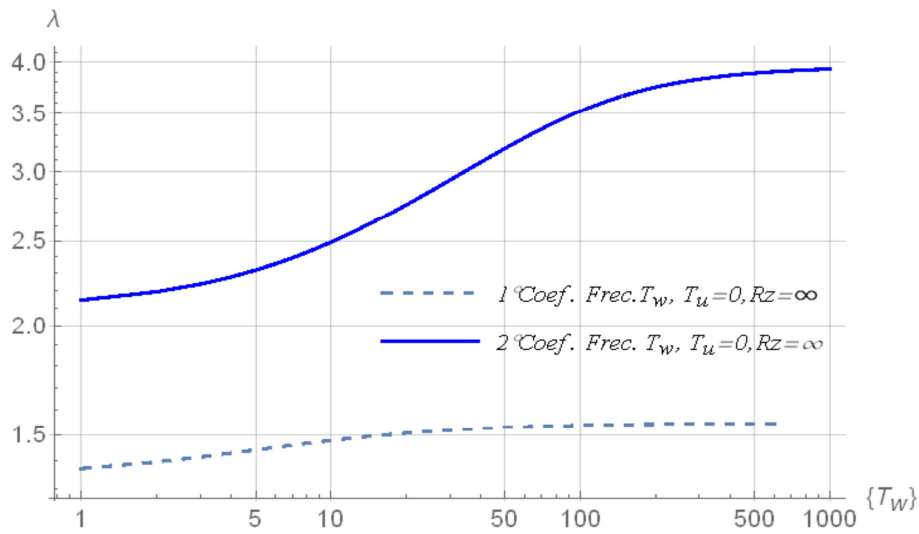


Figura 2.16: Efecto de T_w en los dos primeros coeficientes de frecuencia. Caso 2

La Figura 2.16 completa el caso analizado con curvas que indican el efecto de T_w sobre los dos primeros coeficientes de frecuencia del pórtico en L con las condiciones de vinculación elástica en el extremo F indicada. (Figura 2.15).

Nuevamente el valor numérico de $T_w=5000$, indica la condición de rigidez absoluta.

En las Tablas 2.4 y 2.5 podemos ver cómo cambian los coeficientes de frecuencias naturales, a medida que la condición de vínculo elástico correspondiente se hace menos rígida, desde la condición de vínculo rígido hasta desaparecer dicha rigidez. Se nota la mayor influencia del vínculo axial con la viga (T_u).

Caso 3: $T_w = 0$ y $R_z = 0$

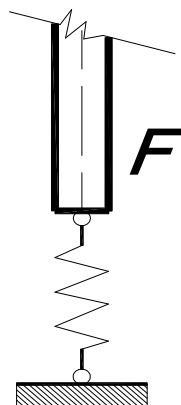


Figura 2.17: Caso 3 de vinculación en el extremo F

Tabla 2.6 se presenta la influencia de la rigidez T_u para los primeros cinco coeficientes de frecuencia cuando es la única condición de vínculo aplicada en el extremo F . (Figura 2.17).

T_w	T_u	R_z		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
0	$\rightarrow\infty$	0	<i>Analítico</i>	1,5706	3,9250	4,7084	7,0630	7,8389
			MEF	1,5741	3,9311	4,7072	7,0503	7,7793
0	5000	0	<i>Analítico</i>	1,5703	3,9228	4,6995	7,0274	7,6851
0	1000	0	<i>Analítico</i>	1,5691	3,9074	4,6145	5,5464	7,1131
0	500	0	<i>Analítico</i>	1,5674	3,8643	4,3658	5,0052	7,1042
0	100	0	<i>Analítico</i>	1,5540	2,9861	3,9861	4,8215	7,0993
0	50	0	<i>Analítico</i>	1,5369	2,5695	3,9758	4,8119	7,0987
0	10	0	<i>Analítico</i>	1,4120	1,9744	3,9704	4,8068	7,0986
0	0	0	<i>Analítico</i>	1,0820	1,7863	3,9680	4,8031	7,0981

Tabla 2.6: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural λ_n de un pórtico en L de dos tramos iguales, Vínculos elásticos en extremo F . Caso 3

Caso 4: $T_w \rightarrow\infty$ y $R_z=0$

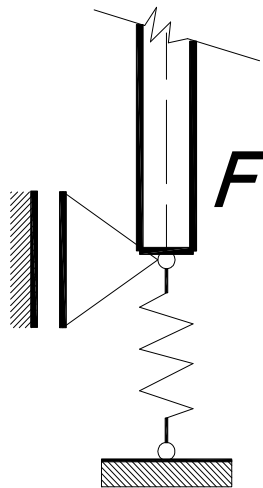


Figura 2.18: Caso 4 de vinculación en el extremo F

La Tabla 2.7 muestra los coeficientes de frecuencia para el pórtico cuando en el extremo F de la viga 1 está restringida elásticamente a la traslación longitudinal, rígidamente vinculado en su lado transversal ($T_w \rightarrow\infty$) y sin restricción a la rotación ($R_z=0$), Figura 2.18.

T_w	T_u	R_z		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$\rightarrow\infty$	$\rightarrow\infty$	0	Analítico	3,3920	4,4566	6,5383	7,5702	9,6637
$\rightarrow\infty$	10000	0	Analítico	3,3920	4,4544	6,5383	7,5402	9,6366
$\rightarrow\infty$	1000	0	Analítico	3,3916	4,3599	5,5319	6,5428	7,7064
$\rightarrow\infty$	100	0	Analítico	2,9849	3,3982	4,6227	6,5414	7,6789

Tabla 2.7: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural λ_n de un pórtico en L de dos tramos iguales. Vinculación elástica en extremo F ($R_z=0$)

A continuación se analizan las variaciones de los cinco primeros coeficientes de frecuencia natural para un pórtico empotrado en H , con $R_m \rightarrow \infty$, cuando el extremo F (Figura 2.18) está simplemente apoyada en el sentido transversal a la viga y el vínculo elástico longitudinal aumenta su rigidez de cero hasta infinito. En la Figura 2.19 se observa que al aumentar el valor de la constante del resorte T_u , se incrementan todos los parámetros de frecuencia hasta converger en el límite, cuando $T_u \rightarrow \infty$, con el caso de los coeficientes de un pórtico con vinculación Clásica (A-E): articulado en F y empotrado en H . También es posible observar que los coeficientes de la primera y segunda frecuencia intercambian sus formas modales para un valor de Tu entre 100 y 1000. Un comportamiento similar ocurre entre los coeficientes de la tercera y cuarta frecuencia para un valor de Tu entre 1000 y 10000.

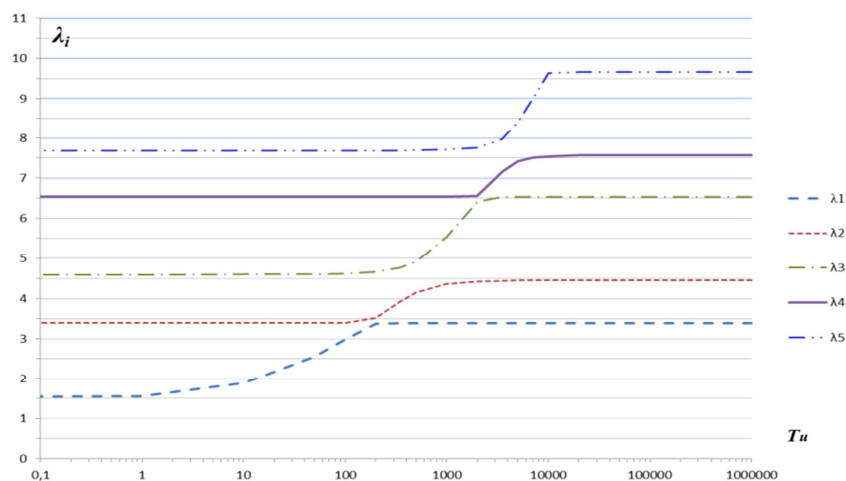


Figura 2.19: Efecto de T_u en los primeros cinco coeficientes de frecuencia natural,

$$l_2 = l_3, v_{l1} = v_{l2} = 0.5, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, R_m \rightarrow \infty, R_z = 0, T_w \rightarrow \infty.$$

Caso 6: $T_u \rightarrow \infty$ y $R_z=0$

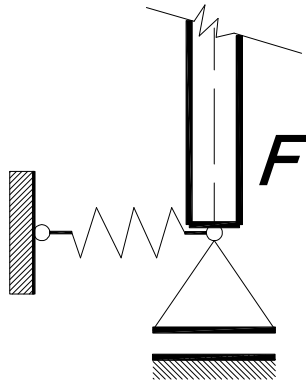


Figura 2.20: Caso 6 de vinculación en el extremo F

El siguiente caso de vinculación en F es el de la Figura 2.20 y el comportamiento de los coeficientes de frecuencia ante la variación de la condición de vínculo transversal a la viga se muestra en la curva de la Figura 2.21. También puede observarse que al aumentar la rigidez aumentan los parámetros adimensionales de frecuencia y nuevamente se ve la convergencia en el límite, $T_w \rightarrow \infty$, hacia los coeficientes correspondientes a un pórtico A-E.

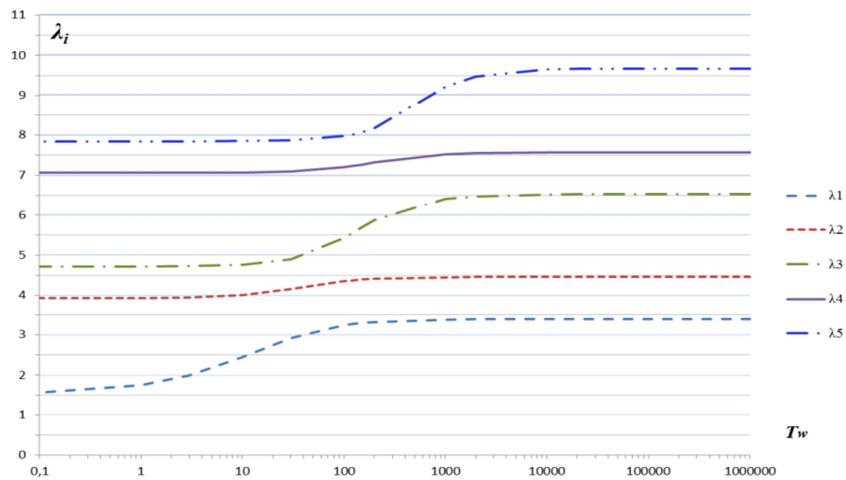


Figura 2.21: Efecto de T_w en los primeros cinco coeficientes de frecuencia natural

$$l_2 = l_3, v_{l1} = v_{l2} = 0.5, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, R_m \rightarrow \infty, R_z = 0, T_u \rightarrow \infty.$$

Caso 7: $T_w \rightarrow \infty$ y $T_u \rightarrow \infty$

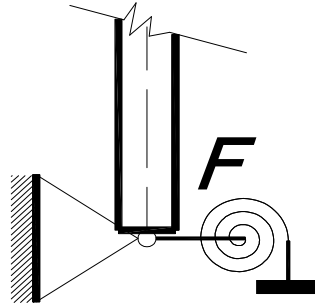


Figura 2.22: Caso 7 de vinculación en el extremo F

En la Figura 2.22 se presenta el efecto del resorte rotacional del pórtico de la viga 1 en la sección F en la dirección normal al plano, considerando rigidez infinita en el vínculo horizontal. De los valores se observa que el efecto de esta condición produce un efecto mucho más atenuado que el que generan los resortes traslacionales, en el límite inferior, cuando $R_z \rightarrow 0$, los coeficientes de frecuencia coinciden con los del pórtico A-E y para el límite superior, cuando $R_z \rightarrow \infty$, corresponden a los del pórtico E-E. Es así que por ejemplo para la frecuencia fundamental, los valores de los coeficientes adimensionales van de 3.3900 (A-E) a 3.9316 (E-E); en tanto para la quinta frecuencia natural varían de 9.6301 (A-E) a 10.0453 (E-E), Figura 23.

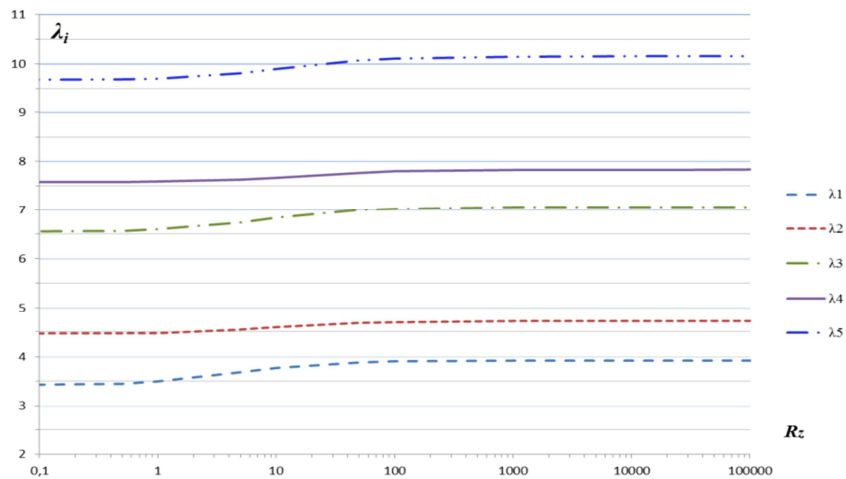


Figura 2.23: Efecto de R_z en los primeros cinco coeficientes de frecuencia fundamental,

$$l_2 = l_3, v_{l1} = v_{l2} = 0.5, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, R_m \rightarrow \infty, T_w \rightarrow \infty, T_u \rightarrow \infty.$$

2.6. Análisis dinámico de la estructura: Combinación de diferentes condiciones en el resorte rotacional en el punto P .

Finalmente analizamos cuál es la influencia del resorte rotacional que está modelando la rótula elástica en el punto P del pórtico (Figura 2.24). En la Figura 2.25 vemos la consecuencia que

produce la variación del resorte rotacional (R_m) ubicado en el centro del tramo horizontal OH , en el primer coeficiente de frecuencia natural para los tres casos de vínculo externos clásicos (libre, articulado y empotrado) en el punto F de la estructura de la Figura 2.1. En las curvas podemos observar que la variación de los coeficientes es pequeña y se producen para valores de R_m menores que 100.

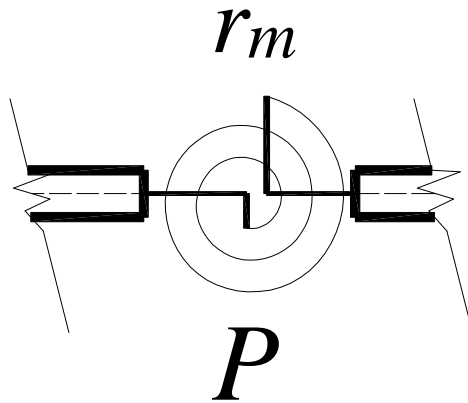


Figura 2.24: Rotula elástica en el punto P del pórtico

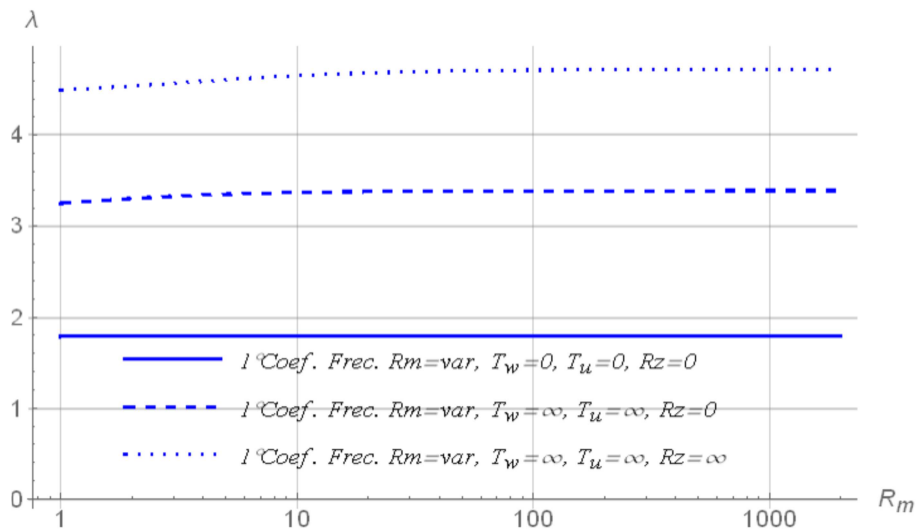


Figura 2.25: Efecto de R_m , en el centro del tramo OH , en los primeros coeficientes de frecuencia fundamental

A continuación analizamos la variación de la constante del resorte rotacional R_m para valores entre 5 y 200. Por otro lado también ubicamos la posición de la misma a una distancia de un tercio, en el centro y a dos tercios del vértice O del pórtico. Este análisis se realizó en un pórtico empotrado en sus dos extremos, y en un pórtico libre-empotrado.

En la Tabla 2.8 podemos ver los primeros cinco coeficientes de frecuencias naturales para el pórtico empotrado en sus dos extremos. En este caso la constante del resorte rotacional (R_m) se ubica en tres diferentes posiciones: a una distancia $l_2 = 1/3 l_1$; en el centro del tramo horizontal OH ; y una longitud $l_2 = 2/3 l_1$. Se varió la constante del resorte rotacional (R_m).

l_2/l_1	R_m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1/3	200	3.9205	4.7232	7.0504	7.8183	10.1517
	100	3.9167	4.7218	7.0464	7.8113	10.1506
	50	3.9080	4.7185	7.0370	7.7956	10.1483
	10	3.8490	4.6983	6.9731	7.7100	10.1344
	5	3.7850	4.6800	6.9047	7.6464	10.1222
1/2	200	3.9212	4.7208	7.0533	7.8255	10.1427
	100	3.9181	4.7169	7.0522	7.8255	10.1325
	50	3.9110	4.7081	7.0498	7.8255	10.1018
	10	3.8612	4.6555	7.0346	7.8254	9.9431
	5	3.8047	4.6094	7.0201	7.8254	9.7765
2/3	200	3.9238	4.7232	7.0474	7.8182	10.1499
	100	3.9234	4.7218	7.0405	7.8111	10.1471
	50	3.9224	4.7184	7.0241	7.7955	10.1408
	10	3.9156	4.6962	6.9125	7.7150	10.1052
	5	3.9083	4.6730	6.7611	7.6608	10.0763

Tabla 2.8: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural λ_n de un pórtico en L de dos tramos iguales. Empotramientos en sus extremos. Variando la contante del resorte rotacional (R_m), en su posición y valor.

La Tabla 2.9 contiene los coeficientes de frecuencias naturales del pórtico, empotrado en el extremo H y libre en el extremo F , con las mismas características de variación del resorte rotacional (R_m).

l_2/l_1	R_m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1/3	200	1.0817	1.7857	3.9661	4.8035	7.0947
	100	1.0810	1.7851	3.9630	4.8017	7.0908
	50	1.0793	1.7836	3.9557	4.7976	7.0817
	10	1.0671	1.7738	3.9064	4.7724	7.0186
	5	1.0584	1.7673	3.8741	4.7579	6.9768
1/2	200	1.0814	1.7862	3.9666	4.8003	7.0977
	100	1.0803	1.7862	3.9641	4.7954	7.0968
	50	1.0779	1.7862	3.9581	4.7842	7.0949
	10	1.0605	1.7858	3.9156	4.7165	7.0831
	5	1.0398	1.7853	3.8657	4.6563	7.0721
2/3	200	1.0810	1.7860	3.9688	4.8033	7.0924
	100	1.0795	1.7858	3.9684	4.8013	7.0862
	50	1.0761	1.7852	3.9674	4.7967	7.0716
	10	1.0524	1.7814	3.9611	4.7664	6.9722
	5	1.0251	1.7774	3.9541	4.7349	6.8671

Tabla 2.9: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural λ_n de un pórtico en L de dos tramos iguales. Empotramientos - libre. Variando la constante del resorte rotacional (R_m), en su posición y valor.

De los datos de las Tablas 2.8 y 2.9 podemos ver que para valores de R_m de 10 y 5, la reducción del valor del coeficiente de frecuencia λ es significativa. Los valores en los coeficientes de frecuencia debidos a las diferentes posiciones de ubicación de la rótula no muestran grandes variaciones.

Además de los cambios de las frecuencia naturales, analizamos los cambios de las formas modales del pórtico en presencia de una rótula elástica representada por el resorte rotacional R_m .

En las Figuras 2.26 , 2.27 y 2.28 vemos las formas modales del pórtico con vinculación externa (E-E) y en las Figuras 2.29 , 2.30 y 2.31 con vinculación externa (L-E) . En las Figuras 2.26 y 2.29 la rótula elástica fue ubicada de modo que la longitud del tramo horizontal $l_2=1/3 l_1$ y el valor de la constante del resorte $R_m=10$, en la Figuras 2.27 y 2.30 la rótula elástica fue ubicada a una longitud del tramo horizontal $l_2=1/2 l_1$ y el valor de la constante del resorte es también $R_m=10$. Por último en las Figuras 2.28 y 2.31 la rótula elástica fue ubicada a una longitud del tramo horizontal $l_2=2/3 l_1$. Si las comparamos con las Figura 2.8 y 2.9, en donde la constante del resorte rotacional toma valor $R_m=\infty$, podemos ver cómo afectan la variación de la constante R_m y la ubicación de la rótula elástica a los diferentes modos. Las formas modales y los valores de los coeficientes adimensionales fueron obtenidos por medio del modelo de elementos finitos con Algor 2009.

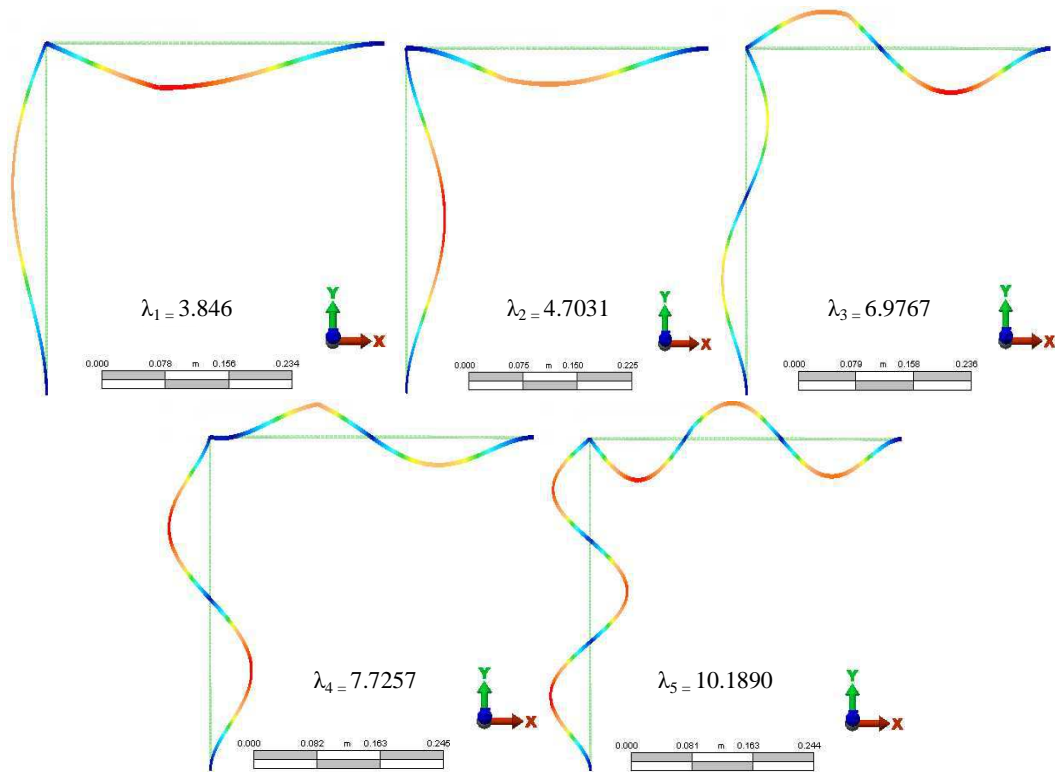


Figura 2.26: Primeras cinco formas modales del pórtico Empotrado-Empotrado (E-E). $R_m=10$ y $l_2=1/3l_1$

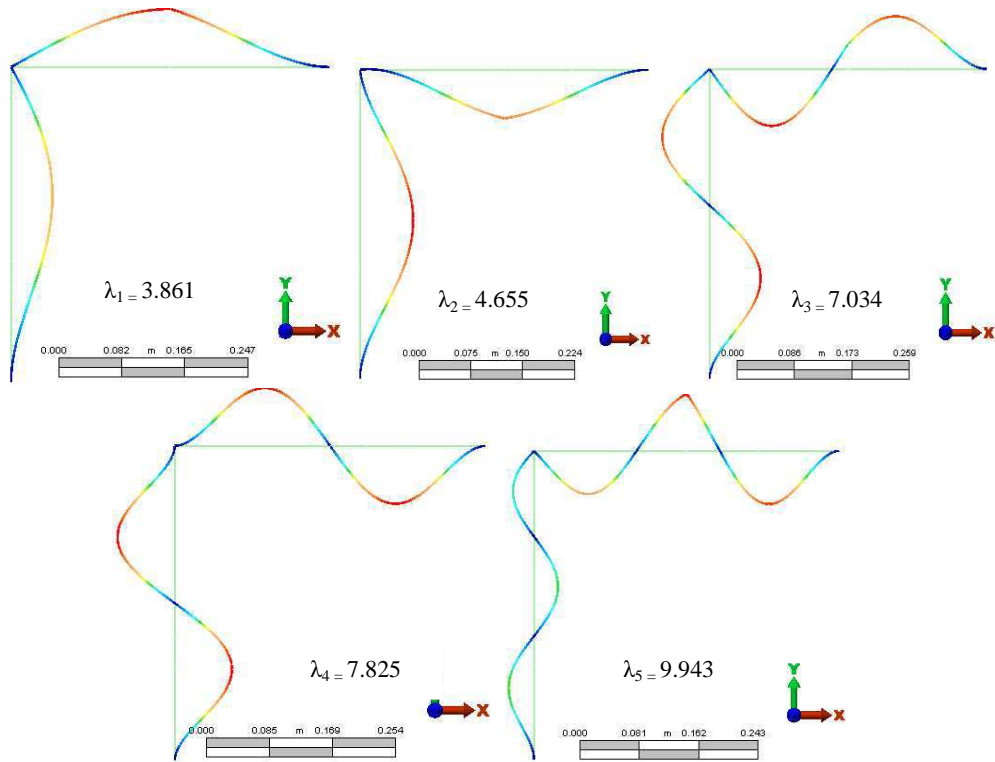


Figura 2.27 :Primeras cinco formas modales del pórtico Empotrado-Empotrado (E-E). $R_m=10$ y $l_2=1/2l_1$

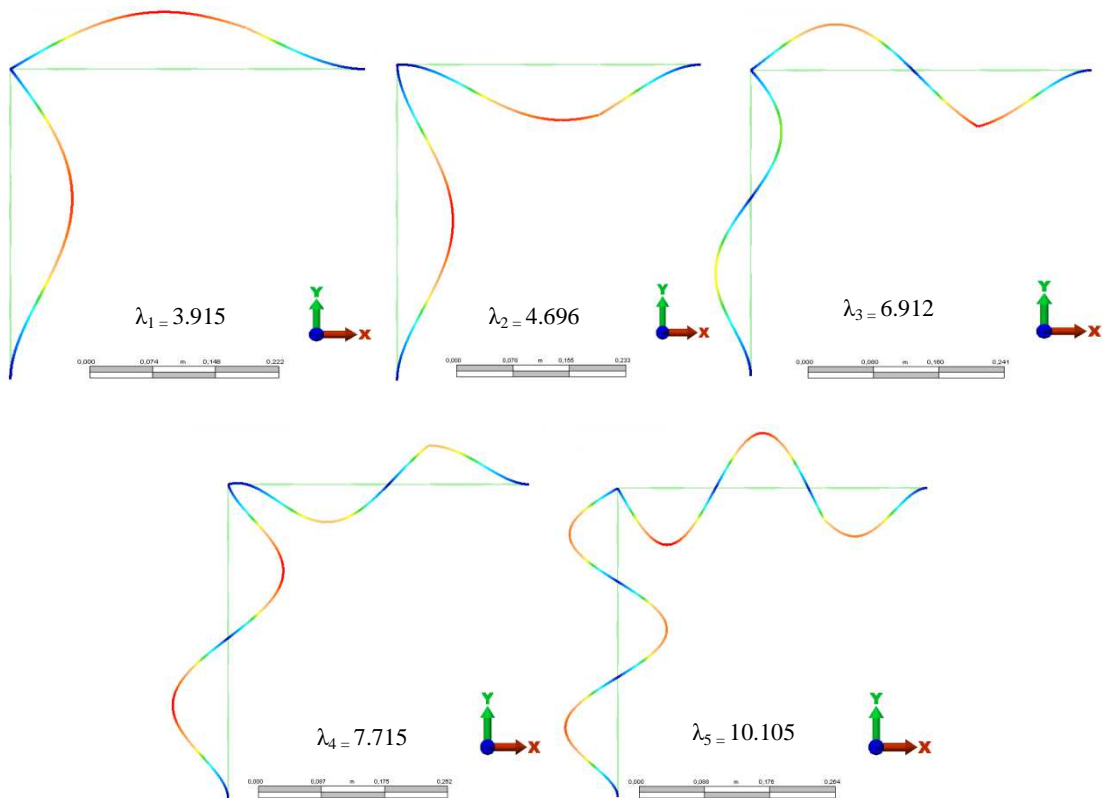


Figura 2.28: Primeras cinco formas modales del pórtico Empotrado-Empotrado (E-E). $R_m=10$ y $l_2=2/3l_1$

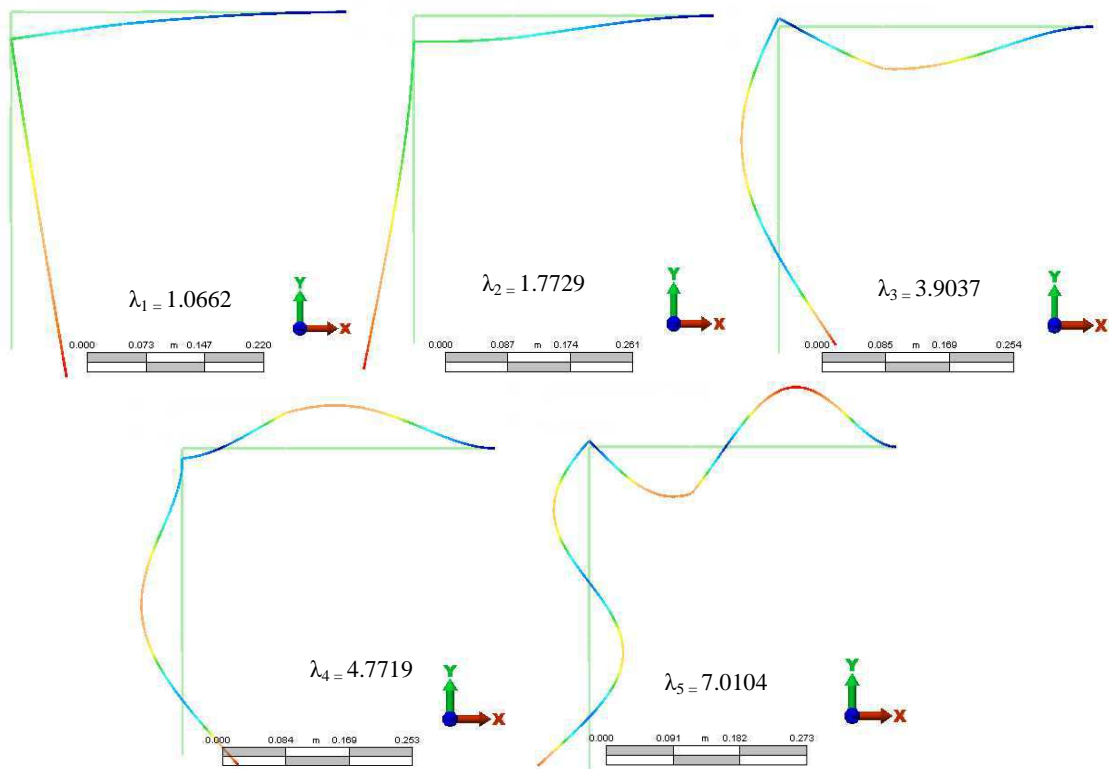


Figura 2.29: Primeras cinco formas modales del pórtico Libre- Empotrado (L-E). $R_m=10$ y $l_2=1/3l_1$

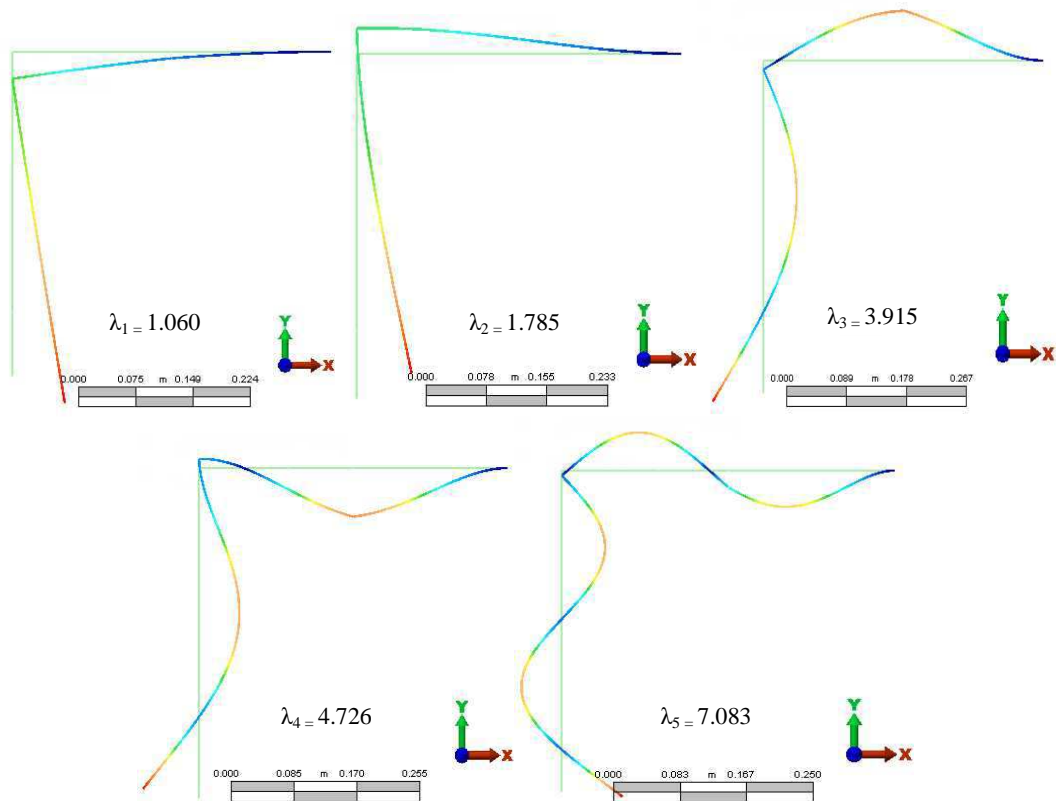


Figura 2.30: Primeras cinco formas modales del pórtico Libre- Empotrado (L-E). $R_m=10$ y $l_2=1/2l_1$

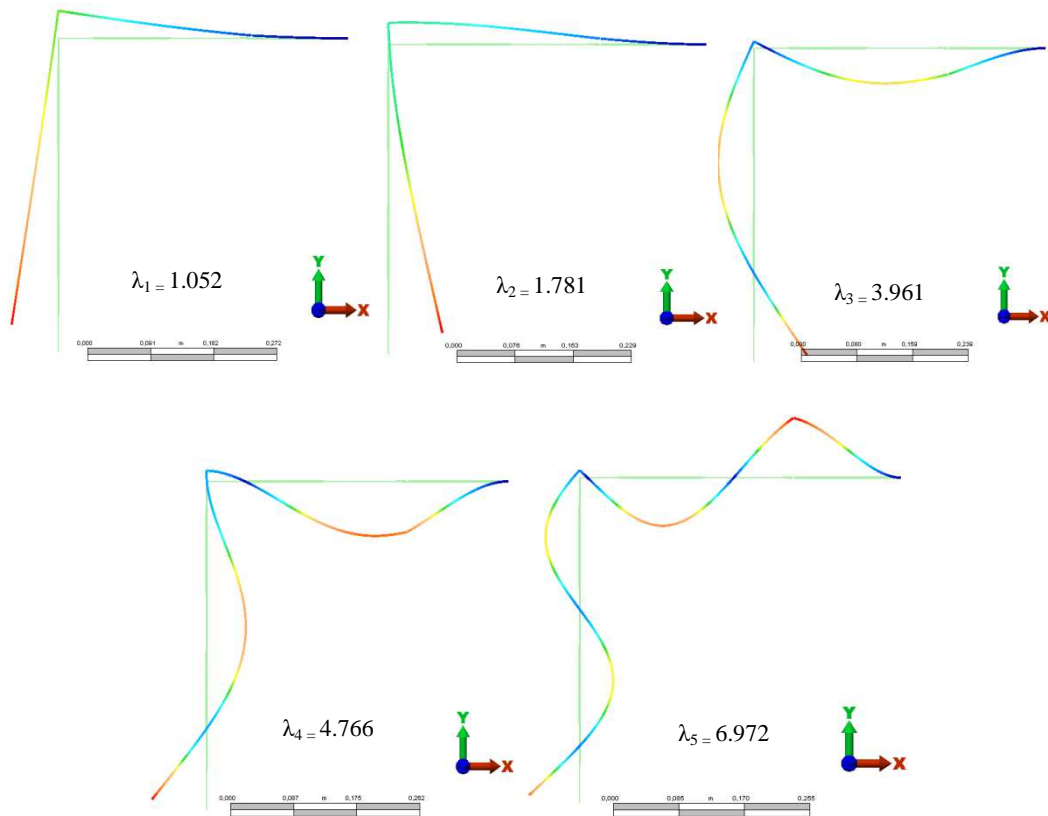


Figura 2.31: Primeras cinco formas modales del pórtico Libre- Empotrado (L-E). $R_m=10$ y $l_2=2/3l_1$

Ahora analizamos los casos particulares en que la rótula elástica está ubicada en alguno de los dos extremos de la viga horizontal $O-H$.

En primer lugar ubicamos la rótula en el extremo O del pórtico. La vinculación externa en el punto H es rígidamente empotrado, mientras que en el punto F modelamos una vínculo articulado dándole valores de $T_w \rightarrow \infty; T_u \rightarrow \infty; R_z \rightarrow 0$ a los vínculos elásticos, Figura 2.32.

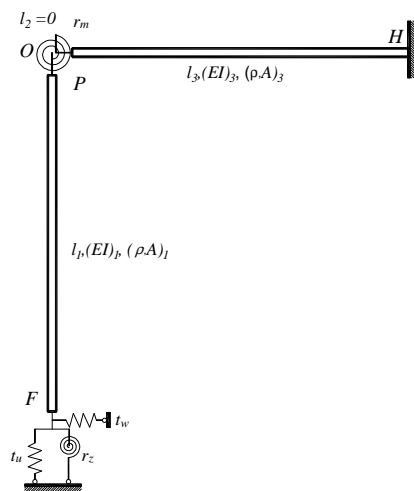


Figura 2.32: Pórtico en L. Articulado- Empotrado (A-E) con rótula elástica en el punto O .

En la Tabla 2.10, vemos los resultados de los cinco coeficientes de frecuencias naturales variando el valor desde $R_m \rightarrow 0$ a $R_m \rightarrow \infty$.

R_m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$\rightarrow \infty$	3.3920	4.4566	6.5384	7.5705	9.6640
500	3.3920	4.4566	6.5384	7.5705	9.6845
200	3.3915	4.4546	6.5419	7.5700	9.6669
100	3.3898	4.4461	6.5386	7.5630	9.6626
50	3.3866	4.4299	6.5320	7.5369	9.6543
10	3.3627	4.3270	6.4879	7.3918	9.6015
3	3.3119	4.1717	6.4144	7.2307	9.5266
0	3.1416	3.9266	6.2832	7.069	9.4248

Tabla 2.10: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural λ_n de un pórtico en L de dos tramos iguales Articulado - Empotrado. Variando el valor de la contante del resorte rotacional (R_m), ubicado en el punto O del pórtico.

A partir de los resultados numéricos de los coeficientes de frecuencia podemos ver que en el caso de $R_m \rightarrow 0$ los coeficientes de frecuencia; $\lambda_1=3.14159$, $\lambda_3=6.2832$ y $\lambda_5=9.4248$ son los coeficientes de frecuencia del tramo de viga (FO) articulada-articulada. Mientras que los coeficientes; $\lambda_2=3.9266$, $\lambda_4=7.069$ son los coeficientes del tramo de la viga (OH) articulada-empotrada.

Para el caso de $R_m \rightarrow \infty$ los valores de los coeficientes de frecuencia son similares al del pórtico Articulado- Empotrado analizado en la sección **2.4.2.2**.

Por ultimo analizamos el caso en que la rótula elástica está ubicada a una distancia infinitamente pequeña del punto H del pórtico. Mientras que en el punto F , al igual que en el caso anterior, modelamos un vínculo articulado dándole valores de $T_w \rightarrow \infty$; $T_u \rightarrow \infty$; $R_z \rightarrow 0$ a los vínculos elásticos Figura 2.33.

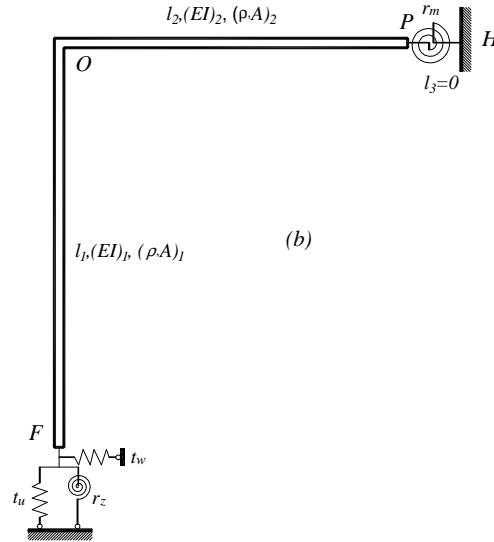


Figura 2.33: Pórtico en L. Articulado- Articulado (A-A) con rotula elástica ubicada a una distancia infinitamente pequeña del punto H .

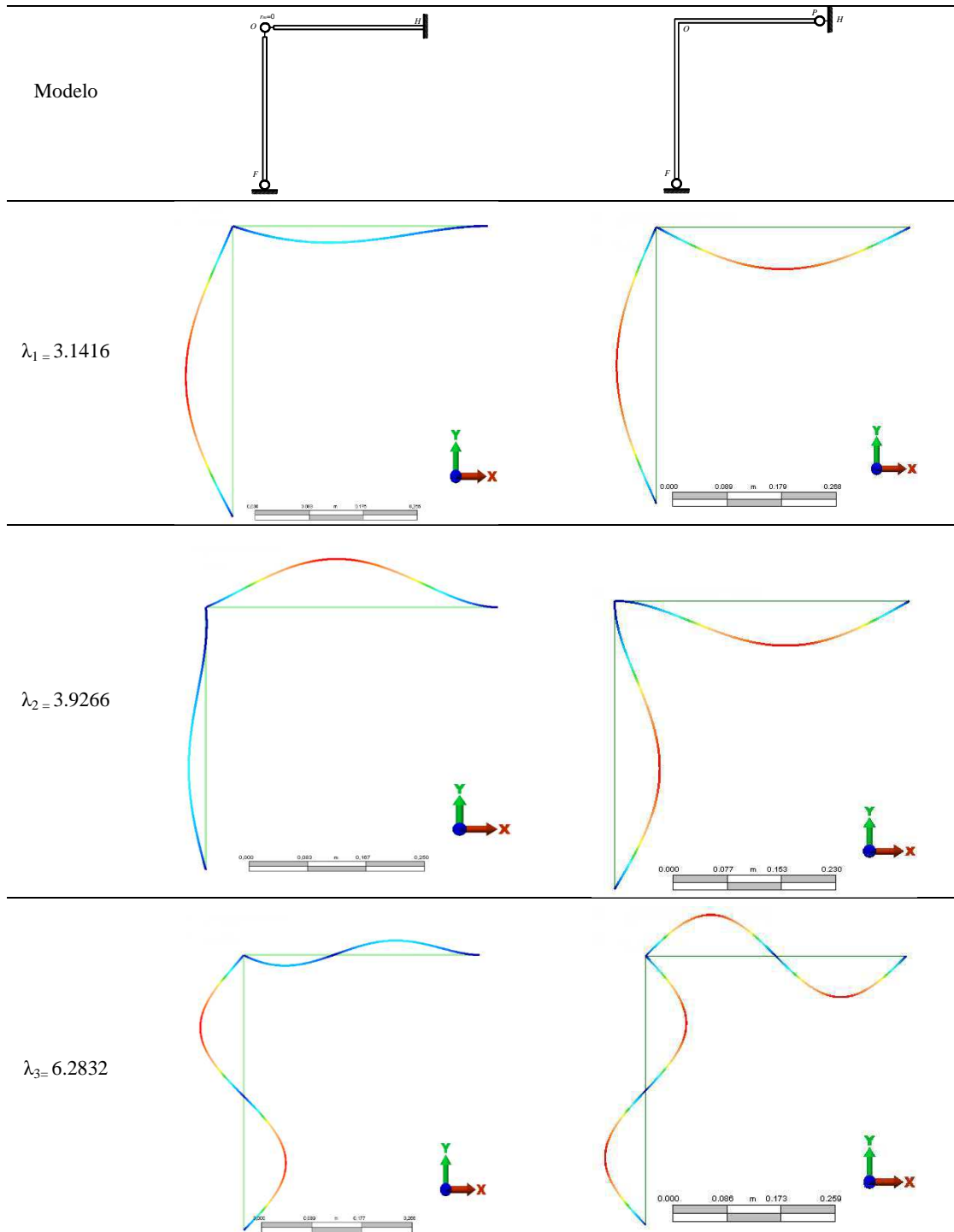
En la Tabla 2.11, vemos los resultados de los cinco coeficientes de frecuencias naturales del modelo con la rótula elástica ubicada a una distancia infinitamente pequeña del punto H del pórtico, variando el valor desde $R_m \rightarrow 0$ a $R_m \rightarrow \infty$.

R_m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$\rightarrow \infty$	3.3920	4.4566	6.5386	7.5705	9.6666
500	3.3918	4.4563	6.5386	7.5798	9.6666
200	3.3898	4.4461	6.5386	7.5630	9.6666
100	3.3866	4.4299	6.5320	7.5369	9.6661
50	3.3802	4.4001	6.5197	7.4912	9.6499
10	3.3380	4.2428	6.4490	7.2968	9.5637
3	3.2685	4.0817	6.3686	7.1614	9.4880
0	3.1416	3.9266	6.2832	7.0685	9.4248

Tabla 2.11: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural λ_n de un pórtico en L de dos tramos iguales Articulado - Empotrado. Variando el valor de la constante del resorte rotacional (R_m), ubicado a una distancia infinitamente pequeña al punto H .

Obsérvese que la fila correspondiente a $R_m=0$ coincide con la última fila de la Tabla 2.10 cuando la articulación se ubica en el punto O .

En la Figura 2.34 comparamos las formas modales de los dos casos, para la rótula ubicada en el vértice O y para la rótula infinitamente cerca del extremo H . Para ambos ejemplos se toma el valor de $R_m=0$ y el vínculo extremo en F y H , serán articulado.



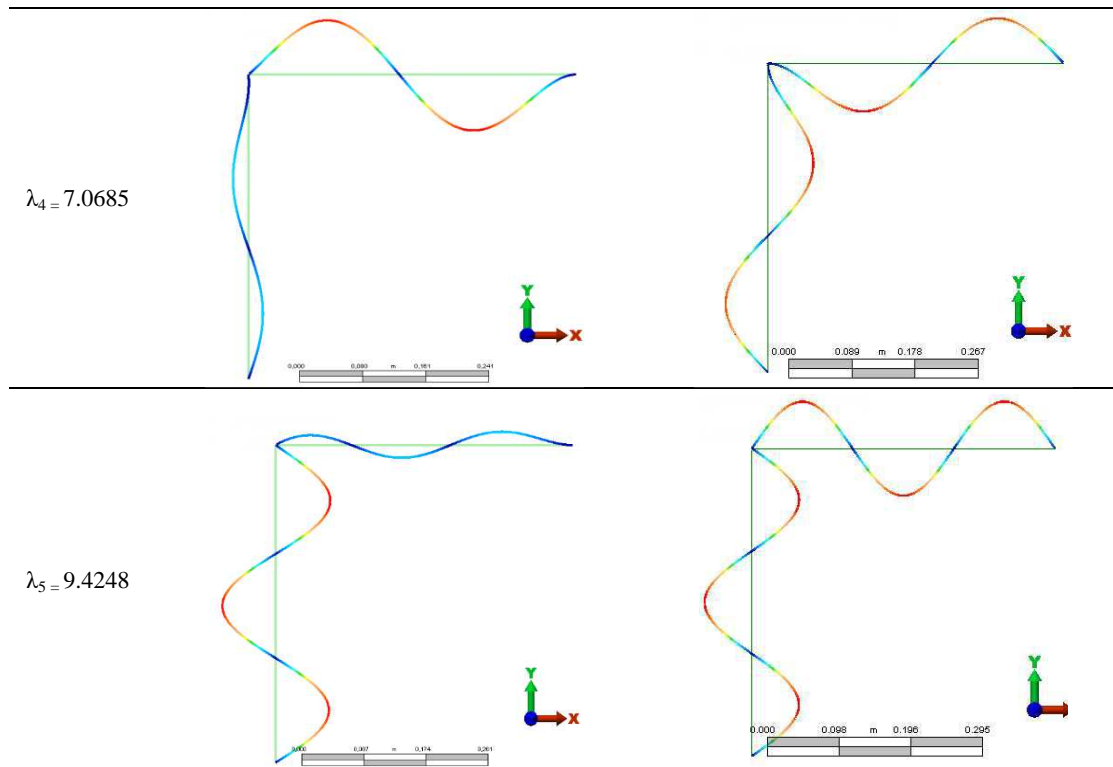


Figura 2.34: Primeras cinco formas modales del pórtico Articulado- Empotrado (A-E). $R_m=0$ y $l_2=0$, $l_2/l_3 \rightarrow 1$

De la comparación de estos dos casos podemos observar que los valores de los coeficientes de frecuencia son iguales en ambos modelos, mientras que las formas modales varían según el tramo del pórtico que analicemos.

Analizando las formas modales de la Figura 2.34, vemos que la primera frecuencia, en el primer modelo corresponde a la columna biarticulada y en el segundo a ambos tramos, que al girar el nudo O adopta la forma modal de la viga biarticulada. Lo mismo sucede para la tercera y la quinta potencia.

En la segunda y cuarta frecuencia, en el segundo modelo no rota el nudo O y ambos tramos adoptan la forma modal de una viga articulada-empotrada.

En el primer modelo, se corresponde con el tramo OH , articulado-empotrado.

2.7. Conclusiones.

En este Capítulo se analizó el comportamiento dinámico de un semi-pórtico, vinculado elásticamente en uno de sus extremos e internamente. Por medio de este modelo estructural propuesto y analizando los resultados numéricos obtenidos, se presentan dos Tipos de conclusiones. En primer lugar las que se refieren al método de variaciones, y en segundo lugar el análisis de los resultados numéricos del cálculo de los coeficientes de frecuencia de la estructura.

Con respecto al método en sí, como ya se mencionó en el Capítulo I, podemos ver que es de fácil aplicación en una estructura como la del semi-pórtico. En este ejemplo una vez planteado el problema de contorno, se utilizó el método de separación de variables y se planteó la solución exacta. Para obtener los resultados numéricos se construyeron algoritmos de resolución utilizando el software Mathematica 12, el cálculo de los coeficientes de frecuencia es rápido y con buenos resultados.

Para completar el análisis de los resultados se obtuvieron los valores de los cinco primeros coeficientes de frecuencias naturales, combinando variaciones diferentes en las condiciones de vinculación elástica. De los resultados y gráficos presentados podemos mencionar algunos aspectos destacados:

- En la Figura 2.10 podemos ver que, al variar la constante de rigidez del resorte vertical T_u la estructura se rigidiza con una pendiente más pronunciada que cuando se varía solamente T_w (Figura 2.9). Además por medio del Figura 2.9 podemos decir que el vínculo elástico vertical T_u le aporta más rigidez a la frecuencia fundamental del sistema.
- Con respecto al resorte rotacional R_v , si bien aporta mayor rigidez al sistema al aumentar su valor la variación no cambia sustancialmente. En el Figura 2.19 podemos ver la poca variación de los coeficientes de frecuencia frente al incremento en la rigidez del resorte rotacional en el punto F .

En el capítulo siguiente analizaremos con mayor detalle la influencia de un resorte rotacional ubicado en un punto intermedio de la viga horizontal OH , cómo modelar una fisura por medio del resorte y su influencia en el comportamiento dinámico de la estructura.

2.8. Referencias

- Albarracín, C. M. y Grossi, R. O., “Vibrations of elastically restrained frames”, *Journal of Sound and Vibration*, 285-1-(2): 467–476, 2005.
- ALGOR software, Version 23, 01, 2009.
- Bang H., “Analytical solution for dynamic of a flexible L-shaped structure”, *Journal of Dynamic*, 19: 248–250, 1996.
- Blevins R., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Krieger Publishing, Malabar, Fla, USA, 2001.
- Clough, R. y Penzien, J., *Dynamics of structures*, McGraw-Hill, USA, 2010.
- Filipich, C. P. y Laura, P. A. A. , “In-plane vibrations of portal frames with end supports elastically restrained against rotation and translation”, *Journal of Sound and Vibration*, 117: 467–473, 1987.
- Gorgun H., “Geometrically nonlinear analysis of plane frames composed of flexibly connected members”, *Structural Engineering and Mechanics*, 45: 273–305, 2013.
- Grossi, R. O. y Quintana, M. V., “The transition conditions in the dynamics of elastically restrained beams”, *Journal of Sound and Vibration*, 316: 274–297, 2008.
- Gürgöze, M., “Comment on Analytical solution for dynamic analysis of flexible L-shaped structure”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21: 359, 1998.
- Heppler, G. R., Oguamanam, D. C. D. y Hansen, J. S., “Vibration of a two-member open frame”, *Journal of Sound and Vibration*, 263: 299–317, 2003.
- Karnovsky, I. y Lebed, O., *Non-Classical Vibrations of Arches and Beams: Eigenvalues and Eigenfunctions*, McGraw-Hill, USA, 2004.
- Laura, P. A. A., De Greco, B.H.V. y C. P. Filipich, “Inplane vibrations of frames carrying concentrated masses”, *Journal of Sound and Vibration*, 117: 447–458, 1987.
- Lee, H. P. y Ng, T. Y., “In-plane vibration of planar frame structures ”, *Journal of Sound and Vibration*, 172: 420–427, 1994.
- Lee, Y. Y. , Wang, C. M., y Kitipornchai, S., “Vibration of Timoshenko beams with internal hinge”, *Journal of Engineering Mechanics*, 129: 293–301, 2003.

- Lin, H. P. y Ro, J. , “Vibration analysis of planar serial-frame structures”, *Journal of Sound and Vibration*, 262:1113–1131, 2003.
- Mei, C. , “Wave control of vibrations in multi-story planar frame structures based on classical vibration theories”, *Journal of Sound and Vibration*, 330: 5530–5544, 2011.
- Moghadam, A.A.A., Torabi, K., Moavenian, M., y Davoodi, R., “Dynamic Modeling and Robust Control of an L-Shaped Microrobot Based on Fast Trilayer Polypyrrole-Bending Actuators”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24: 484–498, 2013.
- Morales, C. A. , “Dynamic analysis of an L-shaped structure by Rayleigh-Ritz substructure synthesis method”, *Meccanica*, 44: 339–343, 2009.
- Oguamanam, D. C. D., Hansen, J. S., y Heppler, G. R., “Vibration of arbitrarily oriented two-member open frames with tip mass”, *Journal of Sound and Vibration*, 209: 651–668, 1998.
- Quintana, M. V., Raffo, J. L., y Grossi, R. O., “Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beam with an internal hinge”, *Mecánica Computacional*, 29: 2499–2516, 2010.
- Ratazzi, A. R., Grossi, R. O., y Bambill, D. V., “Vibraciones de una estructura aporticada con una rotula intermedia elásticamente restringida contra rotación y traslación”, *Mecánica Computacional*, 30: 2499–2516, 2011.
- Ratazzi, A. R., Bambill, D. V., y Rossit, C. A., “Vibraciones en pórticos con conexiones intermedias elásticas”, *Mecánica Computacional*, 31: 2511–2627, 2012.
- Ratazzi, A. R., Bambill, D. B., Rossit, C. A. y Ciccioli, C., “Vibraciones Libres de Pórticos con Vínculos y Uniones Flexibles”, *Mecánica Computacional*, 32: 2279-2298, 2013.
- Ratazzi, A. R., Bambill, D. V. y Rossit, C. A., “Free Vibrations of Beam System Structures with Elastic Boundary Conditions and an Internal Elastic Hinge”, *Chinese Journal of Engineering*, ID 624658: 1-10, 2013.
- Ratazzi, A. R., Bambill, D. V. y Rossit, C. A., “Dynamic behavior of framed structures with anelastic internal hinge”, 10th World Congress on Computational Mechanics (WCCM), 1: 4483–4498, 2014.
- Reyes-Salazar, A., Soto-López, M. E., Bojórquez –Morab, E. y Lopez –Barrazab, A., “Effect of modelling assumptions on the seismic behaviour of steel buildings with perimeter moment frames”, *Structural Engineering and Mechanics*, 41(2): 183–204, 2012.

- Santana, C. L. O. y Mascia, N. T., “Wooden framed structures with semi-rigid connections: quantitative approach focused on design needs”, *Structural Engineering and Mechanics*, 31(3): 315–331, 2009.
- Timoshenko, S. y Young, D. H., *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 5th edition, 1990.
- Wang, C.Y. y Wang, C.M., “Vibrations of a beam with an internal hinge”, *International Journal Structural Stability Dynamic*, 1: 163–167, 2003.
- Warburton, G. B., *The Dynamical Behaviour of Structures*, Pergamon Press, Oxford, UK, 2nd edition, 1976.
- Wolfram MATHEMATICA 10 software, Version 10, Copyright 1988–2012.
- Wu, J. J., “Use of the elastic-and-rigid-combined beam element for dynamic analysis of a two-dimensional frame with arbitrarily distributed rigid beam segments”, *Applied Mathematical Modelling*, 35(3): 1240–1251, 2011.

3. Capítulo III: Simulación analítica de una Fisura: Validación experimental

3.1. Introducción

Los métodos de identificación de fisuras en estructuras fueron objeto de estudio de muchos investigadores. En estructuras civiles sobre todo, los métodos de detección no destructivos se fueron incrementando en los últimos años. Los diversos métodos propuestos tratan de identificar la posición de la fisura y ponderar su magnitud.

En un trabajo muy detallado, Chondros, T. y Dimarogona, A., estudiaron en 1998, la influencia de una fisura en el comportamiento dinámico de una estructura de junta soldada.

Es por ello que uno de los procedimientos más difundidos para la detección de fisuras en estructuras, ha sido el estudio de las modificaciones que genera en su comportamiento dinámico.

Una descripción muy completa del estado del arte del tema, mencionando y describiendo las contribuciones más importantes, fue el realizado por Caddemi, S. y Morassi, A. (2013).

Ellos explican que generalmente en estructuras civiles la amplitud de la deformación es suficiente para mantener la fisura abierta en forma permanente. Esto permite la gran ventaja de poder trabajar con un modelo lineal y por lo tanto conducen a formulaciones eficientes para resolver los problemas tanto estáticos como dinámicos.

Desde los primeros estudios del tema, Thomson, W. (1943), queda claro que el daño localizado produce una reducción local en la rigidez de la viga.

En la literatura podemos encontrar varios modelos de grietas entre los cuales podemos mencionar: La reducción de la rigidez local, modelo discreto de resorte y por último los modelos más complejos de tres dimensiones. Los diferentes autores en su mayoría se basan en la teoría lineal de la mecánica de la fractura y la relación entre la energía de deformación y el factor de intensidad de tensiones utilizando el teorema de Castigliano.

Entre los más utilizados encontramos el que reemplaza a la fisura por una flexibilidad concentrada, Adams, R. et al. (1978). En vigas a flexión en el plano, la flexibilidad local se introduce por medio del resorte rotacional que se considera sin masa y cuya constante está en función de la profundidad de la grieta, Gudmundson, P. (1983) y Sinha, J.K. et al. (2002).

Un aspecto de crucial importancia en este tipo de modelos es la ponderación de la flexibilidad asignada al resorte que modelará a la fisura. Numerosos autores han ahondado en este tema y

propusieron diversas maneras de obtener una flexibilidad equivalente a la fisura; Liebowitz, H. y Vanderveldt, H. (1967); Liebowitz, H. y Claus, Jr. (1968); Okamura, H. et al.(1969); Rizos, P. et al. (1990); OstachowiczW. y Krawczuk, M. (1991); Chondros, T. y Dimarogonas, A. (1998); Bilello, C. (2001); Krawczuk, M. et al.(2004); Ong, Z. et al.(2014). Debemos puntualizar que la expresión de Chondros, T. et al. (1998), es la más asiduamente utilizada en la literatura.

La mayoría de los trabajos que han estudiado el tema, fueron realizados en vigas rectas de un tramo. Entre los que analizaron marcos se pueden mencionar las contribuciones de Ovanesova, A. y Suárez, L. (2004), El-Haddad, M. et al. (1990) y Caddemi, S. et al. (2013).

Entre los marcos el uso del semi-pórtico o entramado de dos tramos (L-Shaped structure), es muy difundido en distintos campos de la ingeniería, incluyendo modernas aplicaciones en robótica, Moghadam, A. (2013).

Unos de los métodos más utilizados para detectar una fisura en una estructura, mediante las frecuencias naturales de la misma, es el denominado método inverso. Éste tiene su base en la idea de que, tanto la ubicación y la profundidad de la grieta influyen en los cambios en la frecuencias naturales de una viga dañada. En consecuencia, una frecuencia particular podría corresponder a diferente ubicación y profundidades de fisura. De esta manera por medio de los gráficos de contorno, en una cierta estructura y para valores dados de frecuencia se puede inferir las características de la fisura.

Se estudian las dos o tres primeras frecuencias naturales de la viga fisurada y se analizan a través de un gráfico de contorno. Liang, A. et al., (1991), proponen encontrar la locación y el tamaño de la fisura por medio del punto de intersección de las tres primeras frecuencias de una viga cantiléver. Nandwana, B. y Maiti, S. (1997), utiliza este método para el análisis de una viga de sección variable. En este trabajo los errores que aparecen tanto de posición como de profundidad de la fisura son aproximadamente del 3% y 4.5% respectivamente. Owolabi, C. et al. (2003), realizaron estudios de medición de las tres primeras frecuencias sobre dos conjuntos de vigas de aluminio y su correspondiente amplitud, en este caso los errores entre lo experimental y lo predicho teóricamente son del orden de 0.1%. Nahvi, H. y Jabbari, M. (2005), detectaron fisuras por medio de las mediciones de laboratorio de una viga cantiléver. Chen, X. et al. (2005), utilizan el método del punto de intersección de las tres frecuencias de forma experimental excitando una viga cantiléver por medio de un martillo. Los errores de locación y tamaño de la fisura son menores de 2 y 4 % respectivamente. Rosales et al. (2009) trabajaron el problema inverso para la detección de la profundidad y detección de una grieta en una viga Bernoulli- Euler. También se pueden ver las contribuciones surgidas de la presente investigación: Ratazzi, A. et al. (2015^a), (2015^b), Rossit, C. et al. (2016).

En este capítulo se estudia en forma experimental el comportamiento dinámico de un marco de dos tramos con una fisura en una posición genérica, con el objetivo de determinar un procedimiento analítico que permita predecir los parámetros dinámicos de una estructura fisurada.

Como es sabido, una condición esencial que garantice la representatividad de un procedimiento analítico es la verificación experimental de los resultados que arroja. Especialmente, en casos como éste del que no se encuentran muchos ejemplos en la literatura.

En el presente trabajo se medirán en el laboratorio las primeras frecuencias naturales de un modelo fisurado con diferentes vínculos externos, empotrado-empotrado y empotrado-libre. Si bien reproducir la geometría de una fisura o grieta es muy complejo, lo que hacemos para el modelo de laboratorio es simularla por medio de un corte de una hoja de sierra.

Para el modelo matemático se separa la viga horizontal en dos tramos y en el lugar de la grieta se coloca un resorte rotacional. El desarrollo consiste en una simplificación de una grieta en donde no se involucran los parámetros reales de la misma. Es importante trabajar con la teoría de vigas y suavizar la continuidad con las condiciones de borde.

Para expresar la flexibilidad del resorte utilizamos la teoría propuesta por Chondros, T. (1998), ya que como fue mencionado es la más utilizada en la literatura.

3.2. Modelo Analítico: Teoría de resorte Chondros & Dimarogonas.

3.2.1. Flexibilidad local en el centro de la viga.

El modelo analítico adoptado para simular la fisura es el modelo discreto de resorte.

Como mencionamos en la introducción, en la literatura podemos encontrar diferentes planteos de cómo simular la flexibilidad local de un daño en una estructura. Caddemi, S. y Calì, I. (2009) desarrollan la fórmula que relaciona el parámetro de daño y la rigidez del resorte rotacional

$$\beta_c = \frac{EI}{l} \frac{1}{R_m}, \quad (3.1)$$

en donde β_c es la flexibilidad local y R_m es la rigidez del resorte rotacional.

Esta teoría nos permite relacionar la rigidez del resorte con la profundidad de la grieta. Por ejemplo para una sección rectangular con una grieta de profundidad uniforme, la expresión para la rigidez local nos quedará

$$R_m = \frac{EI}{h} \frac{1}{f(\alpha)}. \quad (3.2)$$

En donde definimos $\alpha = h_c/h$, con h_c como profundidad de la fisura y h altura de la sección rectangular de la viga.

La función $f(\alpha)$ es de mucha importancia en nuestro trabajo, ya que es la que nos define la ley con la que varía la flexibilidad local con respecto a la profundidad del daño en la estructura. Esta es una función adimensional que en su forma general puede ser escrita como:

$$f(h_c / h) = a_0 \sum_{n=1}^{10} a_n (h_c / h)^n. \quad (3.3)$$

En este capítulo, como ya mencionamos, por ser el más utilizado en la literatura utilizaremos la fórmula de flexibilidad propuesta por Chondros y Dimaragonas.

La magnitud adoptada para la flexibilidad es:

$$\beta_c = \frac{6\pi(1-\nu^2)h}{EI} f(\alpha), \quad (3.4)$$

en donde ν es el coeficiente de Poisson y

$$f(\alpha) = 0.6272 \alpha^2 - 1.04533 \alpha^3 + 4.5948 \alpha^4 - 9.973 \alpha^5 + 20.2948 \alpha^6 - 33.0351 \alpha^7 + 47.1063 \alpha^8 - 40.7556 \alpha^9 + 19.6 \alpha^{10}.$$

En la Figura 3.1 podemos observar la curva que relaciona la profundidad de la fisura y la flexibilidad del resorte.

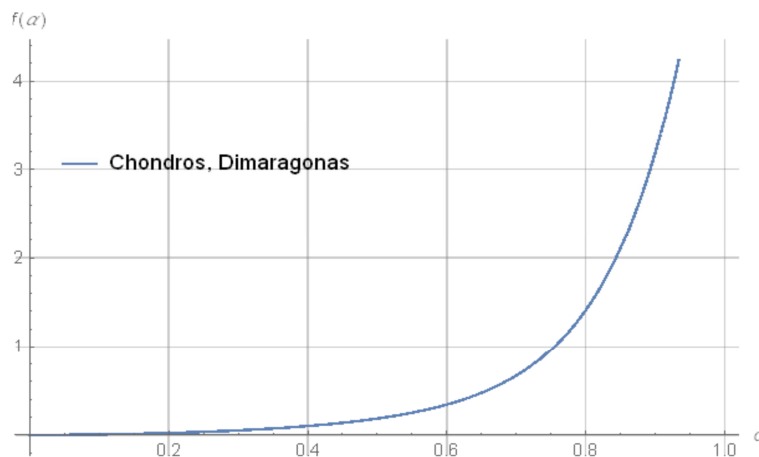


Figura 3.1: Curva flexibilidad en función de la profundidad de fisura.

Para obtener los resultados analíticos se utilizará el mismo modelo estructural que se analizara

en el capítulo anterior (Figura 3.2).

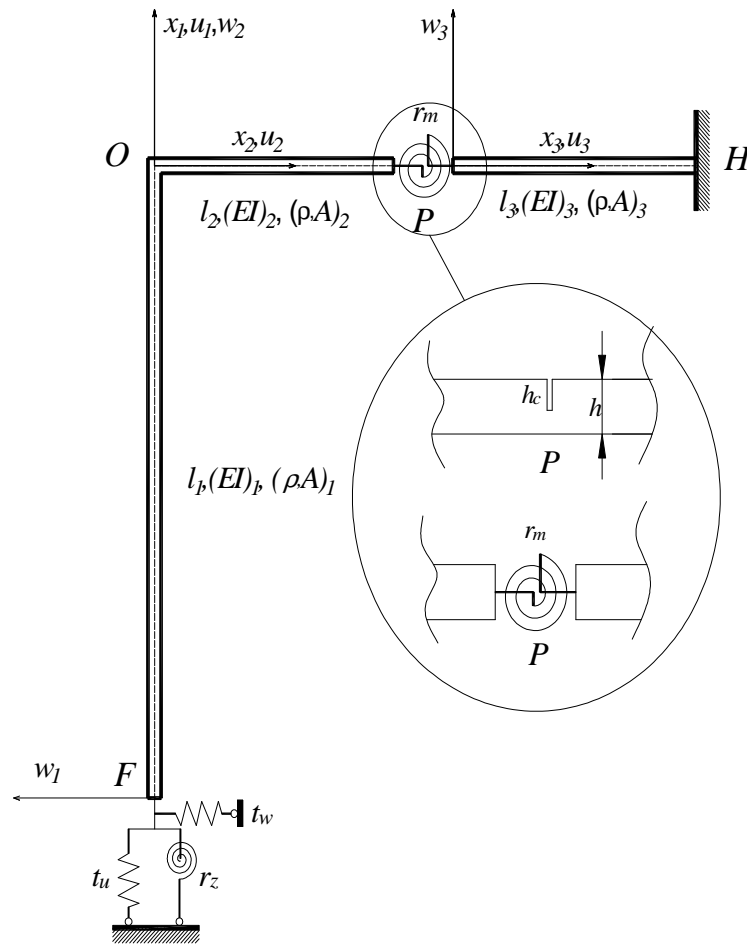


Figura 3.2: Estructura

Los vínculos externos de la estructura están compuestos por un empotramiento en el extremo H y un vínculo elástico compuesto por dos resortes traslacionales y uno rotacional en el extremo F , que se adoptarán de manera de representar el dispositivo a utilizar en las mediciones experimentales.

La fisura ubicada en el punto P es reemplazada por un resorte de rigidez:

$$r_m = 1/\beta_c$$

La rigidez a flexión, la masa, la longitud y el área de cada viga es representada por EI_i , ρ_i , l_i y A_i , con $i=1, 2, 3$.

3.3. Modelo Experimental de Laboratorio.

Para poder contrastar los resultados numéricos se realizó un modelo experimental en el Laboratorio de vibraciones de la Universidad Nacional del Sur. Se construyó un semi-pórtico

con una planchuela de acero de $5/8 \text{ "} \times 1/8 \text{ "}$ ($b=15.875\text{mm}$, $h= 3.175\text{mm}$), sección transversal $4.064 \times 10^{-5} \text{mts}^2$. Para definir el módulo de elasticidad del material se realizó el mismo procedimiento descrito en la sección 2.4 del capítulo II.

El modelo se vinculó a un perfil UPN 100, proporcionándonos éste la rigidez necesaria para considerar un empotramiento, por medio de dos mordazas soldadas como vemos en la Figuras 3.3 y 3.4.

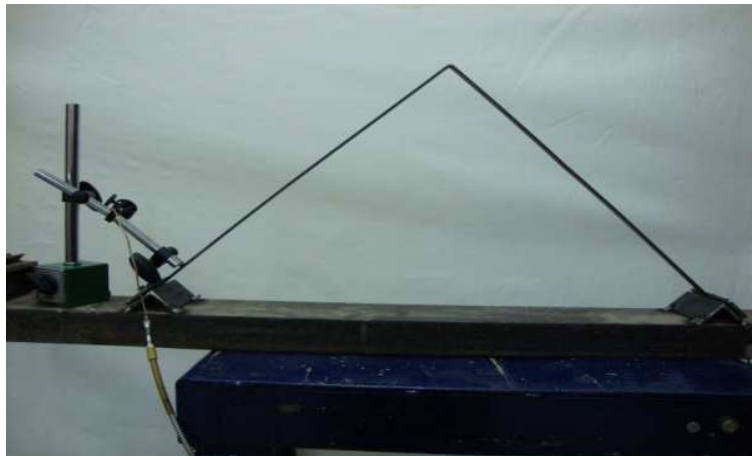


Figura 3.3: Estructura y Perfil UPN 100



Figura 3.4: Mordaza con bulones para sujeción

La fisura fue generada en la planchuela por medio de un corte con una hoja de sierra de 1 mm de espesor. Para poder lograr con mayor precisión la profundidad y uniformidad en el corte, se construyó una pieza de acero duro con una hendidura que nos sirvió de tope de profundidad del corte como vemos en la Figuras 3.5 y 3.6.



Figura 3.5: Pieza de acero para marcar la profundidad de la fisura.



Figura 3.6: Estructura parcialmente encastrada en la hendidura de la pieza de acero.

La planchuela se encastra en la hendidura y se corta transversalmente hasta la profundidad requerida. Se construyeron tres de esas piezas, con distintas magnitudes de la profundidad de la hendidura para generar tres profundidades de fisura distintas.

Con el fin de no perturbar el comportamiento de la estructura, las mediciones se tomaron con un proximíter. El dispositivo empleado fue un Pro vibtech, TMO 180. La señal de desplazamiento fue leída y procesada con un analizador de vibraciones de dos canales VIBXPERT II, con 24 bits de resolución y 1.000 Hz de frecuencia de muestreo.

3.4. Resultados Numéricos.

En esta sección del trabajo presentaremos dos grupos de resultados numéricos. Utilizando la teoría del cálculo variaciones combinada con la teoría de resorte de Chondros, T. y Dimaragonas, A. se obtuvieron los valores de frecuencias naturales de dos modelos de pórtico libre-empotrado y empotrado-empotrado.

En las Tablas 3.1 a 3.5 se presentan los valores de frecuencia del pórtico dañado con vinculación exterior libre- empotrado. Para ello, los valores analíticos se obtuvieron asignando valores nulos a las constantes de los vínculos elásticos en extremo F de la Figura 3.2.

Se consideraron cinco posiciones posibles sobre el dintel para la fisura, separadas entre sí un sexto de la longitud OH . A su vez en cada posición de la fisura, se consideraron tres valores de profundidad, $\alpha=0.25, 0.50$ y 0.75 de la altura de la sección.

Las longitudes de los tramos son iguales: $l_1=l_2+l_3$ y en el modelo experimental la longitud del tramo es $l_1=0.46$ m.

También se agregaron los valores de frecuencia del pórtico sin fisura $\alpha=0$, (S/F) a efectos comparativos.

l_2/l_1	α	R_m		1	2	3	4	5	
	S/F			4.77	13.04	65.14	95.16	207.74	Experimental (Hz)
			λ	1.081	1.7862	3.968	4.8015	7.0935	Analítico(autovalor)
	0.25	220	fc	4.84	13.22	65.24	95.53	208.15	Analítico (Hz)
			fc	4.77	13.04	65.14	95.05	207.58	Experimental (Hz)
			$e\%$	1.4	1.3	0.15	0.6	0.27	Error porcentual
			λ	1.080	1.7769	3.962	4.802	7.066	Analítico(autovalor)
1/6	0.50	44	fc	4.83	13.08	65.04	95.55	206.90	Analítico (Hz)
			fc	4.66	12.93	65.02	95.09	207.42	Experimental (Hz)
			$e\%$	3.5	1	1	0.5	-0.2	Error porcentual
			λ	1.0698	1.7416	3.9356	4.7905	6.9521	Analítico(autovalor)
	0.75	8.4	fc	4.74	12.57	64.18	95.10	200.28	Analítico (Hz)
			fc	4.34	12.60	64.58	95.10	207.48	Experimental (Hz)
			$e\%$	8	-0.2	-0.6	0.00	-3.6	Error porcentual

Tabla 3.1: Primeras cinco frecuencias naturales, del pórtico L-E, con fisura en el sexto de la luz ($l_2/l_1 = 1/6$), y distintas profundidades de fisura α

l_2/l_1	α	R_m		1	2	3	4	5	
	S/F			4.77	13.04	65.14	95.16	207.74	Experimental (Hz)
			λ	1.081	1.786	3.966	4.803	7.095	Analítico(autovalor)
	0.25	220	fc	4.84	13.21	65.18	95.61	208.58	Analítico (Hz)
			fc	4.77	13.04	65.14	95.05	207.14	Experimental (Hz)
			$e\%$	1.4	1.3	0.06	0.6	0.7	Error porcentual
			λ	1.078	1.783	3.953	4.796	7.078	Analítico(autovalor)
1/3	0.50	44	fc	4.821	13.175	64.75	95.32	207.619	Analítico (Hz)
			fc	4.66	12.98	64.92	94.45	204.22	Experimental (Hz)
			$e\%$	3	1.5	-0.3	0.9	1.6	Error porcentual
			λ	1.063	1.771	3.892	4.766	6.999	Analítico(autovalor)
	0.75	8.4	fc	4.685	12.996	62.770	94.117	203.044	Analítico (Hz)
			fc	4.38	12.93	64.15	93.47	196.32	Experimental (Hz)
			$e\%$	6.5	0.5	-2	0.7	3	Error porcentual

Tabla 3.2: Primeras cinco frecuencias naturales, del pórtico L-E, con fisura en el tercio de la luz ($l_2/l_1 = 1/3$), y distintas profundidades de fisura α

l_2/l_1	α	R_m		1	2	3	4	5	
	S/F			4.77	13.04	65.14	95.16	207.74	Experimental (Hz)
			λ	1.0814	1.7862	3.966	4.8003	7.0977	Analítico(autovalor)
	0.25	220	fc	4.85	13.22	65.20	95.49	208.76	Analítico (Hz)
			fc	4.71	13.01	65.98	94.83	207.63	Experimental (Hz)
			$e\%$	2.8	1.6	-1.2	0.7	0.5	Error porcentual
			λ	1.0770	1.7861	3.9558	4.7801	7.0942	Analítico(autovalor)
1/2	0.50	44	fc	4.81	13.22	64.84	94.68	208.56	Analítico (Hz)
			fc	4.66	12.99	64.50	93.89	207.46	Experimental (Hz)
			$e\%$	3	1.7	0.5	0.8	0.5	Error porcentual
			λ	1.0550	1.7856	3.9026	4.700	7.080	Analítico(autovalor)
	0.75	8.4	fc	4.61	13.21	63.11	91.50	207.72	Analítico (Hz)
			fc	4.33	12.99	60.98	89.97	206.79	Experimental (Hz)
			$e\%$	6.1	0.5	2	1.7	0.4	Error porcentual

Tabla 3.3: Primeras cinco frecuencias naturales, del pórtico L-E, con fisura en el medio de la luz ($l_2/l_1 = 1/2$), y distintas profundidades de fisura α

l_2/l_1	α	R_m		1	2	3	4	5	
	S/F			4.77	13.04	65.14	95.16	207.74	Experimental (Hz)
			λ	1.0810	1.7860	3.968	4.8033	7.0924	Analítico(autovalor)
	0.25		fc	4.842	13.219	65.25	95.608	208.446	Analítico (Hz)
			fc	4.77	13.04	65.03	95.10	207.41	Experimental (Hz)
			$e\%$	1	1.3	0.3	0.5	0.5	Error porcentual
			λ	1.0750	1.7850	3.9671	4.7950	7.0061	Analítico(autovalor)
2/3	0.50	44	fc	4.823	13.203	65.217	95.276	206.907	Analítico (Hz)
			fc	4.77	12.98	64.48	94.94	205.80	Experimental (Hz)
			$e\%$	1	1.7	1	0.35	0.5	Error porcentual
			λ	1.0450	1.7803	3.9593	4.7578	6.9434	Analítico(autovalor)
	0.75	8.4	fc	4.527	13.134	64.960	93.805	199.783	Analítico (Hz)
			fc	4.49	12.43	59.70	94.16	192.59	Experimental (Hz)
			$e\%$	0.8	5	8	-0.3	4	Error porcentual

Tabla 3.4: Primeras cinco frecuencias naturales, del pórtico L- E, con fisura a los dos tercios de la luz ($l_2/l_1 = 2/3$), y distintas profundidades de fisura α

l_2/l_1	α	R_m		1	2	3	4	5	
	S/F			4.77	13.04	65.14	95.16	207.74	Experimental (Hz)
			λ	1.080	1.7849	3.9684	4.8047	7.0982	Analítico(autovalor)
	0.25	220	fc	4.84	13.20	65.26	95.66	208.79	Analítico (Hz)
			fc	4.77	13.04	65.14	95.16	207.36	Experimental (Hz)
			$e\%$	1.4	1.2	0.2	0.5	0.7	Error porcentual
			λ	1.072	1.7791	3.9652	4.8021	7.0975	Analítico(autovalor)
5/6	0.50	44	fc	4.81	13.22	64.84	94.68	208.56	Analítico (Hz)
			fc	4.76	13.12	65.15	95.56	208.75	Experimental (Hz)
			$e\%$	1	0.7	-0.5	0.9	0.09	Error porcentual
			λ	1.0330	1.7557	3.9523	4.7919	7.0939	Analítico(autovalor)
	0.75	8.4	fc	4.43	13.77	64.73	95.15	208.54	Analítico (Hz)
			fc	4.66	12.16	63.15	94.11	196.37	Experimental (Hz)
			$e\%$	-5	11	2	1	6	Error porcentual

Tabla 3.5: Primeras cinco frecuencias naturales, del pórtico L-E, con fisura a los cinco sextos de la luz ($l_2/l_1 = 5/6$), y distintas profundidades de fisura α

Según puede observarse, los valores obtenidos con el método analítico presentan en general una muy buena aproximación con el experimental.

Las siguientes figuras nos muestran cómo son afectadas las frecuencias naturales por la profundidad de una grieta. El análisis se efectúa para distintas posiciones de la fisura sobre el tramo horizontal del pórtico y en base a los resultados experimentales y analíticos. Las magnitudes de las frecuencias f_i en la estructura fisurada, están relacionadas con la frecuencia de la estructura sin grietas que se denomina f_0 medido experimentalmente para las figuras 3.7, 3.9 y 3.11. En general, las frecuencias disminuyen a medida que la profundidad de la fisura aumenta. Como se puede observar, la segunda frecuencia no es afectada por la grieta cuando se produce en el medio del tramo horizontal. Se puede deducir que la forma modal correspondiente a la estructura sin daño no tiene curvatura en ese punto.

Las Figuras 3.8, 3.10 y 3.12 son análogas a las anteriores pero se utilizan los valores calculados por el método variacional considerando los valores 4.84 Hz , 13.22 Hz y 65.24 Hz para las tres primeras frecuencias del pórtico sin fisura.

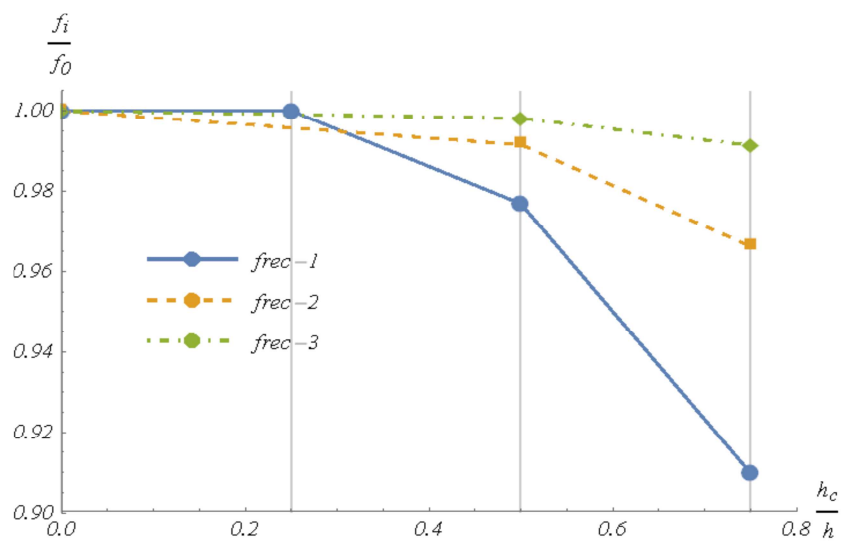


Figura 3.7: Gráfico de variación de las tres primeras frecuencias naturales según la profundidad de la fisura. Modelo Experimental $l_2=1/6 l_1$

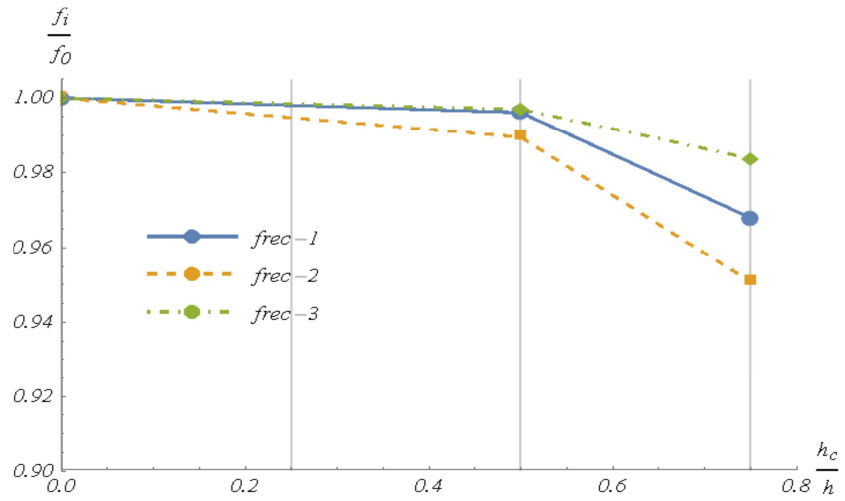


Figura 3.8: Gráfico de variación de las tres primeras frecuencias naturales según la profundidad de la fisura. Modelo Analítico $l_2=1/6 l_1$

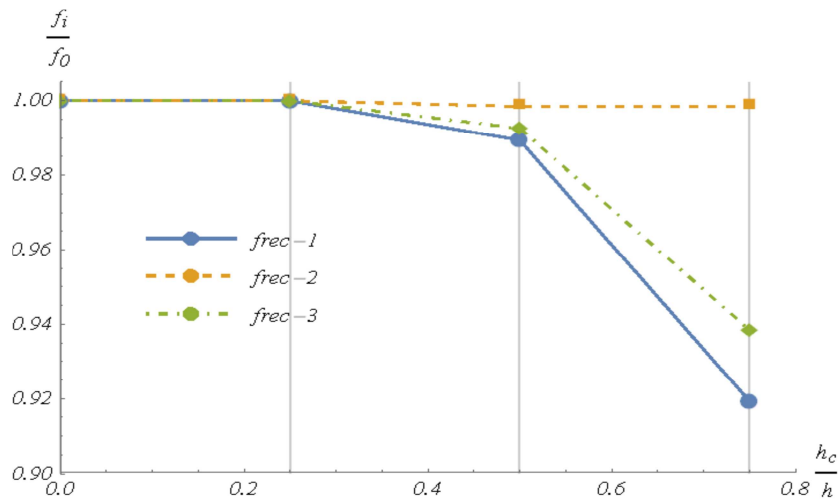


Figura 3.9: Gráfico de variación de las tres primeras frecuencias naturales según la profundidad de la fisura. Modelo Experimental $l_2=1/2 l_1$

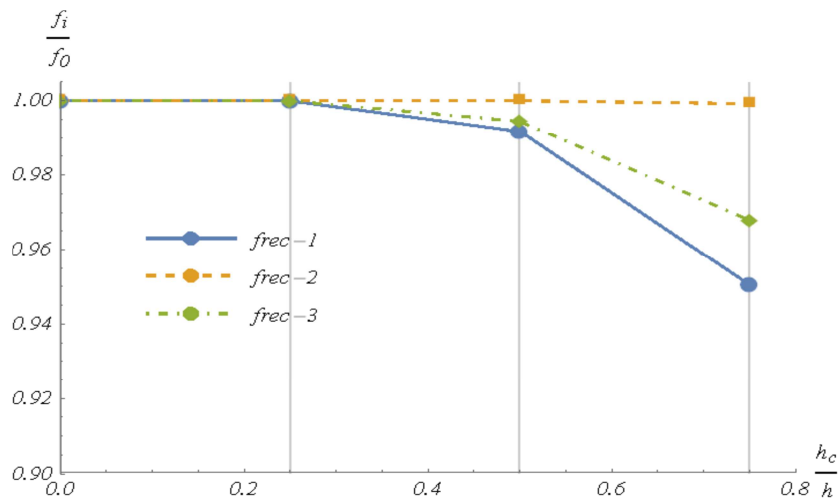


Figura 3.10: Gráfico de variación de las tres primeras frecuencias naturales según la profundidad de la fisura. Modelo Analítico $l_2=1/2 l_1$

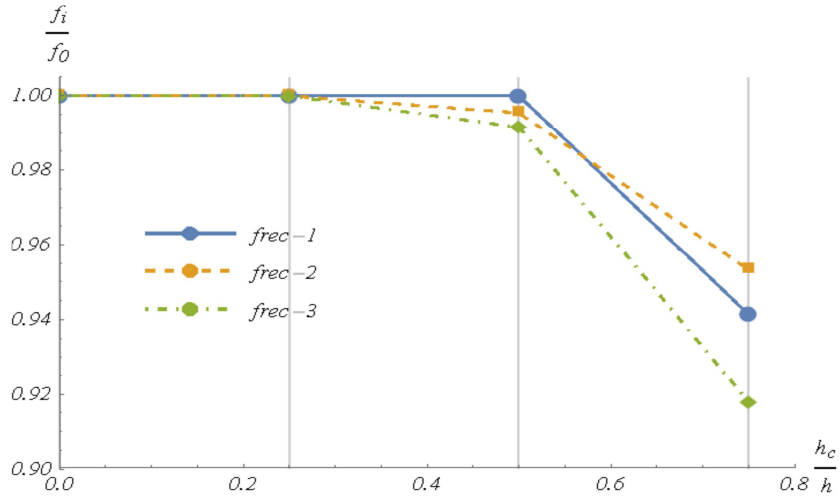


Figura 3.11: Gráfico de variación de las tres primeras frecuencias naturales según la profundidad de la fisura. Modelo Experimental $l_2=2/3 l_1$

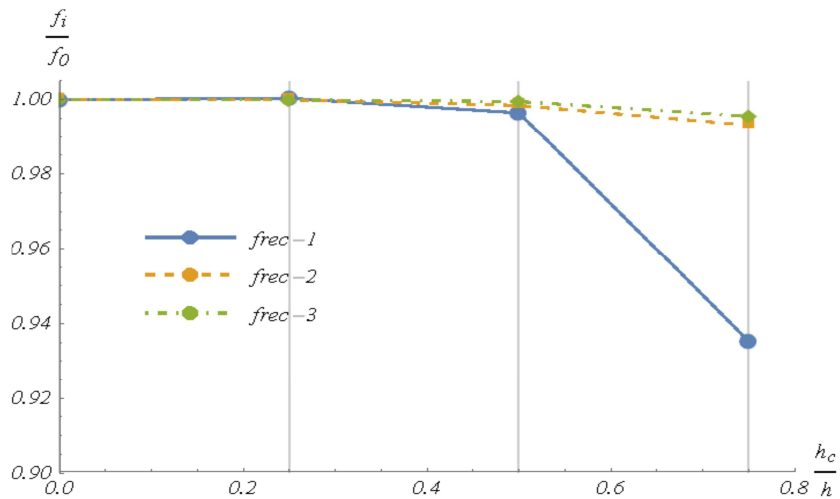


Figura 3.12: Gráfico de variación de las tres primeras frecuencias naturales según la profundidad de la fisura. Modelo Analítico $l_2=2/3 l_1$

En las Tablas 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9, se calcularon las frecuencias naturales para el mismo modelo de pórtico, con la diferencia que los vínculos externos ahora son empotrado-empotrado.

l_2/l_1	α	R_m		1	2	3	4	5	
		S/F	f_c	56.76	83.01	182.50	228.88	382.08	Experimental (Hz)
			λ	3.9195	4.7144	7.0155	7.7862	10.1331	Analítico(autovalor)
1/3	0.50	44	f_c	56.45	81.67	180.86	217.40	377.32	Analítico (Hz)
			f_c	56.45	83.01	181.88	225.22	382.26	Experimental (Hz)
			$e\%$	0	-1.6	-1	-3.6	-1.3	Error porcentual

Tabla 3.6: Primeras cinco frecuencias naturales, del pórtico E-E, con fisura a los un tercio de la luz ($l_2/l_1 = 1/3$), y profundidades de fisura $\alpha=0.5$

l_2/l_1	α	R_m		1	2	3	4	5	
		<i>S/F</i>	<i>fc</i>	56.76	83.01	182.50	228.88	382.08	Experimental (Hz)
			λ	3.9117	4.6886	6.9269	7.7234	10.093	Analítico(autovalor)
1/3	0.75	8.40	<i>fc</i>	56.22	80.78	174.25	217.64	374.35	Analítico (Hz)
			<i>fc</i>	56.15	80.57	167.24	217.9	377.81	Experimental (Hz)
			<i>e%</i>	0.11	0.3	4	-0.1	-0.9	Error porcentual

Tabla 3.7: Primeras cinco frecuencias naturales, del pórtico E-E, con fisura a los un tercio de la luz ($l_2/l_1 = 1/3$), y profundidades de fisura $\alpha=0.75$

l_2/l_1	α	R_m		1	2	3	4	5	
		<i>S/F</i>	<i>fc</i>	56.76	83.01	182.50	228.88	382.08	Experimental (Hz)
			λ	3.8482	4.6617	7.0364	7.8254	9.9059	Analítico(autovalor)
1/2	0.75	8.40	<i>fc</i>	54.41	79.18	181.44	224.73	360.59	Analítico (Hz)
			<i>fc</i>	52.49	78.13	183.72	227.05	348.51	Experimental (Hz)
			<i>e%</i>	3.5	1.3	-1.3	-1	3.4	Error porcentual

Tabla 3.8 Primeras cinco frecuencias naturales, del pórtico E-E, con fisura a los un medio de la luz ($l_2/l_1 = 1/2$), y profundidades de fisura $\alpha=0.75$

l_2/l_1	α	R_m		1	2	3	4	5	
		<i>S/F</i>	<i>fc</i>	56.76	83.01	182.50	228.88	382.08	Experimental (Hz)
			λ	3.8420	4.7007	6.9814	7.7194	10.136	Analítico(autovalor)
2/3	0.75	8.40	<i>fc</i>	54.02	80.86	177.82	217.27	376.77	Analítico (Hz)
			<i>fc</i>	52.49	81.18	173.95	217.29	380.86	Experimental (Hz)
			<i>e%</i>	2.8	-0.4	2	-0.01	-1.1	Error porcentual

Tabla 3.9: Primeras cinco frecuencias naturales, del pórtico E-E, con fisura a los dos tercios de la luz ($l_2/l_1 = 2/3$), y profundidades de fisura $\alpha=0.75$

Analizando los valores de las tablas, podemos ver una muy buena concordancia entre los resultados teóricos y las experiencias realizadas en el laboratorio. En este caso los errores porcentuales entre los valores del modelo teórico y del experimental no superan el 4 %.

Lo que podemos resaltar de la experiencia en el laboratorio es que los cambios en las frecuencias se hacen más significativos para un valor de α cercano a 0.50 o mayor.

3.5. Detección de fisuras: Método inverso

En esta sección se aplicará el método inverso para la detección de fisuras combinando, en el modelo de pórtico en L, los resultados analíticos y experimentales de las frecuencias. Como ya mencionamos, el método propuesto tiene su base en la idea de que, tanto la ubicación como la profundidad de la grieta influyen en los cambios en las frecuencias naturales de una viga dañada.

Se realiza una combinación de una simulación teórica en base a los resultados obtenidos en laboratorio.

Incorporando los valores de frecuencia medidos en el laboratorio en el determinante ecuación característica obtenido en la resolución del sistema (2.10 -2.24), pueden obtenerse gráficas que representan los valores de dichos determinantes para distintas magnitudes de R_m y L_2 (Figuras 3.12, 3.13 y 3.14).

Obviamente los valores nulos del determinante (intersección de la superficie con el plano horizontal de valor nulo) generan curvas para cada frecuencia natural en función de R_m y L_2 .

El punto de intersección de las tres curvas nos dará la ubicación y profundidad de la fisura.

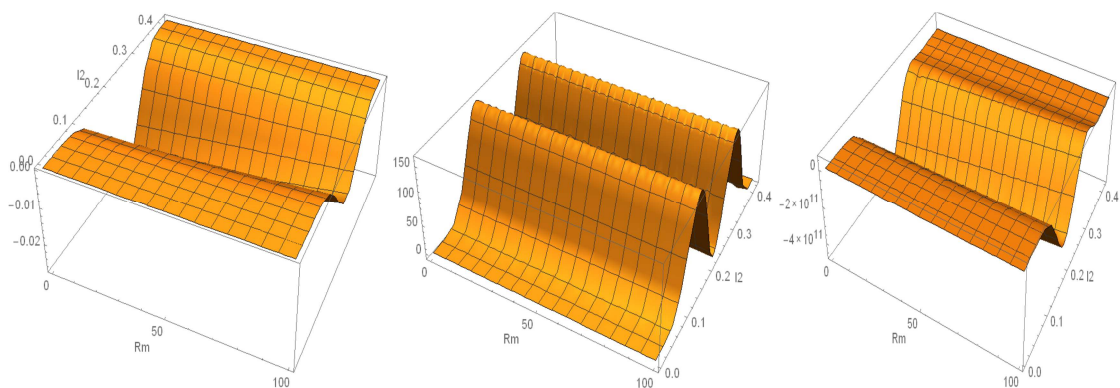


Figura 3.12: Superficies de valores del determinante ecuación característica para frecuencias f_1, f_2, f_3 medidas con una fisura de 25% de profundidad en la mitad del tramo.

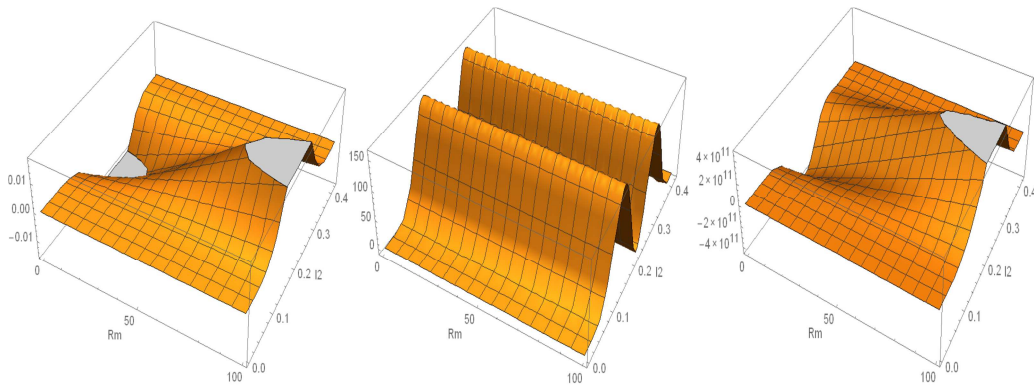


Figura 3.13: Superficies de valores del determinante ecuación característica para frecuencias f_1, f_2, f_3 medidas con una fisura de 50% de profundidad en la mitad del tramo.

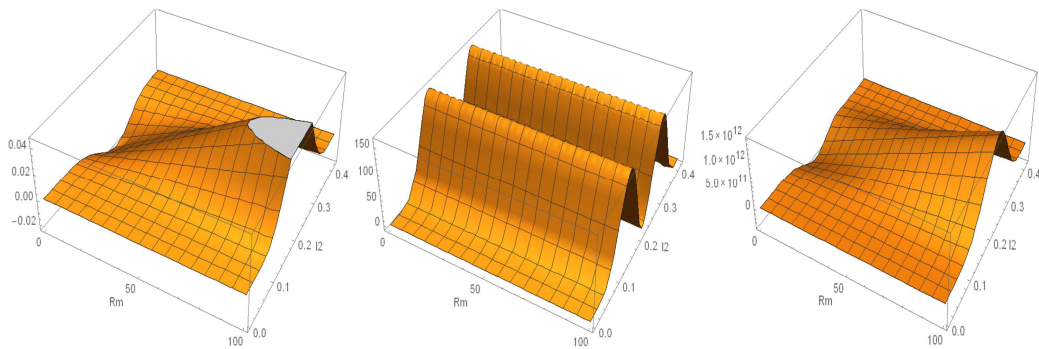


Figura 3.14: Superficies de valores del determinante ecuación característica para frecuencias f_1, f_2, f_3 medidas con una fisura de 60% de profundidad en la mitad del tramo.

3.6. Aplicación del método inverso al modelo de laboratorio

Se analizaron cuatro modelos de laboratorio con las características geométricas descritas en la sección 3.3. Los vínculos externos de los pórticos están compuestos por un empotramiento en uno de sus extremos y libre en otro.

Como ejemplo práctico se tomaron como datos los valores de los coeficientes de las tres primeras frecuencias naturales del pórtico, al cual se le provocó una fisura a un medio de la luz $l_2/l_1=1/2$ y con una profundidad de fisura $hc/h = 0.25, 0.50, 0.60$ y 0.75 (Tabla 3.10).

l_2/l_1	α	R_m	1	2	3		
0	-	-	4.85	13.22	65.25	Experimental (Hz)	
0.25	220	f_c	4.85	13.22	65.20	Experimental (Hz)	
0.5	0.50	44	f_c	4.80	13.22	64.84	Experimental (Hz)
0.60	22	f_c	4.76	13.22	64.50	Experimental (Hz)	
0.75	8.4	f_c	4.61	13.21	63.11	Experimental (Hz)	

Tabla 3.10: Primeras tres frecuencias naturales, del pórtico E-L, para una relación de $l_2/l_1 = 1/2$, y una relación de h_c/h igual a 0.25, 0.5, 0.6 y 0.75.

Para poder acoplar los resultados medidos, en el modelo experimental con el modelo matemático de resorte, normalizamos las frecuencias por medio del procedimiento “zero setting”, utilizado por Nandwana, B. y Maiti, S. en 1997. Obtenemos un factor Z_i mediante la relación entre, la frecuencia teórica y la medida en el modelo experimental, para el pórtico no fisurado. En este caso será:

	1^{ra} frecuencia	2^{da} frecuencia	3^{ra} frecuencia
$f_{analítico}$	4.91	13.39	66.10
f_{medido}	4.85	13.22	65.25
Z_i	1.0124	1.0128	1.0130

En la Tabla 3.11, se indican los valores de las frecuencias medidas de los tres primeros modos en laboratorio, de los valores de Z y los de la frecuencia normalizada (f_n) para ser incorporada a la expresión

Modelo	α	Modos	$f_{laboratorio}$	Factor-Z	f_n
1	0.25	1	4.85	1.0124	4.91
		2	13.22	1.01285	13.39
		3	65.20	1.0130	66.04
2	0.5	1	4.806	1.0124	4.87
		2	13.22	1.01285	13.39
		3	64.84	1.0130	65.68
3	0.6	1	4.76	1.0124	4.82
		2	13.22	1.01285	13.38
		3	64.50	1.0130	65.33
4	0.75	1	4.61	1.0124	4.67
		2	13.213	1.01285	13.38
		3	63.11	1.0130	63.93

Tabla 3.11: Valores de Z y f , para una relación de h_c/h igual a 0.25, 0.5, 0.6 y 0.75.

En la Figura 3.15 se indican las curvas que representan las combinaciones posibles de valores R_m y l_2 para obtener cada una de las frecuencias medidas. La intersección indica los valores de R_m y l_2 obtenidos por medio del método inverso para una profundidad de fisura de $h_c/h = 0.25$. Los valores correspondientes al modelo teórico-matemático son: $R_m = 220 \text{ m Kg}$ y $l_2 = 0.21 \text{ m}$. La Figura 3.16 muestra la zona ampliada del área encerrada por las curvas de la tres frecuencias, el punto de intersección es hallado por una aproximación lineal y los valores obtenidos son: $R_m = 214.1 \text{ m Kg}$, que equivale al valor de $h_c/h = 0.254$ y $l_2 = 0.2378 \text{ m}$.

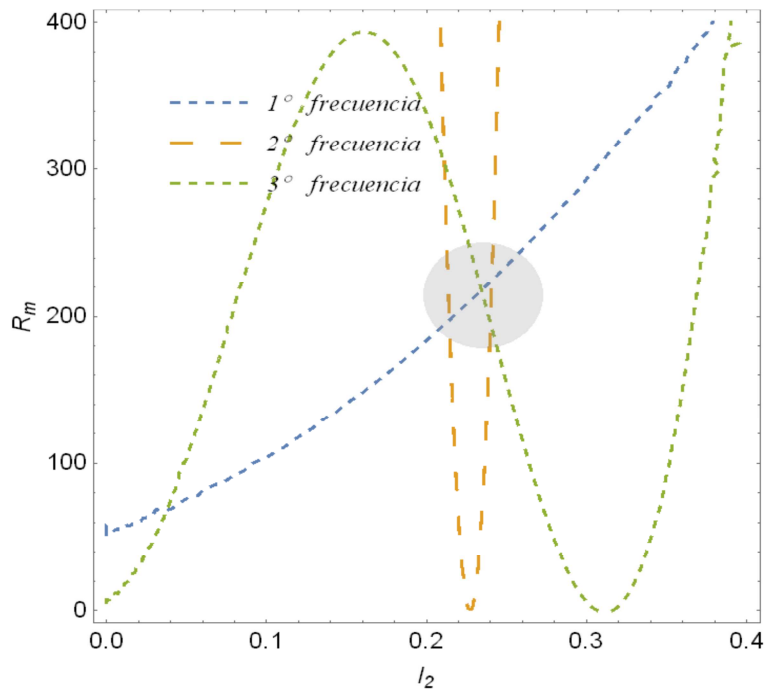


Figura 3.15: Gráfico de contorno $f_{\lambda 1}, f_{\lambda 2}, f_{\lambda 3}$, de: $h_c/h = 0.25, l_2 = 0.5l_1$

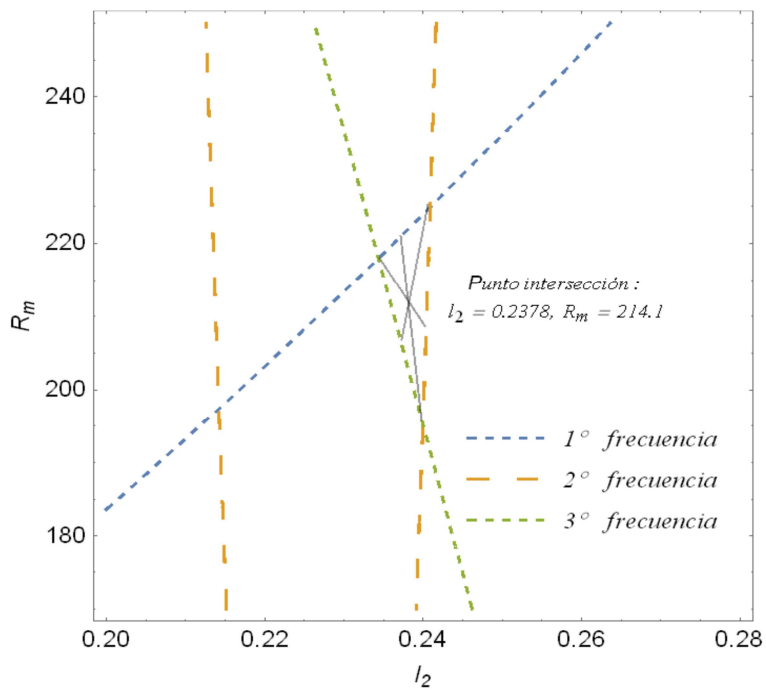


Figura 3.16: Gráfico de contorno ampliado $h_c/h = 0.25, l_2 = 0.5l_1$

Por medio de un proceso similar en las Figuras 3.17 y 3.18, la profundidad de fisura es de $h_c/h = 0.50$. Los valores correspondientes al modelo teórico-matemático son: $R_m = 44 \text{ m Kg}$ y $l_2 = 0.21 \text{ m}$. Los valores adquiridos a partir de la aproximación lineal son: $R_m = 41.9 \text{ m Kg}$ equivalente al valor $h_c/h = 0.497$ y $l_2 = 0.2194 \text{ m}$.

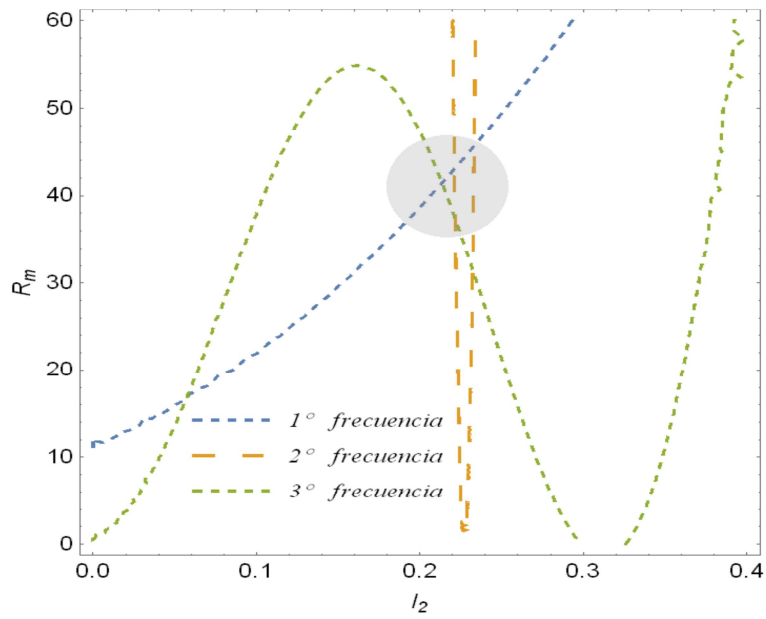


Figura 3.17: Gráfico de contorno $f_{\lambda 1}, f_{\lambda 2}, f_{\lambda 3}$, De: $h_c/h = 0.50, l_2 = 0.5l_1$

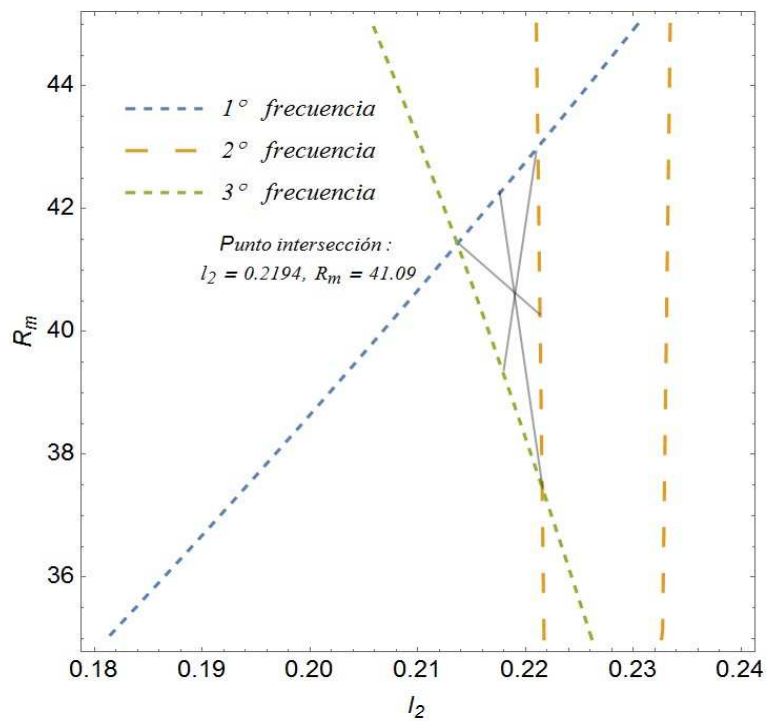


Figura 3.18: Gráfico de contorno ampliado $h_c/h = 0.50, l_2 = 0.5l_1$

En las Figuras 3.19 y 3.20 la profundidad de fisura es $h_c/h = 0.60$, mientras que en las Figuras 3.21 y 3.22 es de $h_c/h = 0.75$. Los valores teóricos para el primer caso son: $R_m = 22 \text{ Kg m}$ y $l_2 = 0.21m$, mientras que los de laboratorio son $R_m = 22.4 \text{ m Kg}$ equivalente al valor $h_c/h = 0.599$ y

$l_2=0.2181m$. Para $h_c/h=0.75$, los valores teóricos son: $R_m=8.4 m Kg$ y $l_2=0.21m$, mientras que los de laboratorio son: $R_m=7.965 m Kg$ equivalente al valor $h_c/h=0.748$ y $l_2=0.2093m$.

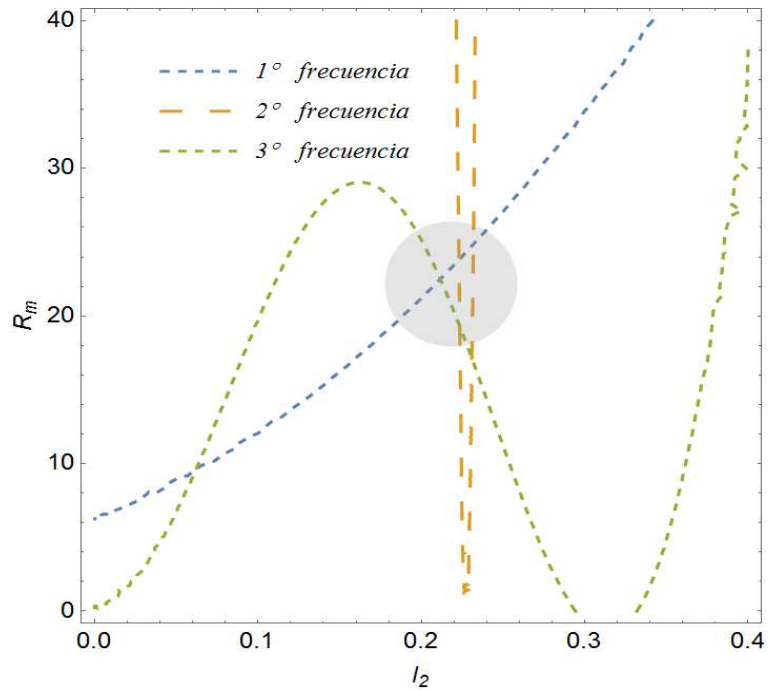


Figura 3.19: Gráfico de contorno $f_{\lambda 1}, f_{\lambda 2}, f_{\lambda 3}$, de: $h_c/h=0.60, l_2=0.5l_1$

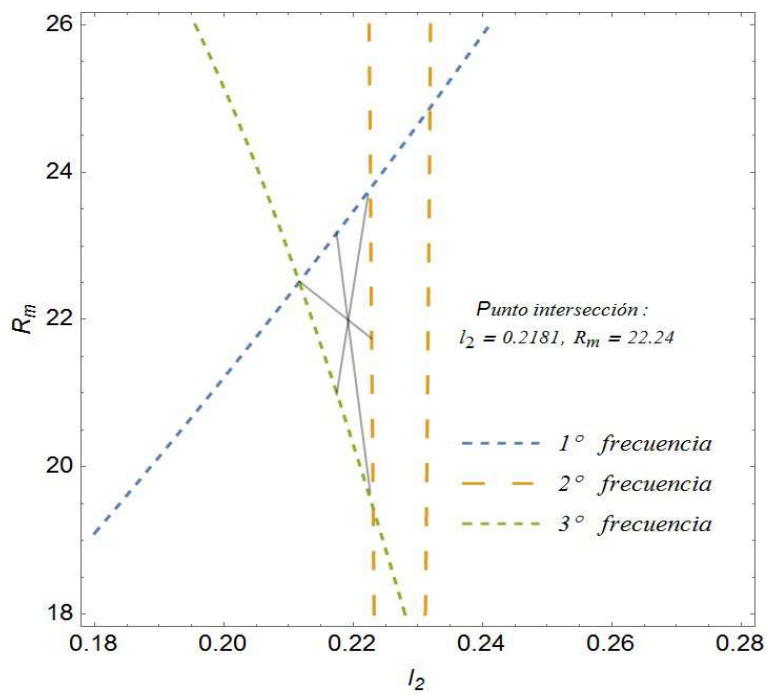


Figura 3.20: Gráfico de contorno ampliado de: $h_c/h=0.50, l_2=0.5l_1$

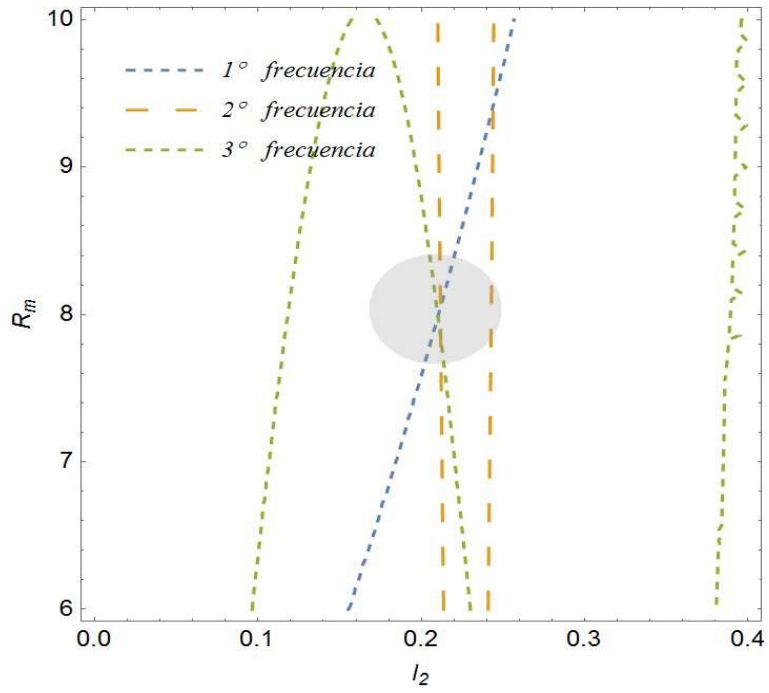


Figura 3.21: Gráfico de contorno $f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}$, de: $h_c/h = 0.75, l_2 = 0.5l_1$

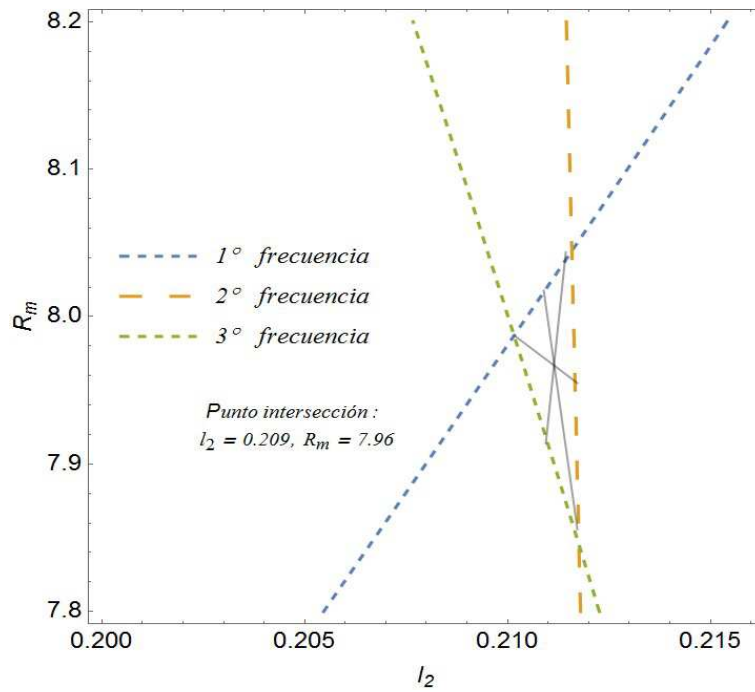


Figura 3.22: Gráfico de contorno ampliado de: $h_c/h = 0.75, l_2 = 0.5l_1$

En la Tabla 3.12 se indican en primer lugar los valores de la profundidad y ubicación de la fisura producida en el modelo físico. En segundo lugar se muestran los resultados obtenidos al volcar los valores de frecuencia medidos experimentalmente en el modelo analítico numérico. Se observa que el procedimiento seguido arroja una excelente aproximación a los valores reales.

	<i>Modelo Experimental</i> <i>(mediciones en laboratorio)</i>			<i>Modelo Teórico</i> <i>(resultados por el método Inverso)</i>		
	R_m	h_c/h	l_2	R_m	h_c/h	l_2
<i>Modelo 1</i>	220	0.25	0.21	214,1	0.254	0,2378
<i>Modelo 2</i>	44	0.5	0.21	41.09	0.497	0.2194
<i>Modelo 3</i>	22	0.6	0.21	22.24	0.599	0.2181
<i>Modelo 4</i>	8.4	0.75	0.21	7.965	0.748	0.2093

Tabla 3.12: Comparación entre resultados teóricos y mediciones de laboratorio.

3.7. Conclusiones

Todo lo estudiado y desarrollado en los documentos anteriores, nos permitió analizar el comportamiento de un semi-pórtico dañado, a través de las variaciones de sus frecuencias naturales. Se simuló una fisura por medio de la teoría del resorte rotacional, propuesta por Chondros y Dimaragonas, los valores fueron comparados con los medidos en un modelo experimental. Los errores porcentuales entre los valores del modelo teórico, y de laboratorio se encuentran como máximo en el orden del 10%.

Se aplicó en método inverso combinando, el desarrollo teórico aplicando algoritmos en el software Mathematica, y los resultados medidos en el pórtico construido en el laboratorio. Los resultados obtenidos en la experiencia fueron muy buenos. Los puntos de cruce de las tres curvas de frecuencia en los gráficos tienen una muy buena aproximación en la estimación de grado de penetración y ubicación del daño.

Podemos ver en los gráficos y en los resultados, que la robustez de método inverso es proporcional al grado de avance de la fisura. Para un $\alpha \leq 0.30$ los cambios en las frecuencias naturales son imperceptibles. Lo que nos lleva a pensar que el método puede ser un primer paso para la detección de una fisura significativa en una estructura.

3.8. Referencias.

- Adams, R. D., Cawley, P., Pye, C. J. y Stone, B. J., “A vibration technique for non destructively assessing the integrity of structures”, *Journal of Mechanical Engineering Sciences*, 20: 93-100, 1978.
- Banerjee, J. R. y Guo, S., *On the dynamics of cracked beams*, *Proceedings of the 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- Bilello, C., *Theoretical and Experimental Investigation on Damaged Beams Under Moving Systems*. PhD Thesis, Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italy, 2001.
- Caddemi, S. y Calì, I., “Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler–Bernoulli beam with multiple open cracks”, *Journal of Sound and Vibration* 327: 473–489, 2009.
- Caddemi, S. y Morassi, A., Multi-cracked Euler–Bernoulli beams: “Mathematical modeling and exact solutions”, *International Journal of Solids and Structures*, 50: 944–956, 2013.
- Chen, X. F., He, Z. J. y Xiang, J. W., “Experiments on crack identification in cantilever beams”, *Experimental Mechanics*, 45(3): 295-300, 2005.
- Chondros, T.G. y Dimarogonas, A.D. y Yao J. , “A continuous cracked beam vibration theory”, *Journal of Sound and Vibration*, 215:17–34,1998.
- Dimarogonas, A.D., “Vibration of cracked structures: a state of the art review”, *Engineering Fracture Mechanics*, 55: 831–857, 1996.
- Due To, “Crack Using Damage Index Derived from Experimental Modal Data,” *Experimental Techniques* 38: 18–30, DOI: 10.1111/j.1747-1567.2012.00823.x, 2014.
- El-Haddad, M.H., Ramadan, O.N., y Bazaraa, A.R., “Analysis of Frames Containing Cracks and Resting on Elastic Foundations”, *International Journal of Fracture* 45: 81–102 1990.
- Gudmundson, P., “The Dynamic Behavior of slender structures with cross section crack.”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* , 31; 329–345, 1983.
- Krawczuk, M., Palacz, M. y Ostachowicz, W., “Genetic algorithm for fatigue crack detection in Timoshenko beam”, *IUTAM Symposium on Evolutionary Methods in Mechanics*, Cracow, Poland, 117:197–206, 2004.

- Labib, A., Denedy, D., y Featherston, C., “Free Vibration Analysis of Beams and Frames with Multiple Cracks for Damage Detection”, *Journal of Sound and Vibration* 333: 4991–5003, 2014.
- Liebowitz, H. y Claus Jr, W.D.S., “Failure of notched columns”, *Engineering Fracture Mechanics*, 1: 379–383,1968.
- Liebowitz, H., Vanderveldt, H. y Harris, D.W., “Carrying capacity of notched column”, *International Journal of Solids and Structures* , 3: 489–500, 1967.
- Moghadam, A.A.A., Torabi, K., Moavenian, M., y Davoodi, R., “Dynamic Modeling and Robust Control of an L-Shaped Microrobot Based on Fast Trilayer Polypyrrole-Bending Actuators”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24: 484–498, 2013.
- Nahvi, H. y Jabbari, M., “Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model”, *International Journal of Mechanical Sciences* , 47(10): 2005 1477–1497, 2005.
- Nandwana, B.P. y Maiti, S.K., “Modelling of vibration of beam in presence of inclined edge or internal crack for its possible detection based on frequency measurements”, *Engineering Fracture Mechanics*, 58(3):193-205,1997.
- Okamura, H., Liu H.W., Chu C.S. y Liebowitz H., “A cracked column under compression”, *Engineering Fracture Mechanics* ,1: 547–564, 1969.
- Ong, Z.C., Rahman, A.G.A. y Ismail, Z., “Determination of Damage Severity on Rotor Shaft Due To Crack Using Damage Index Derived from Experimental Modal Data”, *Experimental Techniques* , 38: 18–30,2014.
- Orbanich, C. J., Rosales, M.B., Ortega, N.F. y Filipich, C.P., “Determinación de fallas en vigas de fundación elásticas mediante el método inverso”, *Mecánica Computacional Vol XXVIII*: 613-631, 2009.
- Ostachowicz, W.M. y Krawczuk, M., “Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam”, *Journal of Sound and Vibration*, 150: 191–201, 1991.
- Ovanesova, A.V. y Suarez, L.E., “Applications of Wavelet Transforms to Damage Detection in Frame Structures”, *Engineering Structures* 26: 39–49, 2004.

- Owolabi, G.M., Swamidass, A.S.J., y Seshadri, R., “Crack Detection in Beams Using Changes in Frequencies and Amplitudes of Frequency Response Functions”, *Journal of Sound and Vibration*, 265: 1–22, 2003.
- Ratazzi, A. R., Bambill, D. V., y Rossit, C. A., “Vibrations of a frame structure with a crack” *Mecánica Computacional*, 32: 3563-3574, 2014.
- Ratazzi A. R., Bambill, D. V., Rossit ,C. A. y Maiz, S., “Aplicación de transformada continua wavelet en la detección de fisuras en estructuras de vigas” *Mecánica Computacional*, 34: 713-728, 2016.
- Rizos, P.F., Aspragathos, N., y Dimarogonas, A.D., ‘Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes’, *Journal of Sound and Vibration*, 138(3): 381–388, 1990.
- Rosales, M.B., Filipich, C.P., y Buezas, F.S., “Crack Detection in Beam-Like Structures”, *Engineering Structures*, 31: 2257–2264, 2009.
- Rossit, C.A., Bambill, D.V., Ratazzi ,A.R., y Maiz, S., “Vibrations of L-Shaped Beam Structures With a Crack: Analytical Approach and Experimental Validation”, *Experimental Techniques*, 40(3):1033-1043, 2016.
- Sinha, J.K., Friswell, M.I. y Edwards, S., “Simplified models for the location of crack in beam structures using measure vibration data”, *Journal of Sound and Vibration*, 251(1): 13–38, 2002.
- Thomson, W. J., “Vibration of slender bars with discontinuities in stiffness”, *Journal of Applied Mechanics*, 17: 203-207, 1943.

4. Capítulo IV: Conclusiones Generales e introducción a futuras líneas de investigación.

4.1. Conclusiones Generales

El análisis se centró en el comportamiento dinámico de un semi-pórtico, vinculado elásticamente en uno de sus extremos e internamente en su dintel. A través de este modelo estructural propuesto se obtuvieron resultados numéricos de los coeficientes de frecuencia y las formas modales de variados semi- pórticos que pueden ser generados con el modelo.

Para el desarrollo analítico se aplicó el método de cálculo de variaciones, se pudo ver que es de eficiente aplicación en una estructura como la del semi-pórtico. En este modelo de estructura una vez planteado el problema de contorno, se utilizó el método de separación de variables y se planteó la solución exacta. Para obtener los resultados numéricos se construyeron algoritmos de resolución utilizando el software Mathematica 10, el cálculo de los coeficientes de frecuencia es rápido y con buena convergencia.

Además de comparar los resultados con valores disponibles en la literatura, se obtuvieron resultados a través de un modelo experimental construido al efecto con planchuelas de acero y por medio de un código de elementos finitos de carácter comercial. Los resultados tuvieron una muy buen concordancia entre los diferentes modelos.

Todo lo estudiado y desarrollado en los Capítulos I y II, nos permitió analizar el comportamiento de un semi-pórtico dañado, a través de las variaciones de sus frecuencias naturales. Se simuló una fisura por medio de la teoría del resorte rotacional, propuesta por Chondros y Dimaragonas, los valores fueron comparados con los medidos en un modelo experimental. Los errores porcentuales entre los valores del modelo teórico, y de laboratorio se encuentran como máximo en el orden del 10%, lo que es altamente satisfactorio en este tipo de problemas.

Se aplicó el método inverso combinando el desarrollo teórico aplicando algoritmos en el software Mathematica, y los resultados medidos en el pórtico construido en el laboratorio. Los resultados obtenidos en la experiencia fueron muy buenos. Los puntos de cruce de las tres curvas de frecuencia en los gráficos tienen una muy buena aproximación en la estimación de grado de penetración y ubicación del daño.

4.2. Introducción a futuras líneas de investigación. Aplicación de La transformada de Wavelets a señales

En esta sección a modo de introducción se estudia de forma experimental el comportamiento dinámico de una viga cantiléver. Con el objetivo de, por medio de un caso sencillo, introducir la aplicación de la Transformada Wavelet (TW) al procesado de señales e imágenes que es otra herramienta, muy reciente en el tiempo, para la detección temprana de fisuras en una estructura. El cual será desarrollado con mayor profundidad en futuros trabajos.

Para ello, se halló la señal de la forma modal de la primera frecuencia natural, de la viga fisurada, y se aplicó la transformada de Wavelet para detectar ubicación de la fisura.

4.2.1. Breve revisión bibliográfica.

A finales de 1970, el ingeniero Jean Morlet, propuso una alternativa para la transformada de Fourier. Su propósito era la búsqueda de petróleo, y para ello necesitaba producir inicialmente vibraciones y analizar los ecos resultantes, cuyas frecuencias se correlacionaban con el grosor de las diferentes capas existentes bajo tierra.

Unos años después, Alex Grossmann, físico teórico especializado en mecánica cuántica, reconoció ciertas similitudes entre el trabajo de Jean Morlet y los estados coherentes, y construyó una fórmula de inversión exacta para la transformada de Jean Morlet.

En 1985, Yves Meyer, matemático, observó el trabajo desarrollado por Jean Morlet y Alex Grossmann, así como su fórmula de reconstrucción, y se dio cuenta de que era un redescubrimiento de la fórmula que Alberto Calderón había introducido en la década de 1960 en el análisis armónico.

En 1998 aparece el nombre de Stéphane G. Mallat, especializado en visión por ordenador y análisis de imagen, el cual se interesó rápidamente por las bases de Wavelets y todas sus posibles aplicaciones.

En el campo de las vibraciones mecánicas, Newland, D. (1994) fue uno de los primeros en aplicar TW. Wang, Q y Deng, X. (1999), aplican el análisis de Wavelet a la señal de la deflexión de una viga fisurada. Douka, E. et al. (2003), analizan analítica y experimentalmente una viga cantiléver por medio de la TW. Ovanesova, A y Suárez, L. (2004), estudian marcos planos fisurados aplicándoles la TW. Rucka, M. y Wilde, K. (2006) analizan vigas y placas fisuradas por medio de una Gaussian Wavelet.

Wu, N y Wang, Q. (2011), presentan un estudio estático de una viga dañada a través de la transformada especial de Wavelet. Xiang, J. y Liang, M. (2012), desarrollaron un método para detectar fisura basado en la forma modal y las frecuencias de la estructura. Andreus, U. et al. (2016), identifican la fisura de una viga por medio de la deflexión estática.

4.3. Detección de fisuras por transformada especial de Wavelet.

4.3.1. Transformada de Wavelets: Conceptos Generales.

Las señales transitorias son más complejas que las señales estacionarias. Para las primeras, se utiliza la Transformada de Wavelet (TW) para su estudio. Las segundas se analizan a través de la conocida Transformada de Fourier (TF).

La Transformada Wavelet (TW) permite variar el tamaño de la ventana de análisis. Al igual que la Transformada de Fourier por Intervalos, la TW puede medir las variaciones en tiempo-frecuencia de las componentes espectrales, pero posee una resolución diferente.

El análisis por medio de las Wavelet permite el uso de intervalos grandes de tiempo en aquellos segmentos en los que se requiere mayor precisión en baja frecuencia, y regiones más pequeñas en donde se requiere información en alta frecuencia.

La forma de comprender cómo opera esta transformada es pensar en una señal temporal pasando por varios filtros que dividen a ésta en porciones de alta y baja frecuencia.

En la TW aparece un parámetro de escala, que es similar a la escala utilizada en los mapas, las escalas grandes pertenecen a vistas globales y las chicas a detalles más refinados. Comparando en términos de frecuencia, la frecuencia baja corresponde a información global de la señal, mientras que la alta frecuencia corresponde a una información detallada de patrones ocultos de la señal.

4.3.2. Características y propiedades de las Wavelets.

La TW descompone la señal en pequeñas ondas. Éstas son ondas localizadas, es decir son señales que tienden a cero en un corto tiempo. En resumen las Wavelet son funciones que tienen dos propiedades importantes: oscilación y corta duración.

Una función $\psi(x)$ es una función Wavelet si y solo si su transformada de Fourier $\Psi(\omega)$ satisface para una frecuencia ω .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|^2} d\omega < +\infty. \quad (4.1)$$

Esta condición implica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (4.2)$$

El valor de la función $\psi(x)$ localizada en los dominios de tiempo y frecuencia es usada para crear la familia de Wavelets

$$\Psi_{u,s}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{u-x}{s}\right), \quad (4.3)$$

en donde s y u son números reales que denotan los parámetros de escala y traslación respectivamente.

La función original $\psi(x)$ sin escalar ni trasladar se denomina la Wavelet madre. La función $\Psi_{u,s}(x)$ será la función de comparación que reemplazan a las exponenciales complejas de la transformada de Fourier.

A continuación presentamos algunas de las propiedades más importantes de las Wavelets

En el análisis y detección de una singularidad, los momentos de fuga tienen un protagonismo fundamental. Una Wavelet tiene n momentos de fuga teniendo en cuenta la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \Psi(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.4)$$

Una Wavelet con n momentos nulos es ortogonal a los polinomios de grado $n-1$. Si tenemos una señal que tiene una singularidad en un punto determinado u , esto significa, que la señal no es diferenciable en ese punto, y que los coeficientes de la transformada continua de Wavelet toman un valor muy alto. Mallat (1998) demostró por medio de un teorema que: Una función $\psi(t)$ con un decrecimiento rápido posee n momentos nulos si, y sólo si, existe $\theta(t)$ de soporte compacto, de decrecimiento rápido, tal que:

$$\Psi(x) = (-1)^n \frac{d^n \theta(x)}{dx^n}. \quad (4.5)$$

Como consecuencia para una señal $f(x)$ tenemos

$$Wf(u,s) = s^n \frac{d^n}{dx^n} (f(x) \times \bar{\theta}_s)(u), \quad (4.6)$$

con

$$\bar{\theta}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \theta\left(\frac{-t}{s}\right). \quad (4.7)$$

Además, $\psi(x)$ tiene n momentos nulos si, y sólo si,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0. \quad (4.8)$$

Al producto de $f(x) \times \bar{\theta}_s$ se lo denomina *consolación* de las funciones y se lo interpreta como un promedio de la señal, sobre un dominio proporcional a la escala s .

El tipo de Wavelet seleccionada y el número de momentos nulos es fundamental para realizar el análisis por medio de Wavelet.

Regularidad, es la capacidad de una Wavelet de reconstruir fielmente una señal a partir los coeficientes calculados en el proceso de transformación, o dicho de otro modo, representa la concentración y suavidad de la función Wavelet en el dominio de frecuencia y tiempo.

Simetría, si la Wavelet es simétrica, al verla como un filtro se puede decir que tiene fase lineal, si no es simétrica se introduce distorsión en la fase. Esto es de especial interés en aplicaciones de procesamiento de sonido e imágenes.

4.3.3. Clasificación de Wavelets.

En esta sección hacemos una clasificación de algunas de las funciones Wavelet más utilizadas. Éstas están restringidas a las funciones disponibles en el software Wolfram Mathematica 10 que es el utilizado más adelante en la metodología.

Las funciones: Mexican Hat, DWaussian y Morlet Wavelet pertenecen a una familia de funciones no ortogonales con una función $\psi(x)$ explícita definida. El análisis de estas funciones es limitado a la Transformada Continua de Wavelet.

4.3.4. Transformada de Wavelets.

Hay dos tipos de transformadas. Por un lado la transformada discreta es más compacta y tiene sus ventajas en cuanto a rapidez y tamaño de los ficheros de cálculo, por otro lado la transformada continua emplea una variación continua de ambos parámetros y requiere más gasto en memoria y tamaño de los conjuntos correspondientes, buscando que los datos sean redundantes. Para los objetivos planteados se prefiere la transformada continua por su mayor resolución, ya que interesa detectar pequeñas singularidades en una señal.

Si tenemos la señal $f(x)$, en donde la variable x es el tiempo o el espacio, podemos definir a la transformada continua de Wavelet como la integral del producto de la señal y la función Wavelet

$$W_f(u, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi\left(\frac{u-x}{s}\right) dx. \quad (4.9)$$

En donde $W_f(u,s)$ son los coeficientes de Wavelet.

4.4. Modelo experimental

Se analizó una viga cantiléver, en el Laboratorio de vibraciones de la Universidad Nacional del Sur, confeccionada por una planchuela de acero de 5/8 "× 1/8" ($b=15.875\text{mm}$, $h= 3.175\text{mm}$), sección transversal $4.064 \times 10^5 \text{mts}^2$. El empotramiento se materializó por medio de una mordaza, construida con dos planchuelas de acero, sujeta a una mesa de trabajo como vemos en la Figura 4.1.

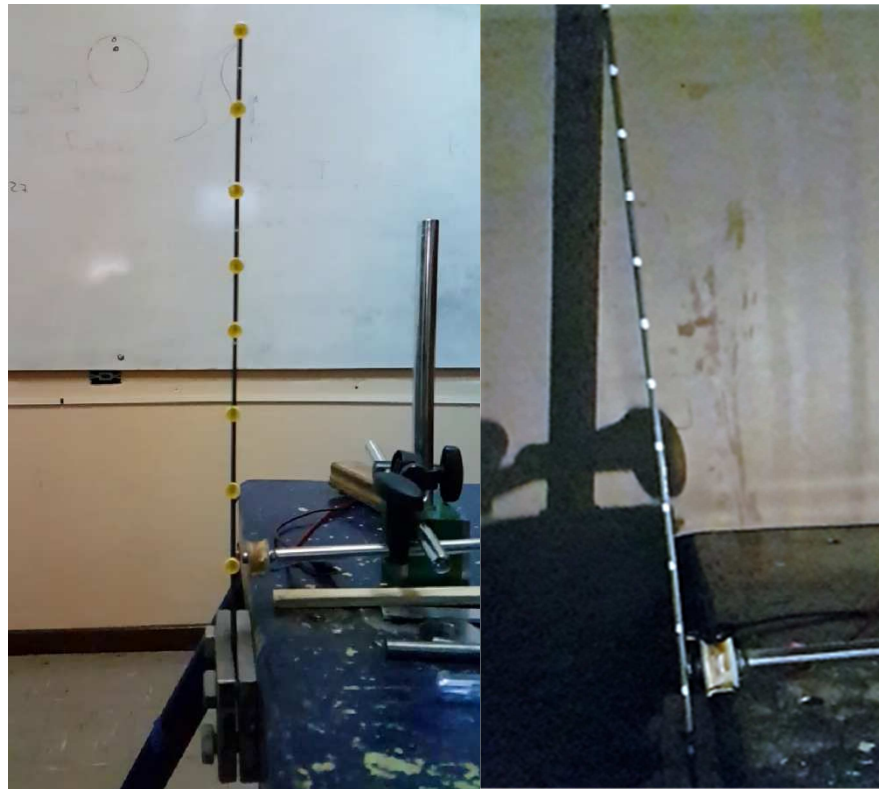


Figura. 4.1: Dispositivo Experimental.

4.5. Adquisición experimental de la línea de deflexión de la viga fisurada

Se vuelcan a continuación los resultados obtenidos en las primeras etapas de la investigación sobre el tema, Ratazzi, A. et al. (2016).

Se analizó la viga cantiléver fisurada a un tercio de la luz modelada en el laboratorio, descrita en la sección 4.4. A la viga se le realizaron doce marcas, de 3 mm de diámetro, equidistantes distribuidas a lo largo de la misma. Se estudiaron los desplazamientos de doce puntos marcados y se obtuvo la elástica por medio de una técnica de medición óptica con el programa Tracker 4.94.

Se midió la primer frecuencia natural de la viga (19.53 Hz), y con esta frecuencia fue excitada la viga con una bobina como se muestra en el esquema de la Figura 4.2.

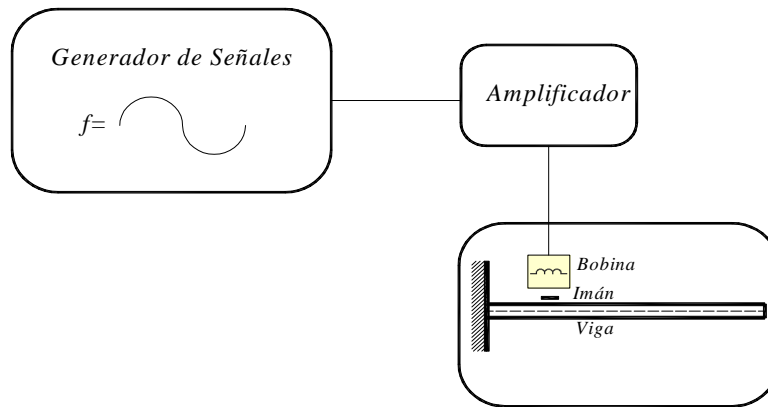


Figura 4.2: Esquema del laboratorio.

Este procedimiento se filmó en cámara lenta y fue capturado por un dispositivo con una resolución de 1280 x 720 píxeles, éste además permite capturar 240 cuadros por segundo.

La filmación fue analizada con el software Tracker 4.94 (*Copyright (C) 2007 Free Software Foundation, Inc. <<http://fsf.org/>>*). Se obtuvieron los máximos desplazamientos de los doce puntos distribuidos a lo largo de la viga, lo cual nos permite construir la elástica de la misma como vemos en la Figura 3.

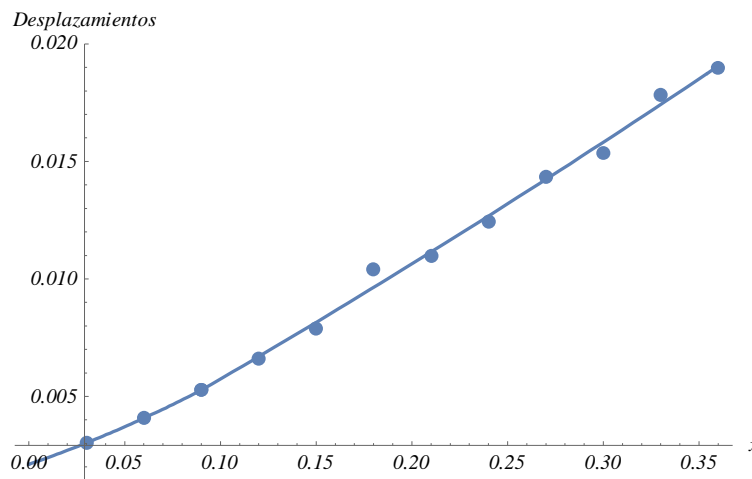


Figura 4.3: Desplazamientos máximo de la viga cantiléver.

4.6. Aplicación de la transformada de Wavelet a la señal.

Dado las características de las Wavelet con respecto a los parámetros de escala y tiempo, estas tienen la propiedad de detectar cambios sutiles en una señal. Los máximos desplazamientos de los 12 puntos del modelo experimental pueden ser tomados como una señal a la cual podemos aplicarle la TCW. Los

cambios repentinos en los coeficientes de Wavelet analizados puede significar la presencia de una grieta.

En este trabajo analizaremos la viga cantiléver fisurada a un tercio de la luz, la función Wavelet madre utilizada fue la Mexican Hat, esta es una función simétrica y regulada y arrojo resultados de buena calidad

La deflexión de la viga de laboratorio es aproximada mediante la unión de polinomios de grado tres, por medio de un algoritmo en el software Mathematica 12. La Figura 4.4 muestra, la transformada de la deflexión $f(x)$ por medio de la Mexican Hat Wavelet.

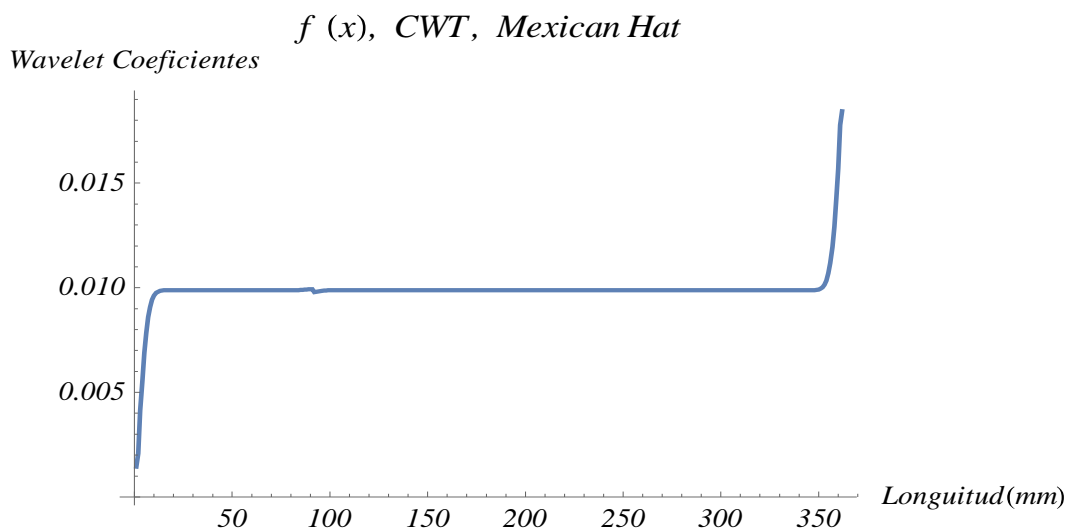


Figura 4.4: Transformada Wavelet de la elástica.

A continuación, en las Figura 4.5, se puede identificar el punto en donde está la fisura en el modelo, a los 100 mm, por medio del pico que se produce en el escalograma. En este gráfico se representa en el eje horizontal la posición longitudinal, en el eje vertical la escala. Los diferentes colores para cada punto representan la magnitud de los coeficientes de Wavelet.

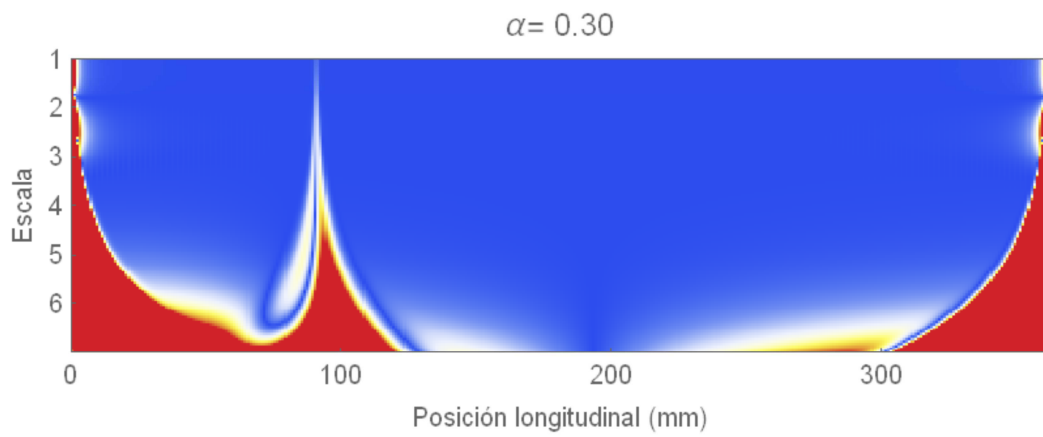


Figura 4.5: Escanograma Transformada Wavelet.

En la Figura 4.6 se observa la vista en tres dimensiones de la transformada de Wavelet, es posible ver a la altura de 100 mm cómo los valores de los coeficientes alcanzan un valor máximo.

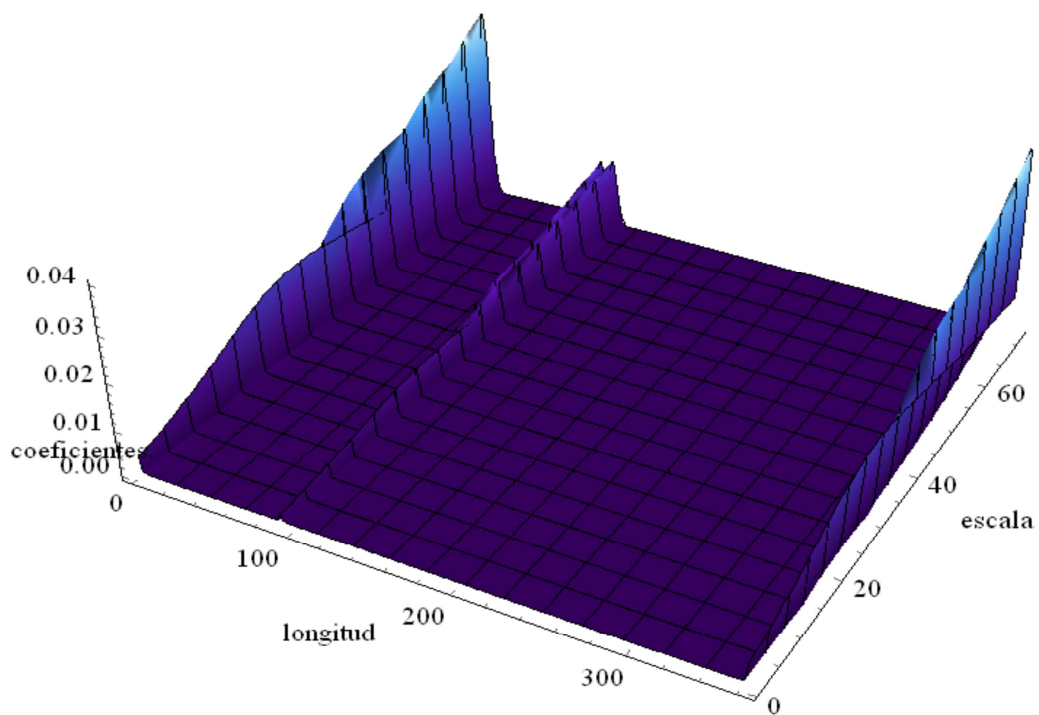


Figura 4.6: Gráfico en tres dimensiones de los coeficientes de la Transformada Wavelet.

4.7. Conclusiones

Lo desarrollado en este trabajo, nos permitió analizar el comportamiento de una viga cantiléver dañada, a través de las variaciones de sus frecuencias naturales y de la deflexión de la viga vibrando en el primer modo de vibración. Se simuló una fisura por medio de la teoría del resorte rotacional, propuesta por Chondros y Dimaragonas.

Se detectó la fisura por el método basado en las transformadas continuas de Wavelet. La transformada fue aplicada a la forma modal de la primera frecuencia natural de la viga cantiléver fisurada. La curva se obtuvo por medio de un método óptico, combinado con un algoritmo desarrollado en el software Mathematica.

La función de onda Mexican Hat proporcionó una manera clara y precisa de detectar la posición de la grieta, arrojando valores máximos de los coeficientes. La técnica de detección de ondas hace posible detectar grietas que requieren un mínimo de datos de entrada, es decir, solamente la respuesta de la estructura. La precisión del método depende de la calidad de la filmación y resolución de la cámara, aunque nos proporciona una herramienta para obtener una primera aproximación para detectar una fisura.

El propósito de futuros trabajos es, perfeccionar la técnica de obtención de la elástica de la estructura y hacer pruebas con otros tipos de funciones Wavelets madres así como la incorporación del análisis de pórticos fisurados.

4.8. Referencias

- Andreas, U., Baragatti1. P. , Casini, P. y Iacoviello, D., Experimental damage evaluation of open and fatigue cracks of multi-cracked beams by using Wavelet transform of static response via image analysis; *Struct. Control Health Monit. Published online in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com)*, DOI: 10.1002/stc.1902, 2016.
- Blevins, R., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Krieger Publishing, Malabar, Fla, USA, 2001.
- Douka, E., Loutridis, S. y Trochidis, A., Crack identification in beams using Wavelet analysis, *International Journal of Solid and Structures*,40:3557–69, 2003.
- Hu, J. y Liang, J., An integrated approach to detection of cracks using vibration characteristics, *Journal of the Franklin Institute*, 330: 841–853, 1993.
- Mallat, S., *A Wavelet tour of signal processing*, Academic Press, 1998.
- Newland, D. E., Wavelet analysis of vibration, Part 1: theory, *Journal of Vibration Acoustics*, 116: 409–416, 1994 a.
- Newland, D. E. ,Wavelet analysis of vibration. Part 2: Wavelet maps, *Journal of Vibration Acoustics*, 116: 417–424, 1994 b.
- Ovanesova, A.V. y Suarez L.E., Application of Wavelet transform to damage detection in frame structures, *Engineering Structures*, 26:39–49, 2004.
- Ratazzi A. R., Bambill D. V., Rossit C. A. y Maiz S., “Aplicación de transformada continua Wavelet en la detección de fisuras en estructuras de vigas”, *Mecánica Computacional*, 34: 713-728, 2016.
- Rucka, M. y Wilde, K., Crack identification using Wavelets on experimental static deflection profiles, *Engineering Structures*, 28(2):279–288, 2006.
- Wang, Q. y Deng, X., Damage detection with spatial Wavelets, *International Journal of Solid and Structures*, 36:3443–68,1999.
- Wolfram MATHEMATICA 9 software, Version 9, Copyright 1988–2012.
- Wu, N. y Wang, Q., Experimental studies on damage detection of beam structures with Wavelet transform, *International Journal of Engineering Sciences*, 49:253-261,2011.
- Tracker 4.94 (Copyright (C) 2007, Free Software Foundation, Inc. <<http://fsf.org/>>).
- Xiang, J. y Liang, M., Wavelet-Based Detection of Beam Cracks Using Modal Shape and Frequency Measurements, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* ,27 :439–454,2012.

Apéndice I

(Trabajos Publicados en revistas)

Research Article

Free Vibrations of Beam System Structures with Elastic Boundary Conditions and an Internal Elastic Hinge

Alejandro R. Ratazzi,¹ Diana V. Bambill,^{1,2} and Carlos A. Rossit^{1,2}

¹ *Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, (IMA), Universidad Nacional del Sur, (UNS), 8000FTN Bahía Blanca, Argentina*

² *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), C1033AAJ Buenos Aires, Argentina*

Correspondence should be addressed to Diana V. Bambill; dbambill@criba.edu.ar

Received 31 August 2013; Accepted 23 September 2013

Academic Editors: M. Chen and I. Smith

Copyright © 2013 Alejandro R. Ratazzi et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

The study of the dynamic properties of beam structures is extremely important for proper structural design. This present paper deals with the free in-plane vibrations of a system of two orthogonal beam members with an internal elastic hinge. The system is clamped at one end and is elastically connected at the other. Vibrations are analyzed for different boundary conditions at the elastically connected end, including classical conditions such as clamped, simply supported, and free. The beam system is assumed to behave according to the Bernoulli-Euler theory. The governing equations of motion of the structural system in free bending vibration are derived using Hamilton's principle. The exact expression for natural frequencies is obtained using the calculus of variations technique and the method of separation of variables. In the frequency analysis, special attention is paid to the influence of the flexibility and location of the elastic hinge. Results are very similar with those obtained using the finite element method, with values of particular cases of the model available in the literature, and with measurements in an experimental device.

1. Introduction

The study of the dynamic properties of beam systems is very important in structural design as they are the cornerstone for many resistant structures.

The issue is relevant virtually in all fields of engineering: structures composed of beams can resist by virtue of its geometry. Such structures can be found from large scale, such as bridges and buildings located in seismically active regions to microbeam systems used in modern electronic equipment which is subject to vibration environment.

As Laura and his coworkers pointed out [1], many excellent books and technical papers deal with vibrating beam systems, including [2–6].

Many researchers have analyzed the vibration of beam systems. Reference [1] dealt with the determination of the fundamental frequency of vibration of a frame elastically restrained against translation and rotation at the ends, carrying concentrated masses. Reference [7] proposed a hybrid analytical/numerical method to do dynamic analysis of planar serial-frame structures. Reference [8] presented

an elastic- and rigid-combined beam element to determine the dynamic characteristics of a two-dimensional frame composed of any number of beam segments. In his paper, Mei [6] considered the vibration in multistory planar beam structures from the wave vibration standpoint. Reference [9] analyzed in-plane vibrations of portal frames with elastically restrained ends. An approximate solution is obtained by means of a variational method.

In the particular case of L-beam structures, early studies have been done by [10–12]. In 2003, [13] extended the previous papers [12] by relaxing the restrictions on the motion of the open frame. In 2005, [14] determined natural frequencies and mode shapes of elastically restrained L-beams. They applied the separation of variables method for the determination of the exact eigenfrequencies and mode shapes and calculated the eigenvalues numerically by applying the Newton method strategy to the corresponding frequency equation. Reference [15] used a formulation by the Rayleigh-Ritz method together with the introduction of artificial linear and torsional springs for computing the natural frequencies

and modes for the in-plane vibrations of complex planar beam structures.

The presence of an internal hinge in beams has been treated in several papers including [16–22]. Here, we deal with the vibration of L-beams structures assuming an internal hinge in different positions of the structural system.

The two parts of the L-shaped geometry are joined at right angle, with the end of one of them clamped and the end of the other elastically restrained. Figure 1 depicts the structure under study.

Classical structural models do not consider the properties of the connection stiffness, because they are based only on models with pinned or rigid joints. Many authors have studied structures with flexibly connected members as it is known that the behavior of the connection plays an important role in analysis and design. Reference [23] presented a computer-based method for geometrically nonlinear beam system with semirigid beam-to-column connections. Reference [24] studied wooden framed structures; they considered that mechanical connections are recognized as extremely important elements in the aspect of strength and structural safety. Reference [25] studied steel frames and observed that the interstory shears generally increase when the connections stiffness is taken into account. As known, ideal supports used in many structural models do not fit exactly real supports.

In the current presentation it is assumed that the beams are adequately modeled using Euler-Bernoulli theory, so that the effects of shear deformation and rotatory inertia are considered to be small, and they are neglected in the analysis. The cross sections of beam elements have double symmetry (the shear centre and centroid are coincident), so it can be assumed that there is no coupling between bending displacements and torsional rotations.

The beam system is modeled in Mathematica code [26] using the method of separation of variables to obtain the exact values of the natural frequency coefficients.

Finally, numerical results are shown for slender beam systems by considering the effects of different stiffness of the elastic connections. A comparison is made with results obtained by the authors with the finite element method, [27] and with values available in the literature. In addition, some particular cases are also compared with the experimental results of a specially constructed device.

2. Theory

A more realistic model of an L-geometry beam system is presented to analyze the natural vibration problem. The structure under study has elastic restrains at F and a clamped end H as it is shown in Figure 1, with $(\alpha_1 + \alpha_3 = \pi/2)$. It is assumed that the elastic internal hinge at P can be located in different positions. The structure has three beam members: FO beam, with length l_1 ; OP beam, with length l_2 ; and PH beam, with length l_3 . Each of them has uniform properties throughout its length. The influence of the type of connection between beam-elements of the structural system and elastic conditions on the outer edge F is considered in the study. The external end H has a classical clamped condition, while the external end F is supported by two translational springs of stiffness t_w and t_u

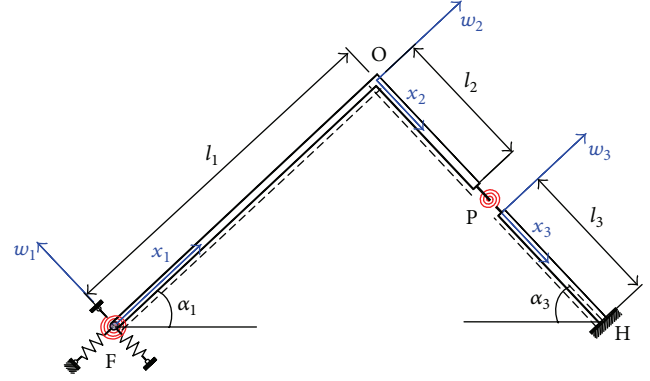


FIGURE 1: Beam system structure.

and a rotational spring of stiffness r_z , Figure 2(a). At point P, there is an internal hinge, elastically restrained against rotation between beams 2, OP, and 3, PH; this semirigid connection is materialized by a rotational spring of stiffness r_m , Figure 2(b).

The flexural rigidity, the mass density, the length, and the area of the cross section of each beam are $E_i I_i$, ρ_i , l_i , and A_i , with $i = 1, 2, 3$.

Three coordinate systems are located as shown in Figure 1. Respectively, each coordinate origin is at the point F, O, or P. At abscissa x_i ($0 \leq x_i \leq l_i$) and at any time t : w_i is the flexural displacement in the transverse direction of the beam's neutral axis, $\theta_i = \partial w_i / \partial x_i$ is the section rotation, and u_i is the axial displacement. The deformation of a beam in the x direction is not taken into account. The beams are considered infinitely rigid in the x direction.

The sign convention used for the positive shear force spins an element clockwise (up on the left and down on the right). Likewise the normal convention for a positive bending moment elongates the reference fiber of the beam indicated by the dotted line. Figure 3 shows the sign convention to be employed.

For free vibration, the bending moment and the shear force expressions are

$$Q_i(x_i, t) = E_i I_i \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3} \Big|_{(x_i, t)}, \quad (1)$$

$$M_i(x_i, t) = E_i I_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \Big|_{(x_i, t)}.$$

At time t , the kinetic energy of the beams is given by

$$T^* = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left(\int_0^{l_i} \rho_i A_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \Big|_{(x_i, t)} \right)^2 dx_i \right) + \frac{\rho_1 A_1 l_1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{(l_1, t)} \right)^2. \quad (2)$$

The last term of the kinetic energy expression is due to the rigid body translation of beam 1 of length l_1 . Due to the assumption of infinity axial rigidity, $\partial u_1 / \partial t$ at $x_1 = l_1$ is equal to $\partial w_2 / \partial t$ at $x_2 = 0$; therefore in (2) the expression $(\partial u_1 / \partial t)^2|_{(l_1, t)}$ can also be replaced by $(\partial w_2 / \partial t)^2|_{(0, t)}$.

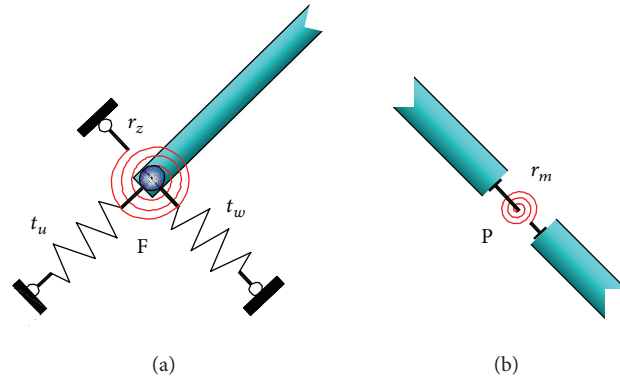


FIGURE 2: (a) Elastic boundary conditions at end F; (b) elastic internal hinge at joint P.

On the other hand, the potential energy of the mechanical system is given by

$$\begin{aligned}
 U^* = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{l_i} E_i I_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \Big|_{(x_i,t)} \right)^2 dx_i \right] \\
 & + \frac{1}{2} r_m \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2} \Big|_{(l_2,t)} - \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \Big|_{(0,t)} \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} r_z \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \Big|_{(0,t)} \right)^2 + \frac{1}{2} t_w (w_1(0,t))^2 \\
 & + \frac{1}{2} t_u (u_1(0,t))^2,
 \end{aligned} \tag{3}$$

which involves the work of the elastic constrains. And again due to the assumption of infinity axial stiffness, $u_1(0,t) = u_1(l_1,t) = w_2(0,t)$; therefore in (3) the expression $(u_1(0,t))^2$ can also be replaced by $(w_2(0,t))^2$.

To express equations in dimensionless form, the nondimensional parameter is introduced:

$$X_i = \frac{x_i}{l_i}, \quad \text{with } X_i \in [0, 1] \quad \forall i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

The displacements u_i and w_i , and θ_i may be expressed in terms of the dimensionless coordinates as follows:

$$\begin{aligned}
 W_i(X_i, t) &= \frac{w_i(x_i, t)}{l_i}, \\
 \theta_i(X_i, t) &= \frac{\partial W_i}{\partial X_i} \Big|_{(X_i,t)} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \Big|_{(x_i,t)}, \\
 U_i(X_i, t) &= \frac{u_i(x_i, t)}{l_i}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

The characteristics of beam 1 are used as ‘‘reference’’:

$$EI = E_1 I_1, \quad \rho A = \rho_1 A_1, \quad l = l_1, \tag{6}$$

to define the ratios:

$$\nu_{EI_i} = \frac{E_i I_i}{EI}, \quad \nu_{\rho A_i} = \frac{\rho_i A_i}{\rho A}, \quad \nu_{l_i} = \frac{l_i}{l}, \tag{7}$$

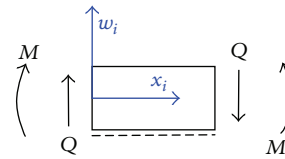


FIGURE 3: Sign convention for positive transverse displacement (w), shear force (Q), and bending moment (M).

the dimensionless spring stiffness:

$$\begin{aligned}
 T_w &= t_w \frac{l^3}{EI}, & T_u &= t_u \frac{l^3}{EI}, \\
 R_z &= r_z \frac{l}{EI}, & R_m &= r_m \frac{l}{EI},
 \end{aligned} \tag{8}$$

and the dimensionless frequency coefficient:

$$\lambda^4 = l^4 \omega^2 \frac{\rho A}{EI}, \tag{9}$$

where ω is the circular natural frequency of the vibrating system in radians per second.

The expression of the energy functional of the system of beams is $J = T^* - U^*$.

Hamilton’s principle requires that $\delta \int_{t_a}^{t_b} J dt$ taken between arbitrary intervals of time (t_a, t_b) at which the positions of the mechanical system are known is equal to zero. That means that the system should execute a motion which makes the functional J stationary on the space of admissible functions:

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} (T^* - U^*) dt = 0, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 & \delta \int_{t_a}^{t_b} (T^* - U^*) dt \\
 &= \delta \left\{ \frac{1}{2} \rho A l^3 \right. \\
 & \quad \times \left. \left\{ \int_{t_a}^{t_b} \left[\sum_{i=1}^3 \int_0^1 \nu_{\rho A_i} \nu_{l_i}^3 \left(\frac{\partial W_i}{\partial t} \Big|_{(X_i,t)} \right)^2 dX_i \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + v_{\rho A_1} v_{l_1} v_{l_2}^2 \left(\left. \frac{\partial W_2}{\partial t} \right|_{(0,t)} \right)^2 \Big] dt \Big\} \\
& - \frac{1}{2} \frac{EI}{l} \left\{ \int_{t_a}^{t_b} \left[\sum_{i=1}^3 \int_0^1 \frac{v_{EI_i}}{v_{l_i}} \left(\left. \frac{\partial^2 W_i}{\partial X_i^2} \right|_{(X_i,t)} \right)^2 dX_i \right] dt \right. \\
& + \int_{t_a}^{t_b} R_m \left(\left. \frac{\partial W_2}{\partial X_2} \right|_{(1,t)} - \left. \frac{\partial W_3}{\partial X_3} \right|_{(0,t)} \right)^2 dt \\
& + \int_{t_a}^{t_b} R_z \left(\left. \frac{\partial W_1}{\partial X_1} \right|_{(0,t)} \right)^2 dt \\
& + \int_{t_a}^{t_b} T_w (v_{l_1})^2 (W_1(0,t))^2 dt \\
& \left. + \int_{t_a}^{t_b} T_u (v_{l_2})^2 (W_2(0,t))^2 dt \right\}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Taking into account the boundary conditions at the ends, the compatibility, and equilibrium conditions at the joints between beam elements and applying the procedure of calculus of variations in (10), the following boundary and eigenvalue problem is obtained

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^4 W_1}{\partial X_1^4} \right|_{(X_1,t)} + k_1^4 \left. \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \right|_{(X_1,t)} &= 0, \\
\left. \frac{\partial^4 W_2}{\partial X_2^4} \right|_{(X_2,t)} + k_2^4 \left. \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} \right|_{(X_2,t)} &= 0, \tag{12} \\
\left. \frac{\partial^4 W_3}{\partial X_3^4} \right|_{(X_3,t)} + k_3^4 \left. \frac{\partial^2 W_3}{\partial t^2} \right|_{(X_3,t)} &= 0,
\end{aligned}$$

with $k_i^4 = (\rho_i A_i / E_i I_i) l_i^4$, $i = 1, 2, 3$.

Consider

$$v_{l_1} W_1(1,t) = 0, \quad v_{l_2} W_2(1,t) = v_{l_3} W_3(0,t),$$

$$\left. \frac{\partial W_1}{\partial X_1} \right|_{(1,t)} = \left. \frac{\partial W_2}{\partial X_2} \right|_{(0,t)},$$

$$\frac{v_{EI_1}}{v_{l_1}} \left. \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2} \right|_{(1,t)} = \frac{v_{EI_2}}{v_{l_2}} \left. \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2} \right|_{(0,t)},$$

$$\frac{v_{EI_2}}{v_{l_2}} \left. \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2} \right|_{(1,t)} - R_m \left(\left. \frac{\partial W_3}{\partial X_3} \right|_{(0,t)} - \left. \frac{\partial W_2}{\partial X_2} \right|_{(1,t)} \right) = 0,$$

$$\frac{v_{EI_3}}{v_{l_3}} \left. \frac{\partial^2 W_3}{\partial X_3^2} \right|_{(0,t)} - R_m \left(\left. \frac{\partial W_3}{\partial X_3} \right|_{(0,t)} - \left. \frac{\partial W_2}{\partial X_2} \right|_{(1,t)} \right) = 0,$$

$$\frac{v_{EI_1}}{(v_{l_1})^2} \left. \frac{\partial^3 W_1}{\partial X_1^3} \right|_{(0,t)} + T_w v_{l_1} W_1(0,t) = 0,$$

$$\frac{v_{EI_2}}{v_{l_2}^2} \left. \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3} \right|_{(1,t)} - \frac{v_{EI_3}}{v_{l_3}^2} \left. \frac{\partial^3 W_3}{\partial X_3^3} \right|_{(0,t)} = 0,$$

$$\frac{v_{EI_2}}{(v_{l_2})^2} \left. \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3} \right|_{(0,t)} + T_u v_{l_2} W_2(0,t)$$

$$- k^4 v_{l_1} v_{l_2} W_2(0,t) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{v_{EI_1}}{v_{l_1}} \left. \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2} \right|_{(0,t)} - R_z \left. \frac{\partial W_1}{\partial X_1} \right|_{(0,t)} = 0,$$

$$v_{l_3} W_3(1,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial W_3}{\partial X_3} \right|_{(1,t)} = 0.$$

Using the well-known separation of variables method, solution of (12) is assumed to be of the form:

$$W_1(X_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{1n}(X_1) T(t),$$

$$W_2(X_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{2n}(X_2) T(t), \tag{14}$$

$$W_3(X_3, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{3n}(X_3) T(t).$$

The functions W_{1n} , W_{2n} , and W_{3n} represent the corresponding transverse modes of natural vibration of each beam member and are given by

$$W_{1n}(X_1) = C_1 \cosh(\lambda_n \alpha_1 X_1) + C_2 \sinh(\lambda_n \alpha_1 X_1)$$

$$+ C_3 \cos(\lambda_n \alpha_1 X_1) + C_4 \sin(\lambda_n \alpha_1 X_1),$$

$$W_{2n}(X_2) = C_5 \cosh(\lambda_n \alpha_2 X_2) + C_6 \sinh(\lambda_n \alpha_2 X_2)$$

$$+ C_7 \cos(\lambda_n \alpha_2 X_2) + C_8 \sin(\lambda_n \alpha_2 X_2), \tag{15}$$

$$W_{3n}(X_3) = C_9 \cosh(\lambda_n \alpha_3 X_3) + C_{10} \sinh(\lambda_n \alpha_3 X_3)$$

$$+ C_{11} \cos(\lambda_n \alpha_3 X_3) + C_{12} \sin(\lambda_n \alpha_3 X_3),$$

where $\alpha_i = v_{l_i} \sqrt[4]{v_{\rho A_i} / v_{EI_i}}$ is a mechanical and geometrical parameter, with $i = 1, 2, 3$, $\lambda_n = \sqrt[4]{l^4 \omega_n^2 \rho A / (EI)}$ is the dimensionless frequency coefficient of mode of vibration n , and C_1, C_2, \dots, C_{12} are arbitrary constants to be determined.

Replacing expressions (15) in (14) and these ones in (13), a linear system of equations in the unknown constants C_1, C_2, \dots, C_{12} is obtained.

For a nontrivial solution to exist the determinant of the coefficient matrix in the linear system of equations should be equal to zero and the roots of the transcendental frequency equation are the dimensionless frequency coefficients of the mechanical system in Figure 1.

3. Finite Element Method

The authors solved some numerical examples using the finite element method, using the software ALGOR 23.1 [27].

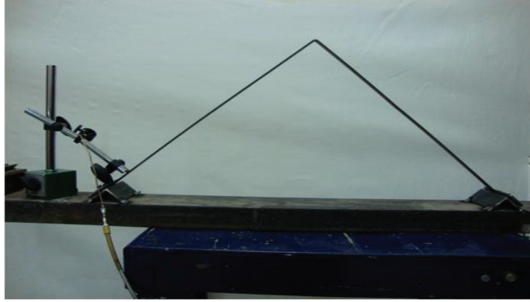


FIGURE 4: Experimental system device; C-C model.

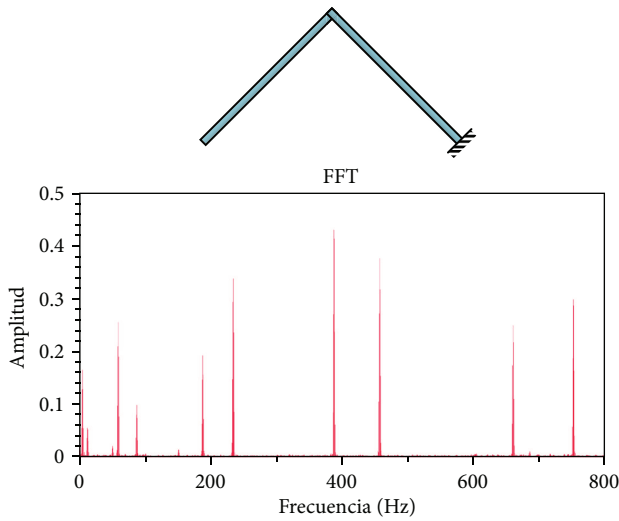


FIGURE 5: Spectrum of the first natural frequency; Case a: F-C model.

The three members of the structure are divided into 100 beams elements, respectively, each beam element with three degrees of freedom.

The internal hinge elastically restrained was modeled by a very small beam element, 300 times smaller than the length of the beam. The moment of inertia of the section was varied in order to obtain stiffness values that are equivalent to the stiffness constants of the spring connecting the two sections at location P.

4. Experimental Model

An experimental model was built of steel to compare the results obtained by the analytical and finite element models.

The experimental beam system has two parts of equal length l (see Figure 4). It was tested under two different boundary conditions (clamped and free at $x_1 = 0$) while the other end ($x_3 = 1$) was clamped. The presence of an internal hinge was not considered. The geometry of the structural system is described by $l = l_1 = l_2 + l_3 = 0.50$ m; $A = A_i = 4.064 \times 10^{-5}$ m²; $I = I_i = 3.468 \times 10^{-11}$ m⁴; and the material properties are $\rho = \rho_i = 7870$ kg/m³ and $E = E_i = 2.1 \times 10^6$ kg/cm², with $i = 1, 2, 3$.

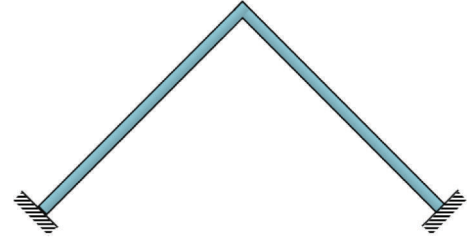


FIGURE 6: Spectrum of the first natural frequency; Case b: C-C model.

In order to measure the natural frequencies, an optical proximity sensor was used as it is seen in Figure 4.

Figures 5 and 6 show the spectrum of the first ten natural frequencies of the free-clamped (Case a) and the clamped-clamped (Case b) beam systems, respectively.

5. Numerical Results

Frequency coefficients were obtained by the exact analytical solution, with the finite element method, FEM, [27] and with the experimental model.

Table 1 presents the first ten coefficients of natural frequency of vibration of a beam structure with free-clamped boundary conditions without internal hinge, Figure 5.

For the analytical solution the parameters are taken as

$$\begin{aligned} v_{\rho A_i} &= 1, & v_{EI_i} &= 1, & \forall i &= 1, 2, 3, \\ v_{l_1} &= 2v_{l_2} = 2v_{l_3} &= 1. \end{aligned} \tag{16}$$

The analytical solution for Case a: F-C model, was obtained with $T_u = T_w = R_z = 0$; $R_m \rightarrow \infty$. It is remarkable that for the first ten frequencies, the analytical results are very close to the experimental ones. The analytical results are also compared with previous published ones, [7]. As it can be seen in the table all of them are in excellent agreement.

The exact analytical solution for C-C structure was obtained with $T_u = T_w = R_z = R_m \rightarrow \infty$.

Table 2 shows the first ten coefficients of natural frequency of vibration of the beam structure with clamped-clamped boundary conditions. Again the first ten frequency coefficients obtained by the analytical model are very similar to the experimental model. They also are in excellent agreement with the FEM solution and previous published results [14].

Table 3 shows the frequency coefficients for pinned-clamped L-beams obtained by the analytical procedure and the finite element method. For the analytical solution the spring constants are assigned in two different ways to model the simply supported-clamped system:

- (1) $v_{EI_i} = 1, v_{\rho A_i} = 1$, for all $i = 1, 2, 3, v_{l_2} = v_{l_3} = 1/2, T_w \rightarrow \infty, T_u \rightarrow \infty, R_z = 0$, and $R_m \rightarrow \infty$.
- (2) $v_{EI_i} = 1, v_{\rho A_i} = 1$, for all $i = 1, 2, 3, v_{l_2} = 0.99, v_{l_3} = 0.01, T_w \rightarrow \infty, T_u \rightarrow \infty, R_z \rightarrow \infty$, and $R_m = 0$.

The percentage differences between both sets of results are shown in file $|\Delta|\%$. Although both sets of results correspond to a simply supported-clamped system, the small percentage differences, less than 0.7%, are due to the different numerical computational aspects between the analytical models (1) and (2). The results were determined using the Mathematica software [26] with five significant figures.

Table 4 compares the first five natural coefficients of vibration for a free-clamped system with Morales published results [28]. The characteristics of Morales frame are $l_1 = 2.215$ m and $l_2 + l_3 = 4.249$ m, $E_1 I_1 = 0.0147$ Nm², $E_2 I_2 = E_3 I_3 = 0.0267$ Nm², $m_1 = 6 \times 10^{-3}$ kg/m, and $m_2 = m_3 = 4.5 \times 10^{-5}$ kg/m. For the analytical solution, the parameters are assumed as $l_1 = 2.215$ m, $l_2 = 2.249$ m, $l_3 = 2.000$ m, $v_{l_1} = 1, v_{EI_1} = 1, v_{\rho A_1} = 1, v_{l_2} = 1.0153, v_{EI_2} = 1.8163, v_{\rho A_2} = 0.0075, v_{l_3} = 0.0903, v_{EI_3} = 1.8163, v_{\rho A_3} = 0.0075, T_w = 0, R_z = 0, T_u = 0$, and $R_m \rightarrow \infty$. It can be verified that our results are in excellent agreement with those obtained by Morales.

Traditionally, the analysis and design of beam structures have been based on the assumption that the boundary conditions are rigid. The disadvantage of this model is that the flexibility of the real boundary conditions is neglected and therefore the real natural frequencies cannot be obtained.

Thus, we now analyze the case of beam system structure with elastic boundary conditions at edge F and clamped at the other end H, while the internal elastic hinge (at section P) is assumed to have $R_m \rightarrow \infty$. Numerical simulations are carried out to investigate the effect of the rigidity of the boundary conditions on the natural frequencies of the system.

In Figure 7 the effect of rigidity T_u of the translational spring on the frequency coefficients of the structure is shown. It can be seen that the first frequency coefficient λ_1 increases with increasing the value of T_u , from $T_u = 0, \lambda_1 = 1.5208$ to $T_u \rightarrow 200, \lambda_1 = 3.3762$. For values larger than 200 the fundamental coefficient stays practically the same: $T_u \rightarrow \infty, \lambda_1 = 3.3920$. Its increase is of 124%.

The second frequency is 3.3947 for $T_u = 0$ and 4.4566 for $T_u \rightarrow \infty$; its increase is of 31% and the most significant change occurs between $T_u = 200$ and $T_u = 1000$. The higher frequency coefficients exhibit a similar behavior.

From Figure 7 it could be concluded that the first and second frequencies interchange their modal shape for a value of T_u between 100 and 1000. A similar behaviour occurs in the case of third and fourth frequencies for a value of T_u between 1000 and 10000.

Figure 8 shows the effect of T_w on the first natural frequency coefficients. Again it is observed as a matter of course that the natural frequency coefficients increase with the spring constant parameter.

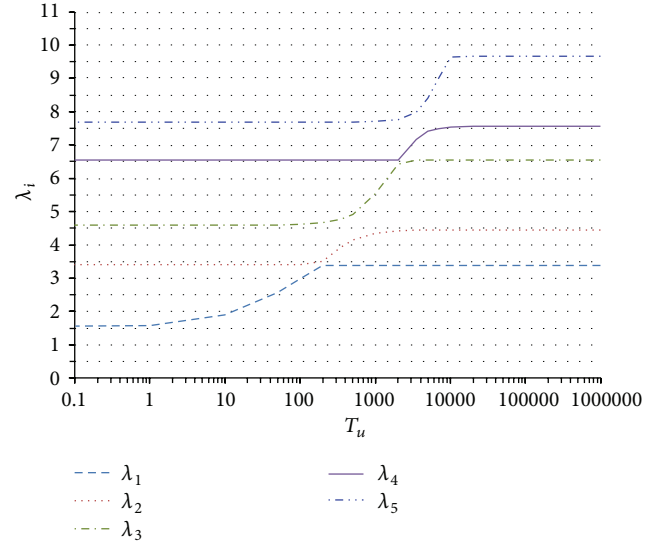


FIGURE 7: Effect of T_u on the first five natural frequency coefficients. $l_2 = l_3, v_{l_1} = v_{l_2} = 0.5, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, R_m \rightarrow \infty, R_z = 0$, and $T_w \rightarrow \infty$.

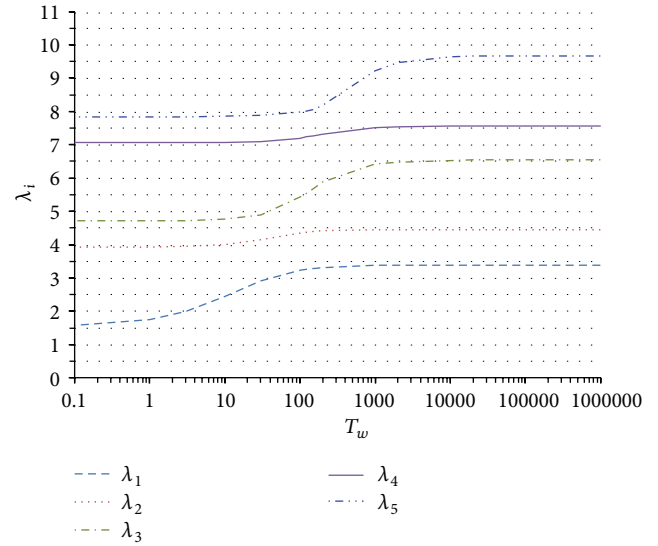


FIGURE 8: Effect of T_w on the first five natural frequency coefficients. $l_2 = l_3, v_{l_1} = v_{l_2} = 0.5, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, R_m \rightarrow \infty, R_z = 0$, and $T_u \rightarrow \infty$.

Figure 9 shows that the effect of the spring R_z is small.

Table 5 presents the case of a clamped-clamped structure with an elastic joint at $l_2 = 0.5l_1$, and R_m is the constant rigidity of the rotational spring at P that connects the beam members indicated as OP and PH. In this table R_m assumes different values from infinity to zero. It can be seen that all the first frequency coefficients decrease in value, except for λ_4 , which practically remains constant.

Table 6 presents the case of a clamped-clamped structure with an elastic connection at P, $l_2 \rightarrow 0, l_3 = l_1$. In this table, R_m assumes different values, from $\rightarrow \infty$ to 0. It can

TABLE 1: Comparison of the first ten frequency coefficients $\lambda_n = \sqrt[4]{l^4 \omega_n^2 (\rho A / EI)}$ for L-beams: Case a: F-C.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	
$f_1 = 4.30$	11.90	58.59	86.67	185.38	233.76	386.96	456.54	659.79	751.3	*Experimental, in hertz
1.0811	1.7985	3.9907	4.8537	7.0986	7.9541	10.255	11.139	13.392	14.290	**Experimental, adimensional
1.0820	1.7863	3.9680	4.8031	7.0981	7.9131	10.229	11.034	13.368	14.171	Exact analytical solution
1.0854	1.7903	3.9753	4.8077	7.0956	7.9307	10.225	11.059	13.355	14.191	FEM
1.0880	1.7869	3.9685	4.8021	7.0915	—	—	—	—	—	Lin and Ro, 2003 [7]

*Experimental, in hertz: values f_n were measured in the experimental model (Figure 5).

**Experimental, adimensional: values were obtained from f_n measured values: $\lambda_n = l \cdot \sqrt[4]{(2\pi f_n)^2 (\rho A / EI)}$.

TABLE 2: Comparison of the first ten frequency coefficients $\lambda_n = \sqrt[4]{l^4 \omega_n^2 (\rho A / EI)}$ for L-beams: Case b: C-C.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	
$f_1 = 56.76$	82.01	182.5	225.88	382.08	448.0	653.08	737.92	992.43	1105.3	*Experimental, in hertz
3.9270	4.7214	7.0432	7.8357	10.190	11.035	13.323	14.162	16.424	17.333	**Experimental, adimensional
3.9229	4.7227	7.0528	7.8249	10.159	10.838	13.310	14.137	16.345	17.178	Exact analytical solution
3.9319	4.7295	7.0613	7.8187	10.158	11.014	13.337	14.152	16.465	17.282	FEM
3.9222	4.7142	7.0376	7.7588	10.007	—	—	—	—	—	Albarracín and Grossi, 2005 [14]

*Experimental, in hertz: values f_n were measured in the experimental model (Figure 6).

**Experimental, adimensional: values were obtained from f_n measured values: $\lambda_n = l \cdot \sqrt[4]{(2\pi f_n)^2 (\rho A / EI)}$.

TABLE 3: Frequency coefficients $\lambda_n = \sqrt[4]{l^4 \omega_n^2 (\rho A / EI)}$ for simply supported-clamped beam system; comparison of results.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	
3.3920	4.4566	6.5383	7.5702	9.6637	Exact analytical solution (1)
3.3943	4.4266	6.5798	7.5666	9.6584	Exact analytical solution (2)
0.07%	0.68%	0.63%	0.05%	0.05%	$ \Delta = ((1) - (2)) / (2) \%(\text{difference})$
3.3900	4.4266	6.5292	7.5608	9.6301	FEM

TABLE 4: Non dimensional frequency coefficients $\lambda_n = \sqrt[4]{l^4 \omega_n^2 (\rho A / EI)}$ for free-clamped beam system; comparison of results.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	
1.0301	1.9062	3.5186	5.1798	6.1299	Exact analytical solution
1.0385	1.9198	3.5277	5.1787	6.1156	FEM
1.0229	1.9229	3.5337	5.1844	6.1330	(Morales, 2009 [28]) 12-DOF RRMSSM
1.0229	1.9229	3.5337	5.1844	6.1330	(Morales, 2009 [28]) 60-DOF FEM
1.0229	1.9229	3.5337	5.1841	6.1329	(Morales, 2009 [28]) Analytical

TABLE 5: Effect of R_m on the first five non dimensional frequency coefficients of a C-C system, with an elastic joint at $l_2 = 0.5l_1$, beam-beam connection.

R_m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	
$\rightarrow \infty$	3.9229	4.7227	7.0528	7.8248	10.1595	Exact analytical solution
500	3.9229	4.7227	7.0528	7.8248	10.1595	
100	3.9145	4.7121	7.0499	7.8248	10.1327	
50	3.9110	4.7082	7.0498	7.8248	10.1086	
20	3.9818	4.6862	7.0436	7.8248	10.0438	
10	3.8614	4.6557	7.0346	7.8248	9.9439	
3	3.7464	4.5724	7.0075	7.8248	9.6334	
1	3.5695	4.4983	6.9776	7.8248	9.3290	
0.5	3.4604	4.4692	6.9631	7.8248	9.2013	
0	3.2662	4.4332	6.9410	7.8247	9.0429	
0	3.2566	4.4247	6.9489	7.8306	9.0501	FEM

TABLE 6: Effect of R_m on the first five non dimensional frequency coefficients of a C-C beam system, with an elastic joint at $l_2 \rightarrow 0, l_3 = l_1$ (exact analytical solution).

R_m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$\rightarrow \infty$	3.9229	4.7227	7.0528	7.8284	10.1595
500	3.9229	4.7227	7.0528	7.8248	10.1595
100	3.9127	4.6887	7.0340	7.7679	10.1255
50	3.9127	4.6676	7.0340	7.7352	10.1255
20	3.9127	4.6104	7.0339	7.6520	10.1253
10	3.9127	4.5322	7.0336	7.5490	10.1248
3	3.9125	4.3200	7.0327	7.3245	10.1232
1	3.9122	4.1216	7.0304	7.1710	10.1193
0.5	3.9117	4.0365	7.0277	7.1188	10.1157
0	3.9038	3.9296	7.0161	7.0664	10.1059

TABLE 7: Effect of R_m on the first five non dimensional frequency coefficients of a SS-C beam system, with an elastic joint at $l_2 = 0.5l_1$, beam-beam connection (exact analytical solution).

R_m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$\rightarrow \infty$	3.3920	4.4566	6.5383	7.5702	9.6637
500	3.3920	4.4566	6.5383	7.5702	9.6637
100	3.3903	4.4470	6.5374	7.5692	9.6607
50	3.3883	4.4349	6.5354	7.5687	9.6541
20	3.3821	4.4009	6.5297	7.5672	9.6337
10	3.3723	4.3514	6.5216	7.5651	9.5984
3	3.3318	4.1975	6.4976	7.5585	9.4430
1	3.2548	4.0264	6.4721	7.5509	9.2192
0.5	3.1959	3.9477	6.4602	7.5470	9.1105
0	3.0686	3.8450	6.4432	7.5412	8.9626

TABLE 8: Effect of R_m on the first five non dimensional frequency coefficients of a SS-C beam system, with an elastic joint at $l_2 \rightarrow 0, l_3 = l_1$ (exact analytical solution).

R_m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$\rightarrow \infty$	3.3920	4.4566	6.5383	7.5702	9.6637
500	3.3920	4.4566	6.5383	7.5702	9.6637
100	3.3884	4.4394	6.5314	7.5314	9.6550
50	3.3851	4.4237	6.5248	7.5123	9.6455
20	3.3757	4.3812	6.5066	7.4501	9.6202
10	3.3614	4.3234	6.4808	7.3751	9.5866
3	3.3107	4.1713	6.4076	7.2219	9.5068
1	3.2413	4.0410	6.3398	7.1283	9.4485
0.5	3.2026	3.9903	6.3120	7.0983	9.4277
0	3.1408	3.9290	6.2768	7.0654	9.4033

be seen that the first, the third, and the fifth frequency coefficients remain practically constant and the second coefficients decrease by 20% and the fourth decrease by 11%.

Table 7 presents the frequency coefficients of a simply supported-clamped structure with an elastic joint at $l_2 = 0.5l_1$.

In the present conditions, the first, the second, and the fifth frequency coefficients decrease in value and the third and fourth remain practically constant.

Table 8 contains the frequency coefficients of a simply supported-clamped beam system with an elastic connection at $P, l_2 \rightarrow 0, l_3 = l_1$. It can be seen that all the frequency coefficients decrease in value between 8% (λ_1) and 3% (λ_5).

Figures 10 and 11 show graphically the variation of first three natural frequency coefficients for various locations of the elastic hinge: $l_2/l \rightarrow 0$ to $l_2/l \rightarrow 1$, with different combinations of R_z, T_w, T_u and R_m . In both figures, it is clear that for the fundamental frequency coefficient the differences in the values of frequencies are not so significant.

6. Conclusions

The model presented in this paper allows studying the effect of the variation in the rigidity of the elastic supports and the elastic joint on the dynamical behavior of the beam system structure. The model enables an efficient, simple, and

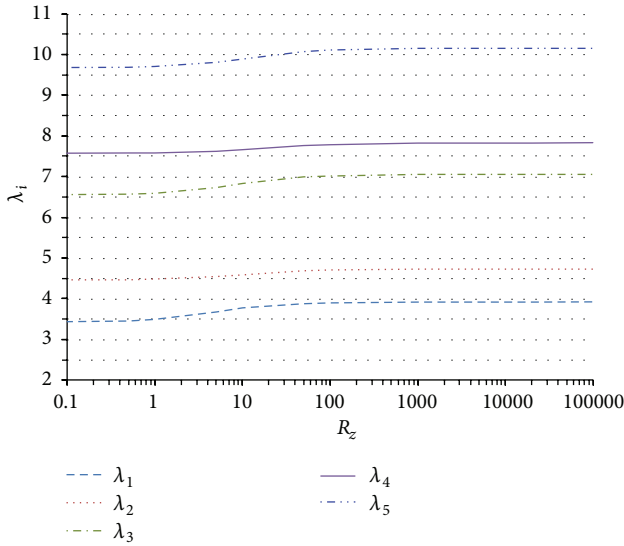


FIGURE 9: Effect of R_z on the first five natural frequency coefficients. $l_2 = l_3$, $v_{l_1} = v_{l_2} = 0.5$, $v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1$, $v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1$, $R_m \rightarrow \infty$, $T_w \rightarrow \infty$, and $T_u \rightarrow \infty$.

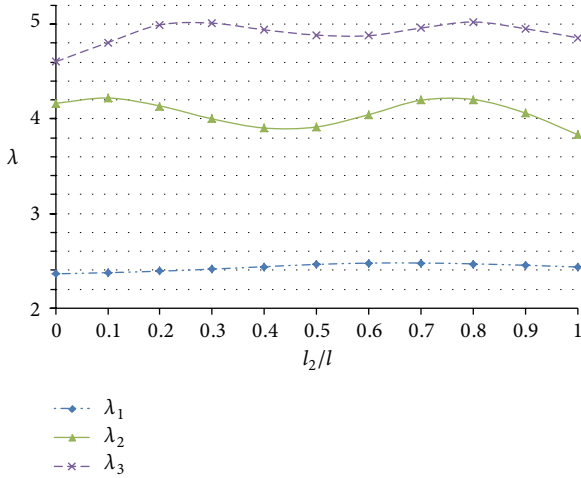


FIGURE 10: Variation of first three natural frequency coefficients with location of the elastic hinge, $l_1 = l_2 + l_3 = l$, $l_2/l \in (0, 1)$, $v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1$, $R_z = 3$, $T_w = 10$, $T_u = 5$, and $R_m = 2$.

straightforward way of computing natural frequency coefficients for L-Shaped-Structures with many different boundary conditions at simply supported, clamped, free, and elastically restrained. It was observed that the loss of rigidity of the translational springs significantly changes the natural frequency coefficients, especially the fundamental frequency coefficient. The presence of an elastic joint, modeling a beam-beam connection, also implies changes in the natural frequencies when the rigidity is lost.

Although the model with elastic connection and supports does not represent the inherent complexities of real systems such as nonlinearity or damping, it provides conceptual insights regarding the fact that the loss of rigidity can cause significant changes in the dynamic behavior of the structure.

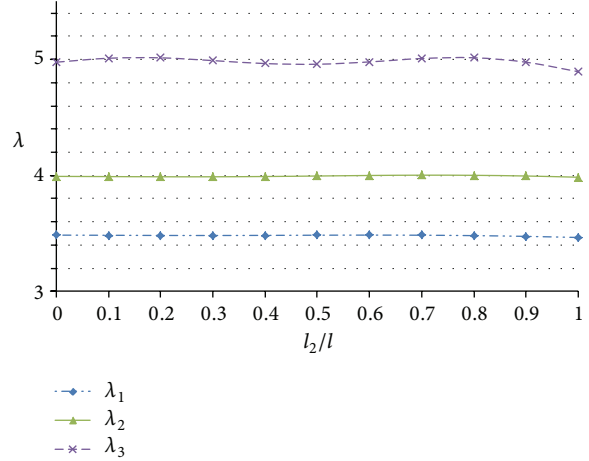


FIGURE 11: Variation of first three natural frequency coefficients with location of the elastic hinge, $l_1 = l_2 + l_3 = l$, $l_2/l \in (0, 1)$, $v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1$, $R_z = 50$, $T_w = 100$, $T_u = 100$, and $R_m = 20$.

In this sense, this model can be seen as a useful first approach to study the real system. The proposed analytical solution may be applied to include more complicating effects, such as elastic constraints at both ends, more than one internal elastic hinge, and another geometry with $\alpha_1 + \alpha_3 \neq \pi/2$. Finally, it has been demonstrated that an elastic approach constitutes a reliable tool to deal with beam system structures.

Acknowledgments

The present work has been sponsored by Secretaría General de Ciencia y Tecnología de Universidad Nacional del Sur at the Department of Engineering and by Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. The authors are indebted to the Chief of Mechanical Vibration Laboratory at the Department of Engineering, Ing. Santiago Maiz for his cooperation and useful suggestions, and to Mr. Gabriel Leguizamón for his careful preparation of the experimental device.

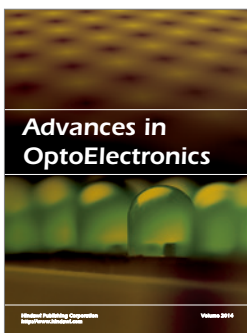
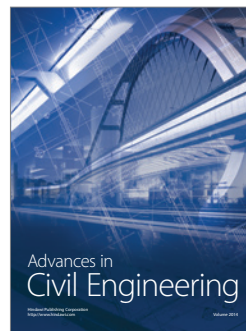
References

- [1] P. A. A. Laura, B. H. Valerga de Greco, and C. P. Filipich, "In-plane vibrations of frames carrying concentrated masses," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 117, no. 3, pp. 447–458, 1987.
- [2] G. B. Warburton, *The Dynamical Behaviour of Structures*, Pergamon Press, Oxford, UK, 2nd edition, 1976.
- [3] R. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Krieger Publishing, Malabar, Fla, USA, 2001.
- [4] R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures*, Computers and Structures, Inc., Berkeley, Calif, USA, 3rd edition, 2004.
- [5] S. Timoshenko and D. H. Young, *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 5th edition, 1990.
- [6] C. Mei, "Wave control of vibrations in multi-story planar frame structures based on classical vibration theories," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 23, pp. 5530–5544, 2011.

- [7] H. P. Lin and J. Ro, "Vibration analysis of planar serial-frame structures," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 262, no. 5, pp. 1113–1131, 2003.
- [8] J.-J. Wu, "Use of the elastic-and-rigid-combined beam element for dynamic analysis of a two-dimensional frame with arbitrarily distributed rigid beam segments," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, no. 3, pp. 1240–1251, 2011.
- [9] C. P. Filipich and P. A. A. Laura, "In-plane vibrations of portal frames with end supports elastically restrained against rotation and translation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 117, no. 3, pp. 467–473, 1987.
- [10] H. Bang, "Analytical solution for dynamic of a flexible L-shaped structure," *Journal of Dynamic*, vol. 19, no. 1, pp. 248–250, 1996.
- [11] M. Gürgöze, "Comment on Analytical solution for dynamic analysis of flexible L-shaped structure," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 21, no. 2, p. 359, 1998.
- [12] D. C. D. Oguamanam, J. S. Hansen, and G. R. Heppler, "Vibration of arbitrarily oriented two-member open frames with tip mass," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 209, no. 4, pp. 651–668, 1998.
- [13] G. R. Heppler, D. C. D. Oguamanam, and J. S. Hansen, "Vibration of a two-member open frame," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 263, no. 2, pp. 299–317, 2003.
- [14] C. M. Albarracín and R. O. Grossi, "Vibrations of elastically restrained frames," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 285, no. 1-2, pp. 467–476, 2005.
- [15] H. P. Lee and T. Y. Ng, "In-plane vibration of planar frame structures," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 172, no. 3, pp. 420–427, 1994.
- [16] R. O. Grossi and M. V. Quintana, "The transition conditions in the dynamics of elastically restrained beams," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 316, no. 1-5, pp. 274–297, 2008.
- [17] C. Y. Wang and C. M. Wang, "Vibrations of a beam with an internal hinge," *International Journal Structural Stability Dynamic*, vol. 1, pp. 163–167, 2001.
- [18] Y. Y. Lee, C. M. Wang, and S. Kitipornchai, "Vibration of Timoshenko beams with internal hinge," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 129, no. 3, pp. 293–301, 2003.
- [19] T.-P. Chang, G.-L. Lin, and E. Chang, "Vibration analysis of a beam with an internal hinge subjected to a random moving oscillator," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, no. 21, pp. 6398–6412, 2006.
- [20] M. V. Quintana, J. L. Raffo, and R. O. Grossi, "Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beam with an internal hinge," *Mecánica Computacional*, vol. 29, pp. 2499–2516, 2010.
- [21] R. A. Ratazzi, R. O. Grossi, and D. V. Bambill, "Vibraciones de una estructura aporticada con una rótula intermedia elásticamente restringida contra rotación y traslación," *Mecánica Computacional*, vol. 30, pp. 2499–2516, 2011.
- [22] R. A. Ratazzi, D. V. Bambill, and C. A. Rossit, "Vibraciones en porticos con conexiones intermedias elasticas," *Mecánica Computacional*, vol. 31, pp. 2511–2627, 2012.
- [23] H. Gorgun, "Geometrically nonlinear analysis of plane frames composed of flexibly connected members," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 45, no. 3, pp. 273–305, 2013.
- [24] C. L. O. Santana and N. T. Mascia, "Wooden framed structures with semi-rigid connections: quantitative approach focused on design needs," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 31, no. 3, pp. 315–331, 2009.
- [25] A. Reyes-Salazar, M. E. Soto-López, E. Bojórquez-Morab, and A. López-Barrabaz, "Effect of modeling assumptions on the seismic behavior of steel buildings with perimeter moment frames," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 41, no. 2, pp. 183–204, 2012.
- [26] Wolfram MATHEMATICA 9 software, Version 9, Copyright 1988–2012.
- [27] ALGOR software, Version 23, 01, 2009.
- [28] C. A. Morales, "Dynamic analysis of an L-shaped structure by Rayleigh-Ritz substructure synthesis method," *Meccanica*, vol. 44, no. 3, pp. 339–343, 2009.



Hindawi
Submit your manuscripts at
<http://www.hindawi.com>



Vibrations of L-Shaped Beam Structures With a Crack: Analytical Approach and Experimental Validation

C.A. Rossit^{1,2}, D.V. Bambill^{1,2}, A.R. Ratazzi¹, and S. Maiz¹

¹ Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Universidad Nacional del Sur (UNS), Bahía Blanca, Argentina

² Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Bahía Blanca, Argentina

Keywords

L-Shaped Beam, L-Beam, Crack, Vibrations, Elastic Hinge, Damage

Correspondence

C.A. Rossit
Departamento de Ingeniería, Instituto de
Mecánica Aplicada (IMA)
Universidad Nacional del Sur (UNS)
8000 Bahía Blanca
Buenos Aires
Argentina
Email: carossit@criba.edu.ar

Received: March 17, 2014;
accepted: December 22, 2014

doi:10.1111/ext.12157

Abstract

A crack on a structural member introduces a local flexibility which is function of the crack depth. This new flexibility condition changes the dynamic behavior of the structure. The knowledge of the influence of the crack on the characteristic dynamic parameters makes it possible to determine both the crack position and its magnitude. A large number of research papers have been written on the subject, most of them on straight beams of a single segment. However, despite the importance of L-shaped beams in a variety of technological applications, very limited information is available for the case of such structures. In this article, a cracked L-beam structure is studied by an analytical approach which is validated by experimental measurements. The Euler–Bernoulli beam theory is assumed to describe the transversal displacements and the crack is modeled by means of an elastically restrained hinge. A special device was designed to measure experimentally the natural frequencies of steel L-beams structures. The natural frequencies of in plane vibrations of L-beam structures are obtained considering a crack at different positions as well as of different depths. Values obtained with the analytical solution are satisfactorily compared with experimentally measured frequencies and the values reported in previous studies on the subject published by other authors.

Introduction

The problem of the influence of a crack in a welded joint on the dynamic behavior of a structural member has been studied in a thorough paper by Chondros and Dimarogonas.¹

The static and dynamic analysis of beams with single or multiple concentrated damages, produced by cracks, has received an increasing interest in recent years.

A very complete description of the state of the art in the field with the mention and description of the most important work was done by Caddemi and Morassi,² whose reading is recommended.

There it is explained that generally, it is assumed that the amplitude of the deformation is enough to maintain the crack always open, this model offers the great advantage to be linear and, therefore, it leads

to efficient formulations for solving both static and dynamic problems.

From earliest studies, it is clear that localized damage produces a local reduction in the stiffness of the beam.³ Many models have been proposed in the literature to describe open cracks on beams, the flexibility modeling of cracks is quite common.⁴ In the case of beams under plane flexural deformation, a crack is modeled by inserting a massless rotational elastic spring at the damaged cross section.^{5,6}

Many researchers have studied the topic of equivalent flexibility of the spring which models the crack.^{7–15} Among them, it can be mentioned that the expression of Chondros et al.¹⁵ is the most widely used.

Most of the papers deal with straight beams of a single stretch. Far less are related with frames.^{16–18}

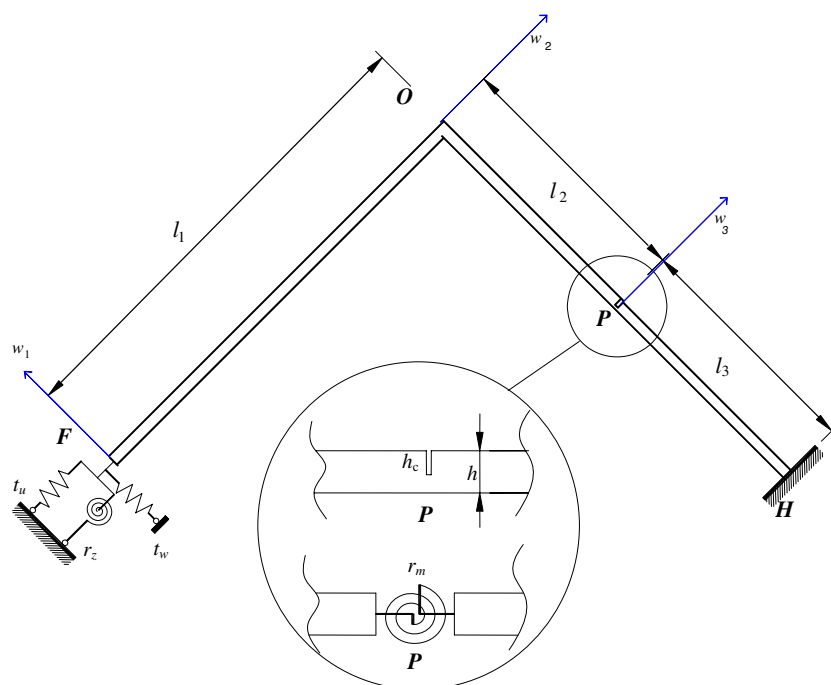


Figure 1 L-frame structure.

The use of the L-shaped structures is widespread in many fields of engineering, including modern applications in robotics.¹⁹

In present work, an L-shaped beam with a crack in one of the sections is studied. In order to perform this study, it is important to have an analytical procedure which allows determining the dynamic parameters of cracked L-beams structures. And it is known that an essential condition to ensure the reliability of an analytical procedure is the experimental verification of its accuracy, especially in a case like this in which the values available in the literature are scarce.

The objective of this study is twofold: The proposition of a classical elastic model where the crack is modeled by a rotational spring calculated following Chondros’ theory and shows the excellent concordance that the proposed model exhibits with experimental measurements performed on a device specially designed.

In addition, information is provided about the variation of the natural frequencies of an L-beam produced by a crack at different positions and of different depths and the usefulness of the combination of the posed analytical approach and experimental measures in crack detection is demonstrated.

Structural Model and Analytical Solution

The study deals with the vibration of L-shaped beams assuming an internal crack in different positions in one of the beams of the system.

The two parts of the L-shaped structure are joined at right angle, with the end of one of them clamped and the end of the other elastically restrained. Figure 1 depicts the structure under study.

The position of the crack is defined by the coordinate l_2 and locally affects the flexural stiffness of the L-beam. It is modeled as a massless, rotational elastic spring at the damaged cross section connecting the two adjacent segments of the beam.

The magnitude adopted for the flexibility constant of the equivalent spring (β_C), is obtained by means of the expression proposed by Chondros et al.¹⁵ which was found with fracture mechanics methods:

$$\beta_C = \frac{6\pi (1 - \nu^2) h}{EI} \phi_C(z) \tag{1}$$

with

$$\begin{aligned} \phi_C(z) = & 0.6272 z^2 - 1.04533 z^3 + 4.5948 z^4 - 9.973 z^5 \\ & + 20.2948 z^6 - 33.0351 z^7 + 47.1063 z^8 \\ & - 40.7556 z^9 + 19.6 z^{10} \end{aligned}$$

and $z = h_c/h$, while h is the height of the cross section and h_c is the depth of the crack.

Three beam members are defined in the structure: the beam FO of length l_1 , the beam OP of length l_2 and the beam PH of length l_3 ; each of them having uniform properties. The beams are modeled using the Euler–Bernoulli beam theory.

The external end H is a classical clamped support and the external end F is supported by two

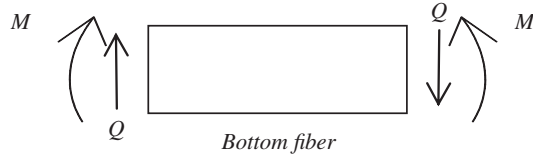


Figure 2 Sign convention for positive shear force (Q) and bending moment (M).

translational springs of stiffness t_w and t_u and a rotational spring of stiffness r_z . At section P , there is the crack. To model the crack, it is supposed an internal hinge elastically restrained against rotation between beams 2, OP , and 3, PH , this semirigid connection is materialized by a rotational spring of stiffness:

$$r_m = 1/\beta_c. \quad (2)$$

The flexural rigidity, the mass density, the length, and the area of the cross section of each beam are $E_i I_i$, ρ_i , l_i , and A_i , with $i = 1, 2, 3$.

Three coordinate systems are located as they are shown in Fig. 1, and its origins are taken to be at points F , O , and P in each beam. At abscissa x_i ($0 \leq x_i \leq l_i$), w_i is the transverse displacement of the beam i , and $\theta_i = \partial w_i / \partial x_i$ is the section rotation at any time t . The deformation of a beam in x direction is not taken into account, because the beams are considered infinitely rigid in the axial direction.

The sign convention used for the positive shear force spins an element clockwise (up on the left and down on the right). Likewise the normal convention for a positive bending moment elongates the bottom fiber of the beam. Figure 2 shows the sign convention to be employed.

For free vibration, the bending moment and the shear force expressions are:

$$M_i(x_i, t) = E_i I_i \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2}; \quad Q_i(x_i, t) = E_i I_i \frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^3} \quad (3)$$

To express equations in dimensionless form, the nondimensional parameter is introduced:

$$X_i = x_i/l_i; \quad \text{with } X_i \in [0, 1] \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

The displacements w_i , and θ_i may be expressed in terms of the dimensionless coordinates as follows:

$$W_i(X_i, t) = \frac{w_i(x_i, t)}{l_i}; \quad \theta_i(X_i, t) = \frac{\partial W_i(X_i, t)}{\partial X_i} = \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \quad (5)$$

The characteristics of beam 1 are used as “reference”:

$$EI = E_1 I_1, \rho A = \rho_1 A_1, l = l_1 \quad (6)$$

to define the ratios:

$$v_{EI_i} = \frac{E_i I_i}{EI}, v_{\rho A_i} = \frac{\rho_i A_i}{\rho A}, v_{l_i} = \frac{l_i}{l} \quad (7)$$

the dimensionless spring stiffness:

$$T_w = t_w \frac{l^3}{EI}, T_u = t_u \frac{l^3}{EI}, R_z = r_z \frac{l}{EI}, R_m = r_m \frac{l}{EI} \quad (8)$$

Under the described conditions and applying the technique of variational calculus,²⁰ the governing differential equations of the problem and the boundary and continuity conditions are:

$$\frac{\partial^4 W_1}{\partial X_1^4}(X_1, t) + k_1^4 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}(X_1, t) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^4 W_2}{\partial X_2^4}(X_2, t) + k_2^4 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}(X_2, t) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^4 W_3}{\partial X_3^4}(X_3, t) + k_3^4 \frac{\partial^2 W_3}{\partial t^2}(X_3, t) = 0 \quad (11)$$

with $k_i^4 = \frac{\rho_i A_i}{E_i I_i} l_i^4$, $i = 1, 2, 3$.

$$\frac{v_{EI_1}}{(v_{l_1})^2} \frac{\partial^3 W_1}{\partial X_1^3}(0, t) + T_w v_{l_1} W_1(0, t) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{v_{EI_1}}{v_{l_1}} \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(0, t) - R_z \left(\frac{\partial W_1}{\partial X_1}(0, t) \right) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{v_{EI_2}}{(v_{l_2})^2} \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(0, t) + T_u v_{l_2} W_2(0, t) - k_1^4 v_{l_1} v_{l_2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}(0, t) = 0 \quad (14)$$

$$v_{l_1} W_1(1, t) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial X_1}(1, t) = \frac{\partial W_2}{\partial X_2}(0, t) \quad (16)$$

$$\frac{v_{EI_1}}{v_{l_1}} \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2}(1, t) = \frac{v_{EI_2}}{v_{l_2}} \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2}(0, t) \quad (17)$$

$$v_{l_2} W_2(1, t) = v_{l_3} W_3(0, t) \quad (18)$$

$$\frac{v_{EI_2}}{v_{l_2}^2} \frac{\partial^3 W_2}{\partial X_2^3}(1, t) - \frac{v_{EI_3}}{v_{l_3}^2} \frac{\partial^3 W_3}{\partial X_3^3}(0, t) = 0 \quad (19)$$

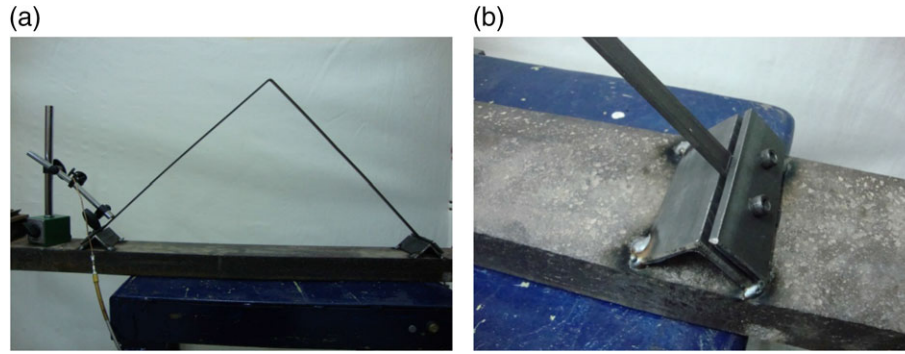


Figure 3 (a) and (b) Experimental device: clamped-lamped L-beam.

$$\frac{v_{EI_2}}{v_{l_2}} \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2} (1, t) - R_m \left(\frac{\partial W_3 (0, t)}{\partial X_3} - \frac{\partial W_2 (1, t)}{\partial X_2} \right) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{v_{EI_3}}{v_{l_3}} \frac{\partial^2 W_3}{\partial X_3^2} (0, t) - R_m \left(\frac{\partial W_3 (0, t)}{\partial X_3} - \frac{\partial W_2 (1, t)}{\partial X_2} \right) = 0 \quad (21)$$

$$v_{l_3} W_3 (1, t) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial X_3} (1, t) = 0 \quad (23)$$

The last term in Eq. 14 is due to the rigid body axial translation of beam 1 of length l_1 , which is a consequence of assuming infinity axial rigidity.

Using the well-known separation of variables method to solve Eqs. 9 to 11, free vibrations of the system can be expressed in the form:

$$W_1 (X_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{1n} (X_1) e^{i\omega t} \quad (24)$$

$$W_2 (X_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{2n} (X_2) e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$W_3 (X_3, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{3n} (X_3) e^{i\omega t} \quad (26)$$

The functions W_{1n} , W_{2n} , and W_{3n} represent the corresponding transverse modes of natural vibration of each beam member and are given by:

$$W_{1n} (X_1) = C_1 \cosh (\lambda_n \alpha_1 X_1) + C_2 \operatorname{sen} h (\lambda_n \alpha_1 X_1) + C_3 \cos (\lambda_n \alpha_1 X_1) + C_4 \operatorname{sen} (\lambda_n \alpha_1 X_1) \quad (27)$$

$$W_{2n} (X_2) = C_5 \cosh (\lambda_n \alpha_2 X_2) + C_6 \operatorname{sen} h (\lambda_n \alpha_2 X_2) + C_7 \cos (\lambda_n \alpha_2 X_2) + C_8 \operatorname{sen} (\lambda_n \alpha_2 X_2) \quad (28)$$

$$W_{3n} (X_3) = C_9 \cosh (\lambda_n \alpha_3 X_3) + C_{10} \operatorname{sen} h (\lambda_n \alpha_3 X_3) + C_{11} \cos (\lambda_n \alpha_3 X_3) + C_{12} \operatorname{sen} (\lambda_n \alpha_3 X_3) \quad (29)$$

where $\alpha_i = v_{l_i} \sqrt{v_{\rho A_i} / v_{EI_i}}$ is a mechanical and geometrical parameter, with $i = 1, 2, 3$; $\lambda_n = \sqrt{l^4 \omega_n^2 \rho A / EI}$ is the dimensionless frequency coefficient of mode of vibration n and C_1, C_2, \dots, C_{12} are arbitrary constants to be determined.

Replacing Eqs. 27, 28, and 29 in Eqs. 24, 25, and 26; and these ones in Eqs. 12 to 23, a linear system of equations in the unknown constants C_1, C_2, \dots, C_{12} is obtained.

For a nontrivial solution to exist, the determinant of the coefficient matrix in the linear system of equations should be equal to zero and the roots of the transcendental frequency equation are the dimensionless frequency coefficients λ_n of the mechanical system in Fig. 1.

The results were determined by using the Mathematica software²¹ with six significant figures.

Experimental Device

Two particular cases were modeled, a free-clamped (F-C) and a clamped-clamped (C-C) L-beam.

A bar of steel 5/8 " × 1/8" ($b = 15.875$ mm, $h = 3.175$ mm) was employed.

Both members the same length ($l_1 = l_2 + l_3$), cross-sectional area, and material properties:

$$v_{\rho A_i} = 1; \quad v_{EI_i} = 1; \quad \forall \quad i = 1, 2, 3; \\ v_{l_1} = 2v_{l_2} = 2v_{l_3} = 1$$

The length of each member was 420 mm for the F-C case and 446 mm for the C-C.

Figure 3(a) and (b) shows the clamped-clamped model tested.

The crack was modeled with a thickness of 1 mm. All precautions were taken so that the cut is made smoothly and its depth be uniform: A piece of hard steel was employed, with a gap where the beam is embedded up to the desired depth (Fig. 4(a) and (b)).

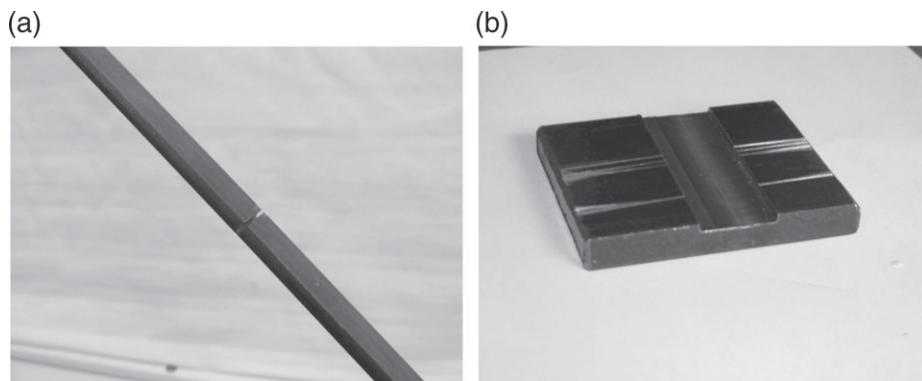


Figure 4 (a) and (b) Crack produced in the strip.

The beam was excited with an impact hammer near the clamped end, where there are no nodes of the modal shapes of the first five frequencies.

In order not to disturb the behavior of the structure, measurements were taken with a proximator. A Provibtech device, TMO 180, was employed. The displacement signal was read and processed with a two channel vibration analyzer Vibxpert II, with 24 bits of resolution and 1000 Hz of sample frequency.

To evaluate the measured values, it is needed to know the Young modulus E and the density ρ of the employed material.

Because these two parameters, in dynamical applications, are always involved by means of the ratio $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, the following procedure was followed:

A value widely verified in solid mechanics was taken as reference: the fundamental frequency of a cantilever beam. It is known that the corresponding eigenvalue is 1.8751.²²

A cantilever beam of length 417 mm was built with the same strap of the L-beam.

The measured frequency: 14.85 Hz, then:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, 14.85\text{Hz} = \frac{1}{2\pi} \frac{(1.8751)^2}{(0.417\text{m})^2} \sqrt{\frac{E h^2}{\rho 12}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5034.7 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

This value, which is the speed of a longitudinal wave in steel, is employed in the numerical determinations.

Numerical Results

In order to verify the accuracy of the procedure, two particular cases of the proposed analytical approach are modeled:

Free-clamped L-beam, without internal hinge:
 $T_u = T_w = R_z = 0; R_m \rightarrow \infty;$

Clamped-clamped L-beam, without internal hinge:
 $T_u = T_w = R_z = R_m \rightarrow \infty.$

Table 1 presents the first five natural frequencies of vibration. The values obtained by means of the analytical approach are in very good agreement with results available in the literature.

Experimental determinations are also performed and data show a striking agreement with aforementioned values.

Tables 2–6 compare the results between experimental measurements in a device with a crack artificially produced and the proposed analytical procedure with a crack modeled following Chondros' criterion. A free-clamped L-beam with $l_1 = l_2 + l_3$ is considered, different locations (l_2/l_1) and depths (h_c/h) of the crack are taken into account. Applying Eqs. 1, 2, and 8, one obtains R_m for each particular situation.

As it can be seen, the experimental values are again in excellent agreement, from an engineering viewpoint, with those obtained by means of the analytical procedure. There are just five situations where differences are upon 5%, but in no case exceed than 10%.

Figure 5 shows the effect of the depth of a crack at different locations on the natural frequencies.

The magnitudes of frequencies in the damaged structure f are related to the frequency of the structure without crack which is named f_0 .

In general, the frequencies decrease as the depth of the crack increases

As it can be observed, the second frequency is not affected by the crack when occurs in the middle of the second member. It can be deduced that the corresponding modal shape of the undamaged structure has no curvature at that point.

Figure 6 shows the effect that the position of a crack ($h_c/h=0.75$) causes in the first three natural frequencies of the free-clamped L-beam structure. Again, it is observed that the second frequency does

Table 1 First five natural frequencies for F-C and C-C L-beams

Free-clamped L-shaped beam						
<i>i</i>	1	2	3	4	5	
λ_i	1.0880	1.7869	3.9685	4.8021	7.0915	Lin and Ro ²³ (eigenvalue)
λ_j	1.0821	1.7863	3.9684	4.8037	7.0982	Analytical (eigenvalue)
(<i>f_i</i>)	4.85	13.22	65.25	95.62	208.79	Analytical (Hz)
(<i>f_j</i>)	4.77	13.04	65.14	95.16	207.74	Experimental (Hz)
Clamped-clamped L-shaped beam						
<i>i</i>	1	2	3	4	5	
λ_i	3.9222	4.7145	7.0376	7.7588	10.007	Albarracín et al. ²⁴ (eigenvalue)
λ_j	3.9331	4.7235	7.0540	7.8255	10.149	Analytical (eigenvalue)
(<i>f_i</i>)	56.62	82.08	183.07	225.29	378.99	Analytical (Hz)
(<i>f_j</i>)	56.76	83.01	182.50	228.88	382.08	Experimental (Hz)

Table 2 First five natural frequencies for F-C L-beams with a crack in the sixth of the second member

<i>l₂/l₁</i>	<i>h_c/h</i>	<i>R_m</i>		1	2	3	4	5	
1/6	0.25	220	λ_i	1.0812	1.7862	3.9680	4.8015	7.0935	Analytical (eigenvalue)
			(<i>f_i</i>)	4.84	13.22	65.24	95.53	208.15	Analytical (Hz)
			(<i>f_j</i>)	4.77	13.04	65.14	95.10	207.58	Experimental (Hz)
	0.50	41	λ_i	1.0800	1.7769	3.9619	4.8020	7.0660	Analytical (eigenvalue)
			(<i>f_i</i>)	4.83	13.08	65.04	95.55	206.90	Analytical (Hz)
			(<i>f_j</i>)	4.66	12.93	65.02	95.09	207.42	Experimental (Hz)
	0.75	7.9	λ_i	1.0698	1.7416	3.9356	4.7905	6.9521	Analytical (eigenvalue)
			(<i>f_i</i>)	4.74	12.57	64.18	95.10	200.28	Analytical (Hz)
			(<i>f_j</i>)	4.34	12.60	64.58	95.10	207.48	Experimental (Hz)

Table 3 First five natural frequencies for F-C L-beams with a crack in the third of the second member

<i>l₂/l₁</i>	<i>h_c/h</i>	<i>R_m</i>		1	2	3	4	5	
1/3	0.25	220	λ_i	1.0810	1.7857	3.9661	4.8035	7.0947	Analytical (eigenvalue)
			(<i>f_i</i>)	4.84	13.21	65.18	95.61	208.58	Analytical (Hz)
			(<i>f_j</i>)	4.77	13.04	65.14	95.05	207.14	Experimental (Hz)
	0.50	41	λ_i	1.078	1.7831	3.9529	4.7961	7.0783	Analytical (eigenvalue)
			(<i>f_i</i>)	4.82	13.17	64.75	95.32	207.62	Analytical (Hz)
			(<i>f_j</i>)	4.66	12.98	64.92	94.45	204.22	Experimental (Hz)
	0.75	7.9	λ_i	1.0633	1.7709	3.8920	4.7657	6.999	Analytical (eigenvalue)
			(<i>f_i</i>)	4.68	13.00	62.77	94.12	203.04	Analytical (Hz)
			(<i>f_j</i>)	4.38	12.93	64.15	93.47	196.32	Experimental (Hz)

Table 4 First five natural frequencies for F-C L-beams with a crack in the middle of the second member

<i>l₂/l₁</i>	<i>h_c/h</i>	<i>R_m</i>		1	2	3	4	5	
1/2	0.25	220	λ_i	1.0814	1.7862	3.9666	4.8003	7.0977	Analytical (eigenvalue)
			(<i>f_i</i>)	4.85	13.22	65.20	95.49	208.76	Analytical (Hz)
			(<i>f_j</i>)	4.71	13.01	64.98	94.83	207.63	Experimental (Hz)
	0.50	41	λ_i	1.0770	1.7861	3.9558	4.7801	7.0942	Analytical (eigenvalue)
			(<i>f_i</i>)	4.81	13.22	64.84	94.68	208.56	Analytical (Hz)
			(<i>f_j</i>)	4.66	12.99	64.50	93.89	207.46	Experimental (Hz)
	0.75	7.9	λ_i	1.0550	1.7856	3.9026	4.700	7.080	Analytical (eigenvalue)
			(<i>f_i</i>)	4.61	13.21	63.11	91.50	207.72	Analytical (Hz)
			(<i>f_j</i>)	4.33	12.99	60.98	89.97	206.79	Experimental (Hz)

Table 5 First five natural frequencies for F-C L-beams with a crack in the second third of the second member

l_2/l_1	h_c/h	R_m		1	2	3	4	5	
2/3	0.25	220	λ_i	1.0810	1.7860	3.9684	4.8033	7.0924	Analytical (eigenvalue)
			(f_i)	4.84	13.22	65.25	95.61	208.45	Analytical (Hz)
			(f_i)	4.77	13.04	65.03	95.10	207.41	Experimental (Hz)
	0.50	41	λ_i	1.0750	1.7850	3.9671	4.7950	7.0661	Analytical (eigenvalue)
			(f_i)	4.79	13.20	65.22	95.28	206.91	Analytical (Hz)
			(f_i)	4.77	12.98	64.48	94.94	205.80	Experimental (Hz)
	0.75	7.9	λ_i	1.0450	1.7803	3.9593	4.7578	6.9434	Analytical (eigenvalue)
			(f_i)	4.53	13.13	64.96	93.81	199.78	Analytical (Hz)
			(f_i)	4.49	12.43	59.70	94.16	192.59	Experimental (Hz)

Table 6 First five natural frequencies for F-C L-beams with a crack in the fifth sixth of the second member

l_2/l_1	h_c/h	R_m		1	2	3	4	5	
5/6	0.25	220	λ_i	1.0800	1.7849	3.9684	4.8047	7.0982	Analytical (eigenvalue)
			(f_i)	4.84	13.20	65.26	95.66	208.79	Analytical (Hz)
			(f_i)	4.77	13.04	65.14	95.16	207.36	Experimental (Hz)
	0.50	41	λ_i	1.0720	1.7791	3.9652	4.8021	7.0975	Analytical (eigenvalue)
			(f_i)	4.76	13.12	65.15	95.56	208.75	Analytical (Hz)
			(f_i)	4.77	12.88	64.97	95.05	205.79	Experimental (Hz)
	0.75	7.9	λ_i	1.0330	1.7557	3.9523	4.7919	7.0939	Analytical (eigenvalue)
			(f_i)	4.43	13.77	64.73	95.15	208.54	Analytical (Hz)
			(f_i)	4.66	12.16	63.15	94.11	196.37	Experimental (Hz)

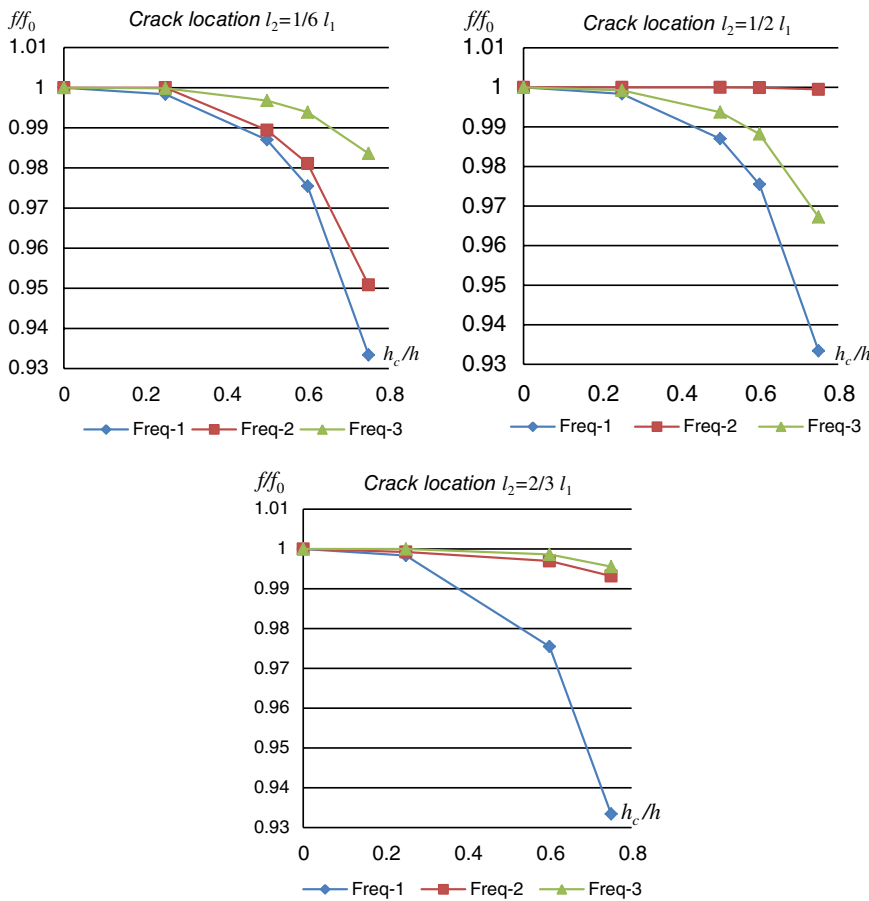


Figure 5 Relative decrease of the first three natural frequencies with the depth of a crack located at different positions of the second member of a free-clamped L-beam.

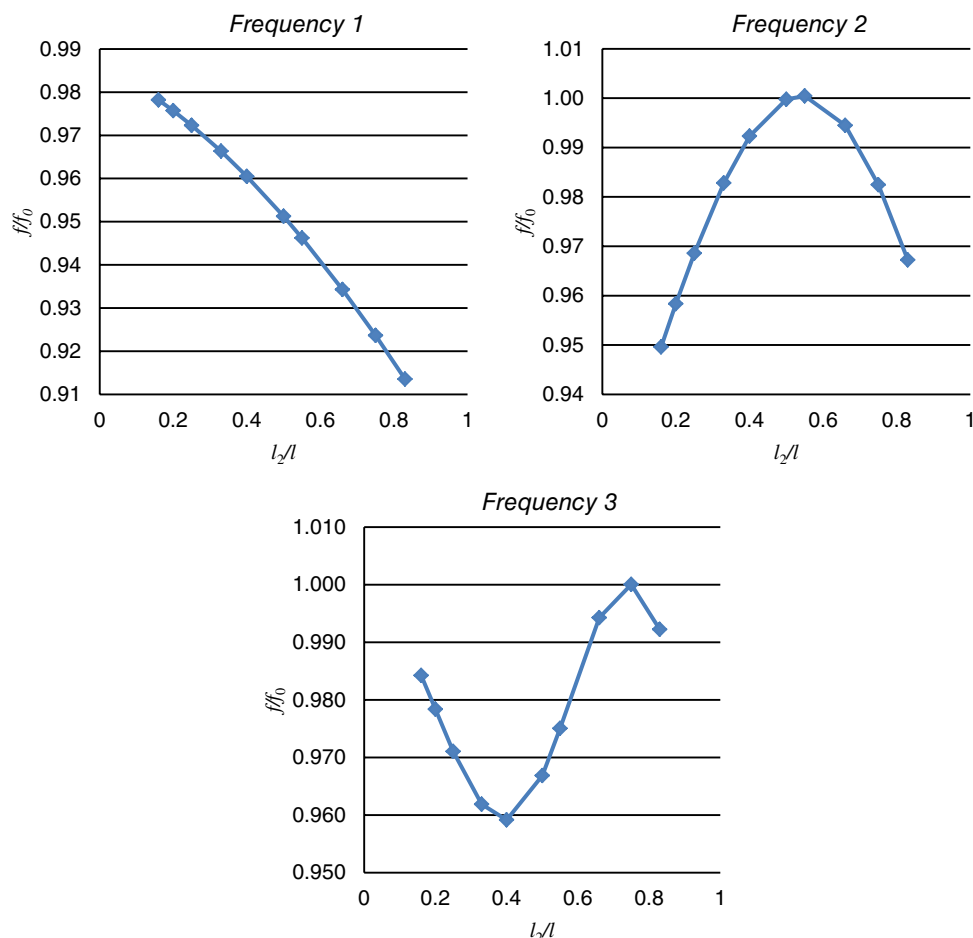


Figure 6 Influence of the location in the second member of a crack ($h_c/h = 0.75$) on the relative decrease of the first three natural frequencies in a free-clamped L-beam.

not vary when the crack is in the middle of the segment.

Then, we use the available information in order to demonstrate the usefulness of the proposed analytical model in crack detection.

The inverse method, widely used in the scientific literature (Rosales et al.²⁵, Labib et al.²⁶), is employed to predict position (l_2) and depth (h_c/h) of a crack from measured values of frequency in the damaged structure.

As is known (Owolabi et al.²⁷), measuring the first three natural frequencies (f_n , with $n = 1, 2, 3$) will be enough to determine the crack location and depth for a beam-like structure with a single crack. Each of the first three dimensionless values:

$\lambda_n = \sqrt[4]{I^4 (2\pi f_n)^2 \rho A / EI}$ of every measured frequency is introduced into the frequency transcendental equation formed with the system of Eqs. 13 to 22. Plotting in a curve, the results of the frequency

transcendental equation for a particular mode n is obtained a contour line (R_m versus l_2). Each point of the curve represents a combination of different crack locations l_2 and crack depths (identified by R_m), that according to the analytical model, correspond to the measured frequency.

Three contour curves are obtained for the first, second, and third modes. Overlaying those three graphs, it is possible to obtain an intersection point. The cross point has particular coordinates: l_2 and R_m . The position of the crack is represented by l_2 and R_m represents the crack depth according to Eqs. 1, 2, and 8.

The situation, identified with: $l_2/l_1 = 1/2$, $h_c/h = 0.25$, $f_1 = 4.71$ Hz, $f_2 = 13.01$ Hz, $f_3 = 64.98$ Hz (Table 4), is used to illustrate the procedure.

Figure 7 shows three curves which are contour lines, according to the analytical model, of each measured frequency, ($n = 1, 2$, and 3). They do not intersect exactly at a point, but they describe a small

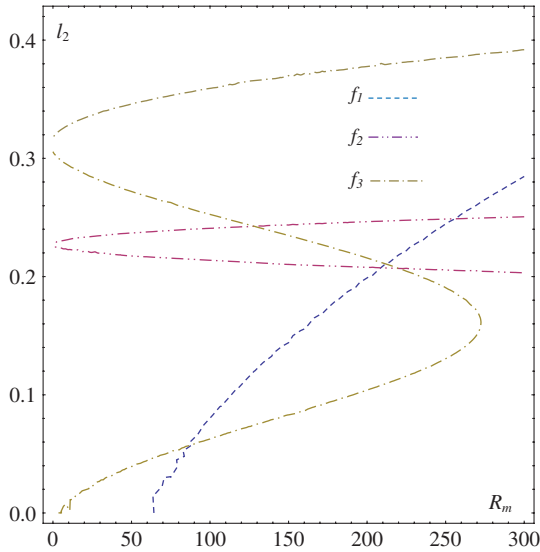


Figure 7 Set of values R_m , l_2 corresponding to every measured frequency in a damaged free-clamped L-beam.

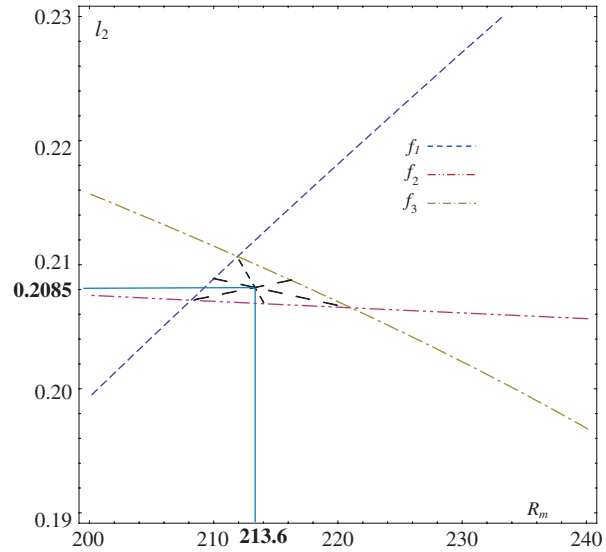


Figure 8 Enlarged view of the area of intersection of curves.

triangular zone, that allows to estimate the position of the crack l_2 and the crack depth R_m .

There are different procedures for estimating the crack position and its depth (l_2 , R_m). In the present analysis, the triangle enclosed by the points of intersection of each pair of curves (Fig. 8) is analyzed and its centroid is determined, it is the sought point: $l_2 = 208.5$ mm ($l_2/l_1 = 0.496$), $R_m = 213.6$ ($h_c/h = 0.254$).

Those estimated values are in excellent agreement with the real position of the crack and its depth, an error of 0.36% of the length of the whole beam OH in the position and 0.4% of the section height in the crack depth.

The analytical approach was also verified, for some cases of the cracked clamped-clamped L-beam structure, comparing with experimental measurements.

Tables 7–9 show the obtained values by both paths. As it can be seen, the experimental values are again in surprising agreement with those obtained by means of the analytical procedure. There is no case where the difference exceeds than 5%, and generally it is less than 2%

Conclusions

The convergence between the experimental and analytical values showed that a classical elastic model of the L-beam behavior in combination with the

Table 7 First five natural frequencies for C-C L-beams with a crack in the third of the second member

l_2/l_1	h_c/h	R_m		1	2	3	4	5	
1/3	0.50	44	λ_i	3.9195	4.7144	7.0155	7.7862	10.1331	Analytical (eigenvalue)
			(f_i)	56.45	81.67	180.86	217.40	377.32	Analytical (Hz)
			(f_i)	56.45	83.01	181.88	225.22	382.26	Experimental (Hz)
	0.75	8.4	λ_i	3.9117	4.6886	6.9269	7.7234	10.093	Analytical (eigenvalue)
			(f_i)	56.22	80.78	174.25	217.64	374.35	Analytical (Hz)
			(f_i)	56.15	80.57	167.24	217.9	377.81	Experimental (Hz)

Table 8 First five natural frequencies for C-C L-beams with a crack ($h_c/h = 0.75$) in the middle of the second member

l_2/l_1	h_c/h	R_m		1	2	3	4	5	
1/2	0.75	8.4	λ_i	3.8482	4.6617	7.03645	7.8254	9.9059	Analytical (eigenvalue)
			(f_i)	54.41	79.18	181.44	224.73	360.59	Analytical (Hz)
			(f_i)	52.49	78.13	183.72	227.05	348.51	Experimental (Hz)

Table 9 First five natural frequencies for C-C L-beams with a crack ($h_c/h = 0.75$) in the second third of the second member

l_2/l_1	h_c/h	R_m		1	2	3	4	5	
2/3	0.75	8.4	λ_i	3.8420	4.7007	6.9814	7.7194	10.136	Analytical (eigenvalue)
			(f_i)	54.02	80.86	177.82	217.27	376.77	Analytical (Hz)
			(f_i)	52.49	81.18	173.95	217.29	380.86	Experimental (Hz)

Chondros' representation of a crack constitutes a simple and reliable tool that allows to attack in a straightforward way the problem of an L-shaped structure with a crack. Its usefulness in crack detection is demonstrated.

The approach can be easily adapted to study all possible outer boundary conditions of the L-beam structure taking into account elastic constraints at both ends. Further cracks may be incorporated by including additional internal elastic hinges.

It is interesting to note the importance of carrying out experimental procedures as they are a sure way to verify analytical approaches.

Acknowledgments

The present work has been sponsored by Secretaría General de Ciencia y Tecnología of Universidad Nacional del Sur at the Department of Engineering, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) and by Comisión de Investigaciones Científicas (CIC, Buenos Aires Province). The authors are grateful to Mr. Gabriel Leguizamón for his careful preparation of the experimental device. The authors are indebted to the reviewers for their thoughtful suggestions that helped to improve this work.

REFERENCES

- Chondros, T.G., and Dimarogonas, A.D., "Identification of Crack in Welded Joints of Complex Structure," *Journal of Sound and Vibration* **69**: 531–538 (1980).
- Caddemi, S., and Morassi, A., "Multi-Cracked Euler–Bernoulli Beams: Mathematical Modeling and Exact Solutions," *International Journal of Solids and Structures* **50**: 944–956 (2013).
- Thomson, W.J., "Vibration of Slender Bars with Discontinuities in Stiffness," *Journal of Applied Mechanics* **17**: 203–207 (1943).
- Adams, R.D., Cawley, P., Pye, C.J., and Stone, B.J., "A Vibration Technique for Non-Destructively Assessing the Integrity of Structures," *Journal of Mechanical Engineering Science* **20**(2): 93–100 (1978).
- Gudmundson, P., "The Dynamic Behavior of Slender Structures with Cross Section Crack," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **31**: 329–345 (1983).
- Sinha, J.K., Friswell, M.I., and Edwards, S., "Simplified Models for the Location of Crack in Beam Structures Using Measure Vibration Data," *Journal of Sound and Vibration* **251**(1): 13–38 (2002).
- Liebowitz, H., Vanderveldt, H., and Harris, D.W., "Carrying Capacity of Notched Column," *International Journal of Solids and Structures* **3**: 489–500 (1967).
- Liebowitz, H., and Claus, W.D.S., Jr., "Failure of Notched Columns," *Engineering Fracture Mechanics* **1**: 379–383 (1968).
- Okamura, H., Liu, H.W., Chu, C.H., and Liebowitz, H., "A Cracked Column under Compression," *Engineering Fracture Mechanics* **1**: 547–564 (1969).
- Rizos, P.F., Aspragathos, N., and Dimarogonas, A.D., "Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes," *Journal of Sound and Vibration* **138**(3): 381–388 (1990).
- Ostachowicz, W.M., and Krawczuk, C., "Analysis of the Effect of Cracks on the Natural Frequencies of a Cantilever Beam," *Journal of Sound and Vibration* **150**(2): 191–201 (1991).
- Bilello, C., *Theoretical and Experimental Investigation on Damaged Beams Under Moving Systems*. PhD Thesis, Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italy (2001).
- Krawczuk, M., Palacz, M., Ostachowicz, W., "Genetic algorithm for fatigue crack detection in Timoshenko beam," *IUTAM Symposium on Evolutionary Methods in Mechanics*, Cracow, Poland, pp. 197–206 (2004).
- Ong, Z.C., Rahman, A.G.A., and Ismail, Z., "Determination of Damage Severity on Rotor Shaft Due To Crack Using Damage Index Derived from Experimental Modal Data," *Experimental Techniques* **38**: 18–30 (2014). DOI: 10.1111/j.1747-1567.2012.00823.x.
- Chondros, T.J., Dimarogonas, A.D., and Yao, J., "A Continuous Cracked Beam Vibration Theory," *Journal of Sound and Vibration* **215**(1): 17–34 (1998).
- Ovanosova, A.V., and Suárez, L.E., "Applications of Wavelet Transforms to Damage Detection in

- Frame Structures," *Engineering Structures* **26**: 39–49 (2004).
17. El-Haddad, M.H., Ramadan, O.N., and Bazaraa, A.R., "Analysis of Frames Containing Cracks and Resting on Elastic Foundations," *International Journal of Fracture* **45**: 81–102 (1990).
 18. Caddemi, S., and Calió, I., "The Exact Explicit Dynamic Stiffness Matrix of Multi-Cracked Euler–Bernoulli Beam and Applications to Damaged Frame Structures," *Journal of Sound and Vibration* **332**: 3049–3063 (2013).
 19. Moghadam, A.A.A., Torabi, K., Moavenian, M., and Davoodi, R., "Dynamic Modeling and Robust Control of an L-Shaped Microrobot Based on Fast Trilayer Polypyrrole-Bending Actuators," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **24**: 484–498 (2013).
 20. Grossi, R.O., *Variational Calculus, Theory and Applications*, CIMNE, Barcelona, Spain (2010).
 21. Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 9.0, Champaign, Illinois (2012).
 22. Timoshenko, S.P., and Young, D.H., *Vibration Problems in Engineering*, Van Nostrand Co., Inc., New York, NY (1955).
 23. Lin, H.P., and Ro, J., "Vibration Analysis of Planar Serial-Frame Structures," *Journal of Sound and Vibration* **262**: 1113–1131 (2003).
 24. Albarracín, C.M., and Grossi, R.O., "Vibrations of Elastically Restrained Frames," *Journal of Sound and Vibration* **285**: 467–476 (2005).
 25. Rosales, M.B., Filipich, C.P., and Buezas, F.S., "Crack Detection in Beam-Like Structures," *Engineering Structures* **31**: 2257–2264 (2009).
 26. Labib, A., Denny, D., and Featherston, C., "Free Vibration Analysis of Beams and Frames with Multiple Cracks for Damage Detection," *Journal of Sound and Vibration* **333**: 4991–5003 (2014).
 27. Owolabi, G.M., Swamidas, A.S.J., and Seshadri, R., "Crack Detection in Beams Using Changes in Frequencies and Amplitudes of Frequency Response Functions," *Journal of Sound and Vibration* **265**: 1–22 (2003).