



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTOR EN INGENIERÍA

**ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE COJINETES
HIDRODINÁMICOS EN CONDICIONES REALES DE USO**

GUSTAVO GABRIEL VIGNOLO

BAHIA BLANCA

ARGENTINA

2016

PREFACIO

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ingeniería Química de la UNS y el Departamento de Mecánica de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, durante el período comprendido entre 2005 y 2015, bajo la dirección de la Doctora en Ingeniería Química Lidia María Quinzani y el Doctor en Ingeniería Industrial Daniel Oscar Barilá (UNPSJB).

Gustavo G. Vignolo



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el/...../....., mereciendo la calificación de (.....)

Esta tesis está dedicada a mi familia: mi esposa
Elena y mis hijos Valentina y Gino,
quienes han vivido esta etapa de nuestras vidas
con la misma intensidad que yo.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis directores, Daniel Barilá y Lidia Quinzani. Daniel ha sido mi mentor desde mi carrera de grado. Me ha apoyado y acompañado desde entonces y ha financiado una parte importante de mi estadía y de mi familia en Bahía Blanca. Lidia ha sido mi guía para esta tesis, dedicando incansables horas para ayudarme a seguir adelante, derrochando constantemente inteligencia y generosidad y convirtiéndose en tía de corazón de mis hijos. He sido muy afortunado de tener mentes tan brillantes y, fundamentalmente, tan maravillosas personas a mi lado en este camino.

Este trabajo ha sido posible gracias al Departamento de Ingeniería de la UNS, el cual me aceptó dentro de su programa de doctorado. Gracias a Carlos Rossit por abrirme las puertas de esta fantástica Universidad y por asesorarme al momento de definir mi tema de tesis.

Asimismo, quiero agradecer a la Facultad de Ingeniería de la UNPSJB la cual ha sustentado económicamente este trabajo y me ha recibido de vuelta en su sede de Comodoro Rivadavia.

Gracias a PLAPIQUI, a todos y cada uno de quienes los conforman y especialmente al grupo de Polímeros, por recibirme, aceptarme con mis defectos y virtudes y dejarme sentir como en casa. Ha sido una experiencia única.

A mi “familia” en Bahía Blanca, Belén Rodríguez y Pablo Zalazar, padrinos de mi hijo bahiense Gino. Siempre es bueno tener a la familia cerca.

A Jorge Guapacha, Soledad Lencina y Mercedes Lebono. Mis compañeros de oficina y amigos de la vida.

Quiero agradecer a mis padres y hermanos, quienes acompañaron este proyecto y me dieron fuerza para seguir adelante.

A Claudio Merelli por su compañía y ayuda incondicional en el tramo final del trabajo.

Gracias a mi esposa Elena y mis hijos Valentina y Gino. Sin su acompañamiento, paciencia y comprensión me hubiese sido imposible emprender esta tarea. Gracias por el sostén permanente, por los mates en las madrugadas y los incontables fines de semana en el Laboratorio. Este trabajo lleva tanto de ellos como mío.

RESUMEN

Los cojinetes hidrodinámicos son elementos de máquina con la doble función de permitir el deslizamiento con baja fricción de sus componentes y, simultáneamente, soportar las solicitaciones propias de su funcionamiento. Aunque el concepto de lubricación ha sido empleado desde el comienzo propio de la civilización para reducir el esfuerzo al momento de desplazar objetos, el entendimiento cabal del fenómeno de lubricación hidrodinámica se remonta a la década de 1880, cuando Petroff y Tower descubren experimentalmente este fenómeno que meses más tarde es demostrado analíticamente por Reynolds. Desde entonces, la lubricación hidrodinámica ha sido extensamente estudiada, aunque no fue hasta el nacimiento de la era computacional, a mediados del Siglo XX, que se produjeron trabajos pioneros con información práctica para el diseño de cojinetes en estado estacionario, que son aún vigentes.

Sin embargo, cuando lo que se desea diseñar o verificar escapa a las condiciones geométricas o de carga más simples, debe caerse en la búsqueda de una solución específica en base a programas o experimentos a medida. Tal limitación motivó al desarrollo de la presente tesis que ha tenido por objeto desarrollar herramientas para el cálculo de cojinetes hidrodinámicos en condiciones variadas.

Por un lado, a partir de la búsqueda de soluciones analíticas de la ecuación de Reynolds, se realizó una propuesta que, mediante el método de perturbación regular, permite aproximar la solución para cojinetes de longitud finita (hasta relaciones L/D cercanas a uno y excentricidades relativas medianas y grandes). Por otro lado, se abordó el tratamiento numérico del problema de lubricación resolviendo la ecuación de Reynolds y el conjunto de las ecuaciones de conservación de manera acoplada. Para la primera se emplea un esquema de diferencias finitas, y para la solución completa termo-hidrodinámica se utiliza una técnica de Shooting multidimensional. Los resultados obtenidos permiten determinar no sólo la presión y temperatura en cualquier punto de la película líquida, sino también sus variaciones en el espesor.

Este estudio teórico se acompaña de uno experimental desarrollado en parte en el Turbomachinery Laboratory de Texas A&M University (College Station, Texas) y en parte generando resultados con un equipo propio. El trabajo en el TurboLab se realizó en un banco de ensayo de alta velocidad, donde se sometió a pruebas estáticas y dinámicas un cojinete de zapatas pivotantes. Las tareas realizadas contemplaron desde el ensamblaje del equipo hasta la realización de los ensayos, que demuestran la excelente estabilidad de este tipo de cojinetes.

La generación de resultados experimentales propios se realizó en base a un estudio de los bancos de ensayo existentes, que dio lugar a la fabricación y puesta en marcha de un equipo capaz de generar los datos buscados, pasando por las etapas de diseño, dimensionado, selección y compra de componentes. El resultado final es un equipo plenamente funcional con capacidad de medir en simultáneo presión y temperatura en distintos puntos del cojinete, carga, par de fricción y posición relativa entre cojinete y rotor bajo la acción de cargas de dirección y magnitud constante y a diversas velocidades. En estas condiciones, se ensayó un cojinete cilíndrico de 55mm de diámetro y $L/D = 1$ en tres condiciones de carga y tres de velocidad. Los resultados fueron comparados con las predicciones teóricas y muestran la alta dependencia de la excentricidad con la carga, la presión con la excentricidad, y la temperatura con la velocidad de giro.

ABSTRACT

Hydrodynamic journal bearings are machine elements that play a double role. They allow the low friction sliding of their components and give load carrying capacity. Even though the concept of lubrication has been used since the beginning of civilization itself to reduce the force to move objects, the understanding of the phenomena of hydrodynamic lubrication goes back to the 1880s. At that point, two independent researchers, Petroff and Tower, experimentally discovered this process, which later was demonstrated analytically by Reynolds. From that date forward, hydrodynamic lubrication has been extensively studied, although it was not until the beginning of the computational era, in the middle of the XX century, that pioneer works appeared with practical information for the design of steady state journal bearings, which are used even today.

Nevertheless, when design requirements are more complex, particular solutions must be developed using programs and/or experimental measurements specifically made. Such a limitation was the motivation for the present thesis. The main object has been the development of analytical and experimental tools for the calculation of hydrodynamic journal bearings under real working conditions.

As part of the work, and from the analysis of the existing analytical solutions of the Reynolds Equation, a new one has been proposed for the description of finite length journal bearings, based in the regular perturbation method. The proposed method describes bearings with aspect ratio up to near one and moderate and high relative eccentricities. The numerical treatment of the lubrication problem was also considered by solving the Reynolds Equation and the whole system of conservation equations simultaneously. For the first a finite difference scheme was contemplated, while the coupled system of equations was solved employing a multivariate Shooting method. The obtained results allow to calculate not only the pressure and temperature in any place of the lubrication film, but also their changes within the thickness.

The theoretical study was accompanied by an experimental one, which was performed

partially in the Turbomachinery Laboratory of Texas A&M University (College Station, Texas) and partially generating information with a system specially assembled for that purpose. The work in the TurboLab was done in a high speed test rig, where static and dynamic tests were performed on a tilting pad journal bearing. The activities done in this lab covered from the assembling of the rig to the testing with data acquirement. The obtained results demonstrate the excellent stability of this type of bearings.

In order to get our own experimental results, existing models of test rigs were researched and a new facility, capable of generating the desire data, was design, built and set-up. The assembled rig is capable of simultaneously measure: pressure and temperature in different places of the bearing, load carrying capacity, friction torque, and relative position between bearing and rotor. Moreover, constant loads of different magnitude and direction may be applied over a range of rotary speeds. In these conditions, a cylindrical journal bearing of 55mm diameter and $L/D=1$ has been tested under three different loads and three speeds. The results, which were compared with the theoretical predictions, prove the high dependency of eccentricity with load, pressure with eccentricity, and temperature with rotation speed.

INDICE

Resumen	i
Abstract	iii
Índice	v
Índice de Figuras	ix
Índice de Tablas	xviii

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Lubricación y lubricantes	1
1.2 Cojinetes	5
1.2.1 Cojinetes de rodadura	5
1.2.2 Cojinetes de deslizamiento	8
1.2.3 Criterios de selección de cojinetes	10
1.3 Cojinetes hidrodinámicos	14
1.4 Objetivos y organización de la tesis	19
<i>Referencias</i>	20

2 DESCRIPCIÓN HISTÓRICA

2.1 Historia de la fricción y la lubricación	21
2.2 Lubricación hidrodinámica	25
2.2.1 Soluciones a la Ecuación de Reynolds	34
2.2.2 Condiciones de borde	39
2.2.3 Modificaciones a la Ecuación de Reynolds	41
2.2.4 Turbulencia e inestabilidades	43
2.2.5 Termohidrodinámica	45
2.2.6 Elastohidrodinámica	54
2.2.7 Carga dinámica	55
2.2.8 Inestabilidad y rotodinámica	56

2.2.9 Sellos hidrodinámicos	57
2.2.10 Efectos de la rugosidad de superficie	58
2.2.11 Lubricantes no-Newtonianos	61
2.3 Resumen y Perspectivas	63
<i>Referencias</i>	65

3 DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL COJINETE HIDRODINÁMICO

3.1 Introducción	75
3.2 Ecuaciones de conservación	76
3.3 Análisis de orden de magnitud	79
3.4 Ecuación de Reynolds	88
3.4.1 Espesor de película	92
3.4.2 Condiciones de borde para la Ecuación de Reynolds	92
3.5 Soluciones analíticas en estado estacionario	96
3.5.1 Cojinete infinitamente largo (ILJB)	96
3.5.2 Cojinete infinitamente corto (ISJB)	102
3.6 Cojinetes en estado transitorio	106
3.6.1 Cojinete infinitamente largo (ILJB)	108
3.6.2 Cojinete infinitamente corto (ISJB)	111
3.6.3 Análisis de la respuesta de los cojinetes ante cargas variables	112
3.7 Cojinete de anillo flotante en estado estacionario	116
3.7.1 Cojinete infinitamente largo (ILJB)	119
3.7.2 Cojinete infinitamente corto (ISJB)	119
3.7.3 Comparación con cojinetes convencionales equivalentes	120
3.8 Cojinetes de zapatas pivotantes en estado estacionario	122
<i>Referencias</i>	127

4 SOLUCIONES ANALÍTICAS APROXIMADAS PARA COJINETES CORTOS

4.1 Soluciones analíticas aproximadas para la ecuación de Reynolds	130
4.2 Soluciones usando métodos de perturbación	134
4.2.1 Descripción general	134
4.2.2 Aplicación a la ecuación de Reynolds	135
4.2.3 Nueva solución	140
4.2.4 Número de Ocvirk	146

4.2.5	Perfiles de presión	149
4.2.6	Capacidad portante	157
4.2.7	Tensión sobre la pared y fricción	158
4.2.8	Caudal de fluido	165
4.2.9	Discusión del método propuesto	168
4.3	Análisis termohidrodinámico de cojinetes cortos	170
4.3.1	Metodologías de resolución aproximada existentes	176
4.3.2	Método basado en la temperatura media en el espesor	182
4.3.3	Método basado en la temperatura de mezcla (o del 'bulk')	189
	<i>Referencias</i>	197

5 SOLUCIÓN NUMÉRICA DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

5.1	Planteo numérico para el cojinete hidrodinámico	201
5.1.1	Métodos numéricos	201
5.1.2	Método de diferencias finitas y discretización del dominio	204
5.2	Métodos numéricos de resolución utilizados	210
5.2.1	Método de shooting	210
5.2.2	Método de shooting multidimensional	212
5.2.3	Métodos de integración	218
5.3	Solución de flujo isotérmico	221
5.3.1	Ecuación de Reynolds	222
5.3.2	Generación de la grilla para el análisis de flujo tridimensional	225
5.3.3	Planteo del sistema de ecuaciones discretizadas	226
5.3.4	Condiciones de borde	229
5.3.5	Resultados	230
5.4	Solución de flujo no-isotérmico	235
5.4.1	Planteo del sistema de ecuaciones discretizadas	238
5.4.2	Condiciones de borde	239
5.4.3	Resultados	242
5.5	Eficiencia de los métodos empleados y variantes	253
	<i>Referencias</i>	255

6 SOLUCIÓN MEDICIONES EXPERIMENTALES EN COJINETES HIDRODINÁMICOS

6.1 Mediciones en cojinete de zapatas pivotantes	258
6.1.1. Descripción del banco de ensayo	258
6.1.2. Procedimiento y condiciones de ensayo	264
6.1.3. Caracterización estática	266
6.1.4. Caracterización dinámica de cojinetes. Fundamentos	273
6.1.5. Resultados dinámicos	275
6.1.6. Contribuciones	285
6.2. Diseño y construcción de un banco de ensayo para estudio experimental de cojinetes hidrodinámicos	289
6.2.1. Generalidades	290
6.2.2. Lineamientos de diseño	291
6.2.3. Selección de instrumental	310
6.2.4. Estudio rotodinámico	312
6.2.5. Sistema de carga	316
6.2.6. Construcción del banco	317
6.2.7. Estado actual del banco	320
6.2.8. Ensayos realizados	322
6.2.9. Comparación con resultados numéricos	331
6.2.10. Conclusiones	333
<i>Referencias</i>	333

7 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

7.1 Conclusiones	335
7.1.1 Estudio analítico	335
7.1.2 Estudio numérico	337
7.1.3 Estudio experimental	338
7.2 Trabajo futuro	340
7.3 Cierre	341

ANEXOS

Anexo I Programa para solución de la Ecuación de Reynolds	342
Anexo II Programa para el cálculo de la solución completa isotérmica	344

Anexo III	Programa de integración por el método de Gear y rutinas accesorias	352
Anexo IV	Programa para el cálculo de la solución termo-hidrodinámica	366
Anexo V	Planos constructivos del banco de ensayo diseñado	381

INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Efecto de la velocidad y carga en la elección del tipo de lubricante.	2
Figura 1.2: Ejemplo de guía de selección de lubricantes en función de condiciones límite de velocidad y carga.	2
Figura 1.3: Esquematación del efecto de la viscosidad del fluido lubricante en la lubricación.	3
Figura 1.4: Terminología de rodamientos radiales.	6
Figura 1.5: Clasificación de cojinetes de rodadura.	7
Figura 1.6: Variantes habituales de rodamientos de bolas y de rodillos.	7
Figura 1.7: Esquema de cojinetes de deslizamiento elementales.	8
Figura 1.8: Clasificación de cojinetes de película gruesa.	10
Figura 1.9: Guía general para la selección de cojinetes radiales. Se consideran cojinetes de deslizamiento de longitud y diámetro iguales, y aceite mineral de viscosidad media para los cojinetes hidrodinámicos.	13
Figura 1.10: Guía general para la selección de cojinetes axiales. Se consideran cojinetes de deslizamiento con relaciones de radio externo a radio interno típicas, y aceite mineral de viscosidad media para los cojinetes hidrodinámicos.	14
Figura 1.11: Variantes habituales de cojinetes hidrodinámicos simples.	15
Figura 1.12: Características principales de un cojinete hidrodinámico.	15
Figura 1.13: Configuraciones más frecuentes de los cojinetes hidrodinámicos.	16
Figura 2.1: Registro egipcio de 1900 A.C. mostrando el uso de aceite para reducir la fricción durante el traslado del coloso.	22
Figura 2.2: Cojinete experimental usado por B. Tower y condiciones de los ensayos.	26
Figura 2.3: Presiones hidrodinámicas medidas por B. Tower (1885).	27
Figura 2.4: Cojinete estudiado por Reynolds en 1886.	29
Figura 2.5: Esquema de la zona de cavitación en un cojinete hidrodinámico.	40
Figura 2.6: Perfil de temperatura en una película convergente-divergente predicho por el modelo adiabático.	47
Figura 2.7: Variación de temperaturas máximas y mínimas en función de la carga medidas para el conjunto de condiciones listadas .	48
Figura 2.8: Presión máxima medida en función de la temperatura de ingreso del lubricante.	50

Figura 2.9: Perfil de presión elastohidrodinámica.	55
Figura 2.10: Representación del vector de movilidad, M , y las contribuciones de la excentricidad y el ángulo de espesor mínimo.	56
Figura 2.11: Burbujas de cavitación en sello transparente con rotación de derecha a izquierda.	60
Figura 2.12: Superficie interior de un cojinete de poliamida maquinado (broached) antes (izq.) y después (der.) de su uso mostrando alisado parcial.	61
Figura 3.1: Geometría de un cojinete hidrodinámico y nomenclatura asociada (a), y esquema de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b).	75
Figura 3.2: Esquema de perfil de presión correspondiente a la 'solución 2π ', y representación de un cojinete hidrodinámico indicando las regiones de presiones positivas ($0 < \theta < 1$, en gris) y presiones negativas ($1 < \theta < 2$, en blanco).	93
Figura 3.3: Esquemización del efecto de la CB en el cálculo del perfil de presión en un cojinete. (a) 'solución 2π ' correspondiente a la condición de Sommerfeld; (b) 'solución π ' correspondiente a la condición de Gümbel; (c) perfil correspondiente a la condición de Reynolds.	94
Figura 3.4: Presión adimensional en el ILJB en función del ángulo adimensional Θ , para distintos η .	98
Figura 3.5: Número de Sommerfeld (inversa de la capacidad portante) y ángulo entre la línea de centros y la carga para el ILJB en función de la excentricidad. Uso de condiciones de Sommerfeld (a) y Gümbel (b).	102
Figura 3.6: Presión adimensional en el ISJB en función del ángulo adimensional Θ , para $z=0,5$ y distintos η .	104
Figura 3.7: Número de Sommerfeld (inversa de la capacidad portante) y ángulo entre la línea de centros y la carga para el ISJB en función de la excentricidad. Uso de condiciones de Sommerfeld (a) y Gümbel (b).	106
Figura 3.8: Esquema de variables cinemáticas consideradas en el sistema rotor-cojinete.	107
Figura 3.9: Perfil de presión (izq.) y número de Sommerfeld (der) para el ILJB en condiciones transitorias.	110
Figura 3.10: Perfil de presión (izq.) y número de Sommerfeld (der) en el ISJB en condiciones transitorias.	112
Figura 3.11: Posición que toma el centro del eje al variar la carga para el ISJB.	113
Figura 3.12: Comportamiento del ILJB y del ISJB bajo una carga rotante de módulo constante y frecuencia ω_f .	114
Figura 3.13: Foto del rotor de un turbo-sobrealimentador mostrando dos cojinetes de anillo flotante (FRB).	116
Figura 3.14: Geometría de un cojinete de anillo flotante (a) y de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b).	117
Figura 3.15: Desempeño de cojinetes de anillo flotante infinitamente largo (izq.) e infinitamente corto (der.) en función de la carga adimensional.	121

Figura 3.16: Geometría básica del cojinete de zapata pivotante.	122
Figura 3.17: Esquemas representando el cojinete plano de zapata pivotante y el cojinete radial de zapatas pivotantes.	123
Figura 3.18: Cojinetes de zapatas pivotantes con pivote sobre rótulas (a) y con pivote flexible (b).	124
Figura 3.19: Cojinetes de zapatas pivotantes con configuración “Load On Pad” (a) y “Load Between Pads” (b).	124
Figura 3.20: Esquema de un TPJB mostrando los principales parámetros.	125
Figura 3.21: Desplazamiento del rotor ante una carga vertical.	126
Figura 4.1: Geometría de un cojinete hidrodinámico y nomenclatura asociada (a), y esquema de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b).	130
Figura 4.2: Componentes de orden cero y orden uno del número de Ocvirk según el método de Perturbación-P&O en función de la excentricidad relativa.	146
Figura 4.3: Número de Ocvirk en función de la excentricidad relativa calculado con distintos métodos para diferentes valores de L/D .	147
Figura 4.4: Número de Ocvirk en función de la relación de aspecto para $\eta = 0,5$.	148
Figura 4.5: Excentricidad adimensional en función de la relación de aspecto para tres valores distintos del número de Ocvirk.	149
Figura 4.6: Perfiles de presión correspondientes a las soluciones de orden cero y uno en $z = 0$.	150
Figura 4.7: Perfiles de presión en función de la posición azimutal predichos por el modelo de Perturbación-P&O para relaciones de aspecto mayores a 0 y 45.	151
Figura 4.8: Comparación de perfiles de presión para $z = 0$, $L/D = 0,5$ y $\eta = 0,5$.	152
Figura 4.9: Perfiles de presión adimensional para tres diferentes posiciones tangenciales en función de la relación de aspecto (izq.) para $\eta = 0,5$, y en función de la excentricidad relativa (der.) para $L/D = 0,5$. En todos los casos, $z = 0$.	154
Figura 4.10: Perfiles de presión adimensional en función de la dirección axial para diferentes posiciones tangenciales (arriba), relaciones de aspecto (centro) y excentricidades relativas (abajo).	155
Figura 4.11: Cociente de los perfiles de presión calculados mediante solución numérica y usando el método de Perturbación-P&O respecto del correspondiente a la aproximación de Ocvirk.	156
Figura 4.12: Capacidad portante en función de la excentricidad relativa calculada con distintos métodos para diferentes valores de L/D .	158
Figura 4.13: Esfuerzo de corte adimensional en función de la posición tangencial para $\eta = 0,5$ y $L/D = 0,5$, en $z = 0$.	159
Figura 4.14: Esfuerzo de corte adimensional para tres posiciones tangenciales diferentes en función de la relación de aspecto (izq.) para $\eta = 0,5$, y en función de la excentricidad relativa (der.) para $L/D = 0,5$. En todos los casos, $z = 0$.	160

Figura 4.15: Coeficiente de fricción adimensional en función de la excentricidad para distintas relaciones de aspecto.	164
Figura 4.16: Coeficiente de fricción en función de L/D calculado para tres valores de número de Ocvirk.	165
Figura 4.17: Caudal de suministro adimensional en función de la excentricidad, calculado para distintos valores de L/D .	168
Figura 4.18: Geometría de un cojinete hidrodinámico y de su equivalente en coordenadas cartesianas, en la que señala la ubicación del ingreso de lubricante al sistema.	171
Figura 4.19: Diagrama de cálculo para la solución de los balances acoplados.	176
Figura 4.20: Variación de la presión máxima en función de la temperatura de ingreso del lubricante.	179
Figura 4.21: Esquema de cojinete mostrando la nomenclatura utilizada para las diversas temperaturas.	183
Figura 4.22: Perfiles de temperatura adimensional en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas, en $z=0$.	187
Figura 4.23: Perfiles de presión adimensional en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas calculadas con el método propuesto y mediante la solución isotérmica, en $z=0$.	188
Figura 4.24: Perfiles de viscosidad adimensional $f = \mu/\mu_0$ sobre el cojinete en función de la posición azimutal, para distintas excentricidades relativas.	189
Figura 4.25: Perfiles de temperatura adimensional sobre el cojinete en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas, en $z=0$.	190
Figura 4.26: Perfiles de temperatura “bulk” adimensional en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas, en $z=0$.	194
Figura 4.27: Perfiles de presión adimensional en función de la posición acimutal para distintas excentricidades relativas calculadas con el método propuesto y mediante la solución isotérmica, en $z=0$.	195
Figura 4.28: Viscosidad adimensional en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas, calculada con el método de temperatura “bulk” y mediante temperatura media en el espesor.	196
Figura 5.1: Discretización de un dominio rectangular.	207
Figura 5.2: Discretización del dominio 3D de la película lubricante.	207
Figura 5.3: Transformación de coordenadas del dominio físico al computacional.	208
Figura 5.4: Disparo desde un punto (a,A) a un objetivo en (b,B), con una trayectoria ϕ .	210
Figura 5.5: Disparos desde un punto (a,A) con diferentes pendientes iniciales de la función ϕ .	211
Figura 5.6: Representación gráfica del método de Powell simplificado.	217
Figura 5.7: Perfiles de presión obtenidos de la solución numérica de la Ecuación de	224

Reynolds en función de la posición longitudinal calculados para distintas relaciones de aspecto en $z=0$, para $\eta=0,5$. Se incluyen las soluciones límite del ISJB y el ILJB.	
Figura 5.8: Perfiles de presión obtenidos de la solución numérica de la Ecuación de Reynolds en función de la posición axial calculados para distintas relaciones de aspecto en $\Theta=0,5$, para $\eta=0,5$. Se incluyen las soluciones límite del ISJB y el ILJB.	225
Figura 5.9: Perfiles de presión en función de la posición longitudinal calculados para distintas relaciones de aspecto en $z=0$ y $\gamma=0$, para $\eta=0,5$. Se incluye la solución numérica de la Ecuación de Reynolds, y las soluciones límite del ISJB y el ILJB.	230
Figura 5.10: Perfiles de presión adimensional para dos posiciones tangenciales diferentes en función de la relación de aspecto (izq.) para $\eta=0,5$, y de la excentricidad relativa (der.) para $L/D = 0,5$. En todos los casos, $z = 0$.	231
Figura 5.11: Perfiles de presión en función de la posición axial calculados para distintas relaciones de aspecto en $\Theta=0,5$ y $\gamma=0$, para $\eta=0,5$. Se incluye la solución numérica de la Ecuación de Reynolds y la presión calculadas con las aproximaciones del ISJB y el ILJB.	232
Figura 5.12: Perfiles de presión en función de la posición transversal calculados usando el método numérico propuesto para distintos valores de la relación huelgo a radio en $z=0$ y $\Theta=0,5$ para $\eta=0,5$ y $L/R=1$.	233
Figura 5.13: Perfiles axiales de presión obtenidos mediante el método numérico propuesto para $\Theta=0,5$, $\eta=0,5$, $c/R=0,001$ y distintos valores de L/R de cojinetes “largos”. La línea de trazos señala el espesor de la “capa límite” estimado en R/L .	234
Figura 5.14: Comportamiento del perfil de presión obtenido a medida que disminuye el valor límite de la coordenada Θ , de $\Theta_1 \rightarrow \Theta_2 \rightarrow \Theta_{cav}$.	241
Figura 5.15: Perfiles de temperatura en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Gumbel para distintas relaciones de aspecto en $z=0$ y $\gamma=0$, para $\eta=0,5$.	243
Figura 5.16: Perfiles de presión en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Gumbel para distintas relaciones de aspecto en $z=0$ y $\gamma=0$, para $\eta=0,5$.	244
Figura 5.17: Perfiles de temperatura en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Reynolds para distintas relaciones de aspecto en $z=0$ y $\gamma=0$, para $\eta=0,5$.	244
Figura 5.18: Perfiles de presión en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Reynolds para distintas relaciones de aspecto en $z=0$ y $\gamma=0$, para $\eta=0,5$.	245
Figura 5.19: Aumento de temperatura adimensional sufrido por la película fluida para $\gamma=0$ y $\eta=0,5$. Para Raimondi y Boyd e ISJB el Δt es el empleado para el cálculo de viscosidad efectiva.	246
Figura 5.20: Perfiles de temperatura en función de la posición longitudinal calculados	247

con la condición de Reynolds para distintas excentricidades en $z=0$ y $\gamma=0$, para $L/D=0,5$.	
Figura 5.21: Perfiles de presión en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Reynolds para distintas excentricidades en $z=0$ y $\gamma=0$, para $L/D=0,5$.	248
Figura 5.22: Perfiles de presión y temperatura en función de la posición axial calculados para distintos valores de Θ en $\gamma=0$, para $L/D=0,5$ y $\eta=0,5$.	249
Figura 5.23: Perfiles de temperatura en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Reynolds para distintos valores de κ_1 en $z=0$ y $\gamma=0$, para $L/D=0,5$ y $\eta=0,5$.	249
Figura 5.24: Perfiles de presión en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Reynolds para distintos valores de κ_1 en $z=0$ y $\gamma=0$, para $L/D=0,5$ y $\eta=0,5$.	250
Figura 5.25: Perfiles de temperatura adimensional en función de la posición azimutal para $z=0$.	252
Figura 5.26: Perfiles de presión y temperatura adimensionales en función de la distancia transversal, para distintas coordenadas tangenciales.	253
Figura 6.1: Corte general del banco de ensayo del TurboLab.	259
Figura 6.2: Esquema de cargas del banco de ensayo.	260
Figura 6.3: Estator con el cojinete instalado.	261
Figura 6.4: Ubicación de los sensores en el estator.	262
Figura 6.5: Esquema de TPJB de cinco zapatas con configuración LBP.	263
Figura 6.6: Vistas lateral y frontal de una de las zapatas del cojinete ensayado.	264
Figura 6.7: Resultado de un ensayo de medición de huelgo y ajuste a un cojinete radial equivalente.	267
Figura 6.8: Huelgo medido en el cojinete y curva de ajuste.	267
Figura 6.9: Excentricidades relativas medidas para distintas condiciones de ensayo.	268
Figura 6.10: Excentricidad en función del número de Sommerfeld para todos los ensayos realizados.	269
Figura 6.11: Esquema mostrando la posición angular de las termocuplas de las zapatas.	270
Figura 6.12: Temperatura medidas en las zapatas en los ensayos a 16000 rpm.	271
Figura 6.13: Temperaturas medidas en las zapatas en los ensayos con carga estática de 3.101 kPa.	271
Figura 6.14: Coeficiente de rigidez estático en función de la carga aplicada.	272
Figura 6.15: Línea de base de rigidez dinámica. Partes real (a y c) e imaginaria (b y d) de los cuatro coeficientes H_{ij} (dos directos y dos cruzados) en función de la frecuencia.	277
Figura 6.16: Rigidez dinámica en función de la frecuencia medidos usando 7000 rpm	278

	y sin carga estática. Partes real e imaginaria de los cuatro coeficientes H_{ij} .	
Figura 6.17:	Rigidez dinámica en función de la frecuencia medidos usando 16000 rpm y 3101 kPa de carga estática. Partes real e imaginaria de los cuatro coeficientes H_{ij} .	279
Figura 6.18:	Coefficientes de rigidez directos k_{xx} y k_{yy} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.	281
Figura 6.19:	Coefficientes de rigidez cruzados k_{xy} y k_{yx} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.	281
Figura 6.20:	Coefficientes de amortiguamiento directos c_{xx} y c_{yy} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.	282
Figura 6.21:	Coefficientes de amortiguamiento cruzados c_{xy} y c_{yx} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.	283
Figura 6.22:	Coefficientes directos de masa virtual m_{xx} y m_{yy} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.	284
Figura 6.23:	Coefficientes cruzados de masa virtual m_{xy} y m_{yx} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.	284
Figura 6.24:	Coefficientes estático k_s y coeficiente dinámicos de rigidez k_{yy} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.	285
Figura 6.25:	Sistema de precarga de los rodamientos; a) esquema preexistente; b) esquema propuesto.	286
Figura 6.26:	Banco de ensayo en funcionamiento con el puntal de vinculación colocado.	287
Figura 6.27:	Esquema general básico del banco de ensayo diseñado.	289
Figura 6.28:	Representación esquemática del banco de ensayo diseñado.	292
Figura 6.29:	Esquema del bastidor.	293
Figura 6.30:	Dimensiones principales del bastidor.	294
Figura 6.31:	Diagrama de bloques del variador de frecuencia WEG CFW 08.	295
Figura 6.32:	Desempeño del motor y viscosidad máxima en función de la velocidad de giro.	296
Figura 6.33:	Características del acoplamiento elástico seleccionado.	296
Figura 6.34:	Dimensiones principales del eje construido.	297
Figura 6.35:	Esquema del vínculo entre el eje y el bastidor mediante el rodamiento oscilante.	299
Figura 6.36:	Lado motriz del eje: motor, acoplamiento (bajo el cobertor) y porta-rodamiento.	299
Figura 6.37:	Dimensiones principales de los manguitos para el cojinete de 60mm.	300
Figura 6.38:	Detalle del sistema de centrado del rotor.	302
Figura 6.39:	Manguito construido de 60mm y $L/D=1$.	302
Figura 6.40:	Cojinete de 60mm.	303

Figura 6.41: Cojinetes de 50 y 60mm construidos.	304
Figura 6.42: Esquema en corte del cojinete posicionado en el porta cojinete.	304
Figura 6.43: Dimensiones principales del porta cojinete.	305
Figura 6.44: Mecanizado del anillo de anclaje del porta-cojinete (izq.) y porta-cojinete (der).	306
Figura 6.45: Porta-cojinetes con anillo de anclaje y alojamientos de los sensores.	307
Figura 6.46: Conjunto armado: porta cojinete, brazos de sujeción, anillo.	307
Figura 6.47: Esquema del circuito de suministro de lubricante.	308
Figura 6.48: Esquema del circuito eléctrico.	309
Figura 6.49: Tableros del banco de ensayo: de suministro de aceite (izq.) y eléctrico (der).	309
Figura 6.50: Digitalización del banco construido para el diseño de futuras mejoras.	310
Figura 6.51: Diagrama de bloques de la placa de adquisición.	312
Figura 6.52: Esquema del banco de ensayo en relación con el análisis dinámico: a) diagrama simplificado; b) modelo y nomenclatura.	313
Figura 6.53: Modelo de elementos finitos empleado en XLRTC2.	314
Figura 6.54: Modelo 3D para estimar el diámetro equivalente del extremo del eje.	315
Figura 6.55: Diagrama de Campbell obtenido mediante XLRTC2 para las primeras seis críticas del sistema.	316
Figura 6.56: Único modo vibratorio del sistema presente en el análisis con amortiguamiento.	316
Figura 6.57: Esquema del sistema de carga.	317
Figura 6.58: Bastidor del banco de ensayo.	318
Figura 6.59: Bastidor del banco de ensayo con la incorporación de las compuertas de protección.	318
Figura 6.60: Estructura del banco pintada y lista para el montaje de los elementos mecanizado.	318
Figura 6.61: Imagen lateral del equipo construido con el compartimento del cojinete cerrado.	319
Figura 6.62: Imagen lateral del equipo construido con el compartimento del cojinete abierto.	319
Figura 6.63: Imagen del cojinete instrumentado.	319
Figura 6.64: Banco de ensayo operativo.	320
Figura 6.65: Tablero del banco en funcionamiento. Puede verse el manómetro indicando la presión de suministro (en 65 Psi) y la frecuencia de giro del motor (en 50Hz).	320
Figura 6.66: Equipo en funcionamiento. Se aprecia cómo el excedente de aceite escurre por los extremos del cojinete.	321

Figura 6.67: Proceso de determinación del centro del cojinete.	321
Figura 6.68: Excentricidades relativas medidas en las distintas condiciones de ensayo.	324
Figura 6.69: Número de Sommerfeld en función de la excentricidad relativa determinados experimentalmente. Comparación con resultados de Raimondi y Boy.	325
Figura 6.70: Número de Ocvirk en función de la excentricidad relativa. Comparación con predicciones de modelos presentados en Figura 4.3.	326
Figura 6.71: Perfiles de presión circunferenciales obtenidos en $z=0$ a carga constante usando distintas velocidades de giro.	327
Figura 6.72: Perfiles de presión adimensional equivalentes a los de la Figura 6.71. Se señala junto a cada curva el valor de excentricidad medido en cada caso.	328
Figura 6.73: Perfiles de presión axiales obtenidos usando distintas velocidades de giro y 255 kg de carga. A la derecha se presentan los perfiles adimensionales.	328
Figura 6.74: Perfiles de temperatura circunferenciales obtenidos en $z=0$ a carga constante usando distintas velocidades de giro.	330
Figura 6.75: Perfiles de temperatura adimensional equivalentes a los de la Figura 6.74. Se señala junto a cada curva el valor de excentricidad medido en cada caso.	330
Figura 6.76: Perfiles de temperatura axiales a velocidad de giro constante y distintas cargas aplicadas.	331
Figura 6.77: Presión adimensional sobre el plano axial medio. Comparación con la predicción del modelo THD.	332
Figura 6.78: Temperatura adimensional sobre el plano axial medio. Comparación con la predicción del modelo THD.	332

INDICE DE TABLAS

Tabla 2.1: Algunos trabajos sobre lubricación con fluidos No-Newtonianos hasta 1987.	62
Tabla 4.1: Características del cojinete analizado.	187
Tabla 5.1: Características del lubricante usado en los cálculos numéricos.	242
Tabla 5.2: Características del cojinete estudiado por Mitsui (1987), usado en el estudio comparativo.	251
Tabla 6.1: Parámetros medidos en el cojinete de zapatas pivotantes e instrumentos asociados.	262
Tabla 6.2: Características del cojinete ensayado.	263
Tabla 6.3: Temperatura nominal de entrada de aceite y temperatura media de entrada medida.	265
Tabla 6.4: Características generales del banco de ensayo.	293
Tabla 6.5: Características principales del motor empleado.	294
Tabla 6.6: Características principales de los rodamientos del eje.	298
Tabla 6.7: Dimensiones relevadas de los conjuntos muñón-cojinete construidos.	301
Tabla 6.8: Composición química del bronce de los cojinetes.	303
Tabla 6.9: Instrumentos seleccionados para las mediciones.	310
Tabla 6.10 Guía de selección de sensores de desplazamiento.	311
Tabla 6.11. Datos asociados al modelo del banco de ensayo.	313
Tabla 6.12: Propiedades del lubricante usado en los ensayos.	322
Tabla 6.13: Condiciones experimentales cubiertas en los ensayos.	323
Tabla 6.14: Excentricidades y ángulos de desplazamiento medidos.	324

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Todas las partes de máquinas que tengan movimiento están sujetas a fricción, desgaste y su consecuente disipación de energía útil. La lubricación es fundamental para reducirlas.

Por lo general, entre los principales elementos de una máquina se encuentran aquellos sometidos a rotación, donde los cojinetes juegan un papel fundamental. Y en este sentido, el diseño apropiado del cojinete puede minimizar la fricción y el desgaste, prolongando su vida útil y, consecuentemente, la vida útil de la máquina.

En este Capítulo se describe brevemente el papel de la lubricación y de los lubricantes en el movimiento relativo de superficies, para realizar luego una descripción de los distintos tipos de cojinetes, y de los cojinetes hidrodinámicos en particular. Se finaliza con el planteo de los objetivos de esta tesis.

1.1 LUBRICACIÓN Y LUBRICANTES

La resistencia al movimiento relativo entre dos superficies en contacto se denomina fuerza de fricción y es común el empleo de medios para reducirla, controlarla o modificarla (Harnoy, 2003; Totten, 2006). Particularmente, las acciones tendientes a la reducción de la fuerza de fricción por medio de la introducción de un material sólido o fluido entre las superficies en contacto, pueden describirse como lubricación. El material que se emplea para tal fin se conoce como lubricante (Stachowiak y Batchelor, 2000).

La selección del tipo de lubricante que debe emplearse en una determinada aplicación viene dada principalmente por la velocidad relativa entre las superficies y la carga normal a las mismas. Si la velocidad es alta, el calentamiento producido por la fricción también lo es y

conviene el empleo de un lubricante que provea una alta transmisión de calor y, simultáneamente, disipe la menor cantidad posible de energía sobre el sistema. Por el contrario, si las cargas son altas, debe garantizarse que el lubricante no sea expulsado de la interfase (Shigley y Mischke, 1999; Totten, 2006). Esta situación se resume en la Figura 1.1 donde se listan los tipos de lubricantes normalmente usados.

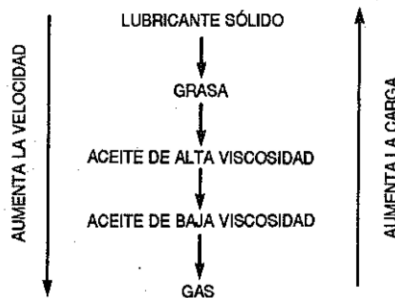


Figura 1.1: Efecto de la velocidad y carga en la elección del tipo de lubricante.

El proceso de selección de lubricante se ve dificultado por la existencia de factores tales como el tipo y forma de geometría, las condiciones y restricciones ambientales, la temperatura de operación, etc. Aun así, existen guías estimativas que ayudan a seleccionar lubricantes (ver, por ejemplo, la que se muestra en la Figura 1.2).

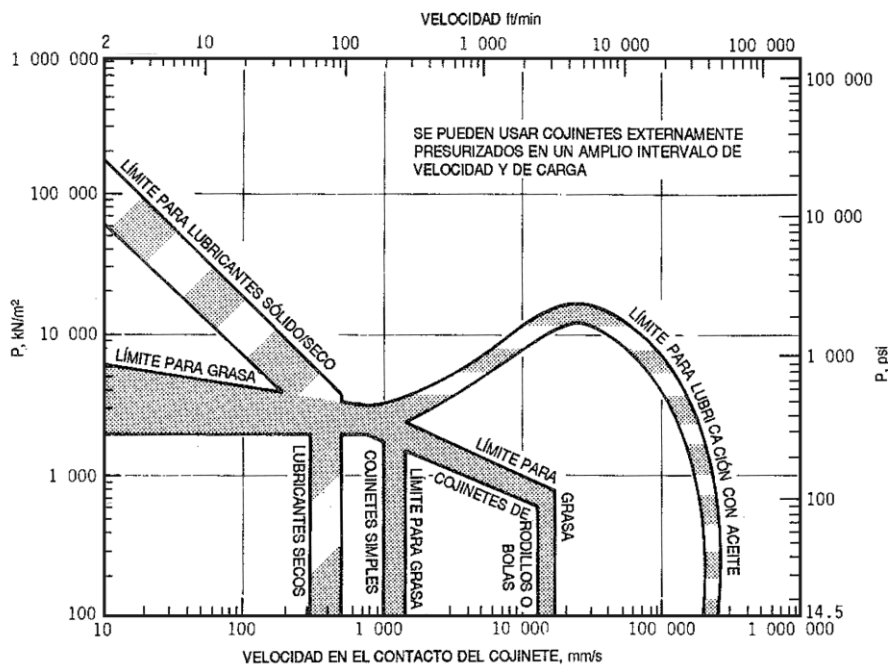


Figura 1.2: Ejemplo de guía de selección de lubricantes en función de condiciones límite de velocidad y carga (Shigley y Mischke, 1999).

Los lubricantes pueden ser sólidos o fluidos. La propiedad más importante de los lubricantes líquidos (de interés para esta tesis) es su viscosidad. Definida cualitativamente como la resistencia que opone el fluido a fluir, la viscosidad está íntimamente ligada tanto a la resistencia que opone el fluido a fluir, la viscosidad está íntimamente ligada tanto a la mencionada disipación de energía del lubricante al sistema como a la facilidad o dificultad de escurrimiento del mismo de entre las superficies en movimiento relativo. La influencia de este parámetro en la calidad de la lubricación puede verse en la Figura 1.3 donde se esquematiza el coeficiente de fricción (fuerza de fricción sobre carga normal) en función de la viscosidad del lubricante (η) adimensionalizada con la velocidad angular ($N \sim v$) y la carga normal por unidad de área ($P \sim F_N$).

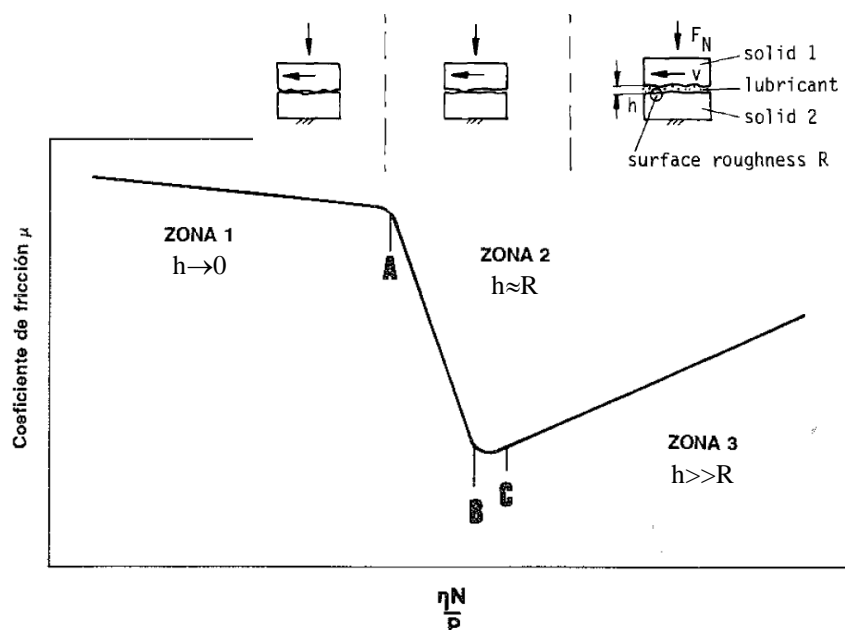


Figura 1.3: Esquematización del efecto de la viscosidad del fluido lubricante en la lubricación.

Según se esquematiza en la figura, existen tres zonas de comportamiento diverso. En la zona 3, las superficies sólidas se encuentran completamente separadas por una película relativamente gruesa de lubricante de alta viscosidad. Esta zona se denomina de “lubricación hidrodinámica”. Como no existe contacto entre las superficies, la fricción es enteramente generada por el flujo del lubricante y consecuentemente el desgaste es nulo. En esta zona, a medida que decrece la viscosidad, el espesor de la película fluida también disminuye hasta que, en el punto C, el espesor es apenas suficiente para asegurar la separación completa de las superficies. Una reducción adicional de la viscosidad (al igual que una reducción de la velocidad o un aumento de la carga) produce contactos ocasionales entre las asperezas de las superficies. El acoplamiento simultáneo de la disminución de la fricción producida por

disminución de viscosidad con el aumento de fricción como consecuencia del contacto entre asperezas de las superficies sólidas produce un mínimo de fricción entre los puntos B y C. Mayores reducciones de la viscosidad hacen que una proporción creciente de la carga sea soportada por el contacto de las asperezas y que la fricción aumente rápidamente hasta A. En este punto, la totalidad de la carga está soportada por el contacto entre las asperezas y una posterior disminución de la viscosidad no tiene virtualmente ningún efecto sobre la fricción. La zona 1, a la izquierda del punto A, se denomina “lubricación seca”. La zona 2, entre A y C, es la zona de “lubricación límite o mixta”, en la cual la carga es soportada parcialmente por la película fluida y por el contacto entre asperezas. La proporción soportada por la interacción de asperezas disminuye desde el 100% en A hasta el 0% en C.

A los tres regímenes básicos de lubricación expuestos: seca, límite o mixta, e hidrodinámica, pueden añadirse variantes según la geometría, el tipo de fluido y flujo. Por ejemplo, el término “lubricación termohidrodinámica” (THD) se emplea cuando los efectos térmicos en la película hidrodinámica son importantes; “lubricación hidrostática” cuando se usa una fuente externa para bombear el lubricante con presión suficiente para mantener separadas las superficies sólidas; y “lubricación elastohidrodinámica” (EHD) cuando la deformación elástica de las superficies sólidas lubricadas se torna significativa, generalmente debido a la presencia de elementos rodantes entre ellas (Stachowiak y Batchelor, 2000). También se pueden dar regímenes que combinan algunas de estas condiciones.

En la inmensa mayoría de las aplicaciones, los elementos lubricados de una máquina o mecanismo tienen la doble función de permitir el movimiento suave de la misma y de soportar y transmitir las cargas propias de su funcionamiento. En general, los elementos de máquina son lubricados interponiendo y manteniendo una película fluida entre las superficies en movimiento. Estas capas fluidas minimizan el contacto y disminuyen la fricción. Los elementos de las máquinas que, por excelencia, requieren lubricación son: los cojinetes (de deslizamiento o de rodadura, guías y vías), engranajes, émbolos, acoplamientos flexibles, cadenas, levas, botadores y cables de acero (Pirro y Wessol, 2001; Totten, 2006). Estos elementos contienen o forman superficies que se mueven respecto de otras por deslizamiento, rodadura o una combinación de ambos. El contacto entre las superficies resultará en altas fuerzas de fricción, que producirán altos incrementos de temperatura, desgaste y/o la falla del material. Por ello, estos elementos están lubricados, para prevenir o reducir la presencia de contacto entre superficies. Sin lubricación, mucha maquinaria operaría solamente por un período efímero de tiempo. De igual manera, una de las consecuencias más serias de una lubricación inadecuada, es el desgaste

excesivo de las superficies. Una vez producida la falta de lubricación, en un período de tiempo generalmente corto, la máquina no puede funcionar y debe sacarse de servicio para reparación. Y aunque muchas veces los costos de reparación pueden no ser altos, el costo de la no disponibilidad de la máquina suele superarlo con creces. Por otra parte, aun antes de una falla debida a una lubricación deficiente, las fuerzas de fricción pueden llegar a ser lo suficientemente altas como para sobrecargar el sistema motriz o generar pérdidas de potencia excesivas. Finalmente, cabe señalar que las máquinas lubricadas inadecuadamente no funcionarán eficiente ni silenciosamente.

1.2 COJINETES

Estrictamente, los cojinetes son elementos que limitan los grados de libertad de un rotor (o elemento de movimiento lineal), lo mantienen en su posición, soportan las solicitaciones y le permiten girar (trasladarse) libremente. Los cojinetes pueden clasificarse de numerosas formas de acuerdo a: su principio básico de operación (de deslizamiento o de rodadura), la dirección y naturaleza de la carga aplicada (axial o radial), y su configuración geométrica (de superficies lisas, escalonadas, de zapatas pivotantes, etc.). Si bien no existe un criterio único, la clasificación suele hacerse en función del principio básico de operación, con sub-clasificaciones de acuerdo a la geometría y carga (Hamrock *et al.*, 2004). A continuación se presenta una descripción somera de los cojinetes clasificados en función de su principio básico de operación.

1.2.1 Cojinetes de Rodadura

Los cojinetes de rodadura, o rodamientos, son aquellos en los cuales la superficie móvil está separada de la superficie estacionaria por elementos como bolas, rodillos o agujas, que pueden rodar de una forma controlada (Grote y Antonsson, 2009). Normalmente ocurre también cierto deslizamiento, por lo que la fricción característica está determinada por el movimiento relativo, las condiciones de carga y las propiedades del lubricante.

Las partes esenciales de estos cojinetes son: un anillo estacionario, un anillo rotante, y cierto número de elementos rodantes. La Figura 1.4 muestra la terminología comúnmente empleada para describirlos. El anillo interno generalmente se monta sobre un rotor, y el externo sobre una carcasa. Los anillos son normalmente fabricados con una aleación especial de acero de alta dureza (Rockwell C 60 a 67), aunque para aplicaciones especiales se los fabrica también con materiales como acero inoxidable, cerámica o plástico. Estos anillos tienen pistas maquinadas

con gran precisión para confinar y guiar los elementos rodantes. Normalmente los elementos rodantes son del mismo material y terminación que los anillos, aunque también pueden fabricarse de materiales especiales y se los puede encontrar en rodamientos con pistas de un material distinto. Generalmente los elementos rodantes están separados entre sí, y su posición relativa se sostiene mediante un separador o jaula que mantiene el rotor centrado. Estos separadores pueden encontrarse en una amplia gama de materiales y formas, desde acero estampado a plástico inyectado.

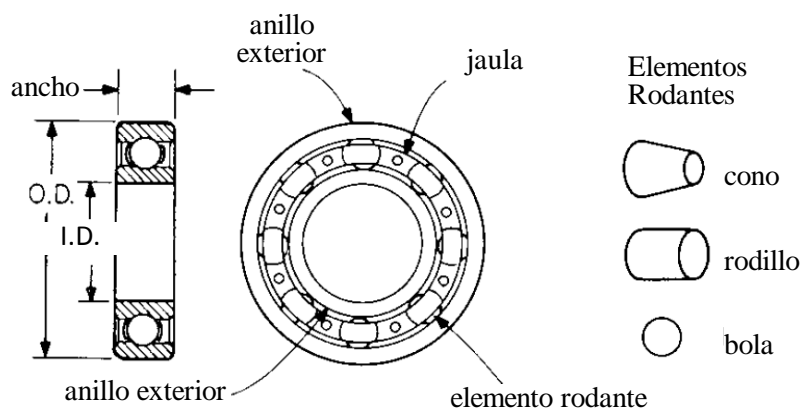


Figura 1.4: Terminología de rodamientos radiales.

Existe una gran variedad de diseños de rodamientos. El de bolas de simple columna y pistas profundas mostrado en la Figura 1.4 es el tipo más común y, generalmente, la elección inicial en cualquier aplicación. Cuando la vida a fatiga de este diseño no es adecuada para la aplicación, o existen restricciones de espacio o cargas axiales importantes, o se requiere autoalineación, o cuando necesita ser satisfecha cualquier otra condición, entonces debe optarse por otro diseño más apropiado. En general, cuando esto sucede, las características deseadas se logran a expensas de un costo mayor, un límite de velocidad menor o requerimientos de lubricación más severos. En la Figura 1.5 se aprecia una clasificación general para los rodamientos (Hamrock *et al.*, 2004).

Hay una gran variedad de rodamientos que usualmente se fabrican bajo dimensiones y tolerancias estandarizadas. Algunos de los más usuales se muestran en la Figura 1.6. Todos los fabricantes de estos cojinetes emplean los mismos estándares para permitir su intercambiabilidad (Pirro y Wessol, 2001).

Los cojinetes de rodadura pueden estar lubricados por lubricantes líquidos o grasas. El lubricante (normalmente grasa) suele estar sellado dentro del rodamiento o, para altas veloci-

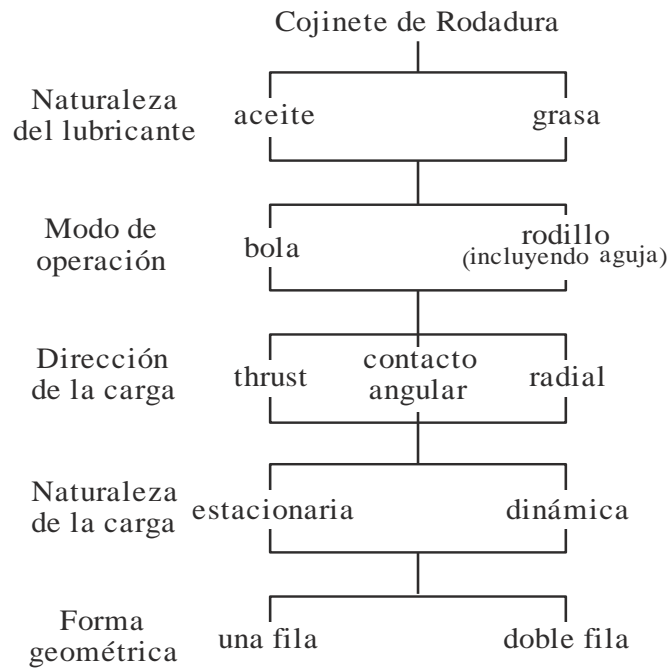


Figura 1.5: Clasificación de cojinetes de rodadura (Hamrock *et al*, 2004).

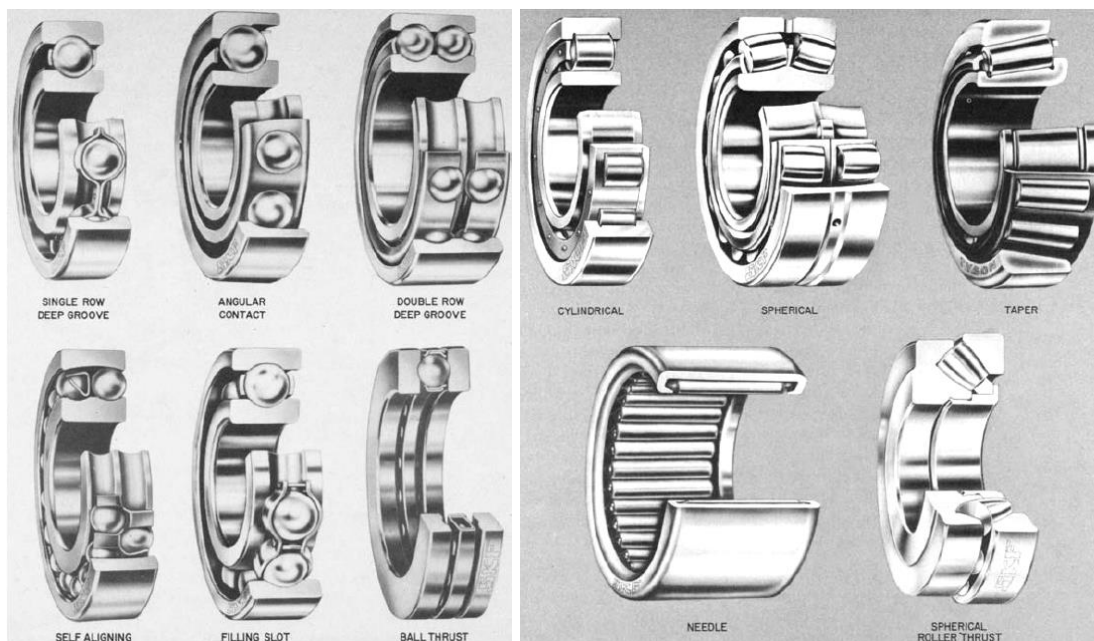


Figura 1.6: Variantes habituales de rodamientos de bolas (izq.) y de rodillos (der.).

dades, puede ser suministrado como una niebla o finas gotas. Si los rodamientos están debidamente lubricados, su capacidad portante y vida útil están limitadas principalmente por la falla por fatiga del acero. Condiciones normales implican compresiones repetitivas en el área de contacto con tensiones de hasta 2,8 GPa. Esto produce, además de la deformación elástica de los elementos rodantes y pistas, tensiones cortantes por debajo de las superficies (tensiones de

Hertz) que inducen fisuras por fatiga en el acero. A su vez, estas fisuras crecen gradualmente hasta entrecruzarse y llegar a producir el desprendimiento de pequeñas porciones de material y formando pozos (pitting). El tiempo que requiere este fenómeno depende principalmente de la carga, velocidad, continuidad de servicio y propiedades del material.

1.2.2 Cojinetes de Deslizamiento

Las formas elementales de un cojinete de deslizamiento se muestran en la Figura 1.7. El cojinete puede ser sólo un orificio en un bloque (izquierda), puede partirse para facilitar su ensamblaje (centro), o en algunas ocasiones en las que la carga soportada mantiene la dirección, el cojinete puede consistir en tan sólo un segmento del bloque (derecha). La parte del rotor dentro del cojinete es comúnmente llamada muñón. Estos cojinetes pueden estar diseñados tanto para lubricación seca como mixta o hidrodinámica, y pueden clasificarse, según el régimen, en cojinetes de fricción, cojinetes impregnados y cojinetes de película gruesa (Pirro y Wessol, 2001; Hamrock *et al.*, 2004).

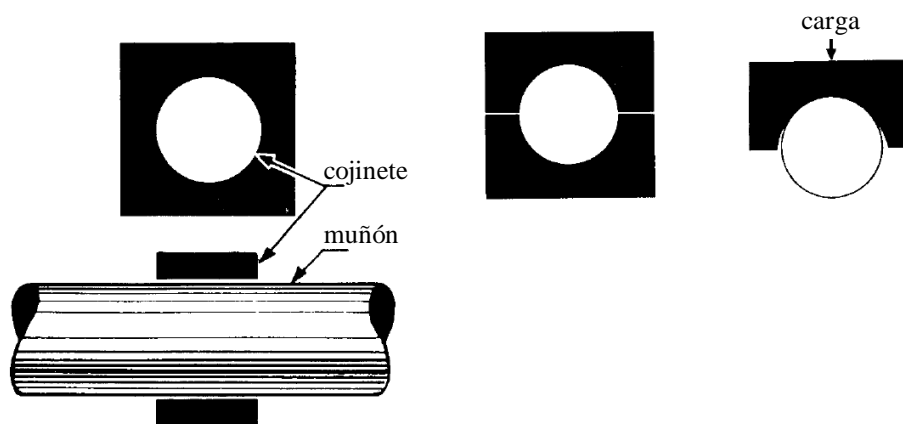


Figura 1.7: Esquema de cojinetes de deslizamiento elementales.

Cojinetes de fricción: En estos cojinetes, usualmente conocidos como “bujes”, las dos superficies entran en contacto por deslizamiento, rodadura, o ambos, y son lubricados por lubricación seca. Ejemplos de estos cojinetes son aquellos hechos de materiales como nylon, politetrafluoroetileno (PTFE) y carbono, y pivotes de diamante usados en algunos instrumentos. La capacidad portante y fricción de esta clase de cojinetes puede ser relacionada directamente con las propiedades básicas de los materiales en contacto.

Cojinetes impregnados: Una variante a los cojinetes de fricción son los cojinetes impregnados o auto-lubricados. En estos cojinetes, un material poroso (usualmente metálico) es impregnado con un lubricante, produciendo el efecto de auto-lubricación al fluir el lubricante de los poros por dilatación térmica, formando una película entre las superficies en movimiento relativo. El comportamiento de estos cojinetes puede ser descrito como de lubricación hidrodinámica parcial.

El metal poroso se fabrica generalmente sinterizando un polvo metálico (usualmente de bronce o fundición), de manera que los poros sirven de reservorio para el lubricante. La capacidad portante y fricción de estos cojinetes dependen de las propiedades de la matriz sólida, del lubricante y del material del rotor. En general, la aplicación de estos cojinetes queda restringida a bajas velocidades de giro (menores a 1,5 m/s), pero pueden soportar cargas medias relativamente altas (hasta 15 MPa). Una gran ventaja de estos cojinetes es que son simples y económicos, tanto como los de fricción.

Cojinetes de película gruesa: En estos cojinetes, las superficies sólidas están completamente separadas por una película de fluido. El lubricante puede ser un líquido o un gas, y la capacidad portante derivada de la presión en la película puede ser generada por el propio movimiento de los elementos de máquina (cojinetes hidrodinámicos), por presurización externa (cojinetes hidrostáticos), por “aplastamiento” hidrodinámico (“squeeze film bearings”), o por una combinación de estas acciones. En todos los casos, la fricción está gobernada por las leyes del flujo viscoso, y las capacidades portantes de estos cojinetes son similarmente dictaminadas por la acción hidrodinámica. Las propiedades del material del cojinete sólo afectan a velocidades extremadamente bajas. La Figura 1.8 presenta una clasificación simple de los cojinetes de película gruesa que considera la naturaleza del lubricante, el modo de operación, la dirección del movimiento, la naturaleza de la carga, y la forma geométrica.

Los métodos para alimentar el lubricante en estos cojinetes son muy variados. A bajas velocidades y cargas moderadas, un simple anillo lubricador puede proveer el aceite de un reservorio al cojinete tras arrastrarlo por adhesión. Sin embargo, en la mayoría de las máquinas modernas el lubricante es bombeado para asegurar el llenado adecuado de la película. En el caso de los cojinetes hidrostáticos, estos requieren sistemas de suministro más complejos y presiones de bombeo del orden del megapascal. Este tipo de cojinetes es particularmente ventajoso para cargas elevadas y bajas velocidades o cuando la rigidez perpendicular a la superficie en movimiento es importante.

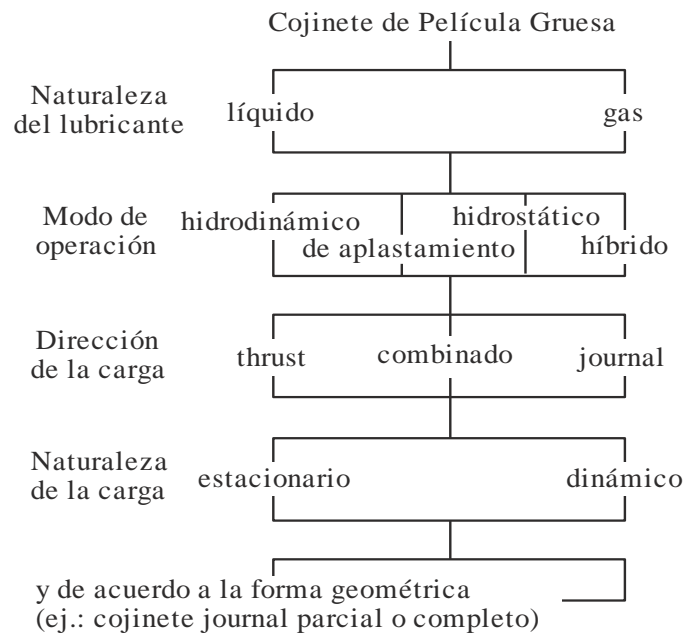


Figura 1.8: Clasificación de cojinetes de película gruesa (Hamrock *et al*, 2004).

1.2.3 Criterios de Selección de Cojinetes

El campo de aplicación de cada tipo de cojinete queda definido, entre otros factores, por la velocidad, carga, facilidad de montaje, vida útil esperada, costo y disponibilidad. Por otro lado, si bien existen algunos lineamientos básicos respecto de cuándo usar cojinetes de deslizamiento y cuándo de rodadura, cada aplicación debe analizarse individualmente en función de las mencionadas variables. Aun así, a continuación se comentan los lineamientos básicos de selección dado que frecuentemente ocurren situaciones en que claramente se puede definir la conveniencia de uso de un rodamiento o un cojinete hidrodinámico para una determinada aplicación. Por comodidad, muchas veces los cojinetes de rodadura serán referenciados como 'rodamientos' mientras que los hidrodinámicos de película gruesa se designarán simplemente como 'cojinetes fluidos'.

La limitación en vida útil que presentan los rodamientos debido a falla por fatiga prácticamente no existe en los cojinetes fluidos. Siempre que se garantice que la película fluida separa completamente las superficies, la vida útil de los cojinetes fluidos es significativamente mayor que la de los rodamientos, especialmente a altas velocidades. No obstante, estos cojinetes presentan desventajas que hacen de los rodamientos la primera elección para muchas aplicaciones. Por ejemplo, los cojinetes fluidos pueden ser susceptibles a la fricción excesiva y desgaste cuando la superficie del rotor tiene contacto ocasional con la del cojinete y la lubricación fluida se degrada a lubricación mixta o límite. En los cojinetes hidrodinámicos, esto

ocurre a bajas velocidades de operación o durante arranques o paradas, dado que éstos requieren cierta velocidad mínima para generar una película de espesor suficiente para separar las superficies deslizantes. De acuerdo a la teoría que se discute en capítulos posteriores, la película fluida se genera aun a bajas velocidades, pero en la práctica, debido a la rugosidad de las superficies, vibraciones e imperfecciones, una cierta velocidad mínima es requerida para generar una película con suficiente espesor para prevenir el contacto ocasional entre las superficies. De hecho, aun a altas velocidades del rotor, el contacto superficie-superficie puede ocurrir debido a vibraciones inesperadas o inconvenientes en el sistema. Una desventaja adicional de los cojinetes fluidos es el riesgo de falla si el suministro de lubricante es interrumpido, aun por un corto período. La combinación de alta velocidad y contacto directo es crítica, porque la película viscosa genera calor a una velocidad sumamente alta. En el caso de una inesperada falta de lubricante, el cojinete puede sucumbir en una catastrófica (repentina) falla. Estas fallas catastróficas son usualmente de la forma de soldadura entre eje y cojinete o de fusión del recubrimiento del cojinete. Sin un suministro continuo de lubricante, la temperatura se eleva súbitamente por la alta fricción del contacto directo. Sin embargo, para aplicaciones de baja velocidad y cargas moderadas, los cojinetes de deslizamiento con lubricación límite pueden proporcionar una vida de servicio larga y pueden ser una alternativa adecuada a los rodamientos. Si el diseño de estos cojinetes es adecuado, se desgastan gradualmente y no presentan el problema de falla inesperada, como la fatiga en los rodamientos. Es más, cuando están desgastados, es posible mantener la máquina en funcionamiento hasta que se pueda efectuar el reemplazo. Esta es una ventaja importante dado que previene los gastos inherentes a una parada inesperada (Harnoy, 2003).

Los cojinetes de deslizamiento presentan ventajas adicionales. Pueden ser diseñados de tal forma que puedan ser montados y reemplazados más fácilmente que los rodamientos. Pueden ser partidos, por lo que pueden cambiarse sin desmontar el rotor. Además, tienen mucha mayor capacidad portante a igualdad de tamaño con un rodamiento ya que en éstos la carga está limitada por las altas tensiones de Hertz. Los cojinetes de deslizamiento también presentan menos sensibilidad que los rodamientos a la suciedad del lubricante y daños por presencia de agua. Sin embargo, los rodamientos tienen muchas otras ventajas. Una de las mayores es su relativo bajo costo de mantenimiento, además que pueden operar con una cantidad mínima de lubricante. Los rodamientos pre-lubricados y sellados son muy convenientes para muchas aplicaciones dado que no requieren lubricación posterior. En muchos casos, los diseñadores los prefieren sólo porque es más sencillo seleccionar del catálogo de un fabricante.

Aun considerando los comentarios anteriores, las ventajas y desventajas de cada tipo de cojinete deben considerarse cuidadosamente para cada aplicación. La selección del tipo de cojinete afecta sensiblemente la vida de la máquina y el costo de operación y mantenimiento de la misma durante su ciclo de vida. Asimismo, dependiendo de la industria en la que se emplee la máquina, las consideraciones particulares sobre los costos relativos entre inversión inicial, mantenimiento, operación y pérdidas de producción dictaminan el tipo de cojinete adecuado.

En base a lo establecido, puede afirmarse que las siguientes características hacen que los rodamientos sean más deseables que los cojinetes fluidos en muchas situaciones (Hamrock *et al.*, 2004):

- 1- baja fricción en el arranque y durante la operación
- 2- capacidad de soportar cargas radiales y axiales
- 3- menos sensibilidad a las interrupciones en el suministros de lubricante
- 4- no presentan inestabilidades auto-excitadas
- 5- buen arranque a bajas temperaturas
- 6- posibilidad de sellar el lubricante dentro del rodamiento
- 7- cambios de carga, velocidad y temperatura de operación (dentro de límites razonables) tienen efectos mínimos en el desempeño satisfactorio de los rodamientos

y las siguientes características hacen que los rodamientos sean menos deseables que los cojinetes de película gruesa:

- 1- vida finita a la fatiga, sujeta a grandes fluctuaciones
- 2- necesidad de mayor espacio en la dirección radial
- 3- menor capacidad de amortiguamiento
- 4- mayor nivel de ruido
- 5- requerimientos de alineación más severos
- 6- mayor costo

La “Engineering Sciences Data Unit” (ESDU) presentó en 1965 una serie de lineamientos para la selección de cojinetes radiales y una homónima para cojinetes axiales en 1967. Los documentos de ESDU son aún una invaluable guía de referencia que se sigue empleando desde entonces para seleccionar el tipo adecuado de cojinete que cumpla con especificaciones dadas de carga, velocidad y geometría. Las Figuras 1.9 y 1.10 muestran la capacidad de carga máxima típica de varios tipos de cojinetes radiales y axiales. Estas figuras, que fueron extraídas de Hamrock *et al.* (2004), corresponden a las originalmente presentadas en la mencionada guía de la ESDU. La Figura 1.9 presenta información de capacidad de carga máxima de cojinetes radiales de diversos diámetros operando a distintas velocidades. Las curvas están formuladas para condiciones normales de operación, temperatura ambiente, componentes comercialmente

disponibles y una vida nominal de 10000 h. Cargas y velocidades mayores o diámetros menores pueden alcanzarse con estándares más elevados o materiales especiales. Los cojinetes de deslizamiento considerados tienen longitudes iguales a sus diámetros, y los cojinetes hidrodinámicos emplean un aceite mineral de viscosidad media como lubricante. De forma similar, la Figura 1.10 muestra la capacidad de carga máxima típica de varios tipos de cojinetes axiales de diversos diámetros, también operando a temperatura ambiente, distintas velocidades y una vida nominal de 10000 h.

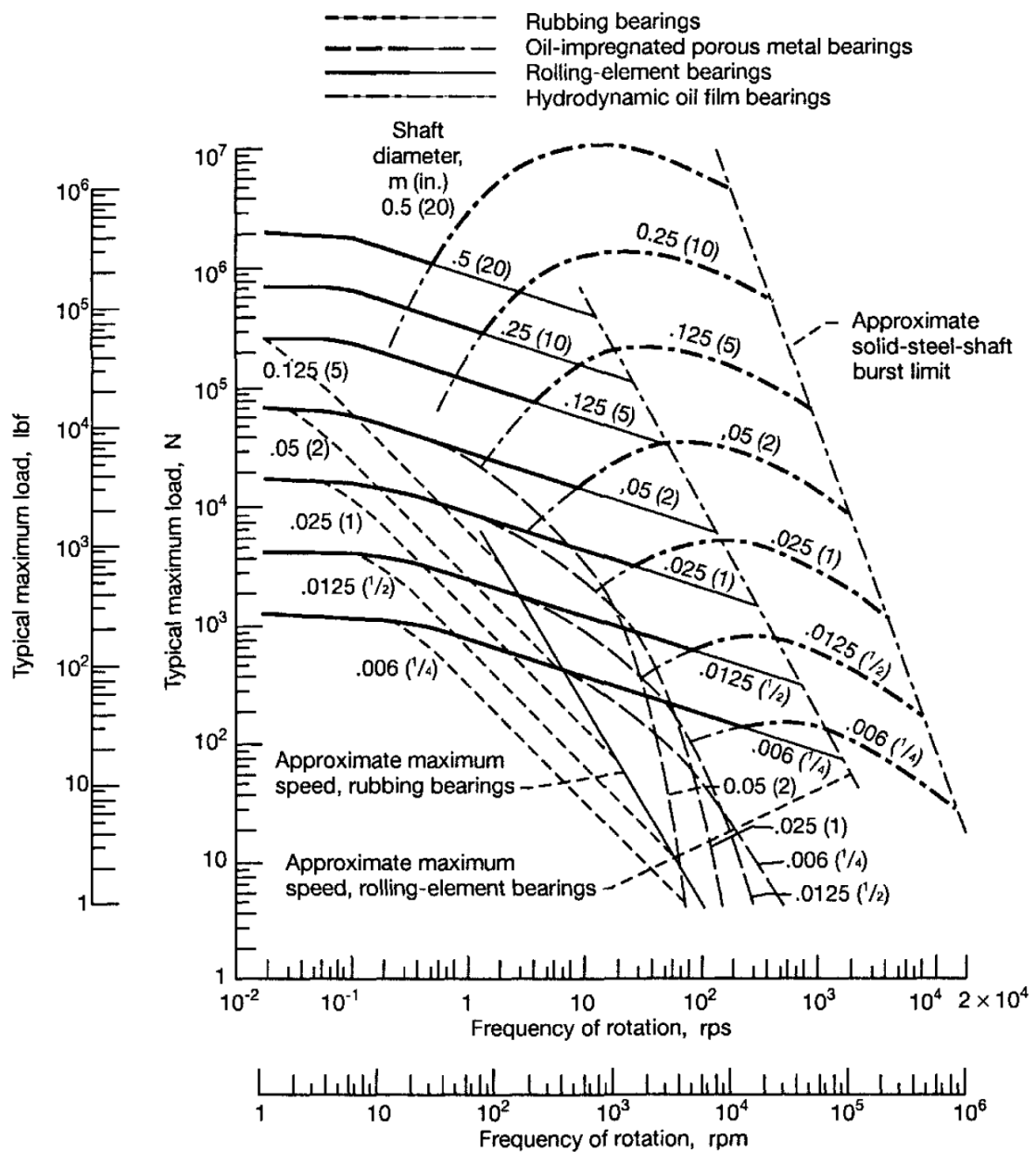


Figura 1.9: Guía general para la selección de cojinetes radiales. Se consideran cojinetes de deslizamiento de longitud y diámetro iguales, y aceite mineral de viscosidad media para los cojinetes hidrodinámicos (Hamrock *et al.*, 2004).

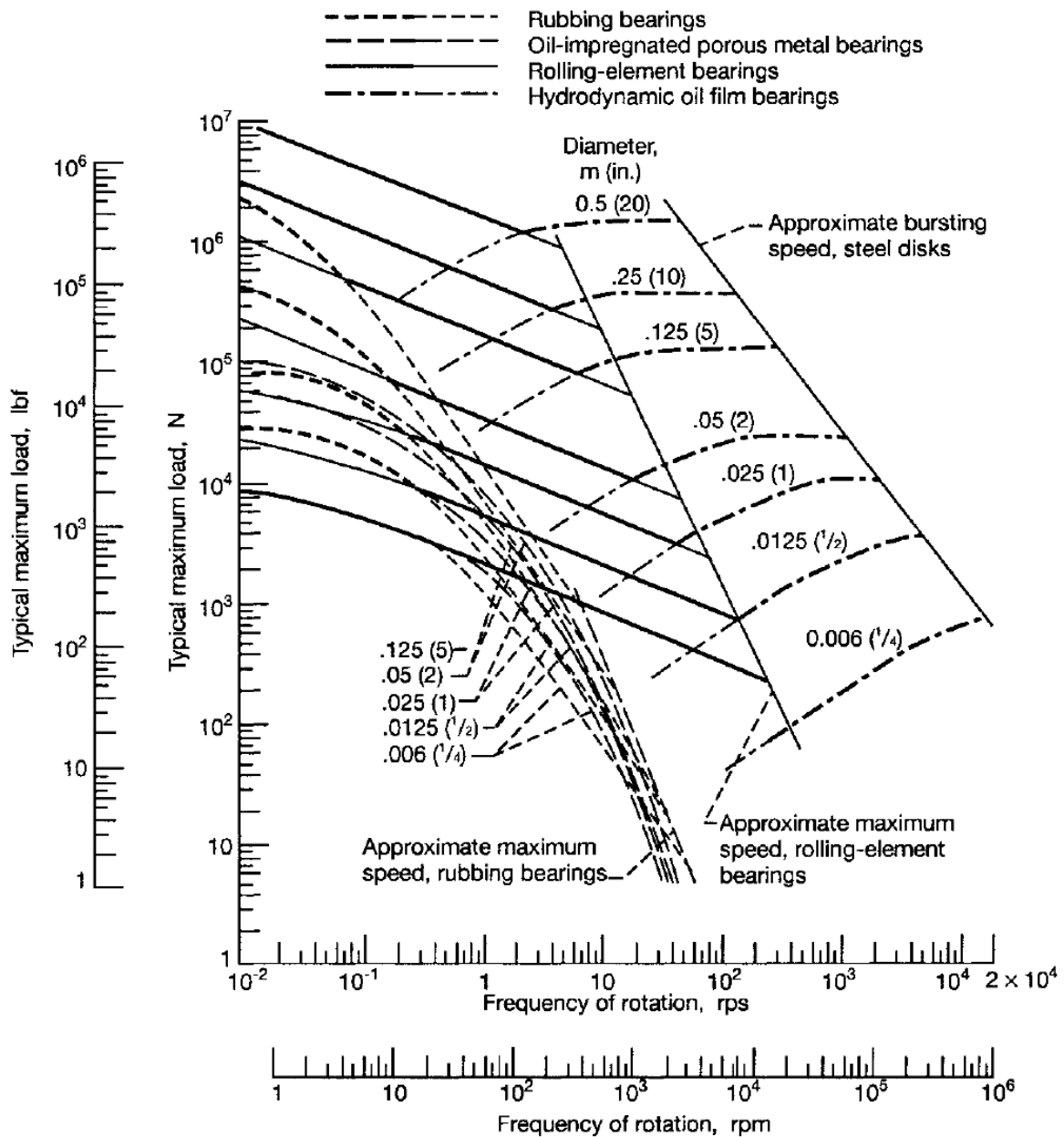


Figura 1.10: Guía general para la selección de cojinetes axiales. Se consideran cojinetes de deslizamiento con relaciones de radio externo a radio interno típicas, y aceite mineral de viscosidad media para los cojinetes hidrodinámicos (Hamrock *et al.*, 2004).

1.3 COJINETES HIDRODINÁMICOS

De todos los tipos de cojinetes presentados, los cojinetes hidrodinámicos o auto-actuantes son los que resultan de especial interés en este trabajo. Tal como se describió, estos son cojinetes de deslizamiento de película gruesa que dependen por completo del movimiento relativo entre el muñón y el cojinete para establecer presión en la película y lograr capacidad portante.

La Figura 1.11 exhibe algunas fotos de cojinetes hidrodinámicos radiales elementales,

mientras que la Figura 1.12 presenta un esquema de este cojinete con sus principales características y nomenclatura habitual. Aquí se aprecia que entre el muñón (rotor) de radio R , y el cojinete (estator) de radio $R+C$, existe una separación, h . Esta separación varía con la posición circunferencial como resultado de la excentricidad, e , que se genera entre ambas piezas debido a la acción de la carga exterior, W . Al girar el rotor a cierta velocidad ω , “bombee” el lubricante hacia el estrechamiento, produciendo una distribución de presión tal



Figura 1.11: Variantes habituales de cojinetes hidrodinámicos simples.

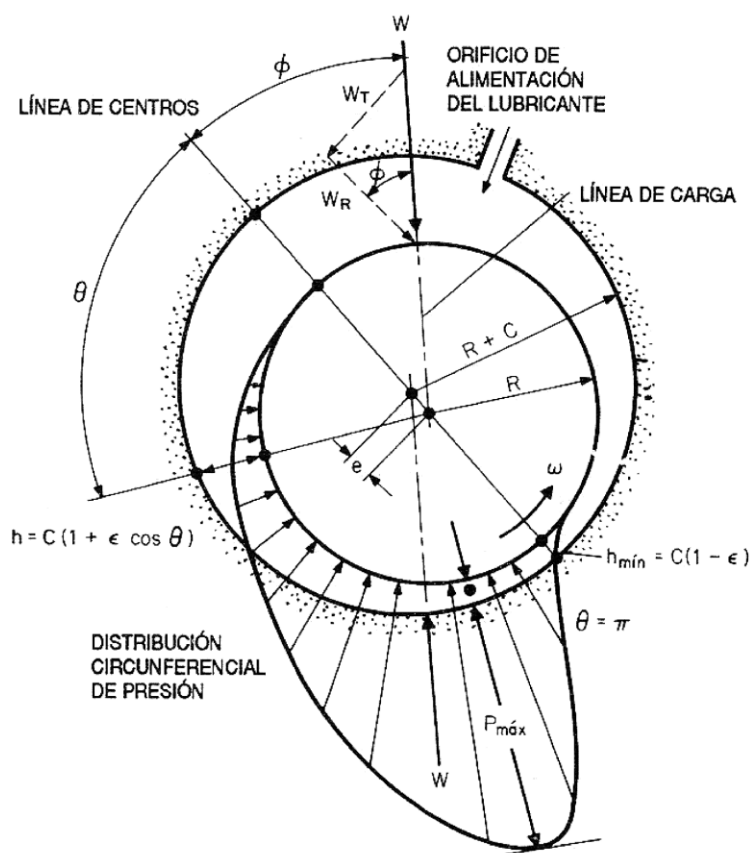


Figura 1.12: Características principales de un cojinete hidrodinámico.

que genere una fuerza igual y contraria a W equilibrando el sistema. Puede apreciarse, además, que sobre la línea que une los centros se encuentran el espesor máximo de película, y el espesor mínimo, h_{min} .

Existe una amplia variedad de configuraciones de cojinetes hidrodinámicos. En la Figura 1.13 (extraída de Shigley y Mischke, 1999) se aprecian las alternativas más comunes. La elección de la configuración para una dada aplicación depende de diferentes factores, entre los cuales se encuentra el costo, la carga, la pérdida de potencia, las propiedades dinámicas, la facilidad de construcción y de instalación, etc.

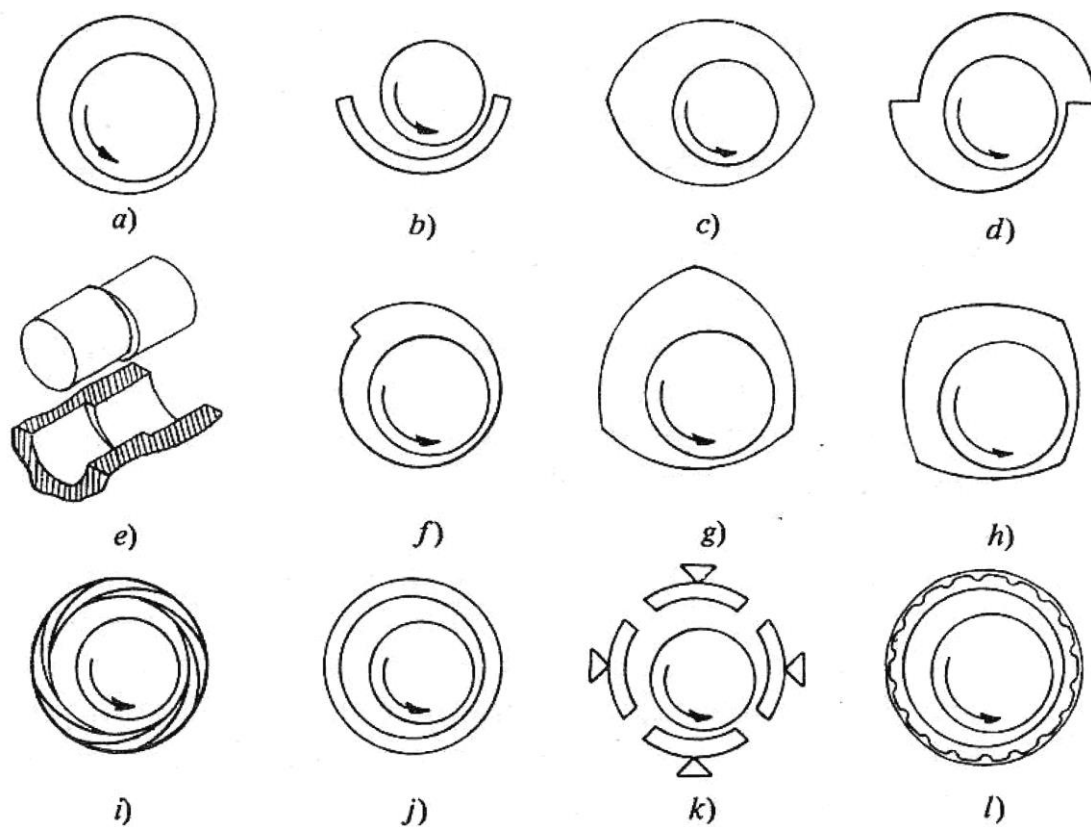


Figura 1.13: Configuraciones más frecuentes de los cojinetes hidrodinámicos.

La configuración más utilizada debido a su relativamente fácil construcción y bajo costo es la denominada 'cojinete completo' o 'cojinete simple' (Fig. 1.13a). En ella la superficie del cojinete rodea completamente al muñón. En el 'cojinete parcial' (Fig. 1.13b), la superficie del estator se extiende a lo largo de sólo un segmento de la circunferencia. Estos cojinetes se usan en casos de carga unidireccional. Cuando se emplean dos sectores circulares, los cojinetes se denominan 'elípticos' o tipo 'limón' (Fig. 1.13c). Estos se emplean a velocidades bajas y moderadas y su uso es extensivo en turbinas. Aquellos cojinetes elípticos en los que las dos

mitades cilíndricas se desplazan lateralmente a lo largo del eje mayor son llamados 'cojinetes descentrados' (Fig. 1.13d). Éstos tienen una rigidez horizontal relativamente alta que ayuda a evitar la inestabilidad dinámica. La Fig. 1.13e muestra un caso en que tanto el muñón como el cojinete se dividen axialmente en segmentos con ejes descentrados. Esta configuración se denomina 'cojinete oscilante', y produce un movimiento oscilatorio dinámico que genera una película más gruesa.

Cuando se maquina un escalón en la superficie del cojinete (Fig. 1.13f), el cojinete se denomina 'de escalón'. Su objetivo es el de crear presión dinámica adicional al hacer pasar el lubricante por la discontinuidad. Esto acrecienta la carga sobre el muñón y disminuye su susceptibilidad a los problemas de vibración. Los cojinetes que tienen tres o más sectores (Figs. 1.13g y h) son llamados 'multilobulares' y suelen emplearse en aplicaciones de lubricante gaseoso. Actúan como varios cojinetes parciales en serie. Los 'cojinetes de hojas múltiples' (Fig. 1.12i) son una variante de los multilobulares. Constan de cierto número de arcos circulares idénticos cuyos centros se encuentran igualmente espaciados alrededor de un círculo generador. En los 'cojinetes de anillo flotante' (Fig. 1.13j), la película se divide en dos por medio de la adición de un anillo flotante entre el muñón y el cojinete. Estos tienen menos pérdidas por fricción, una reducida pérdida de calor y proporcionan muy buena estabilidad. Los cojinetes de anillo flotante son comúnmente empleados en turbo-sobrealimentadores. En los 'cojinetes de zapatas pivotantes' (Fig. 1.13k) hay una serie de cojinetes parciales articulados que rodean al muñón. Cada uno de ellos puede oscilar sobre un punto fijo ante algún cambio en las condiciones de operación. A pesar de su alto costo, los cojinetes de zapata pivotante presentan la ventaja de tener excelentes propiedades dinámicas. Finalmente, el 'cojinete de hoja' (Fig. 1.13l) consiste en una superficie muy delgada que descansa sobre las crestas de una lámina corrugada, brindando la posibilidad de adaptar la forma a la sollicitación. Estos cojinetes tienen baja capacidad portante, pero brindan relativamente alta estabilidad.

Independientemente de la configuración, el requerimiento fundamental para la lubricación hidrodinámica es la presencia de un lubricante de viscosidad correcta y en cantidad suficiente y constante como para inundar el espacio entre las superficies. La película de lubricante formada en un cojinete hidrodinámico es función de la velocidad, la carga y la viscosidad del lubricante. En cuanto a la teoría de la lubricación hidrodinámica, ésta surge de la descripción del flujo del lubricante dentro del cojinete mediante la resolución de los balances de cantidad de movimiento, masa y energía aplicados al fluido. La complejidad del sistema de ecuaciones resultante hace que, aun cuando los cojinetes son sistemas usados desde hace mucho tiempo en

gran cantidad de aplicaciones, sólo se conozcan soluciones analíticas a situaciones idealizadas de geometría y lubricante. Esto es, flujo isotérmico de un lubricante Newtoniano (o ley de la potencia) y cojinete de longitud infinita ($L/D \rightarrow \infty$) o de longitud nula ($L/D \rightarrow 0$). Bajo otras consideraciones, se requiere el uso de métodos numéricos o analíticos, para resolver el sistema de ecuaciones, muchas veces complementados por experimentación (Stachowiak y Batchelor, 2000).

Desde el punto de vista del diseñador, aún a pesar de la extensa historia de esta temática, existen contadas herramientas para el correcto dimensionamiento de los cojinetes hidrodinámicos. En su mayoría se trata de tablas y nomogramas basados en correcciones sobre alguna de las soluciones analíticas límite mencionadas ($L/D \rightarrow \infty$ ó $L/D \rightarrow 0$), o bien en la solución numérica de las ecuaciones de conservación en el fluido lubricante. Los métodos más comúnmente empleados datan de 1950 o incluso antes (Shigley y Mischke, 1999). Independientemente del caso, se trata de soluciones estipuladas para una serie de condiciones que, salvo una casualidad, no coinciden con la del cojinete que en particular se esté estudiando y, consecuentemente, debe recurrirse a interpolaciones en gráficos e iteraciones de prueba y error. Una limitación importante de estos métodos radica en las hipótesis que consideran. De allí que generalmente se logra el diseño para un cojinete isotérmico con carga y velocidad constantes. Una alternativa a la aplicación de estas técnicas usuales es la implementación de un programa capaz de resolver las ecuaciones de conservación en el fluido. Esto puede hacerse mediante el desarrollo de un código específico, o bien mediante el empleo de un software comercial genérico de fluidos. Sin embargo, en este caso se requiere de la experticia del programador o usuario del programa para lograr la resolución, excediendo las capacidades más globales de un diseñador de maquinaria.

Por otro lado, cabe señalar que la creciente demanda de máquinas más potentes, eficientes, veloces y pequeñas ha elevado los estándares de diseño y fabricación. El impacto de tales exigencias sobre los cojinetes hidrodinámicos ha ido modificando no sólo los materiales de fabricación de las superficies y la calidad y composición de los lubricantes, sino también su tamaño y geometría. En la actualidad, el valor de la relación de aspecto para un cojinete estándar suele ubicarse entre $\frac{1}{2}$ y 2, y la tendencia apunta hacia la fabricación de cojinetes cada vez más cortos.

Por todo lo expuesto anteriormente, y considerando la importancia que los cojinetes hidrodinámicos tienen en infinidad de máquinas y aplicaciones, resulta de particular interés, no sólo contar con un conocimiento acabado del flujo en cojinetes hidrodinámicos, sino también

con herramientas que describan la operación de estas piezas bajo condiciones reales de uso.

1.4 OBJETIVOS Y ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

El objetivo principal del presente trabajo de tesis es contribuir al entendimiento del flujo en cojinetes hidrodinámicos, en particular de flujo incompresible y laminar de fluidos Newtonianos, y generar herramientas para el diseño de estos cojinetes que describan su operación bajo condiciones reales de uso. Para ello, se abordan tres frentes complementarios:

- *Estudio analítico.* Se analiza de manera físico-matemática el fenómeno de la lubricación hidrodinámica y se deducen las ecuaciones fundamentales que lo rigen proponiendo alternativas analíticas de solución. Esas soluciones se comparan con otras de la bibliografía y con resultados numéricos exactos del sistema de ecuaciones.
- *Estudio numérico.* Se analizan variantes para la resolución numérica del sistema de ecuaciones que gobiernan los cojinetes termohidrodinámicos, y se comparan con otros resultados de la bibliografía.
- *Estudio experimental.* Se diseña y construye un banco de ensayos de cojinetes hidrodinámicos para contar con información experimental que sirva de referencia para éste y futuros trabajos teóricos.

En función de los objetivos antes listados, la tesis se organiza presentando en el Capítulo 2 una breve, pero lo más completa posible, reseña histórica de la lubricación termohidrodinámica. A continuación, en el Capítulo 3 se hace uso de las herramientas tradicionales de Mecánica de los Fluidos para deducir las ecuaciones que describen el flujo laminar de un fluido Newtoniano incompresible en el cojinete hidrodinámico radial cilíndrico. Además, se deducen y analizan las soluciones analíticas para el flujo estacionario e isotérmico en situaciones extremas de cojinetes infinitamente largos e infinitamente cortos, no sólo porque son soluciones exactas sino porque fijan los límites de cualquier otra solución. Adicionalmente, en ese Capítulo se presentan las ecuaciones que describen el funcionamiento en estado estacionario de otros dos tipos de cojinetes, el de anillo flotante y el de zapatas pivotantes.

En el Capítulo 4 se resumen algunos de los métodos y soluciones analíticas aproximadas encontrados en la bibliografía para cojinetes de longitud finita y se propone un nuevo método basado en teoría de perturbación. Se presenta así una nueva solución aproximada de la Ecuación de Reynolds que extiende la teoría del ISJB a cojinetes de longitud finita. Se calculan a partir de esta propuesta las diversas variables de flujo asociadas y se analiza su

comportamiento. En este Capítulo también se presentan dos propuestas para el tratamiento del balance de energía en situaciones de estado estacionario a fin de considerar la influencia del cambio de temperatura en el desarrollo de la película fluida.

El Capítulo 5 incluye la presentación y discusión de soluciones exactas, tanto de la Ecuación de Reynolds como de los balances de conservación acoplados para el caso de flujo tridimensional no-isotérmico en estado estacionario en cojinetes de longitud finita, obtenidas por métodos numéricos.

Luego, en el Capítulo 6 se aborda el trabajo experimental realizado. Se describe aquí en primer lugar los resultados obtenidos durante una pasantía en el Turbomachinery Laboratory de Texas A&M University, EEUU, trabajando con un cojinete de zapatas pivotantes. La segunda parte de este Capítulo está dedicada a la descripción del diseño, construcción y puesta en funcionamiento de un banco de ensayo de cojinetes hidrodinámicos propio.

Finalmente en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones globales a las que se arriba en esta tesis, y se proponen líneas de trabajo futuro para continuar con su desarrollo. Las conclusiones parciales se listan y comentan en cada Sección correspondiente.

REFERENCIAS

- Grote, K.H. y Antonsson, E.K. (Ed.), *Handbook of Mechanical Engineering*, Springer, 2009.
- Hamrock, B.J., Schmid, S.R. y Jacobson, B.O., *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, 2da. Ed., Marcel Dekker Inc., 2004.
- Harnoy, A., *Bearing Design in Machinery. Engineering Tribology and Lubrication*, Marcel Dekker Inc., 2003.
- Pirro, D.M. y Wessol, A.A., *Lubrication Fundamentals*, 2da. Ed., Marcel Dekker Inc., 2001.
- Shigley, J.E. y Mischke, Ch.R., *Fundamentos de Diseño Mecánico: Cojinetes y Lubricación. Serie Para Diseñadores Mecánicos. Tomo I*, McGraw Hill, 1999.
- Stachowiak, G.W. y Batchelor, A.W., *Engineering Tribology*, 2da. Ed., Butterworth-Heinemann, 2000.
- Tottem., G.E., *Handbook of Lubrication and Tribology. Application and Maintenance*, 2da. Ed., CRC Tress, 2006.

CAPÍTULO 2

DESCRIPCIÓN HISTÓRICA

Fricción y lubricación son dos temas que se remontan a los comienzos de la historia misma, y su estudio científico a varios siglos atrás. Sin embargo, el entendimiento real de estas áreas no comienza hasta fines de 1800. Los importantes desarrollos realizados desde entonces han demostrado lo complejo de los procesos de desgaste y fricción. Desde el punto de vista experimental, el aporte al verdadero entendimiento de la naturaleza del desgaste y la lubricación ha sido más tardío, ya que ha dependido de los avances en instrumentación y microscopía. Consecuentemente, la Tribología es un campo nuevo de la ciencia en comparación con muchos otros campos básicos de ingeniería, como termodinámica, mecánica y plasticidad, pero su historia es muy amplia e interesante de analizar.

En este Capítulo se presenta una breve, pero lo más completa posible, reseña sobre la historia de la lubricación hidrodinámica. Básicamente se realiza una ambientación sintética en cuanto a los desarrollos pre-Reynolds, para describir luego en detalle los avances desde el fructífero período de 1880. Cabe señalar que en este Capítulo de reseña histórica se han considerado muy pocos de los numerosos trabajos desarrollados en esta área en los últimas dos décadas. Los más relevantes de estos últimos, relacionados con esta tesis, se citan y analizan en el transcurso de los próximos Capítulos, a medida que se requiera.

2.1 HISTORIA DE LA FRICCIÓN Y LA LUBRICACIÓN

El fenómeno de fricción ha sido parte de la vida diaria desde los comienzos de la existencia humana. No es sorprendente que algunas de las primeras actividades humanas se relacionaran con la reducción de la fricción cuando ésta representaba un problema, o con el uso de la

fricción cuando resultaba beneficiosa. La primera categoría incluye el uso de aceites vegetales o grasas animales como lubricantes tanto como el uso de elementos rodantes para aprovechar la baja resistencia al movimiento. La segunda categoría puede ser ejemplificada por el frotamiento de varas para encender fuego y el control de movimiento por acción de frenado.

En la mayoría de las situaciones, la fricción es un fenómeno no deseado que debe ser minimizado. Resulta en movimientos dificultosos, esfuerzos desaprovechados, generación indeseada de calor, y desgaste y daño de las superficies en contacto. No obstante, es difícil de imaginar el mundo sin fricción. En un ambiente sin fricción, no habría fuerzas de tracción para permitir la locomoción, adherencia, frenado, ajuste, ni muchas otras situaciones que se han convertido en fundamentales para la vida humana.

Los primeros intentos para reducir la fricción documentados se remontan al Siglo XX A.C. Esto se ilustra en la Figura 2.1, que muestra una pintura de un templo egipcio en la que se aprecia un hombre derramando aceite para facilitar el desplazamiento de un coloso. Otro ejemplo es la carroza encontrada en la tumba egipcia de Yusa y Thulu, del Siglo XV A.C, que presenta evidencias de grasa animal en sus ejes, presumiblemente usada para su lubricación. La primera observación escrita respecto que la fricción por rodadura es mucho menor que la fricción por deslizamiento la hizo el filósofo griego Themistius (390-320 A.C.). De hecho, eso es lo que hizo de la invención de la rueda el mayor avance en el campo del transporte terrestre.

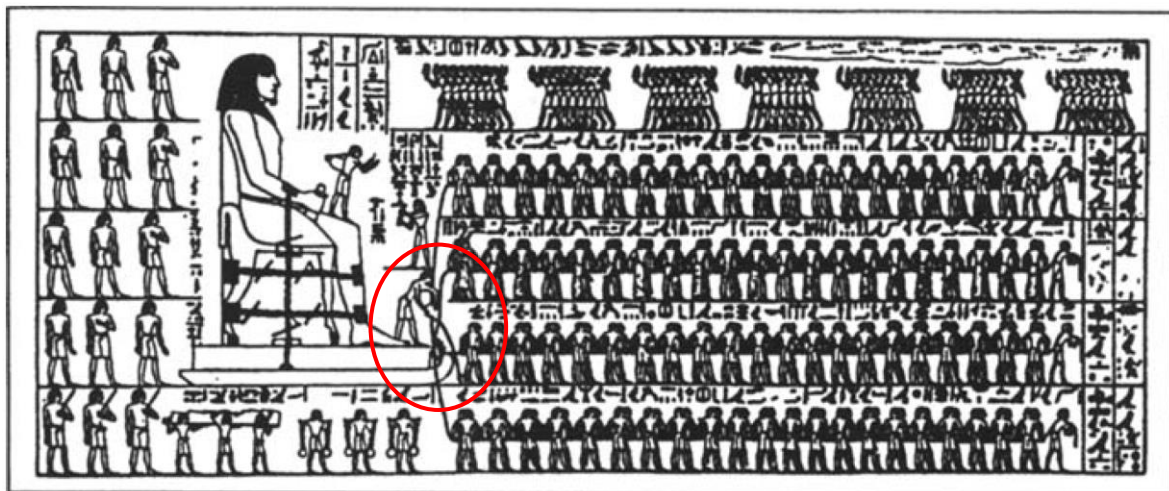


Figura 2.1: Registro egipcio de 1900 A.C. mostrando el uso de aceite para reducir la fricción durante el traslado del coloso.

Sin embargo, el primer avance importante en el entendimiento de la fricción se realizó recién en la Edad Media con la formulación, por parte de Leonardo da Vinci, de las leyes básicas de fricción. Estas leyes, que establecen que la fuerza de fricción entre dos superficies es

proporcional a la fuerza que trata de juntarlas e independiente del área de contacto, permitieron contar con un método de predicción racional del valor de la fuerza de fricción (MacCurdy, 1938). Más adelante, Guillaume Amontons, en un trabajo publicado en los *Proceedings of the French Royal Academy of Sciences* (Amontons, 1699), redescubrió las leyes de fricción propuestas originalmente por Leonardo de Vinci. El hecho de que la fuerza de fricción fuese proporcional a la carga normal fue aceptada por la academia, pero la independencia con el área de contacto fue recibida con escepticismo. El académico De La Hire se volcó a la verificación de la segunda ley y logró confirmar su veracidad (Dowson, 1979). Una observación interesante fue adelantada años después por John Desaguliers quien, en su libro sobre filosofía experimental de 1734, indicó que la resistencia por fricción entre cuerpos metálicos podía incrementarse luego de pulir las superficies en contacto. Él atribuyó este hecho a fuerzas adhesivas que llamó “cohesión”, aunque no pudo cuantificarlas.

Casi medio siglo después, Charles Augustin Coulomb (Coulomb, 1785) reconoció la importancia de la rugosidad de las superficies y sugirió que la fricción se producía por el trabajo hecho en arrastrar una superficie sobre otra. Coulomb es generalmente reconocido como el fundador de las actuales leyes de fricción, aunque su entendimiento sobre las causas de la misma no era completamente claro. Uno de las contribuciones importantes de Coulomb es su postulado de que el contacto sólo ocurre en los puntos discretos de contactos de asperezas. No obstante, él rechazó la teoría de adhesión y razonó que si la adhesión existía, la resistencia por fricción debería duplicarse si el área de contacto lo hacía. En consecuencia, creía que la resistencia es debida al trabajo hecho en mover una superficie sobre la rugosidad de la otra. John Leslie criticó tanto la teoría de la rugosidad como la de adhesión, creyendo que la fricción se debía al trabajo hecho por deformación de la superficie debido a la rugosidad (Leslie, 1829). A pesar de que estos primeros trabajos hacían alusión al papel de la rugosidad en el mecanismo de fricción, se tardó más de un siglo de investigación en concluir que la fricción entre sólidos resulta de su interacción en las regiones donde están en contacto real y que está influenciada por la geometría de las superficies, sus propiedades elásticas, las fuerzas adhesivas en los contactos reales, y por cómo la energía es perdida cuando las superficies son deformadas durante el deslizamiento.

La fricción es generalmente dividida en tres regímenes: seca, límite o mixta, e hidrodinámica. En la fricción seca, la limpieza de las superficies es uno de los factores más importantes que influyen sobre la resistencia por fricción. Incluso una capa de una sola molécula de grasa de la atmósfera o de los dedos puede cambiar el coeficiente de fricción

significativamente. La influencia de la limpieza de las superficies es mucho mayor que la de la rugosidad de las mismas. En el otro extremo, cuando las superficies están separadas por una película gruesa de lubricante, la resistencia al movimiento está determinada por el comportamiento dinámico de la película. Osborne Reynolds publicó en 1886 la base fundamental para la teoría de lubricación hidrodinámica y la resistencia por fricción (Reynolds, 1886). En este caso, no existe contacto sólido-sólido y la fricción es un resultado de la resistencia al corte de la película, determinada por la viscosidad del lubricante y el espesor de la película. El análisis de Reynolds fue presumiblemente inspirado por los hallazgos experimentales de Nicolai Petrov y Beuchamp Tower. Petrov reportó en 1883 que la propiedad más importante del fluido en la lubricación hidrodinámica es la viscosidad, y no la densidad como pensó originalmente (Petrov, 1883). Él también concluyó que las pérdidas por fricción son el resultado de las tensiones de corte viscosas en la película. Por otro lado, los resultados experimentales publicados por Tower mostraron que la capacidad portante de un cojinete parcialmente sumergido en un baño de aceite es el resultado de altas presiones desarrolladas en el huelgo entre el rotor y el cojinete, y que ese huelgo es un parámetro fundamental para lograr una película lubricante completa y, consecuentemente, reducir la fricción (Tower, 1883, 1885).

Como ya se comentara en el Capítulo 1, existe otro tipo de lubricación que podría situarse entre la lubricación límite y la hidrodinámica, ésta es la lubricación elastohidrodinámica (EHD). En contactos concentrados lubricados, la presión en el fluido suele ser lo suficientemente alta como para deformar las superficies sólidas. Esta condición existe en muchos elementos de máquina tales como engranajes, rodamientos, levas y neumáticos sobre caminos cubiertos de agua. El análisis de este fenómeno EHD fue primeramente comprendido por Grubin y Dowson y constituye un campo importante de la tribología (Grubin y Vinogradava, 1949; Dowson y Higginson, 1966; Dowson, 1979). Ambas, fricción hidrodinámica y EHD son fuertemente dependientes de la velocidad y de la viscosidad del fluido. Para velocidades bajas o fluidos de poca viscosidad, cuando la película lubricante no es lo suficientemente gruesa para separar las asperezas de las superficies sólidas en contacto, la resistencia por fricción será mucho mayor que con película fluida completa, pero apreciablemente menor que para superficies secas. Una primera investigación sobre este régimen, llamado lubricación límite, fue desarrollada por Sir William Hardy a comienzos de la década de 1920. Su estudio mostró que la resistencia de fricción en el régimen límite es proporcional a la carga normal. La mayor ventaja de la lubricación límite es la de generar una fina película fluida sobre la superficie que reduce los

contactos sólido-sólido y, consecuentemente, reduce la fricción, el desgaste y el ruido (Bowden y Tabor, 1950; Pinkus, 1987; Harnoy, 2003).

De los regímenes de lubricación mencionados, el fenómeno de lubricación hidrodinámica es el motivo de estudio del presente trabajo de tesis, por lo que sus antecedentes serán analizados más en detalle en las próximas Secciones.

2.2 LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Como se adelantó en párrafos anteriores, fueron tres hombres quienes, en un período de muy pocos años, e independientemente unos de otros, formularon el mecanismo de lubricación hidrodinámica y la fundaron como una rama de la ciencia de ingeniería. Ellos fueron el ruso Nicolai Petrov y los británicos Beuchamp Tower y Osborne Reynolds. Lo que los tres tenían en común era que no percibían el proceso de lubricación como asociado a la interacción mecánica de las superficies sólidas, sino relacionado con la dinámica de la película fluida que las separaba. Ese es el aspecto fundamental de la lubricación hidrodinámica, que quedó teórica y experimentalmente establecido en un lapso de tan sólo tres años, 1883-1886.

El concepto comenzó a plasmarse con Nicolai Petrov, quien analizó los primeros trabajos experimentales de G. Hirn (1889-90) y realizó nuevos ensayos para medir las pérdidas en cojinetes. Él postuló dos cuestiones fundamentales: primero, que la propiedad importante del fluido en lo referente a la fricción no es la densidad como era asumido por los contemporáneos, sino la viscosidad; y segundo, que la naturaleza de la fricción no es el resultado del contacto entre las superficies sólidas, sino que deriva de la tensión de corte por efecto viscoso en la película fluida. En otras palabras, propuso la naturaleza hidrodinámica de la fricción en cojinetes. Petrov formuló en su publicación base (Petrov, 1883), la relación para el cálculo de resistencia friccional en la película fluida como el producto de la viscosidad, velocidad y área, dividido por el espesor de la película, expresión válida hasta hoy en día. Sorprende notar que, siendo Petrov un verdadero tribólogo, con cerca de 80 trabajos publicados en la temática de lubricación, haya fallado en extender su descubrimiento sobre la naturaleza de la fricción a la capacidad portante de los cojinetes.

Este descubrimiento fundamental cayó en manos de Beuchamp Tower, quien comenzó a estudiar el que había sido un tema cuasi-obsesivo hasta ese momento en la historia, la determinación de la fricción. Petrov mismo continuó su publicación de 1883 con un número de publicaciones sobre mediciones de pérdidas friccionales en cojinetes. La *Institution of*

Mechanical Engineers de Gran Bretaña, que había organizado un comité de investigación de fricción a altas velocidades, encargó a Tower la realización de una serie de ensayos sobre fricción en cojinetes ferroviarios, siendo el ferrocarril otro de los temas persistentes en la historia de la tribología. La famosa serie de experimentos realizada por Tower culminó con el descubrimiento y posterior cuantificación de la presión hidrodinámica en la película fluida (Tower, 1883, 1885).

La geometría y condiciones operativas del primer cojinete parcial en baño de aceite ensayado por Tower se muestran en la Figura 2.2. En cierta etapa de sus ensayos, en lugar de apoyarse en un baño lubricante, decidió usar un lubricador. Para ello, practicó un orificio de ½ pulgada en el centro del cojinete. No obstante, cuando el muñón comenzó a rotar, se percató que el aceite era bombeado fuera del cojinete. Para frenar la pérdida, insertó un tapón en el orificio, primero de corcho y luego de madera, pero ambos fueron eyectados del mismo. Se percató entonces de que algo sucedía: una película fluida separaba el cojinete del muñón y el fluido estaba bajo alta presión. Tower entonces instaló una serie de manómetros sobre la superficie del cojinete y obtuvo así un mapa de las presiones hidrodinámicas, las cuales igualaban a la carga aplicada luego de ser integradas en el área del cojinete. Indicó además que sin lubricación suficiente, el cojinete opera en el régimen de lubricación límite, mientras que con lubricación adecuada las dos superficies están completamente separadas por la película fluida. Estos resultados históricos fueron publicados en dos trabajos (Tower 1883, 1885). La Figura 2.3 muestra la distribución de presiones medida por Tower.

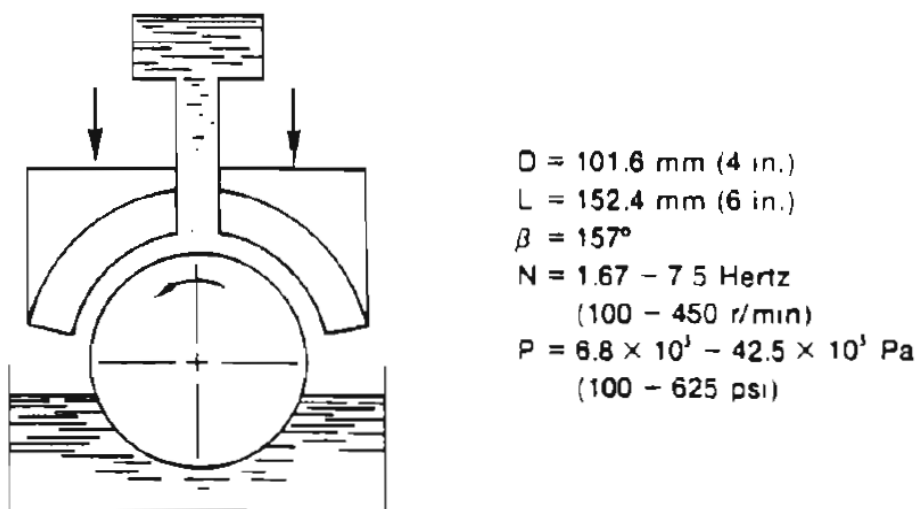


Figura 2.2: Cojinete experimental usado por B. Tower y condiciones de los ensayos (Tower, 1883).

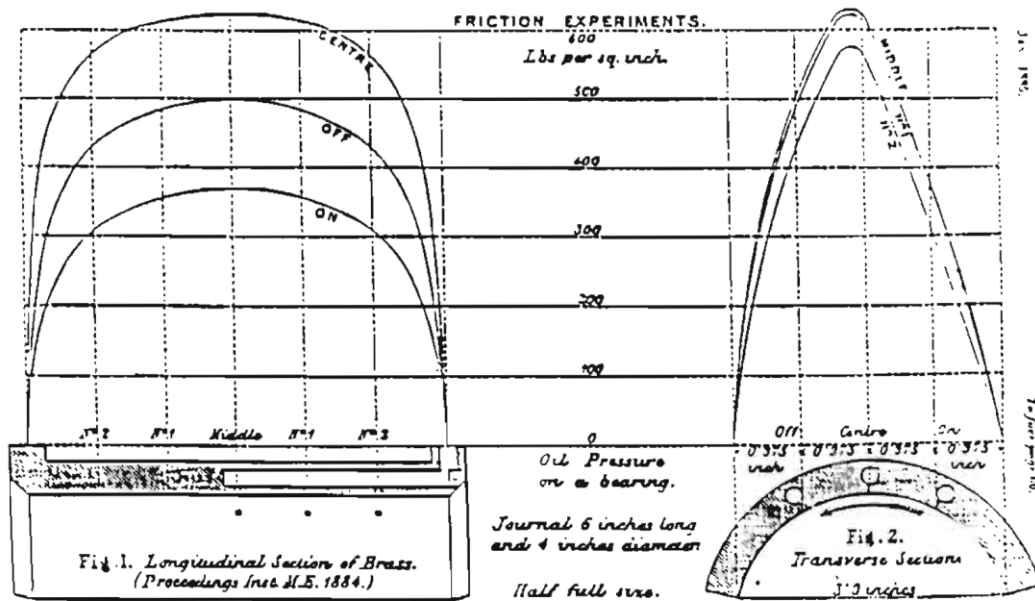


Figura 2.3: Presiones hidrodinámicas medidas por B. Tower (1885).

Así nació el concepto de lubricación hidrodinámica. Antes de ello, los investigadores habían concentrado sus esfuerzos en la realización de ensayos de fricción en cojinetes, mientras que a partir de los experimentos de Tower, quedó claro que la clave para identificar el mecanismo de lubricación residía en el entendimiento de la presión generada durante la operación del cojinete. Ambos, Petrov y Tower llegaron a sus conceptos mediante experimentación y sólo restaba el desarrollo de una base teórica para darle un cimiento científico sólido a tales observaciones experimentales.

Esto fue logrado por Osborne Reynolds casi simultáneamente con los trabajos de los otros dos. Él también empezó analizando la fricción. En una reunión de la *British Association for the Advancement of Science* desarrollada en Montreal, Canadá, en 1884, Reynolds presentó dos trabajos, uno titulado “On the actions of Lubrication”, y otro “On the friction of Journals”. Fue en ese encuentro que Reynolds discutió por primera vez su ecuación diferencial explicando la naturaleza de la lubricación hidrodinámica, aunque no existen registros públicos de esas contribuciones. No obstante, dada la época de esa reunión, se considera probable que Reynolds desarrollara su teoría sin el conocimiento de los experimentos de Tower.

La posición reinante que ocupa Osborne Reynolds en la historia de la lubricación hidrodinámica es, por supuesto, debido a la formulación de la ecuación diferencial básica que hoy lleva su nombre. Él probó los fundamentos físicos y matemáticos de esta ciencia en términos tan lúcidos y exhaustivos que esta ecuación se ha mantenido como una herramienta esencial e intachable hasta la fecha. A comienzos de 1886, Reynolds presentó un trabajo

(Reynolds, 1886) sobre teoría de lubricación a la *Royal Society*, en el que formula la ecuación diferencial conocida actualmente como Ecuación de Reynolds, resultante de la combinación de las ecuaciones de movimiento, continuidad y ley de Newton de la viscosidad. Su expresión, que será derivada en el Capítulo 3, es

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} + \frac{1}{2\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12\pi^2} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial\Theta} \tilde{h}^3 \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \tilde{h}^3 \right) \quad (1)$$

donde \tilde{h} es el espesor de película adimensional, $\tilde{h} = \frac{h}{c}$, c el huelgo, Θ una variable angular adimensional, $\Theta = \frac{\theta}{\pi} = \frac{X}{\pi R} = \frac{x}{\pi}$, p la presión, R el radio del rotor, L el largo del cojinete, x la coordenada adimensional en dirección del movimiento, y z la coordenada axial adimensional.

La propuesta de Reynolds se basa en un análisis de orden de magnitud que se fundamenta en el hecho que la relación entre el espesor de la película y la dimensión del cojinete es del orden de 10^{-3} . Las consideraciones sobre las cuales se basa la deducción son:

- a) la presión es constante en el espesor de la película fluida,
- b) el radio de curvatura de la superficie del cojinete es grande comparado con la película,
- c) el lubricante se comporta como un fluido Newtoniano,
- d) las fuerzas inerciales y de volumen (gravedad) son pequeñas comparadas con las viscosas y de presión,
- e) no existe deslizamiento del fluido en las superficies sólidas, y
- f) las dos superficies son rígidas, con deformaciones elásticas despreciables.

Cabe señalar que estos son precisamente los fundamentos de la que hoy en día se conoce como Teoría de Lubricación, aplicable a cualquier sistema de flujo 'casi unidireccional' entre paredes. El nuevo concepto que emergió de esta formulación, algo que no era aparente en los resultados de Tower, fue que, exceptuando lo cojinetes de "aplastamiento" (*squeeze film bearings*), la acción hidrodinámica requiere de una película convergente. La presencia de una cuña geométrica es, sin duda, una premisa básica en toda la lubricación hidrodinámica.

La citada publicación de Reynolds, de cerca de 80 páginas, contiene mucho trabajo pionero, además de la ecuación diferencial, incluyendo:

- a) una solución para el aplastamiento de la película fluida entre dos platos elípticos aproximándose a cierta velocidad,
- b) el concepto de "cojinetes infinitamente largos", que trató de resolver tanto para cojinetes cilíndricos como de patín,

- c) la derivación de la pendiente óptima para un patín,
- d) el concepto de cavitación en la zona divergente de los cojinetes (siendo Reynolds el primero en sugerir la forma correcta de condición de borde en la zona de cavitación),
- e) la formulación de una relación exponencial entre viscosidad y temperatura, y
- f) la noción de un cojinete con huelgo, esto es, los radios del muñón y cojinete con una diferencia de cierto valor c (en aquellos días, los cojinetes ajustados, con $c=0$, parecían ser la elección natural).

En retrospectiva, aquél trabajo también contiene algunas cuestiones difíciles de explicar. Al tratar de resolver la ecuación para un cojinete largo, Reynolds no integró en forma directa los términos cuyo dividendo era la variable huelgo al cubo y al cuadrado, a pesar de que las soluciones a esas integrales ya eran conocidas en esa época. En su lugar, desarrolló una solución de la presión en términos de una serie, lo cual no sólo es impráctico sino que no tiene convergencia para excentricidades mayores a 0,5. De igual manera, al comparar su solución para cojinetes largos con los ensayos de Tower para cojinetes de relación longitud a diámetro (L/D) de 1,5, Reynolds aplicó un método poco convencional de seleccionar valores arbitrarios de huelgo y excentricidad para lograr concordancia. Aún así, ese artilugio no carece de mérito. Al comparar el modelo con los experimentos encontró un valor de $c=0,02$ mm, proveyendo así el orden de magnitud para el huelgo requerido en lubricación hidrodinámica, un valor desconocido hasta entonces. En la Figura 2.4 se muestra el cojinete analizado por Reynolds.

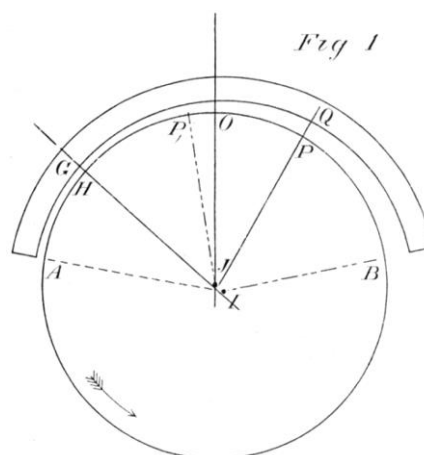


Figura 2.4: Cojinete estudiado por Reynolds en 1886.

Desde ese momento, la teoría hidrodinámica basada en el trabajo de Reynolds atrajo considerable atención por su importancia práctica. El paso más importante de la siguiente fase fue el descubrimiento de que la película lubricante puede ser no sólo de un aceite o líquido, sino

también de un gas. Si bien se le acredita a Kingsbury el descubrimiento de los cojinetes lubricados con gas, G. Hirn fue el primero en sugerir un cojinete de aire (Dowson, 1979; McHugh, 2003). Albert Kingsbury (re)descubrió el empleo de un gas como lubricante de forma accidental. Como profesor del *Mechanical Engineering College of A&MA* en Hanover, E.E.U.U., había construido en 1892 una máquina de torsión y compresión que contenía un arreglo cilindro-pistón de 152,3 mm de diámetro. Durante los ensayos observó que, con el cilindro en posición vertical, el esfuerzo necesario para la rotación del pistón era muy bajo. Más aún, observó lo mismo con el pistón en posición horizontal. La conclusión de Kingsbury fue la misma de Tower, es decir, que la baja fricción se producía por la presencia de una película fluida, en este caso, aire. Él construyó entonces un cojinete especial, del mismo diámetro que el de la máquina, un huelgo radial de 0,02 mm y una carga radial de 222,4 N, y lo hizo funcionar tanto con aire como con nitrógeno. Instaló tomas de presión axial y circunferencial y midió el campo de presión. Unos años después, en 1897, Kingsbury leyó el trabajo de Reynolds y publicó entonces sus propios descubrimientos (McHugh, 2003). Así, el fenómeno de la lubricación hidrodinámica fue extendido a fluidos compresibles, un pilar en la historia de la tribología.

Cabe señalar que el entendimiento de Kingsbury en el tema no está limitado a los cojinetes de gas. Él también es conocido como el inventor de los cojinetes de zapatas pivotantes. La historia de la tribología contiene muchas paradojas y coincidencias, y los cojinetes de zapatas pivotantes son una de ellas. Estos cojinetes son una de los dispositivos más complejos y elegantes, y precisamente por ello fueron desarrollados bien al comienzo de la historia de la lubricación, siendo concebidos simultáneamente y de manera independiente por dos hombres: Kingsbury, como ya se mencionara, y Anthony Michell, de Austria. Conservando su espíritu inventivo, Kingsbury fue posteriormente uno de los primeros en emplear una analogía, en este caso un tanque electrolítico, para simular flujos y presiones y así obtener una solución para cojinetes de longitud finita. En sus últimos logros, el progreso de Kingsbury fue en paralelo con el trabajo de Michell. Este último, además de inventar independientemente el cojinete de zapatas pivotantes, fue un analista habilidoso y obtuvo también una solución para cojinetes de patín de longitud finita expresando la presión en forma de serie (Michell, 1905).

La evolución del tema hasta una disciplina madura de ingeniería se basó en gran medida en tratar de resolver la Ecuación de Reynolds, Ec. (1). Ésta es una ecuación diferencial parcial no homogénea con coeficientes variables, que es difícil de resolver analíticamente. Y aún cuando se puede resolver para casos particulares, los resultados son complicados de usar. Una de las

simplificaciones consiste en asumir el cojinete infinitamente largo, algo tratado por el propio Reynolds de forma no satisfactoria, pero sí por Arnold Sommerfeld. Sommerfeld fue un distinguido físico teórico (escribió 276 artículos y 13 libros) quien aportó notables contribuciones a temas como la estructura molecular, teoría cuántica, análisis espectral y teoría de la relatividad. Por alguna razón, a mitad de su carrera, él tomó la ecuación de Reynolds y la resolvió para cojinetes infinitamente largos considerando que, en esa condición, los cambios en el flujo de corte se corresponden solamente con cambios en la presión circunferencial, dada la inexistencia de flujo axial (Sommerfeld, 1904; Harrison, 1913). Al contrario que Reynolds, Sommerfeld integró directamente la ecuación y obtuvo una expresión analítica para la distribución de presión, carga, posición del centro del muñón y fricción. Las condiciones de borde que empleó fueron las de simple periodicidad. El trabajo que Sommerfeld publicó en 1904 fue el único que hizo en el área de lubricación. Algunos de los aspectos inherentes a su trabajo son:

- **Perfil de Presión:** la solución provee una distribución de presión antisimétrica alrededor del espesor mínimo de película, prediciendo presiones negativas de igual magnitud que las positivas. Dado que la lubricación líquida arroja presiones del orden de decenas o cientos de atmósferas, la existencia de presiones negativas del mismo orden resulta físicamente irreal.
- **Posición del Muñón:** la solución da un ángulo de posición del centro del muñón respecto de la línea de acción de la carga de 90° . En la práctica, al aumentar la excentricidad, la posición del muñón tiende a hacerse colineal con la carga aplicada en lugar de permanecer normal a la misma.
- **Capacidad Portante:** En función del perfil de presión predicho, la capacidad portante calculada resulta cercana al doble de la real.
- **Coefficiente de Fricción:** De esta aproximación surge que el coeficiente de fricción tiene un valor mínimo en cierta excentricidad, cuando en realidad la fricción continúa disminuyendo según aumenta la excentricidad siempre que se mantenga la lubricación hidrodinámica.
- **Sustitución de Sommerfeld:** Se ha dado crédito a Sommerfeld de haber resuelto la ecuación de Reynolds unidimensional mediante la sustitución que lleva su nombre, mientras que en su trabajo emplea otra sustitución conocida y usa un método recurrente para resolver el problema.

El uso de la condición de borde de periodicidad es el motivo de las discrepancias antes

comentadas, pero Sommerfeld menciona y se preocupa de los posibles efectos de la cavitación, aun cuando la ignora en los cálculos.

Cabe señalar que hubo centenares de publicaciones posteriores que se basaron en la condición empleada por Sommerfeld y que no llegaron a ser más que meros ejercicios matemáticos, confundiendo a quienes buscaban diseñar cojinetes. Esta costumbre se estableció y mantuvo como tradición por muchos años, e incluso pueden encontrarse vestigios en la actualidad.

Sin embargo, en contraste con los cojinetes radiales, los cojinetes axiales o de patín mayormente no experimentan cavitación, así que en ese caso, las soluciones para cojinetes infinitamente largos, aunque cuantitativamente inexactas, son al menos cualitativamente aceptables. En ese sentido, Lord Rayleigh (1918) derivó una solución elegante y, no sólo calculó la capacidad portante, sino que también obtuvo los valores de pendientes óptimos y mostró que el patín con escalón es la mejor configuración cuando se lo compara con cuñas lineales o exponenciales. Este trabajo aún sorprende ya que sus resultados resultan razonablemente precisos también para patines de longitud finita. Cabe destacar que Lord Rayleigh fue, además, el primero en concebir el concepto de los cojinetes hidrostáticos.

Volviendo a los cojinetes lubricados con gas, como ya se comentara, Kingsbury descubrió estos cojinetes a principios del Siglo XX. Unos años después, W. Harrison (1913) derivó la ecuación diferencial para películas lubricante de fluido compresible. En lugar de eliminar la densidad de la ecuación de continuidad, él la retuvo en la diferenciación y luego, mediante el uso de las leyes de los gases ideales bajo condiciones isotérmicas, obtuvo la ecuación de Reynolds para flujos compresibles. De esta manera, la intuición de Kingsbury ya tenía, en paralelo con los precedentes de Tower y Reynolds, una fundamentación teórica para la acción hidrodinámica de lubricantes gaseosos. Es más, en estos cojinetes no existe cavitación que deba ser omitida en el análisis mediante la simple condición de borde de periodicidad ya que la ecuación de estado no permite presiones debajo del cero absoluto.

Los siguientes avances destacables en la historia de la lubricación hidrodinámica se relacionan con la estabilidad y dinámica de los cojinetes. A. Stodola (1925) comprendió que un cojinete no es un soporte rígido, sino que se comporta de alguna manera como una serie de resortes y amortiguadores que tienen un efecto notable en las velocidades críticas de un rotor y su comportamiento dinámico. Desde entonces, los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes se han transformado en elementos básicos de los estudios de cojinetes. Otro descubrimiento fundamental tiene que ver con las inestabilidades inducidas por los cojinetes.

Burt Newkirk, trabajando en el *General Electric Research Lab*, encontró vibraciones en el rotor que no podían ser atribuidas ni al desbalanceo ni a la fricción interna que estaba investigando. Newkirk interrumpió el suministro de lubricante al cojinete y encontró que la inestabilidad cesaba. Sus resultados, publicados en 1925, fueron el comienzo del entendimiento del fenómeno conocido originalmente como “oil whip” y luego generalizado como “half frequency whirl”. Así se descubrió una nueva y de las más significativas áreas de la lubricación hidrodinámica, con ramificaciones no sólo en cojinetes sino sobre el diseño de máquinas en general.

Visto el desarrollo histórico de la lubricación hidrodinámica en un contexto general, se presume que hubo dos causas específicas principales que impulsaron el florecimiento de esta ciencia, sumadas a las condiciones favorables del entorno. Una fue la entrada del aceite mineral al mercado industrial a mediados de la década de 1880, justo al tiempo en que los fundadores de la tribología hicieron su entrada. Un fuerte interés en el uso de estos aceites produjo interés también en sus propiedades (por ejemplo, la viscosidad). La segunda causa la constituyen los problemas observados en los ferrocarriles, que permitieron tanto a Petrov como a Tower la realización de sus estudios experimentales sobre aceites y fricción. Precisamente, Kingsbury fue, en un tiempo, consultor de la *Canadian Railways*, y Sommerfeld publicó su famoso artículo cuando trabajaba en problemas de frenos de los trenes. También debe señalarse que todos estos avances se produjeron en un período de estabilidad política (no hubo ningún gran conflicto europeo desde la guerra franco-alemana en 1870 hasta el estallido de la Primera Guerra Mundial en 1914). Éste fue un período de florecimiento científico sin precedentes en la física y la química. La electricidad y la electrónica nacieron entonces, también el motor de combustión interna y el avión, y los conceptos modernos de la física (la teoría cuántica, la física atómica, y la relatividad) vieron su amanecer en esos años. La lubricación hidrodinámica es uno de los menores, pero todavía vigoroso, descendientes de esta marea de alto nivel científico.

El período entre el final de la Primera Guerra Mundial y el final de la Segunda, no fue una época brillante para la ciencia y el libre pensamiento en general, y la tribología parece haber compartido el descenso general. El estudio de la lubricación se quedó estancado en esos años, hasta tal punto que en la comunidad científica pocos eran conscientes de la existencia de tal rama de la ciencia. No obstante hubo contados aportes que mantuvieron el lento giro de la rueda. Entre las excepciones se puede nombrar a Samuel McKee y Thomas McKee (1929), quienes realizaron una serie de experimentos sobre un cojinete radial. Ellos observaron que bajo condiciones de alta velocidad, la viscosidad disminuía hasta el punto en que el producto de

la viscosidad y la velocidad de rotación se mantiene constante. Barber y Davenport (1933) también investigaron la fricción en cojinetes, y determinaron, mediante un juego de comparadores, la posición del centro del muñón con respecto al centro del cojinete, y presentaron información respecto de la capacidad portante y presión en la película.

Más adelante, Hebert Swift formuló la Ecuación de Reynolds completa, como se aplica a cargas dinámicas, y, por extensión, a problemas de inestabilidad (Swift, 1932, 1937). Para su solución de cojinetes cargados dinámicamente, él usó el enfoque de Sommerfeld argumentando que los cambios se producen tan rápido que no hay tiempo para que la burbuja de cavitación colapse y cambie en fase con los cambios en la dirección de la carga. De hecho, la cuestión de la cavitación en altas frecuencias, con la participación de los efectos de inercia que la ecuación de Reynolds pasa por alto, es algo que todavía no está resuelto completamente. Swift también, dio luz, finalmente, sobre las condiciones de contorno en la zona divergente, mostrando que tanto la presión relativa como su derivada deben ser nulas para cumplir tanto con la ecuación de continuidad como el principio de mínima energía potencial.

Por otra parte, en esos mismos años, Georg Vogelpohl (1935) desarrolló una expresión para la acción de la función de disipación. De ella derivó una ecuación para la distribución de presión en la película. Esta ecuación requiere que la tasa de de disipación sea mínima, y no tiene en cuenta la energía almacenada en el lubricante.

Finalizada la Segunda Guerra Mundial, siguió un despertar y florecimiento de la actividad tribológica impulsada principalmente por dos desarrollos tecnológicos. Uno fue el advenimiento de las computadoras modernas, y el otro el inicio de la era espacial. Desde entonces, y como en la mayoría de las áreas de la ciencia, el desarrollo ha sido vertiginoso en extremo. Es más, el número de publicaciones sufrió un incremento tal que ya resulta difícil ponderar el grado de relevancia de las mismas. Por ello, dado el inmenso volumen de información disponible desde la posguerra, los desarrollos y avances más destacados de este período, que resultan relevantes para esta tesis, se presentan a continuación separados en Secciones que permiten ordenarlos.

2.2.1 Soluciones de la Ecuación de Reynolds

Como se comentara, la solución analítica de la ecuación de Reynolds es difícil de obtener, y es en este sentido que las computadoras han hecho una verdadera diferencia. Pero antes de cuantificar el rápido avance de las soluciones de esta ecuación para cojinetes de longitud finita,

es importante tener en cuenta la historia de la solución para cojinetes “infinitamente cortos”, $L/D \rightarrow 0$. La idea de un cojinete infinitamente corto, en oposición con el infinitamente largo, fue de Anthony Michell (1929), quien sugirió suprimir el término que contiene los gradientes de presión circunferenciales, en lugar de los axiales. Forrest Cardullo (1930) tomó esta idea e integró la expresión propuesta por Michell para calcular la distribución de la presión. A estos avances le siguió un período de letargo, y no fue hasta 1952 que Ocvirk retomó la propuesta y proveyó una solución completa, simple y detallada al problema de los cojinetes infinitamente cortos (Ocvirk, 1952; Dubois y Ocvirk, 1953). A pesar de su denominación de infinitamente corto, esta solución, que será discutida en detalle en Capítulo 3, resulta aplicable hasta relaciones L/D de $\sim 1/2$, lo que señala su importancia ya que ese rango de relaciones cubre el intervalo de diseño de la mayoría de los cojinetes modernos. Sin embargo, es importante tener en cuenta las restricciones de esta solución, que a menudo se pasan por alto. Por ejemplo, el método no puede usarse para cojinetes cuya película fluida no comience en el espesor máximo; no puede ser usada en zapatas de arco menor a 180° ; y no puede emplearse para patines ni cojinetes axiales.

En esos mismos años aparecieron otras dos soluciones para cojinetes de longitud finita. Una de ellas fue obtenida empleando el método de relajación de Southwell para resolver la ecuación de Reynolds (Cameron y Wood, 1946, 1949). Esta solución es para cojinetes completos y relaciones $L/D \rightarrow \infty$ a $1/4$. La otra fue obtenida utilizando un algoritmo Gaussiano para la resolución de las ecuaciones en diferencias finitas (Sassenfeld y Walter, 1954). Esta es para arcos de 360 y 180° . Ambas soluciones involucraron una cantidad prodigiosa de cálculo y proponen metodologías que resultan precursoras de las actualmente asociadas a computadoras de alta velocidad.

El primer uso de las computadoras modernas en la solución de la ecuación de Reynolds usando condiciones de borde apropiadas fue hecho por Oscar Pinkus (1956, 1957). Él obtuvo soluciones no sólo para cojinetes circulares, sino también para cojinetes elípticos y de tres lóbulos, con relaciones L/D de $1/2$ a $1/4$, y para cojinete axiales de varias relaciones de arcos y radios. Un aspecto significativo de su trabajo fue la constatación de que todo el problema de la generación de soluciones de cojinetes de diferentes geometrías y orientaciones de carga, incluyendo las formas no circulares, se resuelve mediante la obtención de soluciones genéricas para patines individuales con diferentes valores de los parámetros característicos y, luego en el montaje, asignándole la geometría apropiada en las condiciones de funcionamiento especificadas.

Cerca de los años 60, y en un período muy corto, aparecieron toda una gama de soluciones integrales para cojinetes completos y parciales, tanto para lubricación líquida como gaseosa. Entre las principales contribuciones de este período se pueden citar las de: Raimondi y Boyd, que proveyeron resultados muy meticulosos (que son los más generalmente adoptados) para arcos de 360, 180, 120 y 60° con relaciones L/D de 1, $\frac{1}{2}$, y $\frac{1}{4}$ para fluidos incompresibles (Raimondi y Boyd, 1958), y para cojinetes homónimos lubricados con gas para L/D de 2, 1 y $\frac{1}{2}$ (Raimondi, 1961); Hays (1958), que proporcionó soluciones completas para una gran variedad de patines; Gross (1962), que compaginó una tabla de las soluciones para cojinetes gaseosos de longitud finita para varias condiciones de operación; y Castelli y Pirvics (1967), que proporcionaron soluciones para cojinetes de gas de patines múltiples para relaciones L/D que van desde ∞ a $\frac{1}{2}$. Obviamente, la aparición de las computadoras modernas permitió contar, en un período de unos pocos años, con un espectro bastante completo de soluciones, que resultaba casi impensable en el pasado.

Castelli y Pirvics (1968) compararon diferentes métodos numéricos para la solución de cojinetes, y encontraron que, independientemente del método, las soluciones predecían prácticamente los mismos resultados. Ellos usaron el método de diferencias finitas, el de elementos finitos, y un método de volúmenes finitos, para resolver la clásica ecuación de Reynolds de propiedades constantes. Cada método fue estable durante los intervalos de velocidades moderadas y excentricidades analizadas. Sin embargo, algunas soluciones fueron menos demandantes de tiempo. Allaire y colaboradores (1984) utilizaron el método de Galerkin de elementos finitos para resolver la ecuación turbulenta de Reynolds en un cojinete, logrando reducir el tiempo de cálculo respecto del método de elementos finitos estándar en un 3,5%.

San Andrés y colaboradores (Faria y San Andrés, 1999) mostraron que para cojinetes de gas a alta velocidad, la ecuación clásica de Reynolds se torna altamente no lineal. Bajo tales condiciones, los métodos numéricos estándar (tales como las diferencias centrales o elementos finitos de Galerkin) no son eficientes. Para superar esta limitación, desarrollaron un Galerkin de alto orden de residuos ponderados aplicable a los cojinetes de empuje. En los trabajos de este grupo de trabajo se presentan resultados para velocidades y excentricidades más altas que las usadas por Castelli y Pirvics (1967, 1968) y Allaire *et al.* (1984), mostrando que el método clásico de elementos finitos se vuelve inestable en excentricidades altas y logrando una disminución del 7% en el tiempo de cómputo.

Por esos años, DiPrima (1968) aplicó una técnica de expansión asintótica a la ecuación de

Reynolds para cojinetes de gas infinitamente largos, y comparó su método de cálculo con la solución exacta y las obtenidas usando el método de Galerkin y el de Galerkin modificado. Así demostró la necesidad tener por lo menos seis términos Galerkin para que los resultados coincidiesen con la solución exacta y la asintótica. Tal elevado número de términos se traduce en tiempo de cómputo no deseado. DiPrima concluyó, además, que si bien su trabajo se basa en un cojinete axial, la metodología podría aplicarse fácilmente a otras geometrías. DiPrima y Stuart (1972) estudiaron los flujos entre cilindros levemente excéntricos utilizando un sistema bipolar de coordenadas, y proponiendo correcciones de primer orden para la curvatura y el efecto de la inercia por la expansión de la holgura y del número de Reynolds modificado. Los efectos de los factores de corrección propuestos fueron muy pequeños para cualquier problema de lubricación práctico, sin embargo, se muestra que, cuando la relación de radio a huelgo disminuye, los efectos de curvatura pasan a ser significativos. El método presentado en este trabajo es engorroso y tedioso algebraicamente, existiendo otros sistemas de coordenadas que permitirían valorar mejor la curvatura, y otras correcciones posibles para tener en cuenta el efecto de la inercia (Constantinescu, 1956).

Más recientemente, autores como Kazimierski (1972), Grabovskii (2003a, 2003b) y Pandazaras y Petropoulos (2003) han desarrollado diagramas de funcionamiento y criterios de diseño para cojinetes sobre la base de diversas versiones de la ecuación de Reynolds. Kazimierski estudió la optimización de los ángulos para cojinetes cónicos de gas, y Grabovskii y Pandazaras y Petropoulos presentaron gráficos de optimización para cojinetes lubricados por gas y aceites. Kazimierski determinó que el coeficiente de fricción se rige más por el espesor de película (o excentricidad), que por la velocidad de rotación. El aumento en dicho espesor conduce a presiones reducidas, y la longitud del cojinete se puede ajustar para minimizar la fricción generada. Grabovskii optimizó la geometría de un cojinete para lograr capacidad portante óptima y mínima resistencia en función del número de compresibilidad y el número de Sommerfeld. Sus parámetros demostraron que la capacidad de carga varía en primer orden con la velocidad del eje y en segundo orden con la geometría. Asimismo, de acuerdo con los otros autores citados, los gráficos de optimización de Pandazaras y Petropoulos mostraron que el desgaste del cojinete se puede reducir si cierto parámetro adimensional se maximiza.

Por otro lado, numerosos autores han ofrecido soluciones para perfiles de presión y temperatura en cojinetes de diversas configuraciones. Así, por ejemplo, Rodkiewicz y Kalita (1995) y Yoshimoto y colaboradores (2002) presentaron resultados del comportamiento de cojinetes cónicos con distintos arreglos de ranuras. Los primeros afirman que cuando el

cojinete ranurado con cortes en el muñón está sujeto a rotación, la capacidad de carga se mantiene relativamente constante. Yoshimoto y colaboradores, por su parte, propusieron un modelo en el que el espesor de película es una función de la excentricidad, la desalineación, y una función de contabilidad de paso para las espirales. Ellos afirman que las ranuras en espiral son capaces de estabilizar el eje de rotación, lo que podría ser optimizado mediante el control del ángulo, la profundidad, y el número de espirales.

Luis San Andrés (2000) analizó el comportamiento de cojinetes mediante la consideración de “flujo medio” (bulk flow) considerando un cojinete axial criogénico a altas velocidades de rotación (10-20 krpm). El modelo contempla momento, energía térmica, turbulencia e inercia. La ecuación de energía elegida incluye el balance de masa, la disipación y la convección en la dirección circunferencial y axial, despreciando la difusión al rotor y al estator. En este caso, las predicciones de presión y velocidades no provienen de la ecuación de Reynolds sino de la solución de las ecuaciones acopladas de continuidad y de Navier-Stokes para flujo turbulento con las tensiones de Reynolds descritas mediante el modelo de turbulencia k- ϵ . La solución se logró utilizando un método de expansión similar al de DiPrima (1968). Los resultados de San Andrés permiten apreciar una influencia significativa de la inercia (Coriolis y aceleración centrífuga) en la inanición de la película. La rigidez axial muestra un máximo a una cierta carga intermedia mientras que el amortiguamiento aumenta constantemente. El autor afirma que las discrepancias entre los resultados teóricos y experimentales pueden atribuirse a inercia, turbulencia o análisis térmico, pero no cuantifica estas contribuciones.

Por otro lado, con la evolución de los sistemas computacionales, algunos autores y empresas privadas han desarrollado “solvers” para las ecuaciones de Navier-Stokes completas, pero sólo unos pocos han presentado soluciones relacionadas con cojinetes hidrodinámicos en un intento de cuantificar los supuestos de Reynolds. Sin embargo, sus soluciones (como la de San Andrés) carecen de la visión física de un modelo basado en Reynolds. Torbjorn Almqvist (2001) realizó un trabajo interesante al comparar la solución de la ecuación de Reynolds (isotérmica) para cojinetes infinitamente cortos con la de las ecuaciones de Navier-Stokes completas (acoplada a la ecuación de energía y considerando efectos térmicos del rotor y el estator) y con resultados experimentales. El autor encuentra que es posible simular líneas de contacto con lubricación EHD hasta presiones de ~ 1 GPa debido a la aparición de una singularidad en la ecuación de momento cuando se alcanza una tensión de corte crítica. También encuentra ciertas discrepancias en los resultados del análisis isotérmico comparativo entre Navier-Stokes y la ecuación de Reynolds, y que existe una buena concordancia con los

resultados experimentales si la temperatura de entrada del aceite y los coeficientes de transferencia de calor se modifican para obtener la misma temperatura en ensayos teóricos y experimentales.

Varios autores, tales como: Cole (1957), Ettles y Suoboda (1975), Murthy (1981), Srinivasan y Prabju (1983), Szeri y San Andrés (1984), Braun *et al.* (1987), Schuler y Weber (1990), El-Gamal (1995), Hughes *et al.* (1996), Ahuja *et al.* (2000), y Tanaka (2001), entre otros, han presentado soluciones para diversas clases de cojinetes cónicos y radiales, todos con resultados similares. La mayoría de los autores analizan y justifican las diferencias encontradas entre resultados experimentales y numéricos, siendo el consenso general que la ecuación de Reynolds es válida para velocidades relativamente bajas, excentricidades pequeñas y lubricantes líquidos. Sin embargo, al aumentar la velocidad, la fricción aumenta incrementando la temperatura, que a su vez afecta a la densidad y la viscosidad del lubricante. Sólo una ecuación de Reynolds que capture estos fenómenos puede representar una física más exacta del flujo. Además, a medida que la relación radio a holgura disminuye, los efectos de curvatura dejan de ser insignificantes.

2.2.2 Condiciones de borde

Se argumentó previamente que la atención a la realidad física ha sido y sigue siendo un requisito particular de la lubricación hidrodinámica, siendo esto particularmente importante en la selección de las condiciones de borde, y sobre todo en la zona divergente de la película. Normalmente, el análisis del flujo de un líquido en el cojinete se haría asumiendo continuidad en la película fluida, con la consecuente continuidad en todas las variables de flujo. Sin embargo, en la práctica siempre hay pequeñas burbujas de aire en el lubricante (efecto que suele ser despreciable) o frecuentemente existe cavitación (formación de burbujas cuando la presión de vapor del líquido es mayor a la presión del fluido). Esto ocurre aguas arriba del espesor mínimo de película. Matemáticamente, existen dos modelos principales para tomar en cuenta la cavitación que ocurre en esta región, uno debido al propio Reynolds, que es bastante simple de implementar numéricamente, y otro debido a Elrod y Adams (1974). El método de Reynolds consiste en considerar que la presión disminuye hasta alcanzar la presión de vapor en algún punto de la zona divergente de la película. En este punto, la derivada circunferencial de la presión es nula. Si bien se desconoce la posición donde se alcanza la presión de vapor, la consideración de que se hace con derivada nula aporta la ecuación necesaria para su

determinación. El método de Elrod-Adams, por su parte, introduce la hipótesis de que en la zona de cavitación existe una mezcla de fluido y aire definiendo una nueva variable que representa la concentración de lubricante en el entorno del punto, es decir una función de saturación que vale 1 en la zona convergente y toma valores entre 0 y 1 en la zona divergente. Este último método es más proclive a inestabilidades numéricas pero es físicamente más realista dado que fuerza a la conservación de la masa, lo que no siempre se cumple cuando se aplica el modelo de Reynolds.

Otro punto de interés surgido a posteriori en relación con las condiciones de borde, es la ubicación del inicio de la película hidrodinámica. Esta situación se da en dos contextos. Uno es en relación con la zona divergente en el cojinete y la región de cavitación. La condición límite más apropiada para determinar el inicio de la película hidrodinámica en espacios divergentes fue formulada por Floberg (1961), quien postula la conservación de flujo de masa de líquido a través de toda la zona de cavitación, pero sin transferencia de masa entre el lubricante líquido y la burbuja de vapor o gas a presión uniforme (Floberg, 1961). En este modelo, que se esquematiza en la Figura 2.5, una película líquida de espesor menor que el huelgo local desarrolla estrías que fluyen paralelas a la velocidad superficial hasta que una película líquida completa se desarrolla de nuevo. De acuerdo con este autor, la ubicación de la línea de inicio de la película lubricante depende de la relación L/D y de la excentricidad, entre otras variables.

La otra situación se refiere a la existencia de una película parcial de fluido en la dirección axial en el ingreso del lubricante, ya sea debido a una presión de suministro baja o a una extensión axial insuficiente de la ranura de suministro. Esta observación experimental, que fue inicialmente debida a Cole y Hughes (1956), ha llevado a la formulación de soluciones correspondientes a una película incompleta, y, más ampliamente, al análisis de cojinetes con bajo

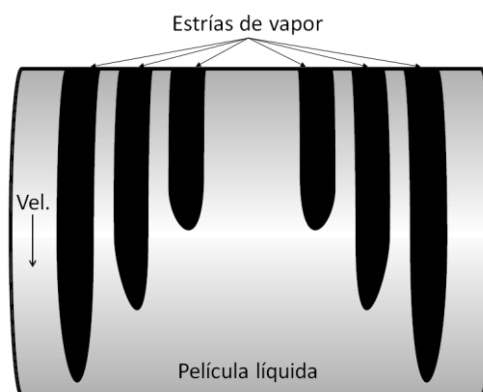


Figura 2.5: Esquema de la zona de cavitación en un cojinete hidrodinámico.

suministro (*starved bearings*). El funcionamiento en estas condiciones puede ser una deficiencia o una característica inherente del sistema. Cualquier cojinete lubricado por mecha o anillo de lubricación operará bajo condiciones de escasez de lubricante, igual que lo hace, en la mayoría de los casos, un cojinete de anillo flotante. La falta de lubricante se da simplemente cuando el suministro es menor que el necesario para tener una película llena. En 1977, Consiantinescu consideró el problema en términos cualitativos para las configuraciones de convergencia, divergencia y cilindro, mediante modelos unidimensionales, y fue Bayada (1983) quien suministró una solución para cojinetes de longitud finita en función de diversos valores de caudal de suministro, para condiciones isotérmicas. Trabajos posteriores (Artilis y Heshmat, 1985, 1986) brindaron soluciones para cojinetes de longitud finita de bajo suministro teniendo en cuenta las variaciones de la viscosidad, que, considerando lo delgado de la capa de fluido a bajos valores de caudal, puede tener un efecto considerable sobre los coeficientes dinámicos. Finalmente, Hayashi y Wada (1985) obtuvieron resultados para cojinetes de anillo flotante con poca alimentación, mostrando que la falta de suministro a la película interna aumenta la estabilidad del cojinete, mientras que en la película exterior produce un efecto contrario.

2.2.3 Modificaciones a la Ecuación de Reynolds

La mayoría de los trabajos presentados en la Sección 2.1 asumieron la condición de viscosidad constante en la película lubricante, como una manera de simplificar el análisis. Históricamente, esta consideración permitió contar con soluciones que correlacionaban bien con la distribución de presión bajo una carga moderada, pero que generalmente fallaban al predecir la rigidez y amortiguamiento del cojinete. Con el tiempo, los investigadores comenzaron a realizar modificaciones en la ecuación de Reynolds para ayudar a avanzar en el modelado y la capacidad de predicción. Así aparecieron transformaciones que llevaron a incluir la ecuación de energía, propiedades variables, deformaciones elásticas, cavitación, turbulencia, e inercia. Además, luego que se tornara práctica frecuente el considerar la ecuación de energía del fluido, un sinnúmero de autores se abocó a modificar la ecuación de Reynolds con la intención de incorporar propiedades variables y sus efectos en una nueva ecuación de Reynolds, que pudiese reflejar tanto la cuña geométrica como la térmica. Por ejemplo, autores como Gazley (1958), Pinkus (1961) y Constantinescu (1969) han presentado soluciones unidimensionales de varios modelos usando propiedades variables.

En 1962, Duncan Dowson propuso la primera ecuación de Reynolds que realmente puede definirse como “generalizada”. Su formulación usó coordenadas cartesianas y consideraba variación de las propiedades de transporte a través de la holgura en adición a las clásicas variaciones circunferencial y axial. La ecuación generalizada de Dowson-Reynolds contiene una serie de funciones que representan las integrales en el espesor de película de la densidad, viscosidad dinámica y sus derivadas. Fowles (1970) ofreció una formulación alternativa de estas funciones eliminando las derivadas de la densidad. Su propuesta simplifica la expresión matemáticamente rigurosa de Dowson, generando una ecuación generalizada más manejable, sin pérdida importante de información. Más tarde, Braun y colaboradores (1985) modificaron la expresión de Fowles para obtener una ecuación de Reynolds generalizada aplicable al flujo bifásico homogéneo.

La propuesta de Dowson antes mencionada fue capaz de eliminar el supuesto de propiedades constantes, pero siguió requiriendo el “desenrollamiento” del cojinete, es decir, pasar de coordenadas cilíndricas a cartesianas mediante la no consideración de la curvatura. Además, la ecuación Dowson tuvo que ser desarrollada para cuatro modelos geométricos separados, una ecuación para cada uno de los cojinetes auto-actuantes (radial, cónico, de empuje, y esférico). En otras palabras, para modelar eficazmente todos los cojinetes auto-actuantes se requiere, a este punto, de cuatro ecuaciones de Reynolds diferentes. Desde finales de la década de 1960, varios otros autores han hecho diversas adaptaciones de las ecuaciones de Dowson o Fowles, sin embargo, sus soluciones no han producido información relevante, y ninguno de sus enfoques ha sido tan superador como los de Reynolds y Dowson.

Cabe mencionar que, mientras que Reynolds desarrolló su ecuación en coordenadas cartesianas, varios otros autores han experimentado con diferentes sistemas de coordenadas. Por ejemplo, Kennedy (1988) utilizó un sistema de coordenadas cilíndrico, y Agrawal (1993) produjo una ecuación de Reynolds basada en coordenadas esféricas, adecuada para cojinetes cónicos. Agrawal consideró, además, densidad variable con la presión en dirección circunferencial y axial, y viscosidad constante con flujo isotérmico, por lo que su propuesta es una ecuación tipo Reynolds. Sin embargo, la principal contribución de Agrawal fue la capacidad para tener en cuenta el ángulo del cojinete. Lee y Soni (1997) también propusieron operar con una ecuación similar a la de Reynolds, pero basada en un sistema de coordenadas curvilíneas, que representa el efecto de la curvatura. Meyer (2003) desarrolló una ecuación de Reynolds en coordenadas esféricas para cojinetes esféricos. Sus supuestos son idénticos a los ocho de Reynolds antes mencionados. A pesar de que están en el mismo sistema de

coordenadas, las formulaciones de Agrawal y Meyer dieron lugar a dos ecuaciones de Reynolds diferentes, una capaz de analizar cojinetes cónicos y otra aplicable a cojinetes esféricos. Ninguna de las expresiones, sin embargo, explota todo el potencial de un sistema de coordenadas esféricas, ya que no logran captar otras geometrías, como los cojinetes radiales y axiales.

Otro trabajo que debe merecer mención es el de J. Ausman (1961), quien presentó soluciones para cojinetes de empuje auto-actuantes lubricados con gas. Él reestructuró la ecuación general de Reynolds y sustituyó la densidad por la ecuación de los gases ideales. Esta ecuación fue resuelta numéricamente y las predicciones se compararon con la ecuación de Reynolds clásica, haciendo hincapié en la importancia de la influencia de los cambios en la densidad. Encontró que para velocidades muy bajas, el comportamiento de los cojinetes de gas puede aproximarse muy bien con la ecuación de Reynolds para líquidos incompresibles, y que para velocidades altas se cumple que el producto $ph = \text{constante}$ (p : presión, y h : huelgo), siendo la capacidad portante y el flujo axial de lubricante gaseoso independientes de la velocidad.

2.2.4 Turbulencia e inestabilidades

Como en todo flujo, en lubricación hidrodinámica el flujo es laminar a números de Reynolds bajos. Ensayos experimentales en cojinetes muestran que la transición de flujo laminar a turbulento ocurre a Re entre aproximadamente 1000 y 1600 (con el Re definido con el huelgo promedio). Este valor crítico del Re no es el mismo en todos los casos, depende de la calidad de las superficies rotantes y del nivel de vibración del cojinete. El flujo turbulento en cojinetes hidrodinámicos no es, en general, un régimen deseado ya que aumenta las pérdidas por fricción. El efecto de la turbulencia es aumentar la viscosidad aparente, es decir, el cojinete trabaja como si fuera un cojinete en régimen laminar con un lubricante de mucha mayor viscosidad.

Por otro lado, a números de Re relativamente altos, los cojinetes desarrollan los llamados “vórtices de Taylor” por efecto de la fuerza centrífuga sobre el fluido que rota en el huelgo. La teoría indica que en cilindros concéntricos, los vórtices de Taylor se desarrollan si el que gira es el cilindro interior relativo al exterior estacionario. Taylor (1923) publicó su famoso trabajo sobre teoría de estabilidad entre cilindros rotantes, según la cual el flujo es estable y laminar cuando el número de Reynolds modificado $Re_{\text{mod}} = Re (R/C)^{-1/2} < 41$. En cojinetes, R/C es del

orden de 1000, por lo que el Re límite para flujo laminar sería de aproximadamente 1300, que está entre los valores experimentales antes mencionados que señalan la transición de flujo laminar a turbulento.

El estudio específico de estabilidad de flujo y flujo turbulento en cojinetes no se inició hasta la década de 1950. En una serie de experimentos con cojinetes de deslizamiento de 8 pulg. (203,2 mm), Wilcock (1950) descubrió que su rendimiento se veía seriamente alterado cuando se los operaba en régimen turbulento. La dificultad con el desarrollo de un enfoque racional a la turbulencia en la lubricación, está vinculada a la situación general de esta rama de la ciencia, que todavía contiene un alto grado de incertidumbre. Cuando el Re aumenta, las fuerzas de inercia comienzan a ser del mismo orden de magnitud, y luego mayores, que las fuerzas viscosas. Cuando esto sucede, la cuarta suposición de Reynolds, respecto de que las fuerzas inerciales y la gravitacional son pequeñas comparadas con las viscosas y de presión, falla. Constantinescu (1973), consideró que la ecuación de Reynolds debía ser modificada para tener en cuenta el flujo turbulento, así como la zona de transición de laminar a turbulento, y que los efectos térmicos en la turbulencia no pueden ser ignorados, principalmente debido a que las tensiones turbulentas (producidas por un proceso de mezcla) dependen de la viscosidad. Experimentalmente, si el par se representa en función del número de Reynolds y la velocidad se incrementa de forma lineal, es lógico pensar que el esfuerzo de torsión también debería aumentar linealmente con el número de Reynolds. Esto se cumple hasta un punto crítico ($Re=64$). A medida que la velocidad aumenta aún más, cambia la pendiente, es decir, hay una inflexión en el par. Dado que el espesor de la película no ha cambiado, y puesto que la velocidad se ha incrementado linealmente, esta inflexión debe resultar de un cambio en la viscosidad cinemática. Se cree que este punto de inflexión es debido a la aparición de la turbulencia. Para explicar esto, Constantinescu creó “funciones turbulentas”. La función turbulenta actúa para cambiar la viscosidad en base a la teoría de longitud de mezclado de Prandtl. Las funciones turbulentas se colocaron tanto en la ecuación de Reynolds clásica como en la ecuación de energía. Por su parte, Pan (1965), empleó el concepto de viscosidad de remolino para formular un esquema que incorpora los efectos de la turbulencia en el cálculo del rendimiento de los cojinetes.

Li (1972) estudió la influencia de la densidad y la viscosidad variables sobre la transición de flujo laminar a turbulento entre dos cilindros concéntricos en rotación. De acuerdo a sus estudios, en los cojinetes de alta velocidad, la disipación viscosa y la existencia de diferentes temperaturas superficiales conducen a temperaturas no uniformes en el lubricante. Además, de

acuerdo con este autor, el Re_{mod} que predice el inicio de las inestabilidades de Taylor, varía con la holgura, la excentricidad y la viscosidad cinemática. Así, a medida que la temperatura se eleva en los cojinetes lubricados con aceite, el número crítico cae por debajo de 41. Esta caída es un resultado de la relación exponencial de la viscosidad cinemática y la temperatura.

Más recientemente, Mourelatos (1990) analizó el cojinete hidrodinámico infinitamente ancho para flujo de gas en régimen subsónico (número de Mach, Ma , mayor a 0,2). El tratamiento contempla las ecuaciones acopladas de momento, continuidad, energía y ecuaciones de estado, incluyendo efectos de inercia y viscosos en las ecuaciones de movimiento (a diferencia de la ecuación de Reynolds). Al comparar sus resultados con la ecuación clásica de Reynolds y con datos experimentales, este autor demostró que a medida que disminuye el huelgo y aumentan las velocidades (aumentando el Ma por encima de 0,2), los efectos inerciales pasan a ser significativos. Este análisis lo hizo sin tener en cuenta turbulencia.

Otros trabajos a mencionar son los de Kalita y colaboradores (1986a, 1986b) que analizaron los cojinetes cónicos presurizados, poniendo de manifiesto que las distribuciones de presión teóricas están en concordancia con las experimentales para velocidades de rotación moderadas. Sin embargo, a medida que ésta aumenta, los resultados teóricos sobreestiman la distribución de la presión en excentricidades bajas (0,2 a 0,7) y subestiman la presión en altas excentricidades. Los autores consideraron que las discrepancias se deben al inicio de la turbulencia, sin embargo, una declaración más precisa debería haber incluido varias influencias, como interacción termo-fluida, inercia y turbulencia.

2.2.5 Termohidrodinámica

Se conoce con el nombre de “modelo termohidrodinámico” (THD) al modelo que predice el comportamiento del cojinete en estado estacionario incluyendo, de alguna manera, la variación de la viscosidad en la película con la temperatura. En realidad, éste es uno de los puntos cruciales de la teoría de lubricación porque el hecho que la viscosidad varíe no sólo afecta profundamente el desempeño de los artefactos tribológicos sino que además determina el valor de la temperatura máxima de operación, uno de los criterios, junto con el de espesor mínimo de película, de falla en cojinetes y sellos.

Históricamente, los avances respecto al planteo de la ecuación de Reynolds fueron discretos durante más de medio siglo, hasta la inclusión de la ecuación de la energía. Al comparar los resultados experimentales con los resultados numéricos de las ecuaciones acopladas, se hace

evidente que la temperatura (a través de su efecto en las propiedades del fluido) tiene influencia sobre la presión. Numéricamente el balance de energía está acoplado a la ecuación de Reynolds a través de la presión y la velocidad, sin embargo, la ecuación de Reynolds sólo queda acoplada con la de energía si existe una ecuación de estado que contemple la dependencia de las propiedades del fluido con la temperatura. Para capturar el verdadero acoplamiento, las expresiones modernas de la ecuación de Reynolds han sido estructuradas para incluir propiedades variables.

Entre los primeros intentos de considerar los efectos térmicos, se pueden mencionar los trabajos de Christopherson (1941) y Cameron y Wood (1946), quienes desarrollaron ecuaciones de energía en las que el cojinete se trataba en forma adiabática y la energía disipada en el fluido por efectos viscosos era almacenada en el mismo. Sus tratamientos no estaban de acuerdo con Vogelpohl (1935) quien, como ya se comentara al final de la introducción a la Sección 2.2, propuso usar una expresión para la tasa de disipación de la función de disipación, sin tener en cuenta la energía que se almacena en el lubricante.

En esos mismos años, Albert Fogg (1946) encontró que los cojinetes axiales de superficies paralelas, en contra de las predicciones de la teoría hidrodinámica, son capaces de soportar carga. Sus experimentos demostraron que la capacidad de estos cojinetes de soportar carga es casi del mismo orden de magnitud que la alcanzada por cojinetes axiales de zapatas pivotantes de igual área. Esta observación, conocida como “efecto Fogg”, se explica mediante el concepto de “cuña térmica”, donde la expansión del fluido cuando se calienta produce una distorsión en las curvas de distribución de velocidad similar a la producida por superficies convergentes, desarrollando capacidad de carga. Fogg también indicó que esta capacidad portante no depende ni de un borde de entrada redondeado ni de la distorsión térmica del patín, e hizo una distinción entre la cuña térmica y la cuña geométrica. La cuña geométrica provoca un aumento seguido de una disminución en el momento, que resulta de una película convergente / divergente. La cuña térmica, en cambio, es causada por la expansión térmica volumétrica. Fogg señaló además que la cuña geométrica es dominante en la generación de presión, mientras que la cuña térmica juega un papel menor.

Cope (1949) fue el primero en acoplar la ecuación de Reynolds y la ecuación de la energía usando ecuaciones de estado para la densidad y la viscosidad. La propuesta de Cope contempla variaciones de temperatura despreciables a través de la película y conducción de calor despreciable dentro de la misma, así como a los sólidos circundantes. La consecuencia de la segunda consideración es que tanto el cojinete como el muñón son isotérmicos. Cope concluyó

que la cuña térmica de Fogg está “plenamente justificada”, y la expresó matemáticamente. La lubricación de película exitosa requiere una “acción de cuña” de algún tipo, ya sea una cuña geométrica o una cuña térmica. Cope estuvo de acuerdo con Fogg en que la cuña geométrica es más pronunciada que la cuña térmica, sin embargo, afirmó que si la densidad y la viscosidad del lubricante están fuertemente influenciadas por la temperatura, la cuña térmica podría sobrepasar a la cuña geométrica. La Figura 2.6 muestra un perfil típico de temperatura en un cojinete bajo el modelo adiabático de Cope. El mayor incremento de temperatura se produce en la región convergente, en presencia de altas tensiones de corte en el fluido. En la zona divergente, el aumento de temperatura disminuye sensiblemente debido a la poca disipación viscosa en la mezcla líquido-vapor. Axialmente, la temperatura es prácticamente invariable, mostrando un leve aumento en los bordes (He *et al.*, 2005).

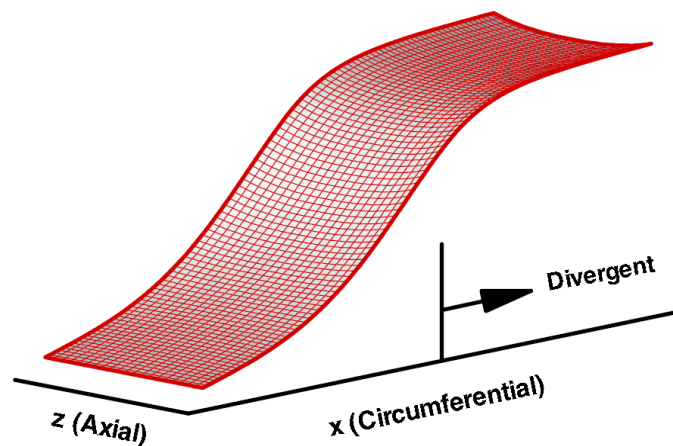


Figura 2.6: Perfil de temperatura en una película convergente-divergente predicho por el modelo adiabático (He *et al.*, 2005).

Tal como lo indica la revisión hecha por Szeri (1987), la creencia de que la teoría clásica y el modelo adiabático de Cope abarcaban el análisis del comportamiento de los cojinetes, fue aceptada por mucho tiempo. La expresión de la ecuación de la energía usada por Cope no coincide, sin embargo, con los hallazgos de sus contemporáneos, Cameron y Wood (1946). Es más, Cameron (1951), en sus experimentos con discos rotantes, sugirió que en la película entre los discos se crea una presión hidrodinámica por la variación de la viscosidad en el espesor de la misma. La discrepancia entre ambos autores surge de la elección de los términos dentro de la ecuación de energía. Charnes (1952) resolvió esta discrepancia demostrando que Cameron y Wood despreciaron el trabajo realizado por las fuerzas de presión, mientras que Cope fue efectivamente capaz de capturar ese efecto. Esta contribución, despreciada a menudo, se denomina flujo de trabajo termodinámico. La ecuación de energía de Charnes equipara el

trabajo realizado por la fuerza de fricción y la de presión (ejercida por el fluido circundante) al aumento en la energía interna. Despreciando la conducción en el rotor y el estator, consideró que todo el calor generado es arrastrado a través de convección en las direcciones axial y circunferencial.

Por otra parte, la temperatura máxima del cojinete es un parámetro importante que, junto con el espesor mínimo de película, dan lugar a mecanismos habituales de falla en cojinetes hidrodinámicos. Brown y Newman (1957) reportaron que para cojinetes de 60 pulg. (524 mm) ligeramente cargados y operando a 6000 rpm, la falla por sobrecalentamiento del metal de recubrimiento (Babbitt) ocurría a $\sim 171^{\circ}\text{C}$ (340°F). Booser y colaboradores (1970a y 1970b), trabajando con cojinetes grandes de turbinas de vapor, observaron una temperatura máxima límite para el babbitt en el rango de 130 a 200°C (266 a 392°F).

En ese período, estudiando los efectos del calor en cojinetes, Dowson y colaboradores (1966-67) realizaron una de las investigaciones experimentales más importantes sobre patrones de temperatura y balance térmico en cojinetes con carga constante. Su equipo experimental fue capaz de medir la distribución de presión, carga, velocidad, caudal de lubricante, temperaturas de entrada y salida del lubricante, y la distribución de temperatura tanto sobre el cojinete como sobre el rotor. Ellos encontraron que el patrón de flujo de calor en el cojinete es una combinación de flujo radial y una cantidad significativa de flujo circunferencial viajando de la región caliente en cercanías del espesor mínimo de película a la región más fría cerca del suministro de aceite. Los resultados de los ensayos mostraron que la variación cíclica de temperatura en el muñón es pequeña y el rotor puede ser tratado como isotérmico. Los experimentos también indicaron que los gradientes térmicos axiales en el cojinete son despreciables. La Figura 2.7 ilustra algunos de los resultados experimentales de este trabajo.

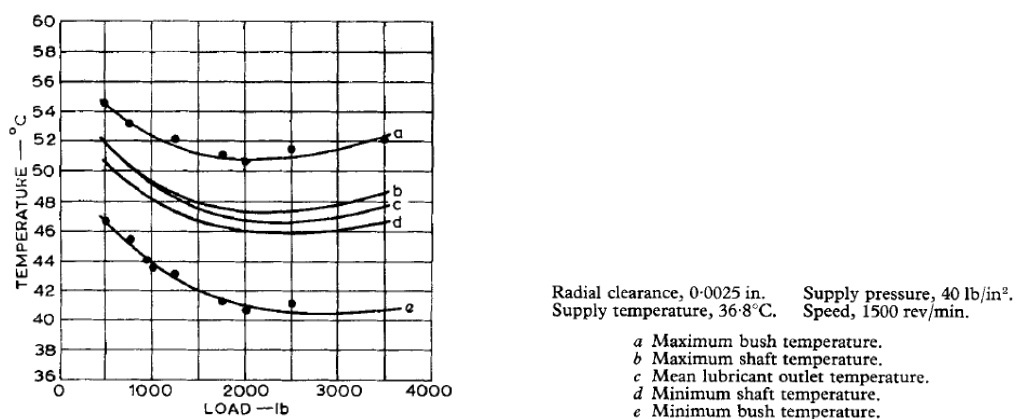


Figura 2.7: Variación de temperaturas máximas y mínimas en función de la carga medidas para el conjunto de condiciones listadas (Dowson *et al.*, 1966-67).

Por otra parte, como ya se dijera, la viscosidad es seguramente la propiedad más importante de los lubricantes y juega un papel fundamental en el análisis del flujo en cojinetes. Cuando el aumento de temperatura del lubricante a través del cojinete es pequeño, el cálculo de los parámetros de funcionamiento del cojinete se basa en la teoría clásica con viscosidad constante. Sin embargo, cuando el aumento de temperatura en la película es considerable, la teoría clásica deja de ser útil. Por lejos, la aproximación más sencilla al fenómeno de variación de viscosidad dentro de la película fluida es la adopción de una viscosidad media representativa y se han sugerido varios métodos para estimarla (Cameron, 1966).

Una revisión extensiva sobre los efectos térmicos en cojinetes hidrodinámicos fue dada por Khonsari (1986) y trata tanto sobre cojinetes radiales como de patín. Seireg y Ezzat (1973) introdujeron una hipótesis THD para explicar sus hallazgos experimentales que se basaba en un procedimiento empírico del comportamiento de la película fluida. Su trabajo presentó resultados sobre capacidad portante de la película fluida para numerosos ensayos, los cuales cubrían relaciones de excentricidad de 0,6 a 0,9, presiones de hasta 36 kPa (750 psi) y velocidades tangenciales de hasta 8,4 m/s (1650 ft/min). Las magnitudes de la capacidad de carga obtenidas experimentalmente resultaron considerablemente diferentes a las predichas por la teoría hidrodinámica clásica (ver Figura 2.8). En este sentido, la teoría iso-viscosa es capaz tanto de subestimar como sobreestimar los resultados, dependiendo de las condiciones de operación. Asimismo, estos autores observaron que las distribuciones de presión normalizada ($P/P_{máx}$), tanto axial como circumferencial, resultaban casi idénticas a las predichas por la teoría de viscosidad constante. De hecho, en todas las condiciones ensayadas, la magnitud de la presión máxima (o media) en la película resultó aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad de rotación del muñón. Para el procedimiento empírico propusieron que, para una geometría, velocidad y lubricante, es factible construir una curva de presión media en función de la temperatura media en la película, basada en la ecuación de Reynolds para flujo isotérmico (considerando la temperatura media del cojinete). Sobre la misma se ajusta una recta que representa el equilibrio THD del sistema, determinada empíricamente con los resultados experimentales obtenidos. El punto de tangencia entre ambas indica, de acuerdo a sus hipótesis, el par presión-temperatura medias que desarrollará el cojinete estudiado, satisfaciendo tanto los requerimientos hidrodinámicos como la condición de equilibrio termohidrodinámico.

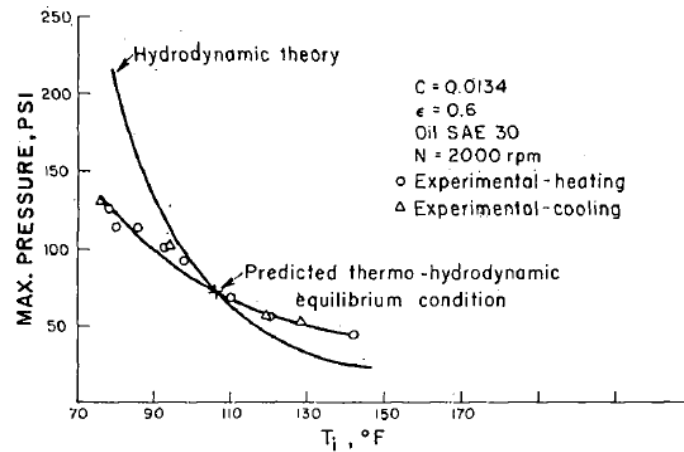


Figura 2.8: Presión máxima medida en función de la temperatura de ingreso del lubricante (Seireg y Ezzat, 1973).

Por esos años, Seireg y Doshi (1975) también estudiaron el comportamiento en estado no-estacionario de cojinetes radiales, encontrando que la distribución de temperatura resulta similar a la del estado estacionario. Asimismo, observan que la temperatura máxima del cojinete se presenta en cercanías del espesor mínimo de película, y que tanto el nivel de temperatura como su variación circunferencial aumentan cuando lo hacen la excentricidad y la velocidad de rotación. Barwell y Lingard (1980) también midieron la distribución de temperatura en cojinetes radiales, encontrando que la temperatura máxima del cojinete (situada en el punto de espesor mínimo de película) es el valor apropiado para estimar la viscosidad “efectiva” para cálculos de capacidad portante.

Tonnesen y Hansen (1981) realizaron ensayos sobre un cojinete cilíndrico usando tres tipos de aceite de turbina, también con la finalidad de estudiar los efectos térmicos sobre su comportamiento. En sus cojinetes, el aceite se suministraba a través de uno o dos orificios o a través de dos ranuras axiales desfasadas 180°. Ellos encontraron que tanto la viscosidad como la geometría del suministro tienen impacto significativo sobre las temperaturas de operación. Cuando se emplea un lubricante de alta viscosidad, la temperatura del eje crece cuando lo hace la carga. Además, estos investigadores concluyen que aún en un cojinete de geometría simple se aprecian pequeñas pero consistentes discrepancias sobre un gran rango de operación cuando se comparan con la teoría iso-viscosa.

Seireg y Dandage (1982) también propusieron un procedimiento THD empírico para calcular un número de Sommerfeld modificado para ser empleado en el procedimiento tradicional (iso-viscoso) para calcular la excentricidad, caudal de lubricante, aumento de temperatura y coeficientes de rigidez y amortiguamiento en cojinetes hidrodinámicos

completos.

En 1983, Ferron y colaboradores publicaron resultados experimentales obtenidos con cojinetes de longitud finita en un estudio del desempeño de cojinetes simples. Las distribuciones de presión y temperatura del cojinete, excentricidad y caudal de suministro fueron medidas para diversas velocidades y cargas. Todas las mediciones se realizaron en estado estacionario, luego de alcanzar el equilibrio térmico. Asimismo, desarrollaron un modelo numérico para resolver la ecuación de Reynolds generalizada por diferencias finitas. Ellos reportaron buena concordancia de las mediciones de presión y temperatura con las predicciones del modelo numérico, pero grandes discrepancias entre los valores medidos y predichos de excentricidad. A su vez, Boncompain y colaboradores (1986) también informaron buena concordancia entre su trabajo teórico y las mediciones experimentales, pero con diferencias significativas entre los valores medidos de la posición del centro del muñón y los estimados. Ellos concluyen que los gradientes de temperatura en el espesor y a lo largo de la película fluida es el parámetro más importante en el comportamiento de cojinetes.

Braun y colaboradores (1986) estudiaron los efectos térmicos en la capacidad de carga sobre un cojinete criogénico. Para ello acoplaron la ecuación de Reynolds a la ecuación de energía del fluido, así como las ecuaciones de energía para el rotor y el estator, y estudiaron el coeficiente de transferencia de calor en dos casos: el adiabático y el isotérmico. Estos son dos casos límite ya que el adiabático permite que todo el calor permanezca en el fluido mientras el isotérmico hace que todo el calor escape al sólido. La discusión de estos autores se centró en los números de Sommerfeld y Nusselt en relación con la capacidad de carga. Ellos concluyeron que para excentricidades inferiores a 0,5 no había prácticamente diferencia entre el caso de propiedades constantes y el de propiedades variables, mientras que para excentricidades superiores a 0,5, las propiedades influyen sensiblemente en la distribución de la presión y en la capacidad portante.

Knight (1986), a su vez, estudió los efectos de la transferencia de calor en un cojinete con ranura axial. El análisis fue hecho usando condiciones de borde de conducción-conducción para el rotor-fluido y de conducción-convección para el estator-fluido. El coeficiente de convección fue constante para cada caso. Las temperaturas predichas con este modelo son similares a las experimentales en la mitad convergente del cojinete, pero no están de acuerdo con ellas en la mitad divergente. El desacuerdo se puede atribuir a dos problemas independientes. El primero sería la ruptura de la película o cavitación, y el segundo a que el coeficiente de transferencia de calor debería variar a lo largo de la circunferencia del cojinete

de manera sinusoidal, en base al espesor de la película y los números de Reynolds y Prandtl.

En 1987, Mitsui presentó un detallado estudio teórico-experimental sobre la influencia de la temperatura de suministro del lubricante y su termo-viscosidad en un cojinete simple con ranura axial. Él obtuvo el coeficiente de transferencia de calor convectivo y las distribuciones de presión y temperatura, logrando buena concordancia entre los datos experimentales y las predicciones obtenidas mediante la solución por diferencias finitas de la ecuación de Reynolds generalizada, considerando despreciable la conducción en el fluido en las direcciones axial y circunferencial, transferencia de calor entre fluido-cojinete y fluido-rotor, y la formación de estrías de vapor en la zona divergente. Estos datos se usarán en Capítulos venideros para comparación de predicciones.

Kennedy (1988) analizó la temperatura en un cojinete cónico lubricado con un líquido, bajo la influencia de viscosidad variable. La ecuación de la energía que usa supone que todo el calor generado es extraído a través de las paredes sólidas y que no hay calor arrastrado por convección. Además, considera que la viscosidad varía exponencialmente con la temperatura sobre la base de coeficientes obtenidos experimentalmente. Los coeficientes fueron clasificados como “débilmente” o “fuertemente” dependientes de la temperatura. Los resultados obtenidos mostraron que si el rotor está a una temperatura más baja que el estator se produce un aumento en la capacidad de carga, y que si la viscosidad es fuertemente dependiente de la temperatura, la distribución de la presión, el par, y capacidad de carga se ven afectadas significativamente.

Unos años después, Sinha y colaboradores (1991, 1993, 2000) analizaron la influencia de la convección y la disipación en cojinetes cónicos lubricados con aceite. La ecuación de energía utilizada incluyó conducción entre el rotor y el estator, disipación y convección, tanto en la dirección axial como circunferencial asumiendo, además, que la viscosidad varía exponencialmente con la temperatura. Ellos concluyeron que la presencia de convección disminuye la temperatura media mientras que la presencia de disipación la aumenta, y que si la viscosidad es fuertemente dependiente de la temperatura, la inclusión de la convección aumenta la capacidad de carga y el par. Este aumento es más pronunciado si la temperatura del rotor es menor o igual a la temperatura del estator. Adicionalmente, observaron que incluir sólo el efecto de disipación puede resultar en una subestimación de la carga y el par, mientras que considerar sólo convección conduce a una sobreestimación de la carga y el par. El resultado es una ecuación de la energía que debe tener en cuenta las temperaturas del rotor y el estator, así como convección y disipación.

Resumiendo, cada uno de los autores antes mencionados, ha tomado diferentes enfoques para aproximar la ecuación de la energía. En particular, se debe señalar que Fogg fue el primero en mencionar el efecto de una cuña térmica, impulsado por las variaciones en las propiedades del fluido, y que Cope y Kennedy acentuaron la importancia de acoplar la ecuación de Reynolds con la ecuación de la energía a través de ecuaciones de estado para la densidad y la viscosidad. Autores como Cobb, Sinha, Braun, y Knight mostraron que las temperaturas del rotor y el estator influyen sobre la distribución de la temperatura del lubricante. Para tener en cuenta la interacción sólido-fluido, se debe contar con un coeficiente de transferencia de calor, y las temperaturas tanto del rotor como del estator deben poder variar. Para modelar la distribución de la temperatura en el muñón y en el cojinete, ambos deben estar representados por sus ecuaciones de energía. Adicionalmente, como no existe gradiente de presión perpendicular al rotor y el estator, el único modo de transferencia de calor en esta dirección es la conducción. Cabe señalar que, matemáticamente, la naturaleza de segundo orden de la conducción requiere de dos condiciones de contorno, y que ambas son de tipo Neumann.

Un modelo que desprecia cualquiera de los mecanismos de transferencia, puede conducir a una sobreestimación o subestimación de los resultados. Desestimar el efecto térmico y sus condiciones de borde conduce a una subestimación en la variación de las propiedades y por ende, inexactitud en la cuantificación de la generación de presión, torque y capacidad de carga. No obstante, a diferencia de lo que sucede para el caso isotérmico, cuando se examina con cuidado, el gran cuerpo de los análisis prueba ser irregular en el contenido y contradictorio en sus afirmaciones y resultados. Como ya lo expresara Pinkus (1987), si se necesitase una solución no-isotérmica sería difícil decidir a cuál de los cientos de artículos en existencia recurrir para obtener una respuesta razonable. Estas discrepancias se deben, en gran parte, a las conocidas dificultades con el análisis térmico, el cual incluye no sólo el comportamiento del fluido sino también el ensamblado de las ecuaciones. Por otra parte, cada documento técnico y cada conjunto de nuevos resultados, aunque sin duda aportan a este tema, introduce al mismo tiempo nuevas complejidades al problema en lugar de ayudar en la búsqueda de un criterio único y general.

Asimismo, ya se ha mencionado que el cojinete de pivote centrado viola los fundamentos mismos de la teoría hidrodinámica, y se han citado las teorías surgidas para explicar esta contradicción. En primera instancia, se creyó que las distorsiones elásticas o térmicas producían deflexión del patín con el fin de darle cierta forma. Pero el hecho es que para patines

muy gruesos, en que las deflexiones calculadas son insignificantes, y patines fríos, en los que no existe deformación térmica, funcionan igual de bien. La operación de superficies paralelas se atribuyó, como ya se mencionó, a las variaciones en las propiedades del fluido debido al calentamiento, lo que genera “la cuña térmica”. Pero la contribución de este tipo de cuña representa una pequeña fracción de las cargas que estos cojinetes pueden soportar. Por lo tanto, ni la flexión ni la cuña térmica proporcionan una respuesta definitiva al problema. Ettles y Cameron (1965, 1966) mediante una serie más completa de pruebas con superficies paralelas, concluyeron que sin doblar las placas paralelas se produce una capacidad de carga negativa. No hay, por lo tanto, una respuesta completa para la capacidad portante en superficies paralelas, aunque tal vez esté vinculada a lo que se llama lubricación mixta, en parte un régimen hidrodinámico, en parte lubricación límite. Un número importante de dispositivos tribológicos tales como sellos, anillos de pistón, los anillos de bombeo, y tal vez las superficies paralelas operan en ese régimen. No obstante, no se ha determinado aún la contribución individual de cada régimen y por ende un método para calcular su capacidad de carga compuesta.

2.2.6 Elastohidrodinámica

En 1916, H. Martin aplicó por primera vez la teoría hidrodinámica a dientes de engranajes, pero su enfoque dio una película fluida tan irrealmente pequeña que resulta razonable que el postulado de la existencia de una película fluida en engranajes y dispositivos similares fuera abandonado por años. Fue la evidencia física la que aseguró la supervivencia del concepto de la acción hidrodinámica en los engranajes. La observación cuidadosa reveló que las marcas de mecanizado en las áreas de contacto de los dientes del engranaje permanecía visible incluso después de un uso prolongado, lo que hace improbable la existencia de contacto metal-metal. El enfoque de Martin tenía dos errores: la consideración de superficies rígidas y la de viscosidad constante. El método de análisis sufrió un giro cuando A. Grubin (1949) declaró ambas restricciones. En su análisis, Grubin consideró deformación superficial y un incremento sensible de la viscosidad con la presión, y como resultado, obtuvo espesores de película acordes con las mediciones. Poco después, Petrusevich (1951) obtuvo soluciones que incluyeron las ecuaciones de elasticidad y, en el proceso, descubrió la forma esencial y típica de los perfiles de presión elastohidrodinámica que se muestra en la Figura 2.9. Allí se observa la clásica curva de presión de contacto de Hertz junto a una curva típica de presión elasto-hidrodinámica. Las contribuciones individuales de deformación elástica de las piezas sólidas y

la dependencia de la viscosidad con la presión no son grandes en sí mismas, pero combinadas, resultan en un aumento de la capacidad portante y un cambio en la forma de la película fluida. De hecho, el espesor de la película fluida es casi constante en la zona de altas presiones, y disminuye bruscamente en el borde final, cuando la presión cae bruscamente.

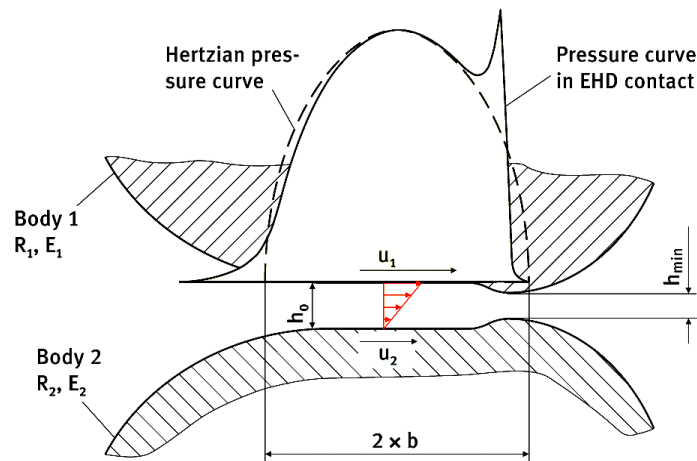


Figura 2.9: Perfil de presión elastohidrodinámica (Petrusevich, 1951).

Siguiendo a estos desarrollos, Dowson (1959) y otros autores produjeron una serie de trabajos que llevaron a la resolución de los problemas elastohidrodinámicos haciendo uso simultáneo de las ecuaciones de Reynolds y de elasticidad, e incluso junto con la ecuación de la energía. Esto dio lugar, incluso, a todo un conjunto de nuevos dispositivos tribológicos, tales como anillos de bombas y cojinetes de frotamiento, que requerían la aplicación de la teoría elastohidrodinámica en la descripción de su funcionamiento.

2.2.7 Carga dinámica

Como ya se comentara, una de las pocas contribuciones del estancado período 1925-1945, fue el de incorporación de la carga dinámica realizado por Swift, quien utilizó las condiciones de Sommerfeld en su solución. Este trabajo fue perfeccionado por Ott en Suiza (1948), quien suprimió las presiones negativas en las soluciones y obtuvo un espectro más exacto de las órbitas del eje para varios modos de carga. Burwell (1951) complementó luego la idea extendiéndola a cojinetes cortos. Una observación interesante de estos estudios fue que los resultados, tanto para cojinetes infinitamente cortos como para infinitamente largos, eran cualitativamente similares, aunque esto se debió más a la retención de las presiones negativas en ambos casos que a cualquier otro motivo.

Alrededor de 1964, apareció un nuevo concepto de tratamiento de los cojinetes dinámicamente cargados. Booker presentó por primera vez este enfoque llamándolo “método de movilidad”. Este método contempla un vector móvil M que define el lugar geométrico de ambas, la excentricidad y el ángulo del espesor mínimo respecto de la carga. Así, pueden construirse mapas únicos de M para una geometría dada de cojinete, tal como se muestra en Figura 2.10, que permite el trazado de la órbita del eje. De esta manera, a través del solapamiento en el tiempo, pueden obtenerse órbitas para varias excentricidades sin la necesidad de las iteraciones laboriosas involucradas en la solución convencional de la ecuación de Reynolds.

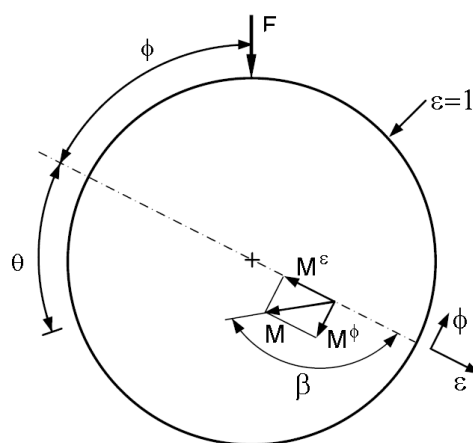


Figura 2.10: Representación del vector de movilidad, M , y las contribuciones de la excentricidad y el ángulo de espesor mínimo.

Un concepto similar, llamado “Método del Impulso”, habría sido propuesto simultáneamente por Blok (1965), el cual presenta algunas ventajas respecto del método de movilidad en la generación de los mapas gráficos para la predicción de la órbita del cojinete. De todas maneras, ambos pasaron a segundo plano con la evolución de las computadoras. Aún así, los dos métodos han demostrado ser de particular utilidad cuando se trata con diagramas de fuerza altamente irregulares, como los que ocurren en los cojinetes de los motores de combustión interna.

2.2.8 Inestabilidad y rotodinámica

El campo de la “dinámica de rotación” se centra en las inestabilidades que se generan con la excentricidad y desalineaciones en el rotor. En este sentido, el propio lubricante actúa como un sistema resorte-amortiguador, que se comporta como un agente corrector en la restauración del conjunto del cojinete después de haber sufrido una perturbación o agitación.

Existen al menos tres elementos subyacentes del tema de la estabilidad hidrodinámica de los cojinetes. El primero y más simple es el de las propiedades dinámicas de las películas fluidas, postulado por Stodola en 1925. En este sentido, Pestel (1954) fue uno de los primeros en evaluar los coeficientes de rigidez y amortiguamiento, tanto directos como cruzados, en cojinetes. A él le siguieron muchos otros que cubrieron el espectro de las geometrías de cojinetes tanto para lubricantes líquidos como gaseosos. Simultáneamente con la contribución de Stodola, Newkirk (1925) descubrió el fenómeno de vibración inducida por el cojinete. Esta inestabilidad hidrodinámica, originalmente llamada “oil whip” y posteriormente generalizada para líquidos y gases como “giro de media frecuencia” (half-frequency whirl), es un fenómeno mucho más complejo. A lo largo de los años 50 y 60, se hicieron valientes intentos para formular el problema matemáticamente y relacionarlo con el comportamiento del sistema observado experimentalmente. Los primeros esfuerzos fueron los de Hagg (1946) y Tondl (1957), seguidos por una serie de contribuciones de Sternlicht a partir de 1963, quien estudió la estabilidad de cojinetes lubricados por líquido y por gas. Pronto se tornó claro que los cojinetes no pueden ser estudiados aislados de las características del rotor. Esto dio lugar a la rotodinámica como es entendida hoy en día por los tribólogos.

Mucho trabajo pionero en rotodinámica fue realizado por Lund (1965), quien efectuó una labor fundamental en la conceptualización de la interacción de los rotores rígidos y flexibles con los cojinetes en la determinación de la estabilidad. Estos conceptos desarrollados por Lund se encuentran aún hoy en día en los estudios de rutina de los sistemas rotantes. Por otra parte, Allaire y colaboradores (Allaire, 1980) desarrollaron luego un gran número de mapas de estabilidad aplicables a diferentes configuraciones, mientras que, más recientemente, Childs y colaboradores (Rodríguez y Childs, 2006; Carter y Childs, 2008) desarrollaron estudios sistemáticos con la determinación experimental y modelado de coeficientes dinámicos en cojinetes hidrostáticos y de zapatas pivotantes de diversas configuraciones. Mediante estos estudios se ha encontrado el límite de estabilidad de diversos tipos de cojinetes, así como la dependencia de sus coeficientes dinámicos con la frecuencia de excitación.

2.2.9 Sellos hidrodinámicos

La hidrodinámica fue usada en los sellos principalmente para separar las superficies y minimizar así el desgaste. Un beneficio extra importante que se puede obtener, es cuando algunos diseños también permiten evitar la fuga de fluido sellado por la presencia de una

película. Esto a menudo se consigue teniendo la hidrodinámica del sello dispuesta de manera que el líquido se bombea de nuevo hacia el lado de alta presión.

El interés por la hidrodinámica de los sellos se remonta a los trabajos de Bernard Nau (1964, 1968), quien observó la cavitación hacia el interior de bombeo en los sellos, y por lo tanto la generación de presiones hidrodinámicas, debido a falta de paralelismo entre las superficies. Los sellos hidrodinámicos fueron luego cuidadosamente analizados por J. Findlay (1968, 1969), quien delineó tanto la dinámica de la burbuja de cavitación como el mecanismo de entrada de bombeo. En este último, Findlay mostró que se debe a una combinación de desalineación plana y desajuste radial, o excentricidad, del centro del patín vis-a-vis con la cara del sello. Este resultado es de considerable interés no sólo para la tecnología de los sellos, sino también para los cojinetes lubricados a través de ranuras circunferenciales.

Una serie de análisis siguieron al trabajo pionero de Findlay. Entre ellos se destacan el de Sneck y McGovern (1973), quienes se ocuparon del sello con cara con ranura en espiral, especialmente recomendada para el bombeo hacia el interior, y el de Lcbeck y colaboradores (1978), que analizaron el efecto que podría producir la ondulación en las caras de los sellos, incluyendo su rugosidad y desgaste. Más adelante, Childs y colaboradores (Childs y Fayolle, 1999; Childs y Wade, 2004) estudiaron la influencia de los sellos en el comportamiento dinámico de turbomáquinas de gran porte, afirmando que muchas veces resultan ser los componentes principales de los sistemas. De hecho, un rotor esbelto soportado por dos cojinetes, puede contener una decena de sellos cuyas propiedades de rigidez y amortiguamiento dictan la respuesta dinámica del sistema.

2.2.10 Efectos de la rugosidad de superficie

Las superficies del rotor y el estator tendrán asperezas en función de la naturaleza del proceso de fabricación usado y de los materiales utilizados. A primera vista, se pensaría que las pequeñas asperezas ofrecerían efectos insignificantes en el análisis de la película fluida. Sin embargo, la fricción generada en la interfase líquido-sólido altera las presiones generadas en la película, reduce la capacidad de carga, y genera efectos térmicos no deseados. Uno de los primeros artículos que se ocupó específicamente de los efectos de la rugosidad de la superficie en la lubricación hidrodinámica fue el de Tzeng y Saibel (1967). Estos autores resolvieron el problema de flujo para el caso de un patín considerando una distribución (beta, gaussiana, u otra) de rugosidades al azar y asumiendo que el valor máximo de la rugosidad es del mismo

orden que el espesor de película, aunque ignorando los efectos de rugosidad longitudinal y la cavitación. De acuerdo a los resultados, la capacidad portante se vería incrementada en un 30% por las irregularidades superficiales.

Los análisis posteriores, tales como el muy sólido trabajo de Christensen y Tonder (1971), adoptaron en general el mismo enfoque, usando configuraciones unidireccionales de rugosidades, o ignorando los efectos de perturbaciones bidireccionales. Sin embargo, Sun y Chen (1977) elaboraron un importante documento que muestra las limitaciones que deben ser tenidas en cuenta en el trato de un tema tan nebuloso como la rugosidad de la superficie. Ellos mostraron cómo las rugosidades de las superficies de cojinetes de longitud finita afectan a su funcionamiento y su respuesta, y señalaron que los picos maquinados son por lo general un orden de magnitud menor que el espesor de la película hidrodinámica, mientras que su longitud de onda es del mismo orden.

A esto le siguen dos conclusiones: el efecto de la rugosidad en la mayoría de las películas está destinada a ser pequeña en comparación con el efecto de la cuña, y la ecuación de Reynolds no puede ser utilizada para asperezas cuyas alturas son del mismo orden que el huelgo, sino que sería más bien la ecuación de Stokes que se aplica a tales casos. Sun (1978), precisamente, analizó la lubricación hidrodinámica de superficies rugosas usando la ecuación de Reynolds, lo que requiere un espaciado grande entre rugosidades y alturas de picos pequeñas en comparación con el espesor de la película. Así mostró analíticamente que la rugosidad afecta a través de dos términos, uno que depende de un factor de correlación de forma, que en esencia refleja la interdependencia de las irregularidades en las direcciones perpendiculares, y otro que no. El cálculo numérico de estos términos en un ejemplo muestra que ambos términos son de magnitud comparable, por lo que desprestigiar el factor de forma (cosa que se había hecho hasta entonces) induce a importantes errores.

Elrod (1973) analizó los efectos de la rugosidad de la superficie en el caso de películas gaseosas, que son mucho más delgadas que las líquidas y están libres del problema de cavitación. Este autor claramente separó dos familias de soluciones, las que quedan dentro del régimen de Stokes, cuando la relación longitud de onda a espesor de película es pequeña, y las de régimen de Reynolds, cuando la relación longitud de onda a espesor de película es grande. Sin embargo, las complicaciones en el análisis se multiplicaron cuando Lebeck (1978, 1983), al tiempo que confirmó que soluciones unidimensionales no representan la verdadera dinámica de superficies rugosas, también mostró que dado el delicado carácter de la topografía, el tramado mismo de la red de diferencias finitas, vis-á-vis con la red asperezas, afecta considerablemente

la solución.

En los análisis anteriores de sellos y cojinetes lubricados con líquidos, el mayor problema en realidad estuvo en la suposición de la existencia de una película completa. Fueron Walowit y colaboradores (Hamilton *et al.*, 1966; Anno *et al.*, 1969) quienes proporcionaron soluciones que incluyen cavitación. En su artículo de 1966 presentan evidencia fotográfica de cavitación en superficies paralelas (ver Figura 2.11) y una formulación del problema de micro-asperezas; y en el trabajo posterior proporcionan además de casos de muestra, una expresión para la presión generada por las asperezas.

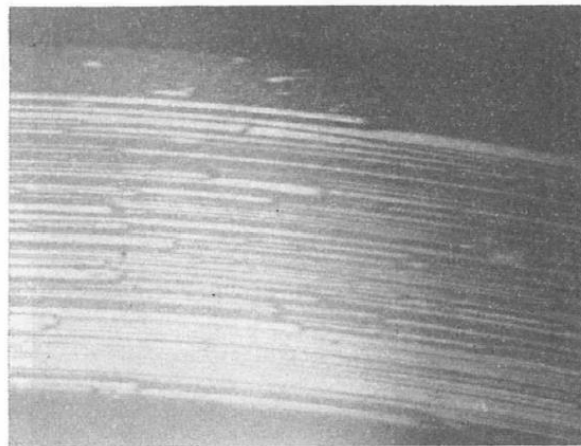


Figura 2.11: Burbujas de cavitación en sello transparente con rotación de derecha a izquierda (Hamilton *et al.*, 1966)

En la década del 70 se desarrollaron investigaciones teóricas sobre la influencia de los patrones de rugosidad en cojinetes hidrodinámicos (Christensen y Tonder, 1971, 1973; Prakash *et al.*, 1980). Los resultados despertaron particular interés en superficies con rugosidad transversal dado que para cojinetes con alta carga (alta excentricidad), la capacidad portante debería incrementarse notablemente. Algunos artículos en este tema versan sobre cojinetes cerámicos (Andersson y Lintula, 1994; Andersson *et al.*, 1996).

Cabe señalar que la mayoría de los trabajos que han seguido a estos desarrollos, relacionados con la influencia de las estructuras superficiales, son puramente teóricos (Turage *et al.*, 1999; Scholle, 2007; Shinkarenko *et al.*, 2009), no habiéndose podido verificar aún una influencia clara del patrón de rugosidad. Es más, los trabajos experimentales han mostrado que el desgaste de estos cojinetes resultó acelerado, haciendo que las superficies se alisaran rápidamente (Litwin, 2011, ver Figura 2.12).

2.2.11 Lubricantes no-Newtonianos

A partir de la obra de Milne (1957), una importante cantidad de investigadores han tratado de evaluar el efecto que los lubricantes no-Newtonianos pueden tener sobre el rendimiento de los cojinetes. En particular, Dubois y colaboradores (1960) desarrollaron un estudio experimental de relaciones de fricción y excentricidad en cojinetes radiales lubricados con.

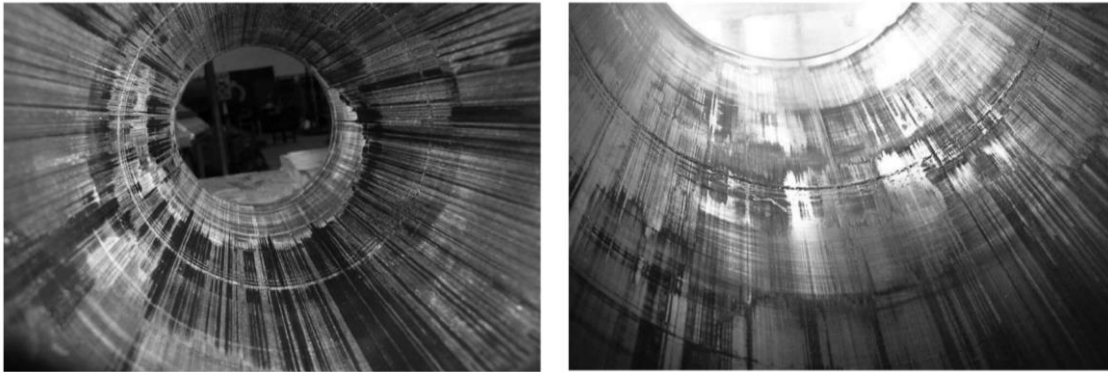


Figura 2.12: Superficie interior de un cojinete de poliamida maquinado (broached) antes (izq.) y después (der.) de su uso mostrando alisado parcial (Litwin *et al.*, 2011)

aceite no-Newtoniano. Ellos encontraron que aceites de este tipo muestran menor fricción que la correspondiente a un aceite Newtoniano bajo las mismas condiciones de operación. No obstante, este fenómeno no coincidió con su trabajo analítico y no pudo ser explicado.

Unos años después, Tao y Phillipoff (1967) estudiaron el uso de lubricantes viscoelásticos en cojinetes. Según sus observaciones, el comportamiento no-Newtoniano de los líquidos viscoelásticos causa el aplastamiento de los perfiles de presión y el pico de presión cambia de lugar en la película debido a la presencia de esfuerzos normales en el lubricante.

La Tabla 2.1, tomada de Pinkus (1987), muestra una selección representativa de trabajos en el área hasta ese momento, destacando la diversidad de tipos de lubricantes empleados y los efectos resultantes sobre la capacidad de carga producida por los distintos enfoques analíticos. Las contradicciones se deben a la naturaleza de los modelos planteados para los fluidos, así como al tipo de cojinete analizado y método de solución.

En cuanto a la naturaleza del lubricante, muchos lubricantes comerciales presentan propiedades viscoelásticas con pseudoplasticidad (shear-thinning). El uso del modelo viscoelástico más sencillo, el modelo de Maxwell, que suma cierta capacidad de almacenamiento de energía (respuesta elástica) por parte del lubricante a la de disipación de energía (naturaleza viscosa), disminuiría la disipación de energía debido a la tensión en la pared en comparación con los fluidos Newtonianos (Berker *et al.*, 1995; Fetecau *et al.*, 2009).

Algunos intentos de modelos más complejos se han basado en flujos entre cilindros con pequeña o moderada excentricidad, encontrando una fuerte dependencia en la dinámica del flujo, sobre todo de la forma y tamaño de la región de recirculación, con la naturaleza del modelo usado (Beris *et al.*, 1984, 1986).

Tabla 2.1: Algunos trabajos sobre lubricación con fluidos No-Newtonianos hasta 1987 (Pinkus, 1987)

Year	Author	Lubricant Model	Bearing Applied to	Effect on Load Capacity
1957	Milne	Viscoelastic	Slider	Increase
1967	Hsu	Pseudoplastic	Journal	Decrease
1971	Allen and Kline	Micropolar	Slider	Increase
1973	Tipei and Rohde	Directional Viscosity	Slider	Increase for short; decrease for long sliders
1978	Harnoy	Viscoelastic	Journal	Increase
1983	Bourgin and Gray	Polymer-Thickened	Journal	Decrease
1984	Buckholz	Rheological	Journal	Decrease

Sin embargo, son pocos los investigadores que han explorado el efecto de la elasticidad en el lubricante. La mayoría de los que han considerado fluidos no-Newtonianos se han contentado con el uso de modelos pseudoplásticos para describir la disminución de la viscosidad con el aumento de la velocidad de deformación de corte, sin pretender describir efectos elásticos en la compresión o el corte (Hsu, 1967; Buckholz, 1985; Sui y Sadeghi, 1991; Yang y Wen, 1992; Bhattacharjee y Das, 1996; Kumar *et al.*, 2008; Chu y Hsu, 2015). Algunos incluso incorporan la dependencia de la viscosidad con la temperatura y/o la presión (Saini *et al.*, 2015). En este sentido, la viscosidad ha sido modelada usando el clásico modelo de la Ley de la Potencia o, aún más frecuentemente, el de Eyring (con forma "sinh") o el completo de Ree-Eyring (con más números de términos y varios tiempos de relajación).

Cabe señalar, sin embargo, que al tener en cuenta sólo la dependencia de la viscosidad con la velocidad de deformación en el caso de lubricantes no-Newtonianos, y no contemplar las importantes diferencias entre las tensiones normales en la dirección de flujo y en la dirección perpendicular (provenientes de la elasticidad del material), se está subestimando la capacidad de carga de la película de lubricante (Bair, 2015). Este es un campo aún muy poco explorado tanto experimental como teóricamente. La descripción de un flujo que considere los efectos simultáneos de no-linealidades en las propiedades de los materiales, propiedades del lubricante (tanto de su comportamiento reológico, como térmico o ante la presión) y de las ecuaciones que gobiernan la dinámica del flujo en cojinetes es una meta que está lejos de ser alcanzada.

2.3 RESUMEN Y PERSPECTIVAS

Como se comentara, luego de gestada la ciencia de lubricación hidrodinámica, ella fue despertando gradualmente el interés de la comunidad científica internacional, alcanzando logros sin precedentes, principalmente en el período de la posguerra. Fue en esa época que se resolvió la ecuación de Reynolds, en su forma finita, con las condiciones de contorno correctas, para casi cualquier configuración de cojinete, usando lubricantes líquidos y gaseosos. En este período también se desarrollaron teorías viables y sólidas para calcular el rendimiento de engranajes y rodamientos, y los cojinetes vinculados a la rotodinámica proporcionaron una nueva metodología para la correcta evaluación de la estabilidad de los sistemas rotantes. Todo esto se debió, en gran medida, al patrocinio por parte de gobiernos y corporaciones. Paralelamente, aparecieron muchas publicaciones y libros en el tema, y se generaron sofisticados algoritmos para la solución de conjuntos complejos de ecuaciones diferenciales. Es más, inclusive el nombre “lubricación”, asociado a latas de aceite, fue cambiado a “tribología” (del Griego “tribein”, que significa “frotar”), un salto cuantitativo en respetabilidad.

Posteriormente, se produjo un avance menos cuantificable, relacionado con la sofisticación de los algoritmos matemáticos y la tecnología computacional, los que permiten el abordaje de problemas analíticos muy complejos. Según Pinkus (1987), no es la falta de esfuerzo lo que parece ser responsable de la desaceleración que había ocurrido, sino más bien una desorientación sobre lo que constituye el objetivo y el propósito de la teoría hidrodinámica, así como la falta de perseverancia en ver a través de un problema su resolución viable. Esta realidad aún persiste. No se han concentrado esfuerzos, por ejemplo, en establecer una jerarquía o clase entre las variables y los múltiples regímenes THD posibles a fin de reducir el problema a un tamaño y forma susceptible de algún tipo de solución generalizada. No se han realizado experimentos básicos para facilitar esto, y el campo está abierto para cualquier postulado arbitrario, no importa lo inverosímil. Un análisis de la literatura de los últimos años revelaría la existencia de una fracción cada vez menor de trabajos experimentales en el total de los trabajos publicados. Experimentos cuidadosos y meticulosos con objetivo de investigar un fenómeno específico, o una variable única son prácticamente inexistentes. Por otro lado, persiste una excesiva preocupación por los métodos de solución numérica, hasta el punto de que algunos documentos no ofrecen resultados y perspectivas en la teoría hidrodinámica, sino sólo las complejidades de la programación. En este sentido, la breve historia que se relató en este Capítulo es una muestra de que resta mucho por entender y resolver. Existe un gran

número de áreas en la teoría hidrodinámica, donde los tiempos no se han mantenido con las necesidades.

El estudio científico de la fricción, la lubricación y el desgaste siguen recibiendo mucha atención. La fricción es la principal causa de disipación de energía, por lo que, el mejor entendimiento de este mecanismo y su control permitiría que se hicieran considerables ahorros económicos. La operación de los más modernos sistemas de ingeniería, tales como máquinas, instrumentos, vehículos, hardware computacional, etc., de una forma u otra, está influenciado por la presencia de fricción (Harnoy, 2003; Grote y Antonsson, 2009). La tribología, que es el nombre usado actualmente para englobar la multitud de actividades en este altamente interdisciplinario tema, ha tomado un lugar prominente entre las ciencias. Ella continúa presentando desafíos para quienes trabajan en el área ante el interés creciente de diversos sectores industriales por aprender más acerca de las causas de la pérdida de energía por fricción y desgaste. Asimismo, y con cierto paralelismo con la época de posguerra, en la actualidad pueden identificarse dos motores que impulsan la ciencia moderna: la tecnología en micromecanismos y la bioingeniería.

La tecnología de micromecanismos ha cobrado un nuevo énfasis en las últimas décadas en lo que hace a tribología a microescala (Harnoy, 2003; Yoon *et al.*, 2005; Popov, 2013). Dada las grandes relaciones de área a volumen, la adhesión, fricción, tensión superficial, resistencia viscosa y otras fuerzas de borde son los factores dominantes que controlan el diseño y características de funcionamiento. En este sentido, desde la edad media no ha habido fronteras de tales proporciones como las actuales en lo que hace a tribología. El modelado, la predicción y la medición de tales fuerzas son grandes desafíos, y el entendimiento a nivel microescala será el elemento más crítico en la utilización exitosa de micromecanismos tales como sistemas micro-electromecánicos (MEMS) donde el efecto viscoso del aire modifica significativamente la dinámica de los dispositivos. Los desafíos son enormes, al punto de que la escala misma pone en jaque la validez de la hipótesis del continuo.

Por otro lado, el impacto de la bioingeniería en la tribología ha recaído en lo que se denomina biotribología (Cann y Wimmer, 2015). La biotribología, el más joven de los hijos de la ciencia de la lubricación, es algo que fue abordado por primera vez por el mismo Osborne Reynolds, hace más de 100 años. Su trabajo de 1886 que comenzó con toda esta ciencia, terminaba con estas palabras: *“El único otro sistema auto-actuante de lubricación es el de movimiento alternativo, las juntas articuladas con presión alternativa encima y separación de las superficies. Esta juega un papel importante en ciertas máquinas, como la máquina de*

vapor, y es tan fundamental en los mecanismos animales como la acción lubricante del eje en los artefactos mecánicos.” En, general el problema en biotribología es doble debido a la anatomía y la fisiología de las articulaciones en seres vivos, uno es expresarlas o representarlas en términos de ingeniería, y el otro proporcionar un modelo analítico que prediga correctamente el funcionamiento de una articulación viva o de reemplazo.

En definitiva, la tribología en general, y la lubricación hidrodinámica en particular, siguen despertando interés y, en este caso, han motivado el entusiasmo por seguir avanzando en aquellos temas que aún esperan por su comprensión cabal. En ellos se centrará el desarrollo del presente trabajo.

REFERENCIAS

- Agrawal, G.L., Analysis of Power Shaped Multi-pad Hydrodynamics Conical Gas Bearings, *Tribol. Trans.*, Vol. 36, pp. 240-248, 1993.
- Ahuja, B.B., Chikate, P.P. y Basa, S.K., High Speed Supports Using Aerostatic Aerodynamic Bearing, *Ind. Lubric. Tribol.*, Vol. 52, pp. 67- 75, 2000.
- Allaire, P.E., y Flack, R., Instability Thresholds for Flexible Rotors on Hydrodynamic Bearings, Rotordynamic Instability Problems in High Performance Turbomachinery, *NASA Report No. CP2133, proceedings of workshop held at Texas A&M University*, pp. 403-425, 1980.
- Allaire, P.E., Kocur, J.A. y Nicholas, J.C., A Pressure-Parameter Method for Finite-Element Solutions of Reynolds' Equation, *ASLE Trans.*, No. 84-AM-2D-3, pp. 1-9, 1984.
- Almqvist, T., *Numerical Simulation of Elastohydrodynamic and hydrodynamic Lubrication Using the Navier-Stokes and Reynolds Equation*, ISSN 1402-1757, Tesis de Lulea University of Technology, Suecia, 2001.
- Amontons, G., *Histoire de l'Academie Royale des Sciences avec Les Memoires de Mathematique et de Physique*, Paris, 1699.
- Andersson, P. y Lintula, P., Load-Carrying Capability of Water-Lubricated Ceramic Journal Bearings, *Tribol. Int.*, Vol. 27, pp. 315-321, 1994.
- Andersson, P., Juhankob, J., Nikkilac, A.P. y Lintulac, P., Influence of Topography on the Running-In of Water-Lubricated Silicon Carbide Journal Bearings, *Wear*, Vol. 201, pp. 1-9, 1996.
- Anno, J.N., Walowit, J.A. y Allen, C.M., Load Support and Leakage from Microasperity-Lubricated Face Seals, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 91, pp. 729-730, 1969.
- Artiles, A. y Heshmat, H., Analysis of Starved Journal Bearings including Temperature and Cavitation Effects, *J. Tribol.*, Vol. 107, pp. 1- 13, 1985.
- Artiles, A. y Heshmat, H., Analysis of Starved Thrust Bearings including Temperature Effects, *ASME Paper 85-Trib-17*, 1986.
- Ausman, J.S., An Approximate Solution For Self-Acting Gas Lubrication of Stepped Sector Thrust Bearings, *ASLE Trans.*, Vol. 4, pp. 304-313, 1961.
- Bair, S. The First Normal Stress Difference in a Shear-Thinning Motor Oil at Elevated Pressure. *Tribol. Trans.*, Vol. 58, pp. 654-659, 2015
- Barber, E.M. y Davenport, C.C., Investigation of Journal Bearing Performance, *State Coll. Bull., Eng. Exp. Stat. Series*, Vol. 27, 1933.
- Barwell, F.T. y Lingard, S., The Thermal Equilibrium of Plain Journal Bearings, *Proceedings del 6th*

- Leeds-Lyon Symp. on Tribology*, Mech. Eng. Public., Londres, pp. 24-33, 1980.
- Bayada, G., Variational Formulation and Associated Algorithm for the Starved Finite Journal Bearing, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 105, pp. 435-437, 1983.
- Beris, A.N., Armstrong, R.C. y Brown, R.A., Finite Element Calculation of Viscoelastic Flow in a Journal Bearing: I. Small Eccentricities, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, Vol.16, pp. 141-172, 1984.
- Beris, A.N., Armstrong, R.C. y Brown, R.A., Finite Element Calculation of Viscoelastic Flow in a Journal Bearing: II. Moderate Eccentricities, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, Vol.19, pp. 323-347, 1986.
- Berker, A., Bouldinb, M.G., Kleisc, S.J. y VanArsdalec W.E., Effect of Polymer on Flow in Journal Bearings, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, Vol. 56, pp. 333-347, 1995.
- Bhattacharjee, R.C. y Das, N.C., Power Law Fluid Model Incorporated into Elastohydrodynamic Lubrication Theory of Line Contact, *Tribol. Int.*, Vol. 29, pp. 405-413, 1996.
- Blok, H., Topological aspect and the Impulse/Whirl Angle Method in the orbital hydrodynamics of dynamically loaded journal bearings, *Lecture notes* (condensed English version), Delft, The Netherlands, 1965.
- Boncompain, R., Fillon, M. y Frene, J., Analysis of Thermal Effects in Hydrodynamic Bearings, *J. Tribol.*, Vol. 108, pp. 219-224, 1986.
- Booker, J.F., Dynamically Loaded Journal Bearings: Mobility Method of Solution, *J. Fluid Eng.*, Vol.87, pp. 534-537, 1964-65.
- Booser, E.R., Ryan, F.D. y Missana, A., Maximum Temperature for Hydrodynamic Bearings Under Steady Load, *Lubric. Eng.*, Vol. 26, pp. 226-235, 1970a.
- Booser, E.R., Missana, A. y Ryan, F.D., Performance of Large Steam Turbine Journal Bearings, *ASLE Trans.*, Vol. 13, pp. 262-268, 1970b.
- Bowden, F.P. y Tabor, D., *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford University Press, 1950.
- Braun, M.J, Mullen R.L., Prekwas, A. y Hendricks, R.C., Finite Difference Solution for a Generalized Reynolds Equation with Homogeneous Two-Phase Flow, Proceedings del *First Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Honolulu, Hawaii, 1985.
- Braun, M.J., Wheeler, R.L. y Hendricks, R.C., Thermal Shaft Effects on Load- Carrying Capacity of a Fully Coupled, Variable-Properties Cryogenic Journal Bearing, *ASLE Trans.* ,Vol. 30, pp. 282-292, 1986.
- Braun, M.J, Wheeler, R.L. y Hendricks, R.C., A Fully Coupled Variable Properties Thermohydraulic Model for Hydrostatic Journal Bearing, *J. Tribol.*, Vol. 109, pp. 405-417, 1987.
- Brown, T. y Newman, A., High-speed Highly Loaded Bearings and Their Development, Proceedings de la *Conference on Lubrication and Wear*, Inst. Mech. Eng., Londres, 1957.
- Buckholz, R.H., On the Role of a Non-Newtonian Fluid in Short Bearing Theory, *J. Tribol.*, Vol. 107, pp. 68-74, 1985.
- Burwell, J.T. The calculated performance of dynamically loaded sleeve bearings. III. *J. Appl. Mech.*, *Trans. ASME*, Vol. 18, pp. 393-404, 1951.
- Philippa Cann, Markus Wimmer, Welcome to the first issue of Biotribology, *Biotribology*, Vol. 1-2, pp. 1-66, 2015.
- Cameron, A., Hydrodynamic Lubrication of Rotating Disk in Pure Sliding. A New Type of Oil Film Formation, *J. Inst. Petrol.*, Vol. 37, pp. 471-485, 1951.
- Cameron, A., *The Principles of Lubrication*, Longmans, Green & Co., 1966.
- Cameron A. y Wood, W.L., Parallel Surface Thrust Bearings, Proceeding del *6th Int. Cong. of Appl. Mech.*, 1946.
- Cameron A. y Wood, L., The Full Journal Bearing, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 161, pp. 59-72, 1949.

- Cardullo, F.E., Some Practical Deductions for the Theory of Lubrication of Cylindrical Bearings, *Trans. ASME*, Vol. 52, pp. 143-153, 1930.
- Carter, C.R. y Childs, D.W., Measurements Versus Prediction for the Rotordynamic Characteristics of a Five-Pad Rocker-Pivot Tilting-Pad Bearing in Load-Between-Pad Configuration, *J. Eng. Gas Turbines Power*, Vol. 131, 012507, 2008.
- Castelli V. y Pirvics, J., Equilibrium Characteristics of Axial Groove Gas Lubricated Bearings, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 89, pp. 177-196, 1967.
- Castelli, V. y Pirvics, J., Review on Numerical Methods in Gas Bearing Film Analysis, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 90, pp. 777-792, 1968.
- Charnes, A., Ostetle, F. y Saible, E., On the Energy Equation for Fluid-Film Lubrication, *Proc. Royal Soc. A, Math. Phys. Eng. Sci.*, Vol. 214, pp. 133-136, 1952.
- Childs, D. y Fayolle, P., Test Results for Liquid “Damper” Seals Using a Round-Hole Roughness Pattern for the Stators, *J. Tribol.*, Vol. 121, pp. 42-49, 1999.
- Childs, D. y Wade, J., Rotordynamic-Coefficient and Leakage Characteristics for Hole-Pattern-Stator Annular Gas Seals - Measurements versus Predictions, *J. Tribol.*, Vol. 126, pp. 326-333, 2004.
- Christensen, H. y Tonder, K., The Hydrodynamic Lubrication of Rough Bearing Surface of Finite Width, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 93, pp. 324-329, 1971.
- Christensen, H. y Tonder, K., The Hydrodynamic Lubrication of Rough Journal Bearings, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 95, pp. 166-172, 1973.
- Christopherson, D.G., A New Mathematical Method for the Solution of Film Lubrication Problems, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 146, pp. 126-135, 1941.
- Chu, L.M. y Hsu, H.C. A Layered-Rheology Model for Thin Film Elastohydrodynamic Lubrication of Circular Contacts, *Appl. Mech. Mater.*, Vols. 764-765, pp. 160-164, 2015.
- Cobb, E.C. y Saunders, O.A., Heat Transfer from Rotating Disk, *Proc. Royal Soc. A, Math. Phys. Eng. Sci.*, Vol. 236, pp. 343-351, 1956.
- Cole, J.A., Experiments on the Flow in Rotating Annular Clearances, *Proceedings de la Conference on Lubrication and Wear*, Inst. Mech. Eng., Londres, pp. 16-19, 1957.
- Cole, J.A. y Hughes, C.J., Oil Flow and Film Extent in Complete Journal Bearings, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 170, pp. 499-510, 1956.
- Constantinescu, V.N., Laminar Gas Flow in Thin Layers, *Communic. RPR Academy*, VI, 2, pp. 281-284, 1956.
- Constantinescu, V.N., Prandtl Mixing Length In Turbulent Lubrication, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 173, pp. 881-900, 1959.
- Constantinescu, V.N., *Gas Lubrication*, American Soc. Mech. Eng., 1969.
- Constantinescu, V.N., Basic Relationships in Turbulent Lubrication and their Extension to Include Thermal Effects, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 95, pp. 147-154, 1973.
- Constantinescu, V.N., On Source Starvation Phenomenon In Fluid Film, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 99, pp. 441-448, 1977.
- Cope, W., The Hydrodynamic Theory of Film Lubrication, *Proc. Royal Soc. A, Math. Phys. Eng. Sci.*, Vol. 197, pp. 201-216, 1949.
- Coulomb, C.A., *Memoires de Mathematique et de Physique de l'Academie Royale des Sciences*, Paris, 1785.
- DiPrima, R.C., High order Approximations in the Asymptotic Solution of the Reynolds Equation for Slider Bearings as High Bearing Numbers, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 90, pp. 45-51, 1968.
- DiPrima, R.C. y Stuart, J.T., Flow Between Eccentric Rotating Cylinders, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 94, pp. 266-274, 1972.

- Dowson, D., A Generalized Reynolds Equation for Fluid-Film Lubrication, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 4, pp. 159-164, 1962.
- Dowson, D., *History of Tribology*, Longman, 1979.
- Dowson, D. y Higginson, G. R., *Elastohydrodynamic Lubrication*, Pergamon, New York, NY, 1966.
- Dowson, D., Hudson, J., Hunter, B. y March, C., An Experimental Investigation of the Thermal Equilibrium of Steadily Loaded Journal Bearings, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 181, pp. 70-80, 1966-67.
- Dubois, G. y Ocvrik, F., Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short-Bearing Approximation for Full Journal Bearings, *N.A.C.A. Technical Report 1157*, pp. 1199-1230, 1953.
- Dubois, G., Ocvirk, F. y Wehe, R., Study of Effect of a Newtonian Oil on Friction and Eccentricity Ratio of a Plain Journal Bearing, *NASA Tech. Note*, D-427, 1960.
- El-Gamal, H., Analysis of the Steady State Performance of a Wedge-Shaped Hydrodynamic Journal Bearing, *Wear*, Vol. 184, pp. 111-117, 1995.
- Elrod, H.G., Thin-Film Lubrication Theory for Newtonian Fluids with Surfaces Possessing Striated Roughness or Grooving, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 95, pp. 484-489, 1973.
- Elrod, H.G. y Adams, M., A computer program for cavitation, *Proceedings del 1st Leeds-Lyon Symp. on Cavitation and Related Phenomena in Lubrication*, Mech. Eng. Public., Londres, 103:354, 1974.
- Ettles, C. y Cameron, A., The Action of the Parallel Surface Thrust Bearing, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 180 3K, 1965-66.
- Ettles, C. y Suoboda, O., The Application of Double Conical Journal Bearings in High Speed Centrifugal Pumps, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 183, pp. 221- 224, 1975.
- Faria, M.C. y San Andrés, L., Numerical Modeling of High Speed Hydrodynamic Gas Bearings, *J. Tribol.*, Vol. 38, pp. 698- 704, 1999.
- Ferron, J., Frene, J. y Boncompain, R., A Study of the Thermohydrodynamic Performance of a Plain Journal Bearing, Comparison Between Theory and Experiments, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 105, pp. 422-428, 1983.
- Fetecau, C., Vieru, D. y Mahmood, A., On The Energetic Balance for The Flow of A Maxwell Fluid due to A Constantly Accelerating Plate, *Acta Mech.*, Vol. 203, pp. 89-96, 2009.
- Findlay, J.A., Cavitation in Mechanical Face Seals, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 90, pp. 356-364, 1968.
- Findlay, J.A., Inward Pumping in Mechanical Face Seals, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 91, pp. 417-425, 1969.
- Floberg, L., Boundary Conditions of Cavitation Regions In Journal Bearings, *ASLE Trans.*, Vol. 4, pp. 262-266, 1961.
- Fogg, A., Fluid Film Lubrication of Parallel Thrust Surfaces, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 155, pp. 49-67, 1946.
- Fowles, P., A Simpler Form of the General Reynolds Equation, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 92, pp. 661-662, 1970.
- Gazley, C., Heat Transfer Characteristics of the Rotational and Axial Flow between Concentric Cylinders, *Trans. ASME*, pp. 79-90, 1958.
- Grabovskii, V.I., Optimum Gas Journal Bearing with a Flexible Surface, *Fluid Dynamics*, Vol. 38, pp. 193-202, 2003a.
- Grabovskii, V.I., Determination of the Clearance of a Plane Slider Bearing Realizing Maximum Rigidity, *Fluid Dynamics*, Vol. 38, pp. 839-845, 2003b.
- Gross, W., *Gas Film Lubrication*, J. Wiley and Sons, 1962.
- Grubin, A.N. y Vinogradava, I.E., Central Scientific Research Institute for Technology and Mechanical Engineering, Book No. 30 (Moscow), DSIR Translation n° 337, 1949.

- Hagg, A.C., The Influence of Oil-Film Journal Bearings on the Stability of Rotating Machines, *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 13, pp. A211, 1946.
- Hamilton, D.B., Walowit, J.A. y Allen, C.M., A Theory of Lubrication by Micro-Irregularities, *J. Fluid Eng.*, Vol. 88, pp. 177-185, 1966.
- Harnoy, A., *Bearing Design in Machinery. Engineering Tribology and Lubrication*, Marcel Dekker Inc., 2003.
- Harrison, W.J., The Hydrodynamical Theory of Lubrication with a Special Reference to Air as a Lubricant, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 22, pp. 34-54, 1913.
- Hayashi, H. y Wada, S., Stability of Floating Ring Journal Bearings under Lubricant Starvation, *Proceedings de la 1985 JSLE International Tribology Conference*, 1985.
- Hays, D.F., Plane Sliders of Finite Width, *ASLE Trans.*, Vol. I, No.2, 1958.
- He, M., Cloud, C.H. y Byrne, J.M., Fundamentals of Fluid Film Journal Bearing Operation and Modeling, *Proceedings del Thirty-Fourth Turbomachinery Symposium*, pp. 155-175, 2005.
- Hirn, G.A., Biography, *Bull. Soc. History naturelle de Colmmar*, pp. 183-309, 1889-90.
- Hsu, Y.C., Non-Newtonian Flow in Infinite-Length Full Journal Bearing, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 89, pp. 329-333, 1967.
- Hughes, S.J., Hogg, S.I. y Jones, T.V., Analysis of a Gas Lubricated Hydrodynamic Thrust Bearing, *J. Tribol.*, Vol. 118, pp. 449-456, 1996.
- Kalita, W., Rodkiewicz, C.M. y Kennedy, J.S., On the Laminar Flow characteristics of Conical Bearings. Part I – Analytical Approach, *J. Tribol.*, Vol. 108, pp. 53-59, 1986a.
- Kalita, W., Yegani, N. y Rodkiewica, C.M., On the Laminar Flow characteristics of Conical Bearings. Part II – Experimental Verification, *J. Tribol.*, Vol. 108, pp. 59-64, 1986b.
- Kazimierski, Z., Optimization of Hybrid Gas Lubricated Conical Bearings, *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 14, pp. 312-314, 1972.
- Kennedy, J.S., Prawal, S. y Rodkiewicz, C.M., Thermal Effects in Externally Pressurized Conical Bearings with Variable Viscosity, *J. Tribol.*, Vol. 110, pp. 201-203, 1988.
- Khonsari, M.M., A Review of Thermal Effects in Hydrodynamic Bearings, Part I: Slider and Thrust Bearings, *ASLE Trans.*, Vol. 30, pp. 19-25, 1986.
- Khonsari, M.M. y Booser, R.E., *Applied Tribology: Bearing Design and Lubrication*, J. Wiley & Sons, 2008.
- Knight, J.D., Analysis of Axially Grooved Journal Bearings with Heat Transfer Effects, *ASLE Trans.*, Vol. 30, pp. 316-323, 1986.
- Kumar, P., Khonsari, M. y Bair, S., Full EHL Simulation Using the Actual Ree-Eyring Model for Shear Thinning Lubricants, *J. Tribol.*, Vol. 131, pp. 011802, 2008
- Lebeck, A.O., Hydrodynamic Lubrication in Wavy Contacting Face Seals-A Two-Dimensional Model, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 105, pp. 578-586, 1983.
- Lebeck, A.O., Teale, J.L. y Pierce, R.E., Hydrodynamic Lubrication and Wear in Wavy Contacting Face Seals, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 100, pp. 81-90, 1978.
- Lee, S. y Soni, B.K., Governing Equations of Fluid Mechanics in (a) Physical Curvilinear Coordinate System. En: *Differential Equations and Computational Simulations III*, Graef, J., Shivaji, R., Soni, B. y Zhu, J. (Eds), *Electronic Journal of Differential Equations*, pp. 149-157, 1997.
- Leslie, Sir J., *Elements of Natural Philosophy : Including Mechanics and Hydrostatics*, Vol. 1, Oliver & Boyd Ed., 1829
- Li, C-H, The Influence of Variable Density and Viscosity on Flow Transition Between Two Concentric Rotating Cylinders, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 100, pp. 261-270, 1972.

- Litwin, W., Influence of Surface Roughness Topography on Properties of Water-Lubricated Polymer Bearings: Experimental Research, *Tribol. Trans.*, Vol. 54, pp. 351-361, 2011.
- Lund, J.W., The Stability of an Elastic Rotor in Journal Bearings with Flexible Damped Supports, *J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 911-920, 1965.
- MacCurdy, E., *Leonardo da Vinci Notebooks*, Jonathan Cape, 1938.
- Martin, H.M., Lubrication of Gear Teeth, *Engineering (London)*, Vol. 102, pp. 119-121, 1916.
- McHugh, J., Albert Kingsbury: His Life and Times, *Sound and Vibration*, Vol. 37, pp. 12-20, 2003.
- McKee, S.A. y McKee, T.R., Friction of Journal Bearing as Influenced by Clearance and Length, *Trans. ASME*, Vol. 51, pp. 161-171, 1929.
- Meyer, D., Reynolds Equation for Spherical Bearings, *J. Tribol.*, Vol. 125, pp. 203-206, 2003.
- Michell, A.G.M., The Lubrication of Plane Surfaces, *Z. Math. u Physik*, Vol. 132, pp. 123, 1905.
- Michell, A.G.M., Progress in Fluid-Film Lubrication, *Trans. ASME*, Vol. 51, pp. 153-163, 1929.
- Milne, A.A., Theory of Rheodynamic Lubrication for a Maxwell Liquid, Proceeding de la *Conf. of Lubricants and Wear*, Paper 41, 1957.
- Mitsui, J., A Study of Thermohydrodynamic Lubrication in a Circular Journal Bearing, *Tribol. Int.*, Vol. 20, pp. 331-341, 1987.
- Mourelatos, Z.P., Hydrodynamic Analysis of a Slider Gas Bearing Including the Gas Inertial Effect, *Trans. ASME*, Vol. 112, pp. 662-669, 1990.
- Murthy, T.S.R., Analysis of Multi-Scallop Self Adjusting Conical Hydrodynamic Bearings for High Precision Spindles, *Tribol. Int.*, Vol. 14, pp. 147-150, 1981.
- Nau, B.S., Hydrodynamics of Face Seal Films, Paper F5 de la *Second Int. Conf. on Fluid Sealing*, BHRA, Canfield, England, 1964.
- Nau, B.S., Centripetal Flow in Face Seals (Radial Liquid Flow Between Flat Annular Rings / Face Seals, Discussing Film Cavitation), *Lubric. Eng.*, Vol. 25, pp. 161-168, 1968.
- Newkirk, B.L. y Taylor, H.D., Shaft Whipping Due to Oil Action in Journal Bearings, *General Electric Review*, Vol. 28, pp. 559-568, 1925.
- Pan, C.H.T., A Linearized Turbulent Lubrication Theory, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, pp. 675-688, 1965.
- Ocvirk, F.W., Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings, *NACA Technical Note 2808*, 1952.
- Ott, H.H., *Zylindrische Gleitlager bei instationärer Belastung*, Tesis Doctoral, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, Nr. 1654, 1948.
- Pandazaras, C. y Petropoulos, G., Formulating new Operational Charts for Hydrodynamically Lubricated Slider Journal Bearings, Proceedings de la *Int. Conf. Power Transmissions*, 2003.
- Pestel, E., Beitrag zur Ermittlung der Hydrodynamischen Dämpfungs- und Federeigenschaften von Gleitlagern, *Ingenieur Archiv*, Vol. 22, pp. 147-155, 1954.
- Petrov, N.P., Friction in Machines and the Effect of the Lubricant, *Inzhernii Zhurnal*, Vol. 1, pp. 71-140; Vol. 2, pp. 227-279; Vol. 3, pp. 377-436; Vol. 4, pp. 435-464, 1883 (en Ruso).
- Petrusevich, A.I., Osnovniie Vyvody iz Kontaktno-Oidrodinamicheskoi Teorii Smazki [Principal Conclusions from the Contact Hydrodynamic Theory of Lubrication, *Izv. Akad. Nauk SSSR* 209, 1951.
- Pinkus, O., Analysis of Elliptical Bearings, *Trans. ASME*, Vol. 78, pp. 965-976, 1956.
- Pinkus, O., Analysis of Journal Bearings with Arbitrary Load Vector, *Trans. ASME*, Vol. 79, pp. 1213-1217, 1957.
- Pinkus, O., *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw-Hill Book Co., 1961.

- Pinkus, O., The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hydrodynamic Lubrication, *J. Tribol.*, Vol. 109, pp. 2-20, 1987.
- Popov, V.L., Method of Reduction of Dimensionality in Contact and Friction Mechanics: A Linkage Between Micro and Macro Scales, *Friction*, Vol. 1, pp 41-62, 2013
- Prakash, J., Tonder, K. y Christensen, H., Micropolarity-Roughness Interaction in Hydrodynamic Lubrication, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 102, pp. 368-373, 1980.
- Raimondi, A.A., A Numerical Solution for the Gas Lubricated Full Journal Bearing of Finite Length, *Trans. ASLE*, Vol. 4, pp. 131-155, 1961.
- Raimondi, A.A. y Boyd, J., A Solution for the Finite Journal Bearing and Its Application to Analysis and Design, *Trans. ASLE*, Vol. 1, 159-174(I), 175-193(II) y 194-209(III), 1958.
- Rayleigh, Lord, Notes on the Theory of Lubrication, *Philosophical Magazine*, Serie 6, Vol. 35, pp.1-12, 1918.
- Reynolds, O., On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments Including an Experimental Determination of Olive Oil, *Proc. Royal Soc. London*, Vol. 40, pp. 191-203, 1886.
- Rodkiewicz, C.M. y Kalita, W., Experimental Investigation Regarding the Effects of Grooves on Conical Bearing Performances, *Trib. Trans.*, Vol 38, pp. 178-182, 1995.
- Rodriguez, L. y Childs, D., Frequency Dependency of Measured and Predicted Rotordynamic Coefficients for a Load-on-Pad Flexible-Pivot Tilting-Pad Bearing, *J. Tribol.*, Vol. 128, pp. 388-395, 2006.
- Saini, V., Dondapati, R.S., Shankar, V. y Kumar, A. Thermal Analysis on Thrust Pad Bearing with Non-Newtonian Lubricant. *Int. J. Eng. Res. Technol.*, Vol. 4, pp. 1140-1150, 2015.
- San Andrés, L., Bulk-Flow Analysis of Hybrid Thrust Bearings for Process Fluid Applications, *Trans. ASME*, Vol. 122, pp. 170-180, 2000.
- Sassenfeld, H. y Walter, A., Journal Bearing Calculations, *VDI-Forschungsheft (B)*, Vol. 441, 1954.
- Scholle, M., Hydrodynamical Modelling of Lubricant Friction between Rough Surfaces, *Tribol. Int.*, Vol. 40, pp. 1004-1011, 2007.
- Schuler, C.A. y Weber, U.B., On the Flow in the Unobstructed Space Between Shrouded Corotating Disks, *Phys. Fluids A*, Vol. 2, pp. 1760-1770, 1990.
- Seireg, A. y Ezzat, H., Thermohydrodynamic Phenomena in Fluid Film Lubrication, *J. Lubr. Technol.*, Vol. 95, pp. 187-194, 1973.
- Seireg, A. y Doshi, R.C., Temperature Distribution in the Bush of Journal Bearings During Natural Heating and Cooling, *Proceedings de la JSLE-ASLE Int. Lubrication Conf.*, Tokyo, pp. 194-201, 1975.
- Seireg, A. y Dandage, S., Empirical Design Procedure for the Thermohydrodynamic Behavior of Journal Bearings, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 104, pp. 135-148, 1982.
- Shinkarenko, A., Kligerman, Y. y Etsion, I., The Effect of Surface Texturing in Soft Elasto-Hydrodynamic Lubrication, *Tribol. Int.*, Vol. 42, pp. 284-292, 2009.
- Sinha, P. y Rodiewicz, C.M., Convection and Dissipation Effects in Oil Lubricated Conical Bearings with Variable Viscosity, *J. Tribol.*, Vol. 113, pp. 339-342, 1991.
- Sinha, P., Chandra, P. y Saxena, S., Inertial Effects in Externally Pressurized Conical Bearings with Unequal Slider Pad Temperatures, *Tribol. Trans.*, Vol. 36, pp. 304-310, 1993.
- Sinha, P., Chandra, P. y Bhartiya, S., Analysis of a Non-Constant Gap Externally Pressureized Conical Bearing with Temperature and Pressure Dependent Viscosity, *Proc Inst. Mech. Eng. C*, Vol. 214, pp. 699-710, 2000.
- Sneck, H.J. y McGovern, J.F., Analytical Investigation of the Spiral Groove Face Seal, *J. Lubric.*

- Tech.*, Vol. 95, pp. 499-510, 1973.
- Sobociński, M., Analysis of Biobearings Friction and Wear Processes, *J. Appl. Math. Comput. Mech.*, Vol. 14, pp. 103-109, 2015.
- Sommerfeld, A., Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung, *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol. 50, pp. 97-155, 1904.
- Srinivasan, K. y Prabju, B.S., Steady State Characteristics of Conical Hybrid Bearings, *Wear*, Vol. 89, pp. 57-60, 1983.
- Sternlicht, B., Stability and Dynamics of Rotors Supported on Fluid Film Bearings, *J. Eng. for Gas Turbines and Power*, Vol. 85, pp. 331-338, 1963.
- Stodola, A., Kritische Wellenstoerung infolge der Nachgiebigkeitdes Oelposters im Lager, *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 85, pp. 265-266, 1925.
- Sun, D.C., On the Effects of Two -Dimensional Reynolds Roughness in Hydrodynamic Lubrication, *Proceeding A*, Vol. 364, pp. 89-106, 1978.
- Sun, D.C. y Chen, K.K., First Effects of Stokes Roughness on Hydrodynamic Lubrication Technology, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 99, pp. 2-9, 1977.
- Swift, H.W., The Stability of Lubricating Films in Journal Bearings, En *Minutes of the Proceedings. Inst. Civil Eng.*, Thomas Telford, Vol. 233, pp. 267-88 y 289-322, 1932.
- Swift, H.W., Fluctuating Loads in Sleeve Bearings, *J. Inst. Civil Eng.*, Vol. 5, pp. 151-195, 1937.
- Szeri, A. Z., Some Extensions of the Lubrication Theory of Osborne Reynolds, *J. Tribol.*, Vol. 109, pp. 21-36, 1987.
- Szeri, A.Z. y San Andrés, L., Flow Between Eccentric Rotating Cylinders, *J. Appl. Mech.*, Vol. 106, pp. 869-878, 1984.
- Tanaka, M., Kaleidoscope of Researches, *Koyo Eng. J., English Edit.*, Vol. 159E, pp. 9-13, 2001.
- Tao, F. y Phillipoff, W., Hydrodynamic Behavior of Viscoelastic Liquids in a Simulated Journal Bearing, *ASLE Trans.*, Vol. 10, pp. 307, 1967.
- Taylor, G.I. “Stability of a Viscous Liquid Contained Between two Rotating Cylinders”, *Philos. Trans. Royal Soc. London, Series A*, Vol. 223, pp. 289–343, 1923.
- Tondl, A., The Motion of a Journal in a Bearing in the Unstable Region of Equilibrium Position of the Center of the Journal, *Proceeding del Ninth Int. Cong. Appl. Mech.*, Vol. 5, 1957.
- Tonnesen, J. y Hansen, P.K., Some Experiments on the Steady State Characteristics of a Cylindrical Fluid-Film Bearing Considering Thermal Effects, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 103, pp. 107-114, 1981.
- Tower, B., First Report on Friction Experiments (Friction of Lubricated Bearings), *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 34, pp. 632-659, 1883.
- Tower, B., Second Report on Friction Experiments (Experiments on Oil Pressure in Bearings), *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 58, pp. 885, 1885.
- Turaga, R., Sekhar, A. y Majumdar, B., The Effect of Roughness Parameter on the Performance of Hydrodynamic Journal Bearings with Rough Surfaces, *Tribol. Int.*, Vol. 32, pp. 231-236, 1999.
- Tzeng, S.T. y Saibel, E., Surface Roughness Effect on Slider Lubrication. *ASLE Trans.*, Vol. 10, pp. 334-338, 1967.
- Vogelpohl, G., Zur hydrodynamischen Theorie der Lagerreibung, *Z. angew. Math. Mech.*, pp.15-378, 1935.
- Wilcock, D.F.,Turbulence in High Speed Journal Bearings. *Trans. ASME*, Vol. 72, pp. 825-34, 1950.
- Yang, P. y Wen, S., The Behavior of Non Newtonian Thermal EHL Film in Line Contacts at Dynamic Loads, *J. Tribol.*, Vol. 114, pp. 81-85, 1992.
- Yoon, E.S., Singh, R.A., Oh, H.J. y Kong, H., The Effect of Contact Area on Nano/Micro-scale

Friction, *Wear*, Vol. 259, pp. 1424–1431, 2005.

Yoshimoto, S., Oshima, S., Danbara, S. y Shitara, T., Stability of Water Lubricated, Hydrostatic, Conical Bearings With Spiral Grooves for High-Speed Spindles, *Trans. ASME*, Vol. 124, pp. 393-405, 2002.

CAPÍTULO 3

DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL COJINETE HIDRODINÁMICO

Como en todo problema de ingeniería, el primer paso para cuantificar las variables principales luego de haber aislado el elemento de estudio y haber extraído lo esencial de su física, radica en la aplicación de las ecuaciones de conservación. Tal como lo hizo Osborne Reynolds para explicar el fenómeno de la lubricación, ensayado previamente por Tower, en este capítulo se hará uso de las herramientas tradicionales de Mecánica de los Fluidos para deducir las leyes que la describen, y los alcances y limitaciones de las mismas.

Luego, se analizará en particular el flujo incompresible, isotérmico y laminar en el cojinete hidrodinámico radial cilíndrico soportando una carga estática, pero también se deducirán las ecuaciones que describen el estado transitorio. En ambos casos se mostrarán las soluciones analíticas de perfiles de presión para las situaciones extremas de cojinetes infinitamente largos e infinitamente cortos, así como el comportamiento de la carga en cada caso. Las soluciones analíticas y numéricas de las ecuaciones que describen el flujo en el cojinete de longitud finita serán presentadas en los próximos Capítulos. Adicionalmente, en este Capítulo se presentarán las ecuaciones que describen el funcionamiento estático de otros dos tipos de cojinetes, el de anillo flotante, dada su similitud con el cojinete tradicional, y el de zapatas pivotantes. Este último fue elegido por sus excelentes propiedades dinámicas y alta estabilidad, que lo convierten en una alternativa cada vez más empleada en varias aplicaciones prácticas.

3.1 INTRODUCCIÓN

Como ya se describiera y comentara en el Capítulo 1, un cojinete hidrodinámico elemental está formado por un cilindro rígido metálico (cojinete propiamente dicho, de radio R_B) que rodea y soporta un eje rotante (rotor o muñón, de radio R), como se vuelve a esquematizar en la Figura 3.1(a). Las superficies de ambas piezas están separadas por una película delgada de lubricante de espesor h . Si no se aplica carga y el peso es despreciable, el eje rotante se ubicará concéntrico con su cojinete, pero a medida que la carga (W) aplicada en el muñón aumenta, el centro del eje se mueve respecto del centro del cojinete, generándose una excentricidad e . La carga formará un ángulo ϕ respecto de la línea de centros, también llamado “ángulo de posición” (“attitude angle”). Además, en el sistema cojinete-rotor se puede identificar el huelgo entre ambas piezas, $c = R_B - R$, y el largo del sistema (en dirección Z), L .

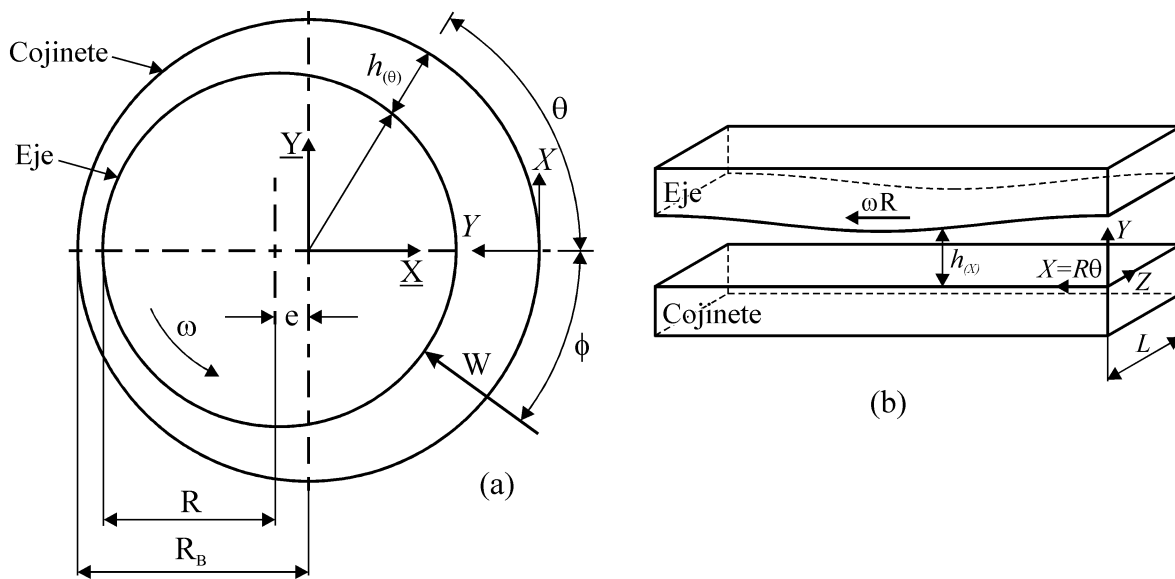


Figura 3.1: Geometría de un cojinete hidrodinámico y nomenclatura asociada (a), y esquema de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b).

Una particularidad de este sistema, que simplifica enormemente el análisis matemático, es que existen dos escalas de longitudes muy distintas. El huelgo, c , y el radio (R_B o R) presentan una relación del orden de la milésima. Esto permite, al momento del planteo de las ecuaciones de conservación, despreciar la curvatura de la película fluida, la cual puede entonces analizarse en coordenadas cartesianas, como se muestra en la Figura 3.1(b), y despreciar varios términos de los balances de conservación por ser mucho más pequeños que otros.

En el nuevo sistema, la coordenada X puede considerarse igual a $R\theta$ e indica la dirección del movimiento relativo entre las superficies (también referida como dirección circunferencial), la coordenada Y señala la dirección del espesor de la película (también indicada como dirección transversal), y el eje Z corresponde a la dirección axial (también denominada dirección longitudinal).

3.2 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

Las ecuaciones generales de los balances de conservación para el flujo de un fluido son (Bird *et al.*, 2002):

$$\text{Balance de Masa (BM): } \frac{D\rho}{DT} = -\rho(\underline{\nabla} \cdot \underline{V}) \quad (1)$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento (BCM): } \rho \frac{D\underline{V}}{DT} = -\underline{\nabla}P - [\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}}] + \rho \underline{g} \quad (2)$$

$$\text{Balance de Energía Interna (BE): } \rho \frac{D\hat{C}_v T}{DT} = -(\underline{\nabla} \cdot \underline{q}) - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\dot{v}} (\underline{\nabla} \cdot \underline{V}) - (\underline{\underline{\tau}} : \underline{\nabla} \underline{V}) \quad (3)$$

donde ρ es la densidad local del fluido, \hat{C}_v el calor específico, \underline{V} la velocidad, T el tiempo, P la presión, T la temperatura, $\underline{\underline{\tau}}$ el tensor de tensiones y \underline{g} la aceleración gravitatoria, respectivamente. Los balances planteados son universales, excepto por el hecho que contemplan a la gravedad como única fuerza de volumen generadora de cantidad de movimiento y a las fuerzas viscosas y las de compresibilidad como únicas fuentes de energía interna.

En un sistema cartesiano $\{X,Y,Z\}$ como el de la Figura 3.1(b) y con las derivadas materiales desarrolladas, las ecuaciones quedan expresadas:

BM:

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = - \left(\frac{\partial}{\partial X} \rho V_x + \frac{\partial}{\partial Y} \rho V_y + \frac{\partial}{\partial Z} \rho V_z \right) \quad (4)$$

BCM (X):

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial T} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial Z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial X} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial Z} \right) + \rho g_x \quad (5)$$

BCM (Y):

$$\rho \left(\frac{\partial V_Y}{\partial T} + V_X \frac{\partial V_Y}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_Y}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial V_Y}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} - \left(\frac{\partial \tau_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{YY}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{ZY}}{\partial Z} \right) + \rho g_Y \quad (6)$$

BCM (Z):

$$\rho \left(\frac{\partial V_Z}{\partial T} + V_X \frac{\partial V_Z}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_Z}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial V_Z}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Z} - \left(\frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{YZ}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{ZZ}}{\partial Z} \right) + \rho g_Z \quad (7)$$

BE:

$$\rho \left(\frac{\partial \hat{C}_v T}{\partial T} + V_X \frac{\partial \hat{C}_v T}{\partial X} + V_Y \frac{\partial \hat{C}_v T}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial \hat{C}_v T}{\partial Z} \right) = - \left(\frac{\partial q_X}{\partial X} + \frac{\partial q_Y}{\partial Y} + \frac{\partial q_Z}{\partial Z} \right) - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{\partial V_Y}{\partial Y} + \frac{\partial V_Z}{\partial Z} \right) - (\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla V}}) \quad (8)$$

donde el último término de la Ec. (8), que no se ha desarrollado por su extensión, puede expresarse en notación subindicial como $(\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\nabla V}}) = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} V_i$, donde ambos subíndices, i y j , representan las coordenadas $\{X, Y, Z\}$.

Como puede apreciarse, las ecuaciones presentadas conforman un sistema indeterminado dado que contienen más incógnitas que ecuaciones, esto es: las tres componentes de \underline{V} , las nueve componentes de $\underline{\underline{\tau}}$, las tres componentes de \underline{q} , y la P y la T . Las ecuaciones faltantes son las ecuaciones constitutivas de \underline{q} y $\underline{\underline{\tau}}$ en función de los gradientes de temperatura y de los gradientes de velocidad, respectivamente, lo que impone restricciones a la universalidad de los balances. En este sentido las ecuaciones constitutivas más conocidas y aplicadas son la “Ley de Fourier” y la “Ley de Newton de viscosidad”, respectivamente.

Ley de Fourier de la Conducción de Calor: es la ecuación constitutiva más extensamente utilizada para describir el flujo de calor por conducción. Su expresión es:

$$\underline{q} = -k \underline{\nabla T} \quad (9)$$

Esta ecuación establece que el vector densidad de flujo de calor, \underline{q} , es proporcional al gradiente de temperatura, $\underline{\nabla T}$, y de sentido contrario. La constante de proporcionalidad, k , es la conductividad calorífica del medio que, en esta expresión, se supone isotrópica.

Ley de Newton de Viscosidad: es una ecuación constitutiva para la densidad de flujo difusivo de cantidad de movimiento que, en su forma más general, se expresa:

$$\underline{\underline{\tau}} = -\mu \left[\underline{\underline{\nabla V}} + (\underline{\underline{\nabla V}})^\dagger \right] + \left(\frac{2}{3} \mu - \kappa \right) (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}}) \underline{\underline{I}}, \quad (10)$$

siendo μ la viscosidad dinámica local del fluido y κ su viscosidad dilatacional. Esta ecuación es aplicable en los fluidos conocidos como Fluidos Newtonianos, para los cuales las tensiones locales (Bird *et al.*, 2002):

- son simétricas ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$),
- dependen sólo del valor instantáneo del gradiente de $\underline{\underline{V}}$,
- son función lineal de las $\partial V_i / \partial x_j$, y
- desaparecen si el fluido está en reposo.

La Ley de Newton de Viscosidad es la ecuación constitutiva más sencilla del tensor de tensiones. Ella describe la dinámica de fluidos simples. Aquellos fluidos cuya estructura es más compleja (formados por macromoléculas, con composición heterogénea, con interacciones intermoleculares fuertes, etc.) se describen con modelos más robustos, generalmente no lineales, y su estudio queda incluido en el campo de la reología.

En el caso de asumir flujo incompresible, el Balance de Masa se reduce a $(\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}}) = 0$, y la Ec. (10) queda:

$$\underline{\underline{\tau}} = -\mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}} = -\mu \left[\underline{\underline{\nabla V}} + (\underline{\underline{\nabla V}})^\dagger \right], \quad (11)$$

donde $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ es el tensor velocidad de deformación.

Considerando, entonces, flujo incompresible, e introduciendo las ecuaciones constitutivas anteriores en los balances, éstos se reducen a:

BM:

$$0 = \frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} + \frac{\partial V_z}{\partial Z} \quad (12)$$

BCM (X):

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial T} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Z^2} \right] + \rho g_x \quad (13)$$

BCM (Y):

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial T} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial Y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Z^2} \right] + \rho g_y \quad (14)$$

BCM (Z):

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial T} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial Y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial Z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial Z} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial Z^2} \right] + \rho g_z \quad (15)$$

BE:

$$\rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial T} + V_x \frac{\partial T}{\partial X} + V_y \frac{\partial T}{\partial Y} + V_z \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right] + \mu \Phi_v \quad (16)$$

donde la función disipación Φ_v , queda expresada como:

$$\Phi_v = 2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial Z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_y}{\partial X} + \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial Y} + \frac{\partial V_y}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial Z} + \frac{\partial V_z}{\partial X} \right)^2 \quad (17)$$

Resumiendo, el conjunto de balances de conservación representados por las Ecs. (12) a (17) describen los flujos incompresibles (básicamente de líquidos) de fluidos Newtonianos en los que las propiedades \hat{C}_v , k y μ son independientes de la posición. Cabe señalar, además, que en esta tesis sólo se considerarán situaciones de flujo laminar, que son las de interés en las aplicaciones de Teoría de Lubricación.

3.3 ANÁLISIS DE ORDEN DE MAGNITUD

Si bien el conjunto de Ecs. (12) a (17) representa una simplificación importante respecto del caso general, éste dista de ser un sistema simple de resolver. En el caso de la geometría que se analiza en esta tesis, en la que existen dimensiones que difieren en varios órdenes de magnitud, se puede reducir la complejidad matemática recurriendo al análisis dimensional, al igual que lo hiciese Osborne Reynolds (Reynolds, 1886) cuando dedujo la Teoría clásica de Lubricación. Dicha técnica permite encontrar soluciones aproximadas que describen razonablemente la dinámica de flujo. La calidad de la descripción dependerá de la importancia de los términos despreciados en relación con los calculados.

El método de análisis dimensional comienza mediante la determinación del valor característico (VC) de cada variable del problema analizado, esto es, el valor máximo o cercano al máximo de cada variable (en valor absoluto). Este paso resulta fundamental, ya que en los pasos siguientes se asume que las variables toman en el flujo valores máximos absolutos no muy diferentes al VC seleccionado, es decir, se espera que: $0 \lesssim |\text{variable}| \lesssim \text{VC}$. Estos VCs se utilizan entonces para definir variables adimensionales, que son las variables divididas por sus VCs.

En el siguiente paso, las variables en los balances son reemplazadas por las adimensionales. De esta manera, cada término queda pesado por un producto de VCs que determinan el Orden de Magnitud (\mathcal{O}), o importancia, de cada uno. El método consiste en advertir si existe algún criterio en particular por el que se pueda deducir que una o más variables son mucho menores que otras. Si es así, esto seguramente lleva a que haya términos en los balances cuyos órdenes de magnitud son mucho menores que otros y se puedan despreciar. Las ecuaciones se resuelven sólo con los términos de mayor jerarquía. De esta manera, se tiene una solución aproximada que es válida mientras se cumplan las condiciones que se usaron para simplificar los balances.

Así, para el flujo en estudio, y en función de los parámetros definidos en la Figura 3.1, se pueden adoptar los siguientes VCs para las variables de las Ecs. (12-17):

$$\begin{array}{lll} X \rightarrow R & V_x \rightarrow U & P \rightarrow P_c \\ Y \rightarrow c & V_y \rightarrow V & T \rightarrow T_c, \\ Z \rightarrow L & V_z \rightarrow W & \tau \rightarrow T_R \end{array} \quad (18)$$

donde R es el radio del muñón, c la holgura radial ($c = R_B - R$), L el ancho del cojinete y U la velocidad tangencial ($U = \omega R$). Además, se ha definido: V y W como las velocidades características en dirección Y y Z , respectivamente, P_c y T_c como la presión y la temperatura características, y T_R como un tiempo de referencia. Los valores de V , W , P_c , T_c y T_R surgirán del análisis.

Las correspondientes variables adimensionales quedan entonces definidas por:

$$\begin{array}{lll} x \rightarrow \frac{X}{R} & u \rightarrow \frac{V_x}{U} & p \rightarrow \frac{P - P_0}{P_c} \\ y \rightarrow \frac{Y}{c} & v \rightarrow \frac{V_y}{V} & t \rightarrow \frac{T}{T_c}, \\ z \rightarrow \frac{Z}{L} & w \rightarrow \frac{V_z}{W} & \tau \rightarrow \frac{\tau}{T_R} \end{array} \quad (19)$$

donde P_0 es la presión del ambiente, exterior al fluido lubricante. Al reemplazar las Ecs. (19) en los balances de conservación, Ecs. (12) a (16), se tiene:

$$\text{BM:} \quad 0 = - \left(\frac{U}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V}{c} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{W}{L} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 \text{BCM (X):} \quad & \rho \left(\frac{U}{T_R} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U^2}{R} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{UV}{c} v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{UW}{L} w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{P_c}{R} \frac{\partial p}{\partial x} + \\
 & + \mu \left[\frac{U}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \rho g_x
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \text{BCM (Y):} \quad & \rho \left(\frac{V}{T_R} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{UV}{R} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{V^2}{c} v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{VW}{L} w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{P_c}{c} \frac{\partial p}{\partial y} + \\
 & + \mu \left[\frac{V}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{V}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho g_y
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 \text{BCM (Z):} \quad & \rho \left(\frac{W}{T_R} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{UW}{R} u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{VW}{c} v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{W^2}{L} w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{P_c}{L} \frac{\partial p}{\partial z} + \\
 & + \mu \left[\frac{W}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{W}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{W}{L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho g_z
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 \text{BE:} \quad & \rho \hat{C}_v \left(\frac{T_c}{T_R} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{T_c U}{R} u \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{T_c V}{c} v \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{T_c W}{L} w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \\
 & = k \left[\frac{T_c}{R^2} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{T_c}{c^2} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{T_c}{L^2} \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \mu \Phi_v,
 \end{aligned} \tag{24}$$

con:

$$\begin{aligned}
 \Phi_v = 2 \left[\left(\frac{U}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{V}{c} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{W}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
 + \left(\frac{V}{R} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{U}{c} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{W}{c} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{V}{L} \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{W}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{25}$$

En cuanto a las velocidades características desconocidas, su valor se puede calcular en forma relativa a U , considerando que:

- a igualdad de radio de cojinete, cuanto menor huelgo radial se tenga, menor será la velocidad normal a la superficie desarrollada por el fluido;
- cuanto mayor sea la longitud de cojinete, menor será la velocidad axial del fluido.

Bajo estas consideraciones, las velocidades características podrían escribirse como:

$$V = U \frac{c}{R} \quad \text{y} \quad W = U \frac{R}{L}, \tag{26}$$

y los balances de conservación, Ecs. (20) a (24), pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\text{BM:} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \text{BCM (X):} \quad & \rho \frac{UR}{\mu} \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{UT_R} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{P_c R}{\mu U} \left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \\ & + \left[\left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \rho \frac{R^2}{\mu U} \left(\frac{c}{R}\right)^2 g_x \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{BCM (Y):} \quad & \rho \frac{UR}{\mu} \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{UT_R} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{P_c R}{\mu U} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ & + \left[\left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho \frac{R^2}{\mu U} \left(\frac{c}{R}\right)^2 g_y \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{BCM (Z):} \quad & \rho \frac{UR}{\mu} \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{UT_R} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{P_c R}{\mu U} \left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial z} + \\ & + \left[\left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho \frac{RL}{\mu U} \left(\frac{c}{R}\right)^2 g_z \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{BE:} \quad & \rho \hat{C}_v \frac{T_c U}{R} \left(\frac{R}{UT_R} \frac{\partial t}{\partial t} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{k T_c}{R^2} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \left(\frac{R}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \mu \Phi_v, \end{aligned} \quad (31)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi_v = & 2 \left(\frac{U}{R}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{R^2}{L^2}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right] + \\ & + \left(\frac{U}{R}\right)^2 \left[\left(\frac{c}{R} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{R}{c} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{R}{c} \frac{R}{L} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{R}{L} \frac{c}{R} \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{R}{L} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{R}{L} \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Para llegar a estas expresiones se ha reemplazado V y W según las Ecs. (26) y, en los términos de la izquierda de los BCM y el BE, se ha extraído factor común el VC del término convectivo dominante en cada caso. También se ha extraído factor común el VC del término conductivo dominante de cada BCM y en el BE. Además, se ha dividido el BM por U/R , el VC del término dominante, y los BCM por los VCs de los respectivos términos viscosos dominantes. De esta manera, el BM y los BCM han quedado en sus formas adimensionales, y sólo el BE resta aún con dimensiones.

En este punto, se puede observar que los términos de la izquierda (transitorio y convectivos) de los BCM están controlados por el producto $\rho \frac{UR}{\mu}$, que se corresponde con el número de Reynolds lógico para esta geometría ($Re = \frac{\rho UR}{\mu}$). Asimismo, puede apreciarse que en el caso de flujos transitorios, si se realiza la elección típica de $T_R = \frac{R}{U}$, que representa el tiempo que tarda un elemento de fluido en recorrer la longitud característica viajando a la velocidad característica, el término transitorio resulta de importancia equivalente a la de los términos convectivos. Para un caso más general, habría que mantener los términos transitorios separados de los convectivos, esto es:

$$\begin{aligned} \text{BCM (X):} \quad & \rho \frac{c^2}{\mu T_R} \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{UR}{\mu} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{P_c R}{\mu U} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \left[\left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{\rho R^2}{\mu U} \left(\frac{c}{R} \right)^2 g_x \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{BCM (Y):} \quad & \rho \frac{c^2}{\mu T_R} \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \frac{UR}{\mu} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{P_c R}{\mu U} \frac{\partial p}{\partial y} + \left[\left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho \frac{R^2}{\mu U} \left(\frac{c}{R} \right)^2 g_y \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \text{BCM (Z):} \quad & \rho \frac{c^2}{\mu T_R} \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \frac{UR}{\mu} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{P_c R}{\mu U} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial z} + \left[\left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho \frac{RL}{\mu U} \left(\frac{c}{R} \right)^2 g_z \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{BE:} \quad & \rho \hat{C}_v \frac{T_c}{T_R} \frac{\partial t}{\partial t} + \rho \hat{C}_v \frac{T_c U}{R} \left(u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{k T_c}{R^2} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \mu \Phi_v, \end{aligned} \quad (36)$$

con Φ_v dado por la Ec. (32). Se quiere decir con esto que el tiempo de referencia puede tomar distintos valores, según los términos que dominan en los balances. Por ejemplo, una posibilidad es considerar $T_R = \rho \frac{c^2}{\mu}$, que dejaría al término transitorio de orden de magnitud uno, como

los viscosos. Cabe destacar que, para que un fenómeno transitorio sea considerado como tal en los flujos de lubricación, las variaciones en el tiempo deben ser significativas, es decir, los lapsos de tiempo en los cuales sucedan los cambios en las variables (denominador) deben ser pequeños. Un fenómeno transitorio tendría asociado, entonces, un tiempo de referencia también pequeño.

Por ejemplo, si se considera un cojinete tipo con un radio $R \approx 0,025m$ ($\mathcal{O}=10^{-2}m$), con $\frac{R}{c} \approx 1000$ ($\mathcal{O}=10^3$), con un lubricante de relación $\frac{\rho}{\mu} \approx 10000 \frac{s}{m^2}$ ($\mathcal{O}=10^4 s/m^2$), y velocidad angular $\omega \approx 100 \frac{rad}{s}$ ($\mathcal{O}=10^2 s^{-1}$), se tendrían los siguientes valores para los tiempos de referencia presentados: $\frac{R}{U} \approx 0,01s$ y $\rho \frac{c^2}{\mu} \approx 6,25 \cdot 10^{-6} s$ ($\mathcal{O}=10^{-2}$ y $10^{-6}s$, respectivamente).

Puede entonces establecerse que, bajo las hipótesis presentadas, $T_R = \frac{R}{U}$ es el tiempo de referencia más válido para una amplia gama de condiciones de trabajo en flujo en cojinetes hidrodinámicos, quedando el empleo de $T_R = \rho \frac{c^2}{\mu}$ reservado para situaciones en condiciones extremas.

En cuanto al término de presión, si se considera el BCM en la dirección principal de flujo, x , y comparando con el orden de magnitud de los términos viscosos que, como se verá más adelante, son los dominantes, puede deducirse que la presión característica está dada en este flujo por:

$$P_c = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c} \right)^2 = \mu \omega \left(\frac{R}{c} \right)^2. \quad (37)$$

Al reemplazar este parámetro en las Ecs. (28) a (30) y usando $T_R = \frac{R}{U}$, los balances de cantidad de movimiento y energía resultan:

$$\begin{aligned} \text{BCM (X):} \quad & \text{Re} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \\ & + \left[\left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{\rho R}{P_c} g_x \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \text{BCM (Y):} \quad & \text{Re} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial y} + \\ & + \left[\left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho \frac{R}{P_c} \left(\frac{R}{c} \right) g_y \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \text{BCM (Z):} \quad & \text{Re} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ & + \left[\left(\frac{c}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho \frac{L}{P_c} g_z \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \text{BE:} \quad & \rho \hat{C}_v \frac{T_c U}{R} \left(\frac{\partial t}{\partial t} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{k T_c}{R^2} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \mu \Phi_v \end{aligned} \quad (41)$$

con Φ_v dado por la Ec. (32).

Si, en esta instancia, al comparar los términos viscosos de cada ecuación se contempla el hecho que la geometría en estudio tiene la particularidad que el huelgo radial es muy pequeño comparado con el radio ($R \approx 1000c$), y si se considera que las presiones hidrodinámicas son muy superiores a las presiones estáticas ($P_c \gg \rho g R^2/c$ y $\gg \rho g L$), el conjunto de ecuaciones de los balances se reduce a:

$$\text{BM:} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \quad (42)$$

$$\text{BCM (X):} \quad \text{Re} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (43)$$

$$\text{BCM (Y):} \quad \text{Re} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \approx - \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (44)$$

$$\text{BCM (Z):} \quad \text{Re} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \approx - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (45)$$

$$\text{BE:} \quad \rho \hat{C}_v \frac{T_c U}{R} \left(\frac{\partial t}{\partial t} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial t}{\partial z} \right) \approx \frac{k T_c}{R^2} \left[\left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right] + \mu \Phi_v, \quad (46)$$

$$\text{con } \Phi_v = \left(\frac{U}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] = \left(\frac{U}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{c}\right)^2 \hat{\Phi}_v \quad (47)$$

En las ecuaciones anteriores se ha considerado que el cociente $\left(\frac{c}{R}\right)$ es varios órdenes de magnitud menor que $\left(\frac{R}{L}\right)$, independientemente del hecho de que la relación entre la longitud y el radio (ó diámetro) pueda cambiar sensiblemente. Esto determina que los términos conductivos dominantes en todos los balances son aquellos de en dirección perpendicular a las paredes, y.

El conjunto de Ecs. (42) a (47), constituyen el sistema de ecuaciones que describe el flujo en cojinetes hidrodinámicos bajo condiciones normales de operación y de dimensiones geométricas (Pinkus, 1961; Hamrock *et al.*, 2004; Szeri, 2011). La mayor suposición en estas ecuaciones está en el hecho que se han considerado propiedades constantes con la posición. Esta discusión se retomará cuando se analice el flujo no isotérmico en cojinetes, ya que una distribución no homogénea de temperatura en el flujo llevaría a una distribución no homogénea de la conductividad y la viscosidad.

Finalmente, si se consideran situaciones de Re finitos, pero de manera que el producto $\text{Re}\left(\frac{c}{R}\right)^2 \rightarrow 0$, los términos convectivos de los BCM (incluyendo el convectivo local) resultan despreciables, y las ecuaciones se reducen a:

$$\text{BM: } 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \quad (48)$$

$$\text{BCM (X): } 0 \approx -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (49)$$

$$\text{BCM (Y): } 0 \approx -\left(\frac{R}{c}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (50)$$

$$\text{BCM (Z): } 0 \approx -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
 \text{BE: } & \frac{\rho \hat{C}_v}{\mu} \frac{RT_c}{U} \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial t}{\partial t} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 w \frac{\partial t}{\partial z} \right) \approx \\
 & \approx \frac{kT_c}{\mu U^2} \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right]
 \end{aligned} \quad (52)$$

La expresión anterior del BE ha sido reordenada al incorporar la Ec. (47) en la (46) y al dividir por el orden de magnitud del término generador de energía interna. La ecuación así adimensionalizada permite estimar el valor de la temperatura característica al considerar como

dominante los efectos convectivos, esto es: $T_c = \frac{\mu U}{\rho C_v R} \left(\frac{R}{c}\right)^2$. La Ec. (52) queda entonces:

$$\text{BE: } \quad \frac{\partial t}{\partial t} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 w \frac{\partial t}{\partial z} \approx \frac{1}{Br} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right], \quad (53)$$

donde Br es el “número de Brickman” definido como $Br = \frac{\mu U^2}{kT_c}$, que mide la importancia del calentamiento viscoso con relación al flujo conductivo de calor (Bird *et al.*, 2002). Como todos los demás términos de la Ec. (53) son de orden uno o menor, es de esperar que el Br también sea de orden uno o menor.

Finalmente, analizando el BCM (Y), se deduce que la derivada de la presión en la dirección del espesor de la película lubricante es de orden de magnitud $\left(\frac{c}{R}\right)^2$, por lo que resulta despreciable. Ello implica que la presión desarrollada en el fluido, de acuerdo a las consideraciones tomadas, puede asumirse como constante en el espesor de la película.

Bajo estos últimos reparos, y considerando $\mathcal{O}(Br)=1$, las ecuaciones de conservación adimensionales para el flujo de lubricante newtoniano e incompresible en cojinetes hidrodinámicos con propiedades espacialmente homogéneas son:

$$\text{BM: } \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \quad (54)$$

$$\text{BCM (X): } \quad 0 \approx -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (55)$$

$$\text{BCM (Z): } \quad 0 \approx -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (56)$$

$$\text{BE: } \frac{\partial t}{\partial t} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 w \frac{\partial t}{\partial z} \approx \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \quad (57)$$

que, escritas de manera dimensional, quedan:

$$\text{BM: } 0 = \frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} + \frac{\partial V_z}{\partial Z} \quad (58)$$

$$\text{BCM (X): } 0 = -\frac{\partial P}{\partial X} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} \quad (59)$$

$$\text{BCM (Z): } 0 = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial Y^2} \quad (60)$$

$$\text{BE: } \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial T} + V_x \frac{\partial T}{\partial X} + V_y \frac{\partial T}{\partial Y} + V_z \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \mu \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial Y} \right)^2 \right]. \quad (61)$$

Cabe mencionar que si en todo este análisis se hubiera considerado una única velocidad característica, U , para las tres componentes de velocidad (ver Ecs. (18)), se hubiese llegado al mismo conjunto de Ecs. (58) a (61), ya que los fundamentos de las simplificaciones realizadas son de origen geométrico.

Resumiendo, el conjunto de balances de conservación representados por las Ecs. (58) a (61), o (54) a (57), describen los flujos fluidos Newtonianos en los que:

- las propiedades ρ , \hat{C}_v , k y μ son constantes,
- $c \ll R$ y $c \ll L$ (donde c , R y L son los VCs de la dimensión transversal (Y), longitudinal (X) y axial (Z), respectivamente), lo que lleva a :
 - . la velocidad V_x es dominante (flujo casi-unidireccional), y
 - . la presión no varía en dirección transversal, siendo su VC: $P_c = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c} \right)^2$,
- la aceleración local y convectiva son despreciables (si $\text{Re} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \rightarrow 0$ con $\text{Re} = \rho U R / \mu$),
- los efectos gravitatorios son despreciables, y
- el número de Brickman es de orden 1, con la temperatura característica: $T_c = \frac{\mu U}{\rho C_v R} \left(\frac{R}{c} \right)^2$.

3.4 ECUACIÓN DE REYNOLDS

Para el caso particular de flujo isotérmico, no es necesario considerar el balance de energía. Las Ecs. (58) a (60) describen, entonces, el flujo, bajo las siguientes condiciones de contorno

(o condiciones de borde, CB):

$$\begin{aligned}
 a) & \rightarrow V_X|_{Y=0} = 0, \quad V_X|_{Y=h} = U = \omega R, \\
 b) & \rightarrow V_Y|_{Y=0} = 0, \quad V_Y|_{Y=h} = \frac{dh}{d\tilde{t}}, \\
 c) & \rightarrow V_Z|_{Y=0} = 0, \quad V_Z|_{Y=h} = 0, \\
 d) & \rightarrow P|_{X=0} = P|_{X=2\pi R} = 0, \quad P|_{Z=0} = 0, \quad y \quad \frac{\partial P}{\partial Z}\bigg|_{Z=\frac{L}{2}} = 0.
 \end{aligned} \tag{62}$$

O, de manera adimensional:

$$\begin{aligned}
 a) & \rightarrow u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\tilde{h}} = 1, \\
 b) & \rightarrow v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=\tilde{h}} = \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}}, \\
 c) & \rightarrow w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=\tilde{h}} = 0, \\
 d) & \rightarrow p|_{\Theta=0} = p|_{\Theta=2} = 0, \quad p|_{z=0} = 0, \quad y \quad \frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{z=1/2} = 0.
 \end{aligned} \tag{63}$$

Siendo \tilde{h} el espesor de película adimensional, definido como $\tilde{h} = \frac{h}{c}$. La variable X ha sido reemplazada por Θ partiendo de la definición: $X = R\theta = \pi R\Theta$. La variable angular adimensional Θ es, entonces: $\Theta = \frac{\theta}{\pi} = \frac{X}{\pi R} = \frac{x}{\pi}$. Las CB antes listadas son válidas cuando se trata de un sistema con cojinete estático y con eje que rota a velocidad constante y cuya posición respecto del cojinete se encuentra fija ante una determinada carga aplicada. Otras CB, para otras condiciones de operación, se tratarán en apartados posteriores. Como se puede observar, además, las CB de presión resaltan el hecho que la presión en este flujo es inducida por el movimiento y la geometría. Es la variación gradual del huelgo entre las paredes del eje y el cojinete lo que genera el campo de presión y la clave del éxito de la lubricación.

Partiendo entonces de los BCM, y recordando que el análisis dimensional previo ha demostrado que la presión puede considerarse constante en el espesor de la película fluida

$\left(\frac{\partial P}{\partial Y} \ll \frac{\partial P}{\partial X} \approx \frac{\partial P}{\partial Z}\right)$, ellos pueden integrarse en y , resultando:

$$\text{BCM (X): } 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1 \Rightarrow u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \tag{64}$$

$$\text{BCM (Z): } 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} y + C_3 \Rightarrow w = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4 \quad (65)$$

que, aplicando las CB para u y w de la Ec. (63), resultan en:

$$u = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - \tilde{h} y) + \frac{y}{\tilde{h}}, \quad y \quad (66)$$

$$w = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - \tilde{h} y). \quad (67)$$

Reemplazando estas expresiones en el BM, Ec. (54), se obtiene:

$$\text{BM: } 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - \tilde{h} y) + \frac{y}{\tilde{h}} \right] + \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - \tilde{h} y) \right]. \quad (68)$$

Como se puede observar, se partió de un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas (u , v , w y p) y, luego de operar sobre ellas para ir eliminando variables, se ha llegado a 1 ecuación con 2 incógnitas (v y p). Esta aparente dificultad se puede sobrellevar integrando la ecuación en la dirección trasversal ya que la presión es constante en esa dirección. Este es un punto fundamental de la teoría de lubricación, el cual resulta de la delgadez del espesor de la película fluida.

Reordenando, entonces, los términos de la Ec. (68) e integrando en el espesor de la película de fluido, se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - \tilde{h} y) + \frac{y}{\tilde{h}} \right] - \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - \tilde{h} y) \right] \\ \Rightarrow \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial v}{\partial y} dy &= \int_0^{\tilde{h}} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - \tilde{h} y) + \frac{y}{\tilde{h}} \right] - \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - \tilde{h} y) \right] \right\} dy \end{aligned} \quad (69)$$

Dado que ni p ni \tilde{h} son función de y , las integraciones anteriores se pueden realizar de una manera sencilla una vez que se han intercambiado las operaciones de integración y derivación. Para ello, dada la dependencia del límite de integración con x , debe acudir a la ecuación de Leibnitz,

$$\frac{d}{dx} \int_A^B f(x, t) dt = \int_A^B \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + f(x, B) \frac{dB}{dx} - f(x, A) \frac{dA}{dx}. \quad (70)$$

Lo que lleva a:

$$\begin{aligned}
 v|_{\tilde{h}} - v|_0 &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\tilde{h}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - \tilde{h}y) + \frac{y}{\tilde{h}} \right] dy + u|_{\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} - \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\tilde{h}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - \tilde{h}y) \right] dy \\
 \Rightarrow \frac{d\tilde{h}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{12} \frac{\partial p}{\partial x} \tilde{h}^3 - \frac{1}{2} \tilde{h} \right] + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{12} \frac{\partial p}{\partial z} \tilde{h}^3 \right] \\
 \Rightarrow \frac{d\tilde{h}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{12} \frac{\partial p}{\partial x} \tilde{h}^3 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{12} \frac{\partial p}{\partial z} \tilde{h}^3 \right)
 \end{aligned} \tag{71}$$

donde se han aplicado las CB planteadas en la Ec. (63). Por otro lado,

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \frac{dx}{dt} \Big|_{y=\tilde{h}} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + u|_{y=\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} . \tag{72}$$

Reuniendo, entonces, las Ecs. (71) y (72), y reemplazando x por su equivalente angular, Θ , se llega a:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{1}{2\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12\pi^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta} \tilde{h}^3 \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \tilde{h}^3 \right) \tag{73}$$

o, en forma dimensional,

$$\frac{\partial h}{\partial T} + \frac{U}{2} \frac{dh}{dX} = \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial P}{\partial X} h^3 \right) + \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial P}{\partial Z} h^3 \right) . \tag{74}$$

Esta es la expresión de la “Ecuación de Reynolds” (Reynolds, 1886) para el caso de cojinete estático y rotor con velocidad de rotación constante como el esquematizado en la Figura 3.1(a). Esta es una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales que describe la presión generada en el lubricante en función de las posiciones circunferencial y axial para una dada función espesor, $h(T,X)$. Una expresión más general de la Ecuación de Reynolds se puede obtener considerando otras CB para V_x y V_y en ambas superficies, la del cojinete y la del rotor (Pinkus, 1961; Hamrock *et al.*, 2004; Szeri, 2011). Esta posibilidad se analizará en la Sección 6 al considerar funcionamiento transitorio.

La Ecuación de Reynolds ha sido ampliamente estudiada y su solución exacta se ha buscado desde su formulación, sin que haya sido encontrada aún (Pinkus, 1961; Hamrock *et al.*, 2004; Szeri, 2011). Sin embargo, existen dos soluciones analíticas muy conocidas correspondientes a dos situaciones geométricas límite: el caso del cojinete de longitud infinita ($L/D \rightarrow \infty$) y el caso del cojinete de longitud nula ($L/D \rightarrow 0$). En la Sección 5 de este Capítulo se deducirán y

analizarán las soluciones analíticas para los casos límite mencionados. En el caso de cojinetes de longitud finita, $\mathcal{O}(L/D)=1$, existen soluciones analíticas aproximadas y soluciones numéricas. Las soluciones analíticas aproximadas de la Ecuación de Reynolds para cojinetes de longitud finita se analizarán en el Capítulo 4 junto a las alternativas propuestas en esta tesis, obtenida usando el método de perturbación. La solución numérica de la Ecuación de Reynolds será presentada en el Capítulo 5.

3.4.1 Espesor de película

Para resolver la Ec. (74) se necesita conocer la funcionalidad del huelgo con la posición, $h(\theta)$. Esta sale de relaciones trigonométricas que involucran los radios del cojinete y del eje, la excentricidad y la posición (ver Figura 3.1), resultando:

$$h = c + R + e \cos(\theta) - R \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R}\right)^2 \sin^2(\theta)} \quad (75)$$

La expansión en serie de Taylor de la raíz cuadrada del último término usando el parámetro $e/R \ll 1$, resulta en: $1 - \mathcal{O}((e/R)^2) \approx 1$, por lo que la Ec. (75) se reduce a:

$$\begin{aligned} h &= c + e \cos(\theta) = c + e \cos(\pi\Theta) \\ \tilde{h} &= \frac{h}{c} = 1 + \frac{e}{c} \cos(\theta) = 1 + \eta \cos(\pi\Theta) \end{aligned} \quad (76)$$

siendo η la excentricidad relativa, $\eta = \frac{e}{c}$.

3.4.2 Condiciones de borde para la Ecuación de Reynolds

Las CB básicas para integrar la Ecuación de Reynolds, independientemente del método de resolución que se emplee, son las expresadas en las Ecs. (63d). Sin embargo, la presión así calculada resulta una función antisimétrica con respecto a $\theta = \pi$, con valores positivos en la región convergente, $0 < \Theta < 1$, y negativos en la divergente, $1 < \Theta < 2$. Esta situación es conocida como “solución 2π ” ó “solución completa de Sommerfeld”, y la condición de borde que le dio origen, $p|_{\Theta=0} = p|_{\Theta=2} = 0$, como “condición de Sommerfeld” (Pinkus, 1961; Hamrock *et al.*, 2004; Szeri, 2011). La Figura 3.2(a) esquematiza la forma típica del perfil de presión obtenida con la condición de Sommerfeld y las regiones convergente y divergente del cojinete. Este resultado es poco realista ya que un fluido no es capaz de soportar una presión negativa de

importancia sin mostrar cambios físicos.

Como ya se comentara en el Capítulo 2, en la práctica ocurren varios fenómenos en la zona de presiones negativas, entre los que se destacan: la cavitación gaseosa, cuando se alcanza la presión de saturación del gas que pueda estar disuelto en el lubricante (valor generalmente

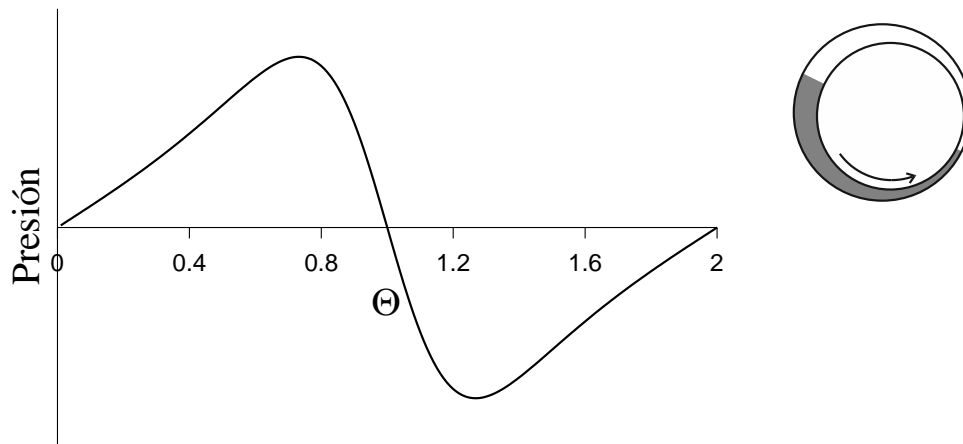


Figura 3.2: Esquema de perfil de presión correspondiente a la 'solución 2π ', y representación de un cojinete hidrodinámico indicando las regiones de presiones positivas ($0 < \Theta < 1$, en gris) y presiones negativas ($1 < \Theta < 2$, en blanco).

cercano a la presión atmosférica); la cavitación del mismo lubricante, cuando éste llega a la ebullición porque se alcanza el valor de su presión de vapor (P_v) para la temperatura de trabajo; y la incorporación de aire desde el exterior por los laterales (Savage, 1977; Hamrock *et al.*, 2004; Szeri, 2011). Es por ello que se requiere especificar el mecanismo empleado para contemplar la cavitación al momento de resolver la Ecuación de Reynolds. La región en la que se manifiesta este fenómeno puede abarcar una parte importante de la película fluida, y llega a alterar sensiblemente el comportamiento del sistema eje-lubricante-cojinete. Aunque son varios los tratamientos que pueden abordarse, como se verá a continuación, todos asumen que la presión en la zona de cavitación es igual a la presión atmosférica, basándose en que la presión allí debe ser esencialmente constante e igual a la presión de saturación del lubricante. Generalmente, ésta es igual o un poco inferior a la atmosférica en lubricantes que han estado expuestos a presión atmosférica.

Bajo condiciones normales de operación, se espera que la presión en el fluido aumente en la zona convergente desde la presión de entrada, alcanzando un máximo dentro de esta zona. Luego la presión decrece abruptamente alcanzando valores negativos (por debajo de la presión de cavitación) para volver a subir al nivel de la presión de cavitación y mantenerse constante en toda esta zona. En general se acepta que la zona con cavitación se da en la región divergente

del cojinete, sin embargo aún no hay certeza sobre el lugar exacto donde inicia ni sobre las CB que se aplican en ese lugar.

Existen varios modelos para considerar el efecto de cavitación. El más sencillo es el modelo de Gumbel que evalúa la presión sólo en $0 \leq \Theta \leq 1$, y aproxima el valor de P en la otra mitad de la circunferencia como igual a la presión exterior ($p = 0$). El perfil de presión calculado con este modelo se denomina “solución π ” o “media-solución de Sommerfeld”, y la condición de borde que le dio origen, $p|_{\Theta=0} = p|_{\Theta=1} = 0$ y $p=0$ en $1 < \Theta < 2$, se conoce como “condición de Gumbel” (Pinkus, 1961; Hamrock *et al.*, 2004; Szeri, 2011). Un modelo mejor que el de Gumbel es el de Reynolds, que considera que la presión se hace igual a la exterior (presión adimensional nula) en algún valor de Θ entre 1 y 2, denominado Θ^* , y mantiene $p=0$ desde Θ^* hasta $\Theta=2$. Este modelo asume, además, que la derivada de la presión respecto Θ también es nula en Θ^* , lo que soluciona el problema de discontinuidad planteado por la condición de Gumbel. Así, según el modelo de Reynolds, a las CB de las Ecs. (63d) debe añadirse:

$$p|_{\Theta=\Theta^*} = 0, \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=\Theta^*} = 0. \tag{77}$$

Esta metodología incorpora una incógnita más, Θ^* , pero también una ecuación más. Este modelo es muy utilizado por su simpleza y realismo, al contemplar continuidad del flujo en la frontera entre la zona sin y con cavitación. La Figura 3.3 esquematiza los perfiles de presión que se obtienen a partir de resolver la Ecuación de Reynolds para los tres tipos de CB antes comentados.

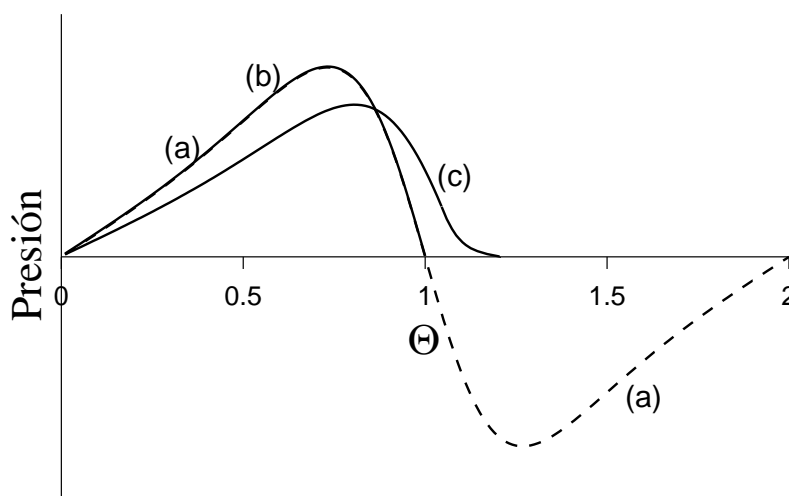


Figura 3.3: Esquemización del efecto de la CB en el cálculo del perfil de presión en un cojinete. (a) solución 2π correspondiente a la condición de Sommerfeld; (b) solución π correspondiente a la condición de Gumbel; (c) perfil correspondiente a la condición de Reynolds.

Tanto la CB de Gumbel como la de Reynolds desprecian la caída brusca de presión subambiente, pero la de Gumbel introduce, además, una discontinuidad en el gradiente de presión (no cumple con la conservación de la masa). Aun así, su simpleza al momento de implementarla y el hecho que prediga resultados globales cualitativamente buenos en el funcionamiento de cojinetes de tamaños límite, hace que aún se siga usando mucho en trabajos teóricos, dependiendo del objetivo del trabajo.

El uso del modelo de Reynolds queda justificado por dar lugar a perfiles de presión más coincidentes con datos experimentales, y por no plantear discontinuidades. Esto queda reforzado por el cálculo del caudal circunferencial (Childs, 1993; Szeri, 2011). Este caudal, expresado por unidad de ancho (L) del cojinete, se obtiene al integrar la velocidad en dirección X (dada por la Ec. (66)) en el espesor de la película fluida, esto es:

$$q_{\Theta} = \int_0^h V_x dY = Uc \int_0^{\tilde{h}} \left(\frac{y}{\tilde{h}} + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - \tilde{h} y) \right) dy = \frac{U}{2} c \tilde{h} - \frac{c \tilde{h}^3 U}{12\pi} \frac{\partial p}{\partial \Theta}. \quad (78)$$

El primer término en q_{Θ} es el debido al arrastre de la pared que se mueve a velocidad U , y el segundo al gradiente de presión generado por la inclinación local de la pared. En la zona antes de la interfase líquido-gas, la presión va disminuyendo conforme aumenta Θ hasta llegar a la presión de cavitación. Por lo tanto, en ese lugar $\frac{\partial p}{\partial \Theta} < 0$ y, como se puede ver en la Ec. (78),

$q_{\Theta} > \frac{U}{2} ch$. No obstante, dentro de la zona con cavitación, la presión es constante, $\frac{\partial p}{\partial \Theta} = 0$ y,

por lo tanto $q_{\Theta} = \frac{U}{2} ch$. Por lo tanto, habría una discontinuidad en el flujo en la frontera del

inicio de la cavitación excepto que se requiera la nulidad de la derivada de la presión en ese lugar. Autores como Swift (Swift, 1932, 1937), en base a argumentos de estabilidad, y Stieber (Hamrock *et al.*, 2004), a partir de consideraciones de continuidad de flujo en la interfase, llegaron a idénticas condiciones, esto es: $\partial p / \partial \theta = 0$, y $p = p_{cav}$ en la interfase, considerando que la presión de cavitación difiere poco de la atmosférica. La condición de Reynolds, también llamada ‘‘condición de Swift-Stieber’’, predice perfiles de presión cercanos a los experimentales bajo en muchas situaciones aunque no logra predecir las presiones negativas que ocurren justo al inicio de la cavitación.

Modelos más complejos, como los de Mori, Elrod-Adams, Coyne-Elrod, Floberg, etc., (Mori *et al.*, 1968; Savage, 1977; Elrod y Brewe, 1987; Girón y Cortínez, 2003; Ausas *et al.*, 2007, 2009; Szeri, 2011) usan argumentos de tensión superficial y/o forma y posición de la

interfase, entre otros, para lograr predecir perfiles más exactos de presión. Sin embargo estos modelos son difíciles de implementar en esquemas numéricos, sin llegar a dar, en muchos casos, resultados muy diferentes a los que se obtienen con el modelo de Reynolds (que es significativamente más sencillo de manejar numéricamente). Físicamente, ninguno de estos conjuntos de CB es totalmente correcto, por lo que existen discrepancias sobre cuál es el que mejor ajusta a las mediciones experimentales. Cabe señalar que la diferencia entre los resultados obtenidos utilizando uno u otro modelo de CB para la interfase líquido-gas aumenta a medida que lo hace la excentricidad relativa, por lo que la decisión del modelo a emplear surge del balance entre el error que se introduce en el análisis y el costo de cálculo asociado.

3.5 SOLUCIONES ANALÍTICAS EN ESTADO ESTACIONARIO

En las Secciones anteriores se mostró que el flujo isotérmico en estado estacionario en un cojinete hidrodinámico está descrito por la Ecuación de Reynolds, Ec. (73), y los balances asociados que le dieron origen, Ecs. (58) a (60), o las correspondientes ecuaciones adimensionales. Este conjunto de ecuaciones se obtuvo bajo las siguientes hipótesis:

- el huelgo radial es muy pequeño comparado con el radio ($c \ll R$),
- los efectos gravitatorios son despreciables, y
- el producto $Re \left(\frac{c}{R} \right)^2 \rightarrow 0$,

En estas ecuaciones aún aparece un número adimensional de origen geométrico, la relación radio a largo del cojinete, $\left(\frac{R}{L} \right)$. Al hacer tender este número a valores extremos, se simplifica el conjunto de ecuaciones, las que pasan a tener “soluciones analíticas”. El interés sobre estas soluciones radica en que se pueden usar como límites de comparación con soluciones obtenidas por otros mecanismos o ante cambios de CB, e incluso con las soluciones numéricas. Existen dos soluciones analíticas extremas: la de cojinetes de longitud infinita (ILJB, por “infinitely long journal bearing”), y la de cojinetes de longitud nula (ISJB, por “infinitely short journal bearing”).

3.5.1 Cojinete infinitamente largo (ILJB)

La Ecuación de Reynolds, Ec. (73), para estado estacionario, es:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12\pi^2} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial\Theta} \tilde{h}^3 \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \tilde{h}^3 \right). \quad (79)$$

Si, además, se considera que $\frac{L}{R} \rightarrow \infty$, o su equivalente $\frac{R}{L} \rightarrow 0$, se observa que el término de la variación axial de la presión (último término) resulta despreciable frente al de la variación circunferencial (segundo término), por lo que la expresión se reduce a:

$$\frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{6\pi} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial\Theta} \tilde{h}^3 \right) \quad (80)$$

La ecuación resultante no admite, por lo tanto, CB en z , y la presión sólo es función de Θ . Integrando, se obtiene:

$$\frac{C_1 + \tilde{h}}{\tilde{h}^3} = \frac{1}{6\pi} \frac{dp}{d\Theta} \quad (81)$$

La constante de integración se puede evaluar considerando que el perfil de presión tendrá un máximo (y un mínimo), por lo que existe un punto, $\Theta = \Theta_0$, con su correspondiente $\tilde{h} = \tilde{h}_0$, en

el cual se cumple que $\left. \frac{dp}{d\Theta} \right|_{\Theta=\Theta_0} = 0$. Al reemplazar en la Ec. (81) se obtiene:

$$6\pi \frac{\tilde{h} - \tilde{h}_0}{\tilde{h}^3} = \frac{dp}{d\Theta} \quad (82)$$

Si se integra entre $\Theta = 0$ y $\Theta = 2$, y considerando que $p_{(\Theta=0)} = p_{(\Theta=2)}$, resulta:

$$6\pi \int_0^2 \frac{\tilde{h} - \tilde{h}_0}{\tilde{h}^3} d\Theta = \int_{p(0)}^{p(2)} dp = 0 \rightarrow \int_0^2 \frac{\tilde{h} - \tilde{h}_0}{\tilde{h}^3} d\Theta = 0 \quad (83)$$

Por otra parte, de acuerdo a la Ec. (76), $\tilde{h} = 1 + \eta \cos(\pi\Theta)$, por lo que la Ec. (83) toma la forma:

$$\int_0^2 \frac{[1 + \eta \cos(\pi\Theta)] - \tilde{h}_0}{[1 + \eta \cos(\pi\Theta)]^3} d\Theta = 0, \quad (84)$$

e integrando se obtiene que

$$\tilde{h}_0 = \frac{2(1 - \eta^2)}{(\eta^2 + 2)}, \quad (85)$$

que, al sustituir en la Ec. (82), resulta en:

$$\frac{dp}{d\Theta} = 6\pi \left(\frac{1}{(1+\eta \cos(\pi\Theta))^2} - \frac{2(1-\eta^2)}{(\eta^2+2)(1+\eta \cos(\pi\Theta))^3} \right), \quad (86)$$

cuya solución es:

$$p = 6 \frac{\eta(2+\eta \cos(\pi\Theta)) \sin(\pi\Theta)}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos(\pi\Theta))^2} \quad (87)$$

al considerar que $p=0$ en $\Theta=0$. La representación gráfica de la Ec. (87) se muestra en la Figura 3.4 para distintos valores de excentricidad, en el rango $0 < \Theta < 1$. En $1 < \Theta < 2$, el perfil de presión es equivalente pero negativo, como ya se comentara en la Sección previa.

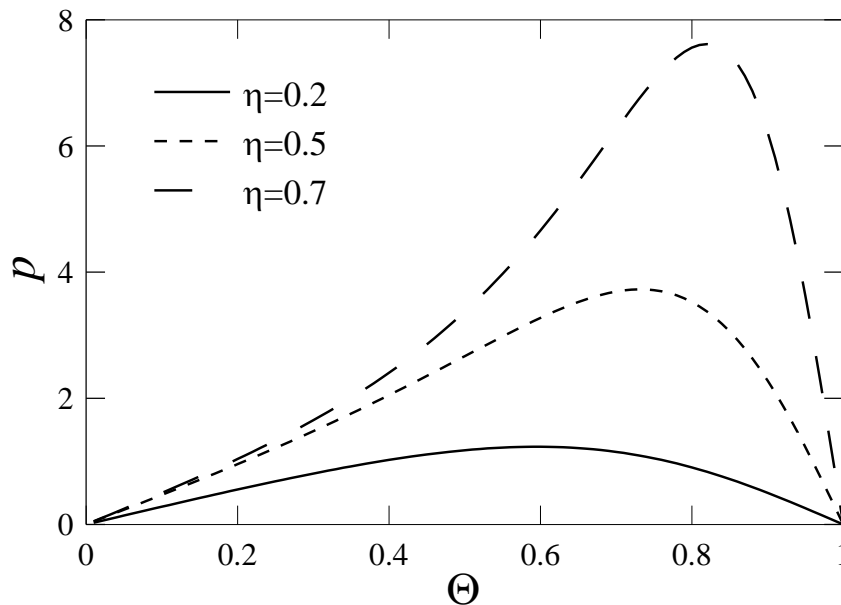


Figura 3.4: Presión adimensional en el ILJB en función del ángulo adimensional Θ , para distintas excentricidades relativas, η .

Capacidad portante y Número de Sommerfeld

El cálculo de la capacidad portante del sistema cojinete-rotor (dado por la carga actuante sobre el eje, W) se puede realizar determinando la fuerza que el fluido realiza sobre el eje (F) ya que, en el equilibrio, estas fuerzas son iguales y de dirección opuesta. La fuerza F se calcula por integración del perfil de presión, y sus componentes serían:

$$F \sin(\phi) = L \int_0^{2\pi} P \sin(\theta) R d\theta, \text{ y} \quad (88)$$

$$F \cos(\phi) = L \int_0^{2\pi} P \cos(\theta) R d\theta , \quad (89)$$

donde ϕ es el ángulo que forma la carga respecto de la línea de centros (ver Figura 3.1). Como se puede notar de estas ecuaciones, el valor de F es muy dependiente de la CB de presión que se use. Es más, considerando la antisimetría del perfil de presión cuando se usa la condición de Sommerfeld y la simetría de las función coseno respecto de $\theta=\pi$, se puede prever que la Ec. (89) dará un resultado nulo. Es decir, para esta condición, el ángulo ϕ de acción de F respecto de la línea de centros será de 90° .

Reemplazando por variables adimensionales en las Ecs. (88) y (89), y reordenando, se obtiene:

$$\frac{F \sin(\phi)}{P_c} = LR\pi \int_0^2 p \sin(\pi\Theta) d\Theta , y \quad (90)$$

$$\frac{F \cos(\phi)}{P_c} = LR\pi \int_0^2 p \cos(\pi\Theta) d\Theta . \quad (91)$$

Para resolver la Ec. (90) se debe integrar por partes

$$\frac{F \sin(\phi)}{LRP_c} = -p \cos(\pi\Theta) \Big|_0^2 - \pi \int_0^2 \frac{dp}{d\Theta} \cos(\pi\Theta) d\Theta = -\pi \int_0^2 \frac{dp}{d\Theta} \cos(\pi\Theta) d\Theta , \quad (92)$$

y luego reemplazar por la Ec. (87), esto es:

$$\frac{F \sin(\phi)}{LRP_c} = 6\pi^2 \int_0^2 \left(-\frac{\cos(\pi\theta)}{(1+\eta \cos(\pi\Theta))^2} + \frac{2(1-\eta^2)\cos(\pi\Theta)}{(\eta^2+2)(1+\eta \cos(\pi\Theta))^3} \right) d\Theta . \quad (93)$$

Para poder resolver la integral se utilizan las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\pi\theta)}{(1+\eta \cos(\pi\Theta))^3} &= \frac{1/\eta}{(1+\eta \cos(\pi\Theta))^2} - \frac{1/\eta}{(1+\eta \cos(\pi\Theta))^3} , y \\ -\frac{\cos(\pi\theta)}{(1+\eta \cos(\pi\Theta))^2} &= \frac{1/\eta}{(1+\eta \cos(\pi\Theta))^2} - \frac{1/\eta}{1+\eta \cos(\pi\Theta)} \end{aligned} \quad (94)$$

quedando la Ec. (93):

$$\begin{aligned} \frac{F \sin(\phi)}{LRP_c} &= \frac{6\pi^2}{\eta} \int_0^2 \left(-\frac{2(1-\eta^2)}{(\eta^2+2)(1+\eta \cos(\pi\Theta))^3} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2(1-\eta^2)}{(\eta^2+2)} + 1 \right) \frac{1}{(1+\eta \cos(\pi\Theta))^2} - \frac{1}{1+\eta \cos(\pi\Theta)} \right) d\Theta , \end{aligned} \quad (95)$$

que da como resultado:

$$\frac{F \sin(\phi)}{LRP_c} = \frac{12\pi\eta}{(\eta^2 + 2)(1 - \eta^2)^{1/2}}. \quad (96)$$

De manera similar, integrando por partes la Ec. (91), resulta en:

$$\frac{F \cos(\phi)}{LRP_c} = p \sin(\pi\Theta) \Big|_0^2 + \pi \int_0^2 \frac{dp}{d\Theta} \sin(\pi\Theta) d\Theta = \pi \int_0^2 \frac{dp}{d\Theta} \sin(\pi\Theta) d\Theta \quad (97)$$

y al reemplazar por la Ec. (87), y dividir por LR , resulta:

$$\frac{F \cos(\phi)}{LRP_c} = 6\pi^2 \int_0^2 \left(\frac{\sin(\pi\theta)}{(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^2} - \frac{2(1 - \eta^2) \sin(\pi\Theta)}{(\eta^2 + 2)(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^3} \right) d\Theta. \quad (98)$$

Cuyo resultado, luego de integrar, es:

$$F \cos(\phi) = 0 \quad (99)$$

Este resultado indica que el ángulo debe ser igual a $\pi/2$, ya que la fuerza no es nula. Como se comentara al inicio de la Sección, la existencia de un desfase de 90° entre la fuerza y el desplazamiento ocurre porque se consideró la existencia de un perfil completo de presiones, es decir, se ha integrado entre 0 y 2π aceptando la presencia de presiones negativas en la zona divergente de la geometría de igual magnitud que las positivas de la zona convergente. Pero, como ya se ha mencionado, esta condición es irreal en aplicaciones prácticas.

Continuando con este análisis, considerando $\phi = \pi/2$, se puede calcular la magnitud de la fuerza realizada por el fluido (equivalente a la carga soportada por el cojinete), que resulta:

$$F = \frac{12\pi\eta LRP_c}{(\eta^2 + 2)(1 - \eta^2)^{1/2}}. \quad (100)$$

Esta fuerza, que dividida por el área proyectada del eje puede pensarse como un presión promedio, $P_p = \frac{F}{2RL}$, es frecuentemente presentada en forma relativa al valor característico de la presión. De hecho, este cociente define el “número de Sommerfeld”, S , que mide la importancia de la presión de referencia, dada por Ec. (37), la cual equivale a las fuerzas viscosas dominantes, respecto de la presión media (o carga actuante sobre el eje expresada por unidad de área proyectada). Un menor valor de S señala, por lo tanto, no sólo mayor F para una dada P_c , sino también mayor excentricidad.

En ecuaciones es:

$$S = \frac{P_c}{2\pi P_p} = \frac{\mu\omega}{2\pi P_p} \left(\frac{R}{c}\right)^2 = \frac{\mu N}{P_p} \left(\frac{R}{c}\right)^2, \quad (101)$$

donde el factor 2π se incorpora dado que tradicionalmente se expresa a S como una función de $N = \omega/2\pi = U/2\pi R$, la velocidad angular en revoluciones por segundo. La capacidad portante del ILJB con perfil antisimétrico de presión resulta entonces:

$$S = \frac{(\eta^2 + 2)(1 - \eta^2)^{1/2}}{12\pi^2 \eta}. \quad (102)$$

En capítulos posteriores se tratará más en profundidad el número de Sommerfeld, sus variantes y su influencia en el desempeño de los cojinetes.

Los resultados anteriores de ϕ y F (ó S) para el ILJB corresponden a la llamada 'solución 2π '. Tal como se indicó en la Sección previa, una estrategia (la más sencilla) para aproximar el perfil de presiones teniendo en cuenta la cavitación, es mediante la condición de Gumbel o 'solución π '. El cálculo de la fuerza sería entonces,

$$\frac{F \sin(\phi)}{P_c} = LR\pi \int_0^1 p \sin(\pi\Theta) d\Theta, \text{ y} \quad (103)$$

$$\frac{F \cos(\phi)}{P_c} = LR\pi \int_0^1 p \cos(\pi\Theta) d\Theta. \quad (104)$$

Siguiendo los mismos pasos que en el procedimiento anterior, se obtiene:

$$\frac{F \sin(\phi)}{LRP_c} = \frac{6\pi^2 \eta}{\sqrt{1 - \eta^2} (2 + \eta^2)}, \text{ y} \quad (105)$$

$$\frac{F \cos(\phi)}{LRP_c} = \frac{12\pi\eta^2}{(\eta^2 - 1)(2 + \eta^2)}. \quad (106)$$

El cociente entre estas dos ecuaciones, en valor absoluto, define el ángulo de acción de la fuerza:

$$\tan(\phi) = \frac{\pi \sqrt{1 - \eta^2}}{2\eta}, \quad (107)$$

y el reordenamiento de los resultados, lleva al número de Sommerfeld:

$$S = \frac{(1 - \eta^2)(2 + \eta^2)}{6\pi\eta \sqrt{(4 - \pi^2)\eta^2 + \pi^2}}. \quad (108)$$

Puede apreciarse que al considerar $p=0$ en la sección divergente, el ángulo entre la línea de centros y la carga es de 90° ($\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$) sólo cuando la excentricidad tiende a cero ($\eta \rightarrow 0$), y $\phi \rightarrow 0$ cuando $\eta \rightarrow 1$. La falta de simetría en la distribución de presión resulta, por lo tanto, muy importante de ser tenida en cuenta en los cálculos de capacidad portante. La Figura 3.5 muestra el ángulo ϕ y el número de Sommerfeld en función de la excentricidad para el ILJB usando ambas CB de presión (soluciones π y 2π). Como se puede ver, ante igual distribución de presión en la zona convergente, el uso de la condición de Sommerfeld (solución 2π) subestima la capacidad portante (recordar que S es inversamente proporcional a F) principalmente a medida que la excentricidad aumenta (F aumenta).

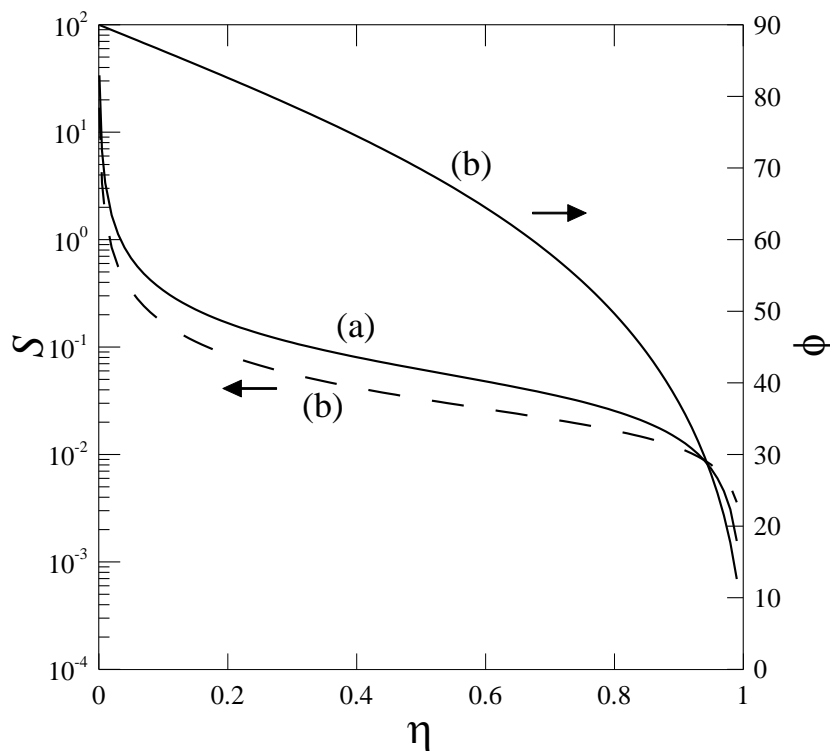


Figura 3.5: Número de Sommerfeld (inversa de la capacidad portante) y ángulo entre la línea de centros y la carga para el ILJB en función de la excentricidad. Uso de condiciones de Sommerfeld (a) y Gumbel (b).

3.5.2 Cojinete infinitamente corto (ISJB)

Analizando nuevamente la Ec. (73), pero esta vez para $\frac{L}{R} \rightarrow 0$, se obtiene que los dos primeros términos son despreciables frente al último. Tal resultado no es válido, ya que deja un

único término dominante y, al estar sólo, queda igualado a cero. Por lo tanto, sólo se puede concluir que el orden de magnitud de la presión usado hasta el momento no es el adecuado y que éste debe presentar distintos valores dependiendo la relación L/D . En la Ec. (73), el orden de magnitud del último término, debería igualarse a, al menos, el de uno de los otros términos. Por comparación con el primer término resulta, entonces, que, en el caso particular del cojinete corto, el orden de magnitud de la presión debe ser: $P_c = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2$ de manera que el tercer término sea de orden uno. De esta manera, la Ecuación de Reynolds en estado estacionario resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial\Theta} \tilde{h}^3\right) + \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \tilde{h}^3\right). \quad (109)$$

Y si ahora se considera $\frac{L}{R} \rightarrow 0$, esta ecuación se reduce a:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \tilde{h}^3\right). \quad (110)$$

Por otro lado, como \tilde{h} es sólo función de Θ , la Ec. (110) se puede reorganizar en:

$$\frac{1}{2\pi\tilde{h}^3} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right). \quad (111)$$

Tal expresión puede ser integrada fácilmente respecto de z , ya que el término de la izquierda es sólo función de Θ , para dar:

$$p = \frac{3}{\pi\tilde{h}^3} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} z^2 + z C_1 + C_2, \quad (112)$$

donde las constantes de integración, C_1 y C_2 se obtienen de la aplicación de las CB:

$$\begin{aligned} a) \rightarrow p_{(z=0)} = 0 &\Rightarrow C_2 = 0, \\ b) \rightarrow p_{(z=1)} = 0 &\Rightarrow C_1 = -\frac{3}{\pi} \frac{1}{\tilde{h}^3} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \end{aligned} \quad (113)$$

Reemplazando estas expresiones en la Ec. (112), y recordando que de acuerdo a la Ec. (76), $\tilde{h} = 1 + \eta \cos(\pi\Theta)$, se obtiene:

$$p = \frac{3\eta \sin(\pi\Theta)}{(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^3} z (1 - z). \quad (114)$$

La representación gráfica de la Ec. (114) se muestra en la Figura 3.6 en el rango $0 < \Theta < 1$ para $z=0,5$ y distintas excentricidades. Nuevamente, en $1 < \Theta < 2$, el perfil de presión es equivalente pero negativo.

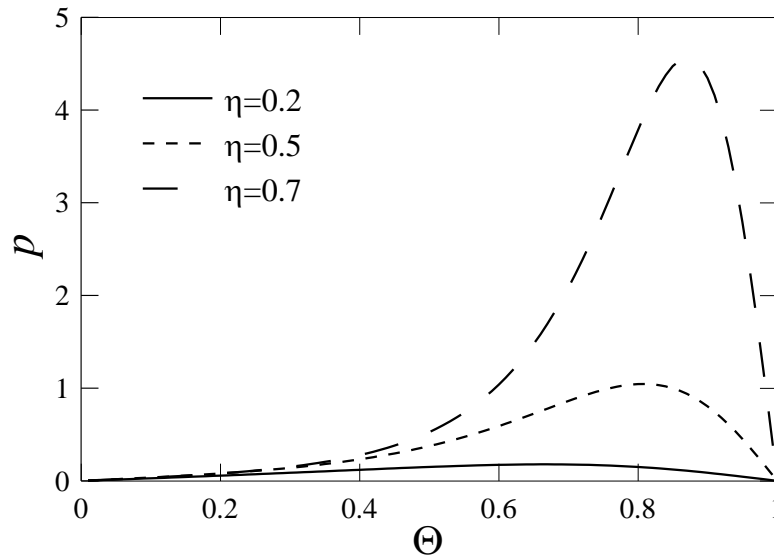


Figura 3.6: Presión adimensional en el ISJB en función del ángulo adimensional Θ , para $z=0,5$ y distintas excentricidades relativas, η .

Debe notarse que en el caso del ISJB, la ecuación diferencial resultante, Ec. (111), no admite CB sobre valores de Θ . Por lo tanto, la CB de Reynolds no puede utilizarse cuando $\frac{L}{R} \rightarrow 0$, y sólo resta la posibilidad de usar la condición de Gumbel como manera de hacer más realista el resultado del cálculo de capacidad portante, es decir, integrar el perfil de presión en $0 < \Theta < 1$. La discontinuidad en el flujo de lubricante que introduce esta CB no resulta, sin embargo, significativa, ya que el flujo circunferencial en el cojinete infinitamente corto es prácticamente sólo por arrastre. Esto lo muestra la Ec. (78) reescrita para la expresión válida de P_c para el ISJB, esto es:

$$q_{\Theta} = \frac{U}{2} ch - \frac{c\tilde{h}^3 U}{12\pi} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial \Theta}. \quad (115)$$

La ecuación de q_{Θ} plantea una discontinuidad en $\Theta=1$ para la condición de Gumbel como ya se comentara, pero puede observarse que los flujos por presión resultan ahora proporcionales a la relación de aspecto $(L/R)^2$. Este hecho justifica el empleo de la CB de Gumbel ($p=0$ en $1 < \Theta < 2$) en el ISJB, ya que la citada discontinuidad tiende a anularse cuando $\frac{L}{R} \rightarrow 0$.

Capacidad portante y Número de Sommerfeld

Realizando un análisis similar al efectuado para cojinetes infinitamente largos, y considerando en primera instancia la condición de Sommerfeld, se calcula la fuerza hecha por el fluido sobre el eje mediante:

$$\frac{F \sin(\phi)}{LRP_c} = \pi \int_0^1 \int_0^2 p \sin(\pi\Theta) d\Theta dz, \text{ y} \quad (116)$$

$$\frac{F \cos(\phi)}{LRP_c} = \pi \int_0^1 \int_0^2 p \cos(\pi\Theta) d\Theta dz. \quad (117)$$

Reemplazando la expresión para p , Ec. (114), e integrando en z se llega a:

$$\frac{F \sin(\phi)}{LRP_c} = \frac{1}{2} \pi \int_0^2 \frac{\eta \sin^2(\pi\Theta)}{(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^3} d\Theta = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \eta}{(1 - \eta^2)^{3/2}}, \text{ y} \quad (118)$$

$$\frac{F \cos(\phi)}{LRP_c} = \frac{1}{2} \pi \int_0^2 \frac{\eta \sin(\pi\Theta) \cos(\pi\Theta)}{(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^3} d\Theta = 0. \quad (119)$$

Nuevamente, ante el uso de un perfil de presión antisimétrico, existirá un ángulo de 90° entre la línea de centros del cojinete y la fuerza aplicada, resultando en la capacidad portante:

$$S \left(\frac{L}{R} \right)^2 = \frac{2(1 - \eta^2)^{3/2}}{\pi^2 \eta}, \quad (120)$$

la que resulta de considerar la definición del número de Sommerfeld, Ec. 101, la presión media

$$P_p = \frac{F}{2RL}, \text{ la presión característica } P_c = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2, \text{ y } N = U/2\pi R.$$

Si se desprecia la zona de presiones negativas ('solución π '), las integrales con respecto a Θ en las Ecs. (118) y (119) se deben realizar entre 0 y 1, lo que resulta en:

$$\frac{F \sin(\phi)}{LRP_c} = \frac{\pi^2 \eta}{4(1 - \eta^2)^{3/2}}, \text{ y} \quad (121)$$

$$\frac{F \cos(\phi)}{LRP_c} = \frac{\pi \eta^2}{(\eta^2 - 1)^2}, \quad (122)$$

y la capacidad portante, en:

$$S\left(\frac{L}{R}\right)^2 = \frac{4(1-\eta^2)^2}{\pi\eta\sqrt{16\eta^2 + \pi^2(1-\eta^2)}} \quad (123)$$

Además, del cociente entre las Ecs. (121) y (122), en valor absoluto, resulta:

$$\tan(\phi) = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}, \quad (124)$$

lo que muestra que, de manera cualitativamente similar al caso de los cojinetes infinitamente largos, el ángulo entre la línea de centros y la carga, ϕ , es de 90° ($\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$) sólo cuando la excentricidad tiende a cero ($\eta \rightarrow 0$), y que $\phi \rightarrow 0$ cuando $\eta \rightarrow 1$. La Figura 3.7 presenta el ángulo ϕ y el número de Sommerfeld en función de la excentricidad para el ISJB usando ambas CB de presión.

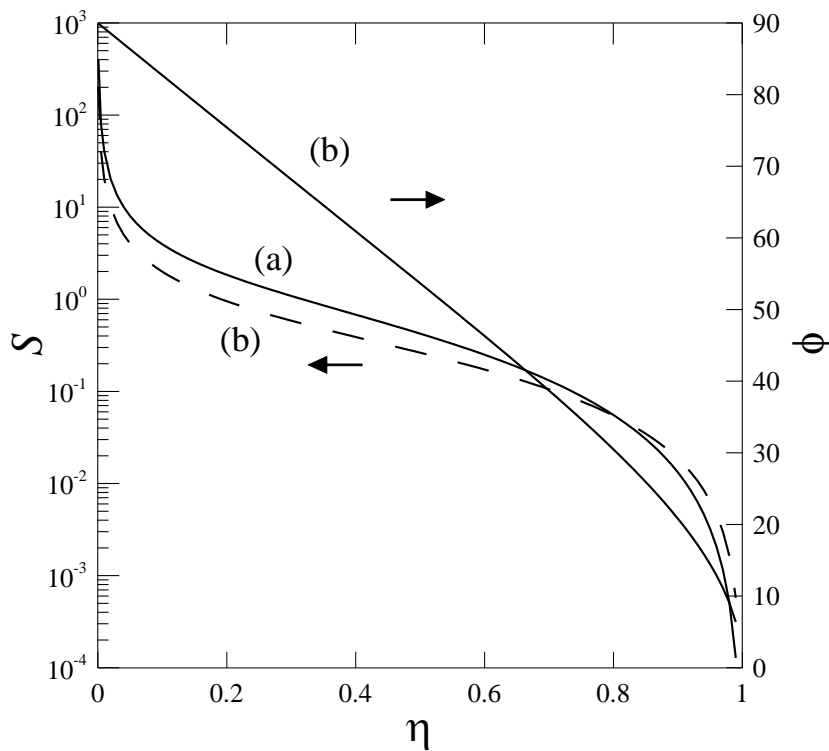


Figura 3.7: Número de Sommerfeld (inversa de la capacidad portante) y ángulo entre la línea de centros y la carga para el ISJB en función de la excentricidad. Uso de condiciones de Sommerfeld (a) y Gumbel (b).

3.6 COJINETE EN ESTADO TRANSITORIO

El centro de rotación del cilindro rotante permanecerá en un lugar fijo (posición de equilibrio estático) mientras la carga externa esté exactamente balanceada por la fuerza

resultante que el campo de presión ejerce sobre el cilindro. Sin embargo, en la mayoría de sus aplicaciones, los sistemas que emplean cojinetes no se encuentran sometidos a cargas constantes. Las fluctuaciones en las fuerzas actuantes son frecuentes, ya sean producidas por desbalances del rotor o bien, por la propia naturaleza del movimiento.

El análisis matemático de cojinetes en estado transitorio ya no se puede realizar con la Ecuación de Reynolds deducida en la Sección 4 porque las CB son distintas. Los balances de conservación que describen el flujo, sin embargo, se siguen manteniendo (Ecs. (58) a (60)) ya que las condiciones geométricas que dieron lugar a las simplificaciones realizadas son las mismas. Sólo se agrega una consideración, que de alguna manera limita el alcance de los resultados que se obtengan, y es que se considerará sólo a aquellos casos con un tiempo característico que se encuentre por encima del que se obtiene de tomar $T_R = \frac{R}{U}$, de manera que los términos transitorios sigan siendo despreciables. Es decir, se considerarán los casos en que el eje cambie su posición a una velocidad lo suficientemente baja como para permitir al fluido adaptarse instantáneamente a cada situación (flujo cuasi-estacionario).

En este análisis, la situación difiere del funcionamiento estático del cojinete en que se contempla la posibilidad que el eje pueda precesionar y trasladarse respecto del centro del cojinete (Pinkus, 1961; Szeri, 2011). Es decir, el centro del rotor puede girar respecto del centro del cojinete a una velocidad angular $\dot{\phi}$, y también moverse (alejarse o acercarse) a una velocidad \dot{e} . ϕ es el ángulo instantáneo de la carga respecto de una dirección fija de referencia, mientras que ϕ , como ya se definiera, es el ángulo de la carga respecto de la línea de centros. La distancia entre ambos define un ángulo, α . Tanto ϕ como ϕ , y por lo tanto α , pueden variar en el tiempo. Sus velocidades se señalan con $\dot{\phi}$, $\dot{\alpha}$ y $\dot{\phi}$.

Por ello, al calcular la velocidad de la superficie del rotor debe considerarse, además de su propia rotación, la velocidad con la que se traslada el centro del mismo. La Figura 3.8 permite apreciar el sistema de referencia empleado para calcular las velocidades existentes en el eje está dada por $V_x = \omega R + e\dot{\phi}$ y $V_y = \dot{e}$. En cualquier otro punto de la periferia del rotor, las componentes de velocidad se calculan por proyección de esas velocidades, resultando las velocidades transversal (V) y tangencial (U) (Hunsaker y Rightmire, 1947; Childs, 1993; Szeri, 2011):

$$\begin{aligned} a) \rightarrow V &= \dot{e} \cos(\theta) + e\dot{\phi} \sin(\theta) = V_Y|_{Y=h} \\ b) \rightarrow U &= \omega R + \dot{e} \sin(\theta) - e\dot{\phi} \cos(\theta) = V_\theta|_{Y=h} \end{aligned} \quad (125)$$

las que constituyen las nuevas CB en $Y=h$.

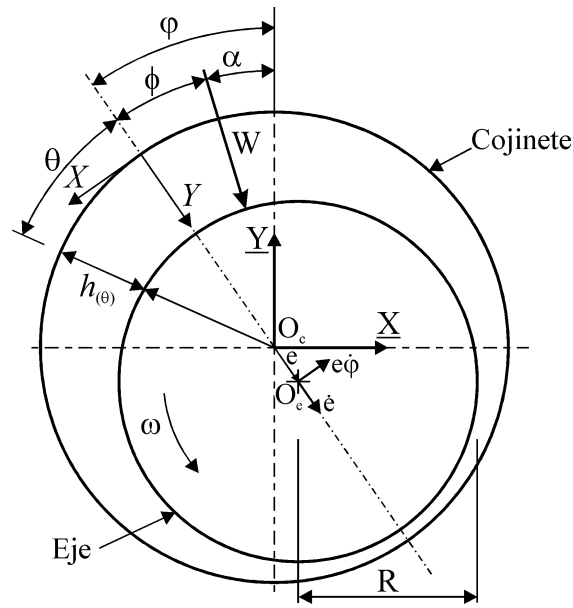


Figura 3.8: Esquema de variables cinemáticas consideradas en el sistema rotor-cojinete. Por ejemplo, la velocidad lineal de la superficie del eje en el espesor mínimo de película

La obtención de la Ecuación de Reynolds para el funcionamiento transitorio del cojinete hidrodinámico se realiza con pasos similares a los involucrados en la derivación de la Ec.(73), con la diferencia que ahora no sólo h sino también U dependen de X . Por ello es conveniente trabajar en forma dimensional. El primer término de la Ec. (71) se convertiría entonces en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \int_0^h U \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - \tilde{h}y) + \frac{y}{h} \right] dy &= \frac{\partial}{\partial X} \int_0^h \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial X} (Y^2 - hY) + U \frac{Y}{h} \right] dY = \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial X} h^3 - U \frac{h}{2} \right] = \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial X} h^3 \right] - \frac{dU}{dX} \frac{h}{2} - \frac{U}{2} \frac{dh}{dX} \end{aligned} \tag{126}$$

que, una vez introducido en la Ec. (71), junto con la Ec. (72) y las CB correspondientes (Ec. (125)), resulta en la Ecuación de Reynolds para condiciones transitorias relativamente rápidas:

$$\frac{1}{6R^2\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} h^3 \right) + \frac{1}{6\mu} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial P}{\partial Z} h^3 \right) = \frac{U}{R} \frac{dh}{d\theta} + \frac{h}{R} \frac{dU}{d\theta} + 2V \tag{127}$$

Como se hiciera anteriormente, a continuación se describirán los perfiles de presión y de carga para las situaciones extremas de $\frac{L}{R} \rightarrow \infty$ y $\frac{L}{R} \rightarrow 0$, los que serán comentados y comparados con las soluciones del cojinete estático en la Sección 6.3.

3.6.1 Cojinete infinitamente largo (ILJB)

Como ya se mostrara, el análisis de orden de magnitud indica que la condición de

$\frac{L}{R} \rightarrow \infty$ lleva a que el término de la variación axial de la presión resulte despreciable frente al

de la variación circunferencial, por lo tanto la Ec. (127) se reduce a:

$$\frac{1}{6R^2\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} h^3 \right) = \frac{U}{R} \frac{dh}{d\theta} + \frac{h}{R} \frac{dU}{d\theta} + 2V \quad (128)$$

Si se reemplazan los valores de U y V de las Ecs. (125), y se tiene en cuenta que $e = c\eta$ y

$\frac{dh}{d\theta} = -c\eta \sin(\theta)$, el lado derecho de la Ec.(128) toma la forma:

$$\left(\omega + \frac{\dot{e} \sin(\theta)}{R} - \frac{c\eta\dot{\phi} \cos(\theta)}{R} \right) \frac{dh}{d\theta} + \frac{h}{R} (\dot{e} \cos(\theta) + c\eta\dot{\phi} \sin(\theta)) + 2 \left(\dot{e} \cos(\theta) - \dot{\phi} \frac{dh}{d\theta} \right) \quad (129)$$

Por otro lado, con el mismo criterio práctico por el cual se despreciaron los términos de los balances que dieron origen a la Ecuación de Reynolds, esto es, $c \ll R$ (y, por lo tanto, $c \frac{\eta}{R} \ll 1$), es posible despreciar los términos menores de la Ec. (129), quedando esta ecuación expresada como:

$$(\omega - 2\dot{\phi}) \frac{dh}{d\theta} + 2\dot{e} \cos(\theta). \quad (130)$$

donde, a su vez, $\dot{\phi} = \dot{\alpha} + \dot{\phi}$ y $\dot{e} = c\dot{\eta}$.

Reemplazando en la Ec. (128), se llega a:

$$\frac{1}{6R^2\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} h^3 \right) = (\omega - 2\dot{\alpha} - 2\dot{\phi}) \frac{dh}{d\theta} + 2c\dot{\eta} \cos(\theta), \quad (131)$$

e integrando respecto de θ , con $P=P_0$ en $\theta=0$, se obtiene el perfil de presión:

$$P - P_0 = 6\mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left\{ \frac{2 + \eta \cos(\theta)}{(1 + \eta \cos(\theta))^2} (\omega - 2\dot{\alpha} - 2\dot{\phi}) \frac{\eta}{2 + \eta^2} \sin(\theta) + \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{(1 + \eta \cos(\theta))^2} - \frac{1}{(1 + \eta^2)} \right) \frac{d\eta}{dt} \right\} \quad (132)$$

que, dividido por $P_c = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c} \right)^2$, donde $U = \omega R$, resulta en el perfil adimensional:

$$p = 6 \left\{ \frac{2 + \eta \cos(\theta)}{(1 + \eta \cos(\theta))^2} \left(1 - 2 \frac{\dot{\alpha}}{\omega} - 2 \frac{\dot{\phi}}{\omega} \right) \frac{\eta}{2 + \eta^2} \sin(\theta) + \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{(1 + \eta \cos(\theta))^2} - \frac{1}{(1 + \eta^2)} \right) \frac{\dot{\eta}}{\omega} \right\} \quad (133)$$

A partir de este perfil de presión se puede calcular la fuerza actuante en el eje que, para la condición de Sommerfeld, es:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\phi)}{12\pi^2 S} &= \frac{\eta}{(2+\eta^2)(1-\eta^2)^{1/2}} \frac{1}{\omega} (\omega - 2\dot{\alpha} - 2\dot{\phi}) \\ \frac{\cos(\phi)}{12\pi^2 S} &= \frac{\eta}{(1-\eta^2)^{3/2}} \frac{1}{\omega} \dot{\eta} \end{aligned}, \quad (134)$$

donde ya se ha utilizado la definición del número de Sommerfeld para expresar la carga. El número de Sommerfeld resulta entonces:

$$S = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{12\pi^2 \eta} \bigg/ \sqrt{\left[\frac{\omega - 2\dot{\alpha} - 2\dot{\phi}}{\omega(2+\eta^2)} \right]^2 + \left[\frac{\dot{\eta}}{\omega(1-\eta^2)} \right]^2} \quad (135)$$

Tanto la expresión del perfil de presión como la de S se reducen a las del ILJB estático, Ecs. (87) y (102), en el caso de $\dot{\eta}=0$ y $\dot{\phi}=\dot{\alpha}+\dot{\phi}=0$. A modo de ejemplo, en la Figura 3.9 se ilustran los resultados de p y S para el cojinete hidrodinámico infinitamente largo para algunos valores de $\dot{\phi}$ y $\dot{\eta}$, para una velocidad angular ω unitaria y carga en dirección constante ($\dot{\alpha}=0$). Como se puede observar las presiones tienden a disminuir con el aumento de velocidad angular de precesión y, generalmente, se produce un aumento de la misma con la existencia de $\dot{\eta}$. Como se discutirá en la Sección 6.3, esto se debe al fenómeno que se describirá como “squeeze”. En forma equivalente, la capacidad portante, disminuye según lo hacen las presiones y viceversa. Un análisis más riguroso de ciertas situaciones típicas se desarrollará posteriormente.

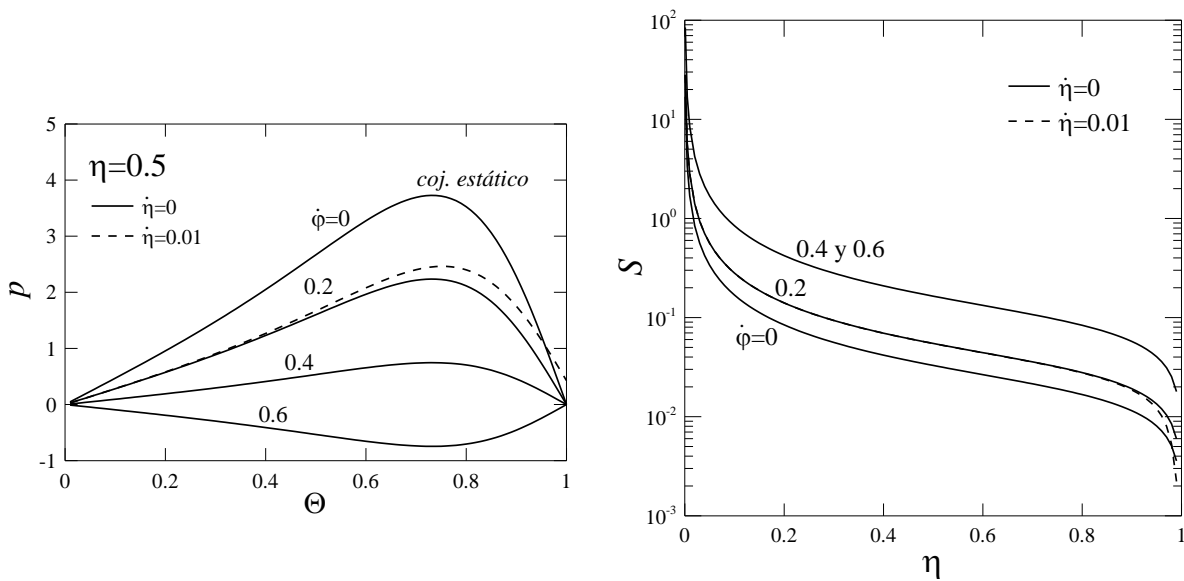


Figura 3.9: Perfil de presión (izq.) y número de Sommerfeld (der) para el ILJB en condiciones transitorias.

3.6.2 Cojinete infinitamente corto (ISJB)

En el caso del cojinete infinitamente corto se desprecia la variación de la presión respecto de θ , y la Ec. (127) se reduce a:

$$\frac{1}{6\mu} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial P}{\partial Z} h^3 \right) = \frac{U}{R} \frac{dh}{d\theta} + \frac{h}{R} \frac{dU}{d\theta} + 2V. \quad (136)$$

Procediendo en forma similar al análisis hecho en el ILJB, es decir, despreciando los términos que estén multiplicados por $\frac{c}{R}$ y considerando como CB que $(P - P_0)|_{Z=0} = (P - P_0)|_{Z=L} = 0$, se llega a la siguiente expresión de perfil de presión:

$$P - P_0 = 6\mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{Z}{R} \right) \left(\frac{L-Z}{R} \right) \frac{1}{(1 + \eta \cos(\theta))^3} \left[(\omega - 2\dot{\alpha} - 2\dot{\phi}) \frac{\eta}{2} \sin(\theta) + \dot{\eta} \cos(\theta) \right], \quad (137)$$

que, dividido por $P_c = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2$, resulta en el perfil adimensional:

$$p = \frac{3 \eta z (1-z)}{(1 + \eta \cos(\theta))^3} \left[\left(1 - \frac{2\dot{\alpha}}{\omega} - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right) \sin(\theta) + \frac{\dot{\eta}}{2\omega \eta} \cos(\theta) \right], \quad (138)$$

A partir del $p(\theta, Z)$ se calcula la fuerza actuante:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\phi)}{\pi^2 S} &= \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{\eta}{2(1-\eta^2)^{3/2}} \frac{1}{\omega} (\omega - 2\dot{\alpha} - 2\dot{\phi}) \\ \frac{\cos(\phi)}{\pi^2 S} &= \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{(1+2\eta^2)}{(1-\eta^2)^{5/2}} \frac{1}{\omega} \dot{\eta} \end{aligned} \quad (139)$$

De donde el número de Sommerfeld es:

$$S \left(\frac{L}{R} \right)^2 = \frac{2(1-\eta^2)^{3/2}}{\pi^2 \eta} \left/ \sqrt{\left(1 - \frac{2\dot{\alpha}}{\omega} - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right)^2 + \left[\frac{2\dot{\eta}(1+2\eta^2)}{\omega(1-\eta^2)\eta} \right]^2} \right. . \quad (140)$$

Observar que las Ecs. (137), (139) y (140) se reducen a las Ecs. (114), (118-119) y (120) del ISJB estático cuando $\dot{\eta} = 0$ y $\dot{\phi} = 0$. La Figura 3.10 ilustra los resultados de p y S para el cojinete hidrodinámico infinitamente corto para algunos valores de $\dot{\phi}$ y $\dot{\epsilon}$. Como se puede observar, se mantienen las tendencias descritas para el ILJB.

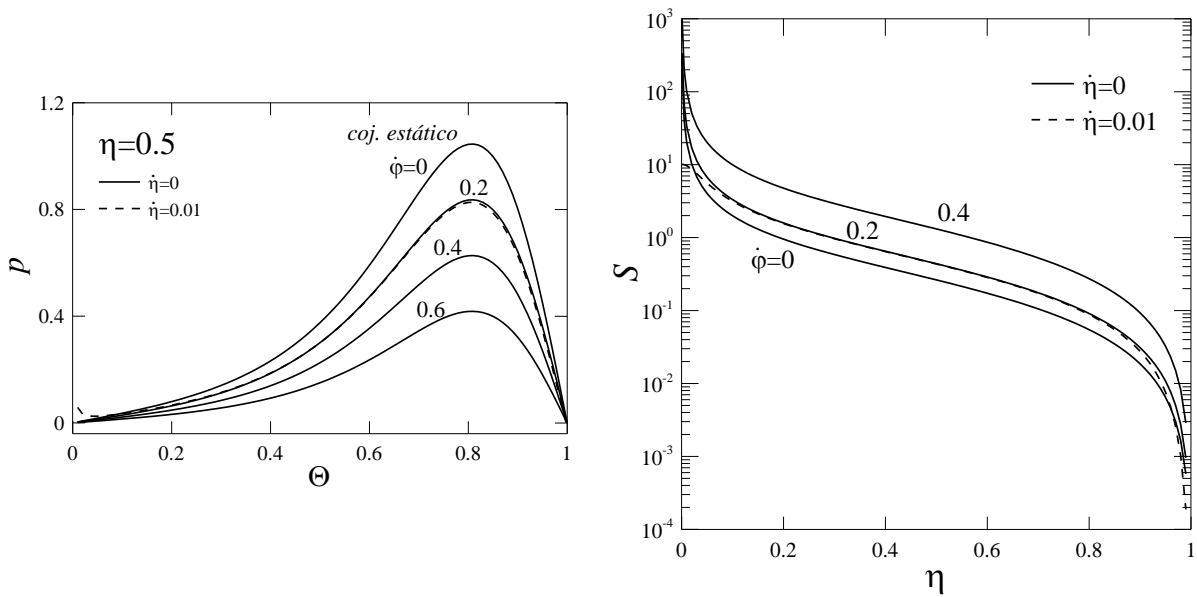


Figura 3.10: Perfil de presión (izq.) y número de Sommerfeld (der) en el ISJB en condiciones transitorias.

3.6.3 Análisis de la respuesta de los cojinetes ante cargas variables

Las Ecs. (134) y (139) relacionan la carga aplicada a los cojinetes de longitudes extremas con el movimiento del centro del eje. Puede apreciarse que la capacidad portante en ambos casos presenta una ley similar de variación con las velocidades. Ello implica que el análisis que sigue es cualitativamente aplicable a las dos geometrías.

En el caso de cojinetes en estado estacionario, la presencia de una carga de dirección y magnitud constantes genera una posición del rotor (dada por la excentricidad y ángulo de desplazamiento) que se mantiene fija en relación al cojinete. Por ejemplo, en el caso del ISJB, si se grafica la posición del centro del eje respecto del cojinete una vez calculado el ángulo ϕ y fijando en la dirección \underline{Y} la fuerza actuante, W , se obtiene la curva que se muestra en la Figura 3.11.

En el caso transitorio, la posición del rotor respecto del centro del cojinete depende de la carga aplicada y de la posición inicial del eje, y tendrá su polo en la posición correspondiente a la solución de estado estacionario para la carga aplicada. Físicamente, este comportamiento se corresponde con la oscilación libre de un sistema sin amortiguamiento, en el cual el eje, bajo el impacto de una carga aplicada repentinamente, sobrepasa su posición de equilibrio y luego es forzado a regresar al punto inicial por el exceso de fuerzas hidrodinámicas generadas ante una excentricidad demasiado alta para la carga aplicada. Así, aunque al eje se aplique una carga constante, continuará en órbita alrededor de su excentricidad teórica. Sin embargo, la situación descrita es hipotética ya que desprecia todo efecto disipativo. En la práctica, el

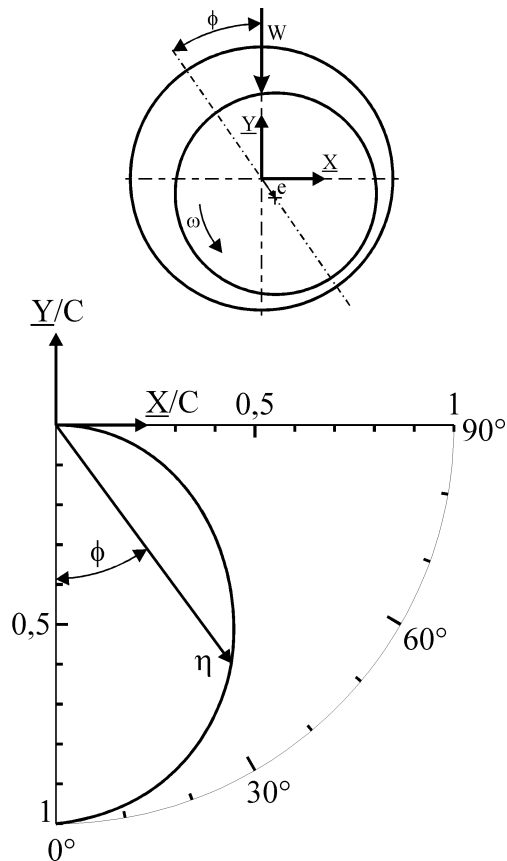


Figura 3.11: Posición que toma el centro del eje al variar la carga para el ISJB.

amortiguamiento llevará al eje a su posición de equilibrio. Cabe señalar que estas oscilaciones no amortiguadas juegan un papel crucial en la inestabilidad de los sistemas soportados por cojinetes hidrodinámicos y, aunque su tratamiento exceda los objetivos de la presente tesis, se ha decidido completar la información de este capítulo con algunos lineamientos relacionados.

Al momento de considerar cargas no constantes sobre un eje, pueden presentarse una gran variedad de configuraciones (Pinkus, 1969, Szeri, 2011). Sin embargo, hay dos casos particulares que son más relevantes (ambos con presencia de velocidad angular, ω , en el eje): carga rotante de magnitud constante, y carga de dirección constante con magnitud variable sinusoidalmente.

Para el primer caso se considera una carga de módulo, W , y velocidad de giro, $\dot{\alpha} = \omega_f$, constantes, que actúa sobre el rotor con una velocidad angular ω . Cabe esperar que, en este caso, tanto la velocidad relativa entre la carga y el espesor mínimo de película, $\dot{\phi}$, como la velocidad radial del centro del rotor, $\dot{\eta}$, sean nulas. Así, tomando como ejemplo las ecuaciones de las cargas en ILJB en funcionamiento transitorio, Ecs. (134), sería:

$$\frac{\sin(\phi)}{12\pi^2 S} = \frac{\eta}{(2 + \eta^2)(1 - \eta^2)^{1/2}} \left(1 - 2 \frac{\omega_f}{\omega} \right) \quad (141)$$

$$\frac{\cos(\phi)}{12\pi^2 S} = 0$$

De lo que resulta que $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$. Por otro lado, de acuerdo con la primera de las dos ecuaciones anteriores, si $\omega_f < \frac{1}{2}\omega$, el punto de mínimo espesor de película estará 90° adelantado a la línea de carga, como en el caso estático descrito, pero el cojinete tendrá menos capacidad portante (esto es, una excentricidad mayor para un dado valor de S). Similarmente, si $\omega_f > \frac{1}{2}\omega$, el punto de mínimo espesor de película estará 90° atrasado a la línea de carga. En el caso particular que $\omega_f = \frac{1}{2}\omega$, el cojinete no tendrá capacidad de carga. Esta particularidad se conoce como “oil whirl”, fenómeno que se manifiesta frecuentemente en máquinas rotantes. Si $\omega_f = \omega$, la capacidad portante del sistema se iguala a la que tendría en el caso de carga estática, y si $\omega_f > \omega$, la capacidad de carga se torna tanto más alta según sea el valor que alcance ω_f . En la Figura 3.12 se muestra el comportamiento descrito, tanto para el ILJB como para el ISJB, obtenidos empleando las Ecs. (135) y (140) con $\eta=0,5$.

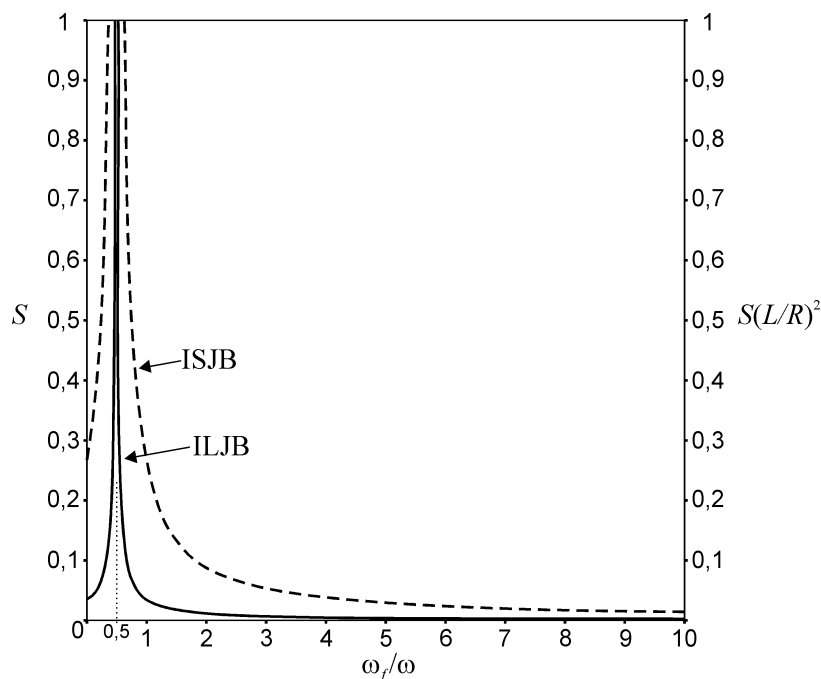


Figura 3.12: Comportamiento del ILJB y del ISJB bajo una carga rotante de módulo constante y frecuencia ω_f . $\eta=0,5$.

De existir $\dot{\eta}$, éste representa la capacidad de carga del cojinete debido al movimiento radial del mismo, denominado “squeeze film”, el cual tiende a aumentar su capacidad portante. Pero, el movimiento radial del eje en el cojinete viene acompañado de un movimiento tangencial, es decir, la trayectoria del centro del eje no es una línea radial sino que tiene una componente perpendicular. Dicho de otra manera, una velocidad radial viene acompañada de una tangencial, la cual puede hacer disminuir la velocidad relativa del eje con respecto del cojinete disminuyendo así su capacidad portante.

Para el segundo caso de interés mencionado, el de carga de dirección constante con magnitud variable, se considera una carga variable sinusoidalmente con una frecuencia ω_f , $F = F_0 \sin(\omega_f t)$, aplicada sobre un rotor que gira a una velocidad angular ω . El centro del rotor se moverá entonces sobre una trayectoria elíptica, en la misma dirección que su rotación, cuya descripción matemática surge de resolver las Ecs. (134) ó (139), según se considere un ILJB o un ISJB, para las variables $\eta(t)$ y $\phi(t)$. Dada la complejidad del proceso, sólo se comentarán cualitativamente los resultados. Para determinar la capacidad de carga, se emplea la máxima excentricidad de la órbita, y el valor que tome la excentricidad máxima dependerá, al igual que para el caso de carga rotante, de la relación entre la frecuencia de la variación de la carga y de giro del rotor. Si $\omega_f < \frac{1}{2}\omega$, la excentricidad máxima es mayor y la capacidad portante es respectivamente menor que para el caso estático. En esta situación, el eje menor de la órbita es paralelo a la línea de acción de la carga alternativa. Esto es equivalente a decir que la excentricidad mínima se encuentra a 90° de la carga aplicada. Si $\omega_f = \frac{1}{2}\omega$, los resultados muestran que la capacidad de carga es nula (este resultado es de interés dado que los motores de combustión interna de cuatro tiempos presentan una gran componente de carga a la mitad de la frecuencia de giro). Si $\omega_f = \omega$, que es el caso de mayor importancia práctica, la capacidad de carga aumenta por sobre la del caso estático. En esta situación, el eje mayor de la órbita es paralelo a la línea de acción de la carga alternativa. Si $\omega_f > \omega$, existe un incremento aún mayor en la capacidad portante.

Cabe destacar que las apreciaciones descritas sobre el desfase existente entre la línea de carga y la línea de centros, ϕ , presentan las mismas limitaciones que las expuestas para el caso de carga estática. El valor $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ se debe a que se ha considerado, por una cuestión de

simplicidad, que el fluido es capaz de tomar tensiones (presiones negativas) sin manifestar cambios ('solución 2π '). Al incorporar las limitaciones pertinentes este desfase decrece de $\frac{\pi}{2}$ a 0 según e aumenta de 0 a c .

3.7 COJINETE DE ANILLO FLOTANTE EN ESTADO ESTACIONARIO

Un tipo de cojinete que tiene mucho en común con el cojinete hidrodinámico convencional analizado hasta ahora es el cojinete de anillo flotante (CAF) (Mokhtar , 1981; San Andrés *et al.*, 2006; Tian *et al.*, 2013; Tamunodukobipi *et al.*, 2015), el cual se muestra en la Figura 3.13. Se lo usa, por ejemplo, en motores de combustión interna y en los ejes de los turbo-sobrealimentadores debido a su bajo costo. Al final de la Sección se comentarán las ventajas y desventajas de usar un tipo de cojinete u otro, que pueden llevar a su elección.

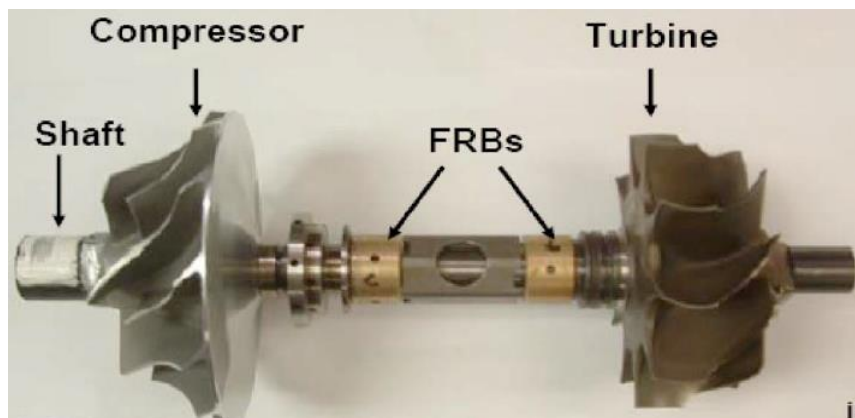


Figura 3.13: Foto del rotor de un turbo-sobrealimentador mostrando dos cojinetes de anillo flotante (FRB). Imagen extraída de San Andrés *et al.*, 2006.

El sistema se compone, básicamente, de un eje que gira a velocidad ω_E y un cojinete fijo, entre los que se interpone un anillo que gira a velocidad ω_A tal como se muestra en la Figura 3.14(a). Dado que los huelgos anillo-eje y anillo-cojinete son mucho menores que sus respectivos diámetros, las ecuaciones gobernantes en el fluido lubricante en cada uno de ellos pueden ser tratadas en coordenadas cartesianas como se muestra en la Figura 3.14(b), siendo $X=R\theta$, donde R es el radio del cojinete pero, en la representación cartesiana, corresponde a cualquiera de los radios. La Figura 3.14(b) también muestra las CB que tendrá la velocidad en dirección X sobre las paredes sólidas.

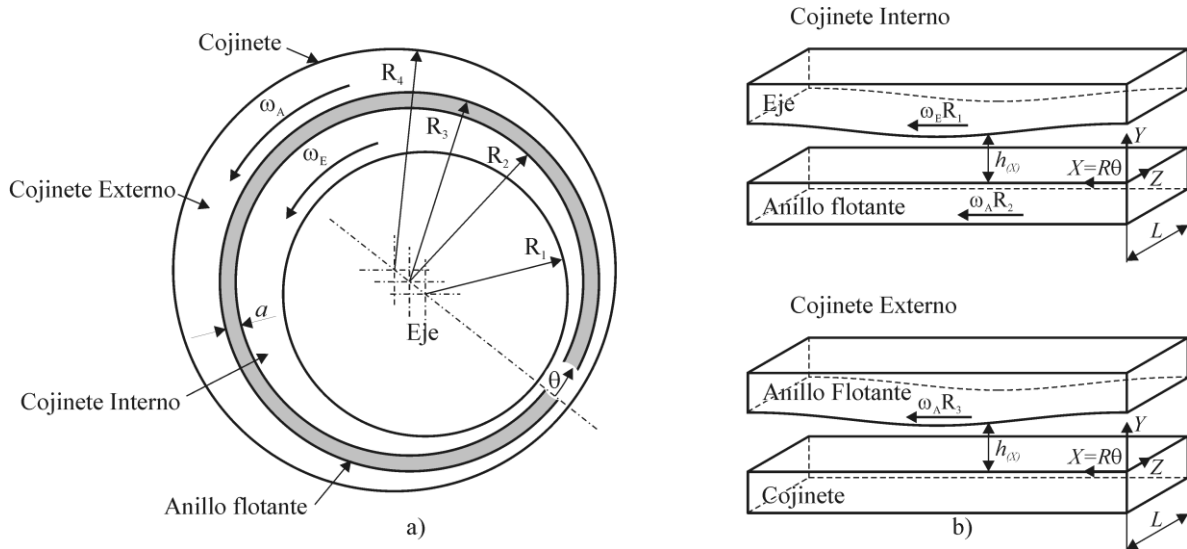


Figura 3.14: Geometría de un cojinete de anillo flotante (a) y de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b). Al desprejarse la curvatura, la coordenada X puede considerarse como $R\theta$.

Para simplificar el análisis, se analiza el caso en que el huelgo del cojinete externo es igual al del interno. Es decir:

$$c = R_2 - R_1 = R_4 - R_3, \quad (142)$$

con lo que:

$$R_2 = R_1 + c ; R_3 = R_2 + c = R_1 + c + a. \quad (143)$$

Se definen, además, las siguientes magnitudes:

$$\nu = \frac{a}{R_1} ; \kappa = \frac{\omega_A}{\omega_E} ; \delta = \frac{c}{R_1} \approx 0 ; U_1 = \omega_E R_1 ; U_2 = \omega_A R_2 ; U_3 = \omega_A R_3 , \quad (144)$$

lo que, combinado con la Ec. (143), lleva a:

$$\frac{R_2}{R_1} = 1 + \delta \approx 1 ; \frac{R_3}{R_1} = 1 + \delta + \nu \approx 1 + \nu ; \frac{U_2}{U_1} = \kappa ; \frac{U_3}{U_1} = \kappa(1 + \nu) \quad (145)$$

El espesor de la capa lubricante en cada zona del cojinete queda determinado por la misma relación que en el convencional (Ec.(76)), esto es, $\tilde{h}_j = 1 + \frac{e_j}{c} \cos(\pi\Theta) = 1 + \eta_j \cos(\pi\Theta)$, donde e_j es la excentricidad de cada cojinete: e_i la del interno y e_e la del externo. De igual forma η_i y η_e representan las correspondientes excentricidades relativas.

Los valores de las excentricidades η_i y η_e , y de la relación de velocidades κ se obtiene de plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en ambas caras del anillo. Por un lado, dado

que el cojinete interno y el externo deben soportar la misma carga, debe verificarse que la presión interna integrada en el área interior del anillo sea igual a la presión externa integrada en el área exterior del mismo. Esto es:

$$\left[F_X^2 + F_Y^2 \right]_{R_2} = \left[F_X^2 + F_Y^2 \right]_{R_3}, \quad (146)$$

lo que lleva a:

$$R_2^2 \left[\left(\int_0^1 p_i \sin(\pi \Theta) d\Theta \right)^2 + \left(\int_0^1 p_i \cos(\pi \Theta) d\Theta \right)^2 \right] = R_3^2 \left[\left(\int_0^1 p_e \sin(\pi \Theta) d\Theta \right)^2 + \left(\int_0^1 p_e \cos(\pi \Theta) d\Theta \right)^2 \right] \quad (147)$$

que equivale a:

$$\left(\int_0^1 p_i \sin(\pi \Theta) d\Theta \right)^2 + \left(\int_0^1 p_i \cos(\pi \Theta) d\Theta \right)^2 = (1+\nu)^2 \left[\left(\int_0^1 p_e \sin(\pi \Theta) d\Theta \right)^2 + \left(\int_0^1 p_e \cos(\pi \Theta) d\Theta \right)^2 \right] \quad (148)$$

donde se ha despreciado la zona de presiones negativas ('solución π ').

A su vez, la carga que soportan estos cojinetes es igual a la carga exterior, W , que recibe el eje, por lo que debe verificarse que:

$$(L\pi R_2 P_c)^2 \left[\left(\int_0^1 p_i \sin(\pi \Theta) d\Theta \right)^2 + \left(\int_0^1 p_i \cos(\pi \Theta) d\Theta \right)^2 \right] = F^2 \quad (149)$$

Por otra parte, las fuerzas de torque sobre el anillo deben estar equilibradas, es decir, las tensiones de corte del interior y el exterior integradas en sus respectivas áreas, deben ser iguales. Por ello, integrando sobre las respectivas áreas los términos dominantes del τ_{yx} , como corresponde al análisis que se realiza, se obtiene:

$$\int_0^2 \frac{\partial u_i}{\partial y} \Big|_{y=0} d\Theta = (1+\nu) \int_0^2 \frac{\partial u_e}{\partial y} \Big|_{y=\tilde{h}_e} d\Theta \quad (150)$$

El conjunto de las tres últimas ecuaciones permite encontrar los valores de η_i , η_e y κ una vez calculadas las expresiones de los perfiles de presión (Pinkus, 1961). Por otro lado, tanto la dinámica del cojinete interno como la del externo quedan descritas por las ecuaciones de conservación adimensionales simplificadas, Ecs. (54) a (56), con $p = 0$ en $\Theta = 0$ y $\Theta = 2$, y las CB de las componentes de la velocidad:

Cojinete Interno:

$$\begin{aligned}
 a) & \rightarrow u|_{y=0} = \kappa \\
 b) & \rightarrow u|_{y=\tilde{h}_i(\Theta)} = 1 \\
 c) & \rightarrow w|_{y=0} = 0 \\
 d) & \rightarrow w|_{y=\tilde{h}_i(\Theta)} = 0
 \end{aligned} \tag{151}$$

Cojinete Externo:

$$\begin{aligned}
 a) & \rightarrow u|_{y=0} = 0 \\
 b) & \rightarrow u|_{y=\tilde{h}_e(\Theta)} = \kappa(1 + \nu) \\
 c) & \rightarrow w|_{y=0} = 0 \\
 d) & \rightarrow w|_{y=\tilde{h}_e(\Theta)} = 0
 \end{aligned} \tag{152}$$

3.7.1 Cojinete infinitamente largo (ILJB)

En el caso de $\frac{L}{R} \rightarrow \infty$, y considerando $P_c = \frac{\mu U_1}{R_1} \left(\frac{R_1}{c}\right)^2$, la integración de los balances da como resultado:

Cojinete Interno:

$$p_i = 6 \frac{(\kappa + 1) [2 + \eta_1 \cos(\pi\Theta)] \eta_1 \sin(\pi\Theta)}{(\eta_1^2 + 2) [1 + \eta_1 \cos(\pi\Theta)]^2} \tag{153}$$

Cojinete Externo:

$$p_e = 6 \frac{(2 - \kappa - \kappa\nu) [2 + \eta_2 \cos(\pi\Theta)] \eta_2 \sin(\pi\Theta)}{(\eta_2^2 + 2) [1 + \eta_2 \cos(\pi\Theta)]^2} \tag{154}$$

3.7.2 Cojinete infinitamente corto (ISJB)

En este caso $\frac{L}{R} \rightarrow 0$, lo que lleva a definir la presión característica modificada

$P_c = \frac{\mu U_1}{R_1} \left(\frac{R_1}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{R_1}\right)^2$ como se viera en la Sección 5.2. La integración de los balances en este

caso da como resultado:

Cojinete Interno:

$$p_i = \frac{3\eta_i \sin(\pi\Theta)(\kappa+1)}{(1+\eta_i \cos(\pi\Theta))^3} z (1-z) \quad (155)$$

Cojinete Externo:

$$p_e = \frac{3\eta_e \sin(\pi\Theta)(2-\kappa+\kappa\nu)}{(1+\eta_e \cos(\pi\Theta))^3} z (1-z) \quad (156)$$

3.7.3 Comparación con cojinetes convencionales equivalentes

Independientemente de la longitud del CAF en estudio, las comparaciones con los convencionales equivalentes se efectúan con respecto a dos cojinetes: uno de huelgo c , y uno de huelgo $2c$, todos con igual radio de eje. Siendo así, es de esperar que:

- Al girar el anillo en el mismo sentido que el eje, el caudal de lubricante que circula por el cojinete interno es siempre mayor al que circularía por un cojinete equivalente de huelgo c con las dimensiones del cojinete interior. Por ello, el cojinete interno del anillo flotante trabajará siempre con menos excentricidad que su equivalente.

- La presencia del anillo asegura la existencia de dos superficies sólidas que limitan el flujo axial de lubricante, por lo que un cojinete corto de anillo flotante siempre deberá trabajar con menor excentricidad que uno equivalente de huelgo $2c$.

Partiendo de la base de que para un cojinete, un mayor número de Sommerfeld, implica menor excentricidad (y desde el punto de vista estático, equivale a mejor desempeño), resulta útil evaluar el valor de este parámetro para cada caso. Así, si se toma como base para el cálculo de S el cojinete equivalente de huelgo c , se tiene:

$$S_{eq_c} = 2R_1L \frac{\mu N_E}{F} \left(\frac{R_1}{c} \right)^2 \quad (157)$$

Y como la plataforma de equivalencia es la igualdad de la carga, se tendrá entonces para el cojinete externo del anillo flotante, y de acuerdo con las definiciones en Ec. (145):

$$\frac{S_e}{S_{eq_c}} = \frac{N_A}{N_E} \left(\frac{R_3}{R_1} \right)^3 = \kappa(1+\nu)^3, \quad (158)$$

donde κ y ν son menores que uno. Y para el cojinete equivalente de huelgo $2c$ sería:

$$\frac{S_{eq_{2c}}}{S_{eq_c}} = \frac{1}{4}. \quad (159)$$

Esto muestra que tanto el cojinete exterior del anillo como el equivalente de huelgo $2c$, tienen un número de Sommerfeld menor que el del equivalente de huelgo c . Una evaluación directa sobre la conveniencia entre el uso de un CAF y el del convencional de huelgo $2c$, surge de analizar el resultado de:

$$\frac{S_e}{S_{eq_{2c}}} = 4\kappa(1+\nu)^3 = \lambda \quad (160)$$

Se ve que, si $\lambda > 1$, el cojinete con anillo es más favorable, mientras que si $\lambda < 1$, lo es el convencional de huelgo $2c$. Dado que se espera que la velocidad del anillo sea aproximadamente la mitad de la del eje, podría decirse que el cojinete exterior del anillo trabajaría con un número de Sommerfeld mayor al del cojinete equivalente de huelgo $2c$, y se daría que $\lambda > 1$, sin embargo hay que evaluar los valores de κ y ν para cada caso.

En la Figura 3.15, se presentan las curvas de diferentes parámetros comparando entre un CAF (con $\nu=1/50$) y uno equivalente de huelgo $2c$ (empleado para determinar λ), en función de la carga adimensional $\Gamma = \frac{F}{P_c \pi R_1 L}$, que es proporcional a $1/S$.

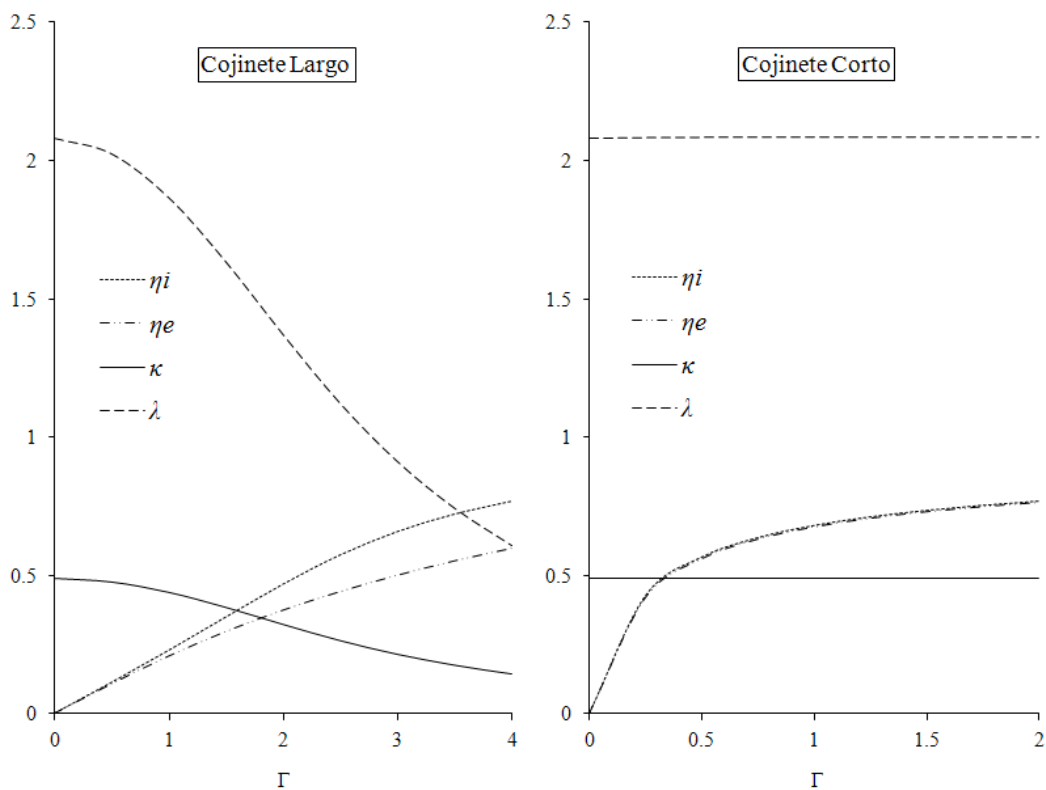


Figura 3.15: Desempeño de cojinetes de anillo flotante infinitamente largo (izq.) e infinitamente corto (der.) en función de la carga adimensional.

Puede verse que para el caso del cojinete corto, el valor de $\kappa (= U_3/U_1)$ permanece prácticamente constante, y por lo tanto, también lo hace λ . Esto se debe a que en las hipótesis de solución se asume que el perfil de velocidad tangencial es lineal en el espesor. No sucede lo mismo para el caso del cojinete infinitamente largo en donde el valor de λ depende del estado de carga, pasando de valores mayores a uno a valores menores a uno.

Para el caso particular de los turbo-sobrealimentadores, donde suelen usarse los CAF, la carga adimensional es baja, por lo que resulta conveniente el uso de este tipo de cojinetes, independientemente de si se trate de un ILJB o un ISJB.

3.8 COJINETE DE ZAPATAS PIVOTANTES EN ESTADO ESTACIONARIO

Como se comentara en los Capítulos 1 y 2, existen cojinetes de muchos diseños, los cuales han ido surgiendo para aplicaciones específicas buscando diversos beneficios. Por ejemplo, los cojinetes de zapata pivotante, e incluso los de hoja (ver Sección 3 del Capítulo 1), han surgido para mejorar la estabilidad de los cojinetes convencionales en ciertas aplicaciones.

La forma más simple de cojinetes de zapata pivotante (“pivoted pad” o “tilting pad”) es la que permite sólo movimiento recto y consiste en una superficie plana que se desliza sobre otra pivotante (zapata) como se esquematiza en la Figura 3.16 (Pinkus, 1961; Hamrock *et al.*, 2004). La inclinación de la zapata queda determinada por las condiciones de operación (carga W , velocidad U , fluido, etc.) y ubicación del punto de pivoteo, ya que esas condiciones determinan la distribución de presión y la consecuente ubicación del centro de presión. La capacidad de variar el ángulo de inclinación, δ , le otorga al cojinetes de zapata pivotante lineal mayor estabilidad que la que tiene el sistema equivalente con paredes fijas. La ubicación del punto de pivoteo se determina a partir del equilibrio de los momentos actuantes sobre la zapata, en lo que intervienen la fuerza resultante de la distribución de presión en el fluido y la fuerza de reacción normal a la zapata, además de la de fricción que se suele despreciar.

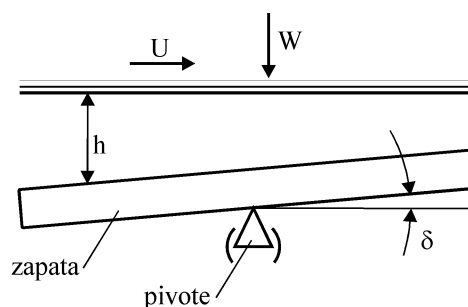


Figura 3.16: Geometría básica del cojinete de zapata pivotante.

En la práctica, el concepto antes descrito de zapata pivotante con flujo lineal se extiende a una o más zapatas distribuidas sobre un disco o sobre una pared cilíndrica. Estos diseños se ejemplifican en la Figura 3.17 y se identifican como “cojinete plano de zapatas pivotantes” (“pivoted-pad thrust bearing”) (Raimondi y Boyd, 1955; Hamrock *et al.*, 2004; Wasilczuk *et al.*, 2015) y como “cojinete radial de zapatas pivotantes” (TPJB por su nombre en inglés:

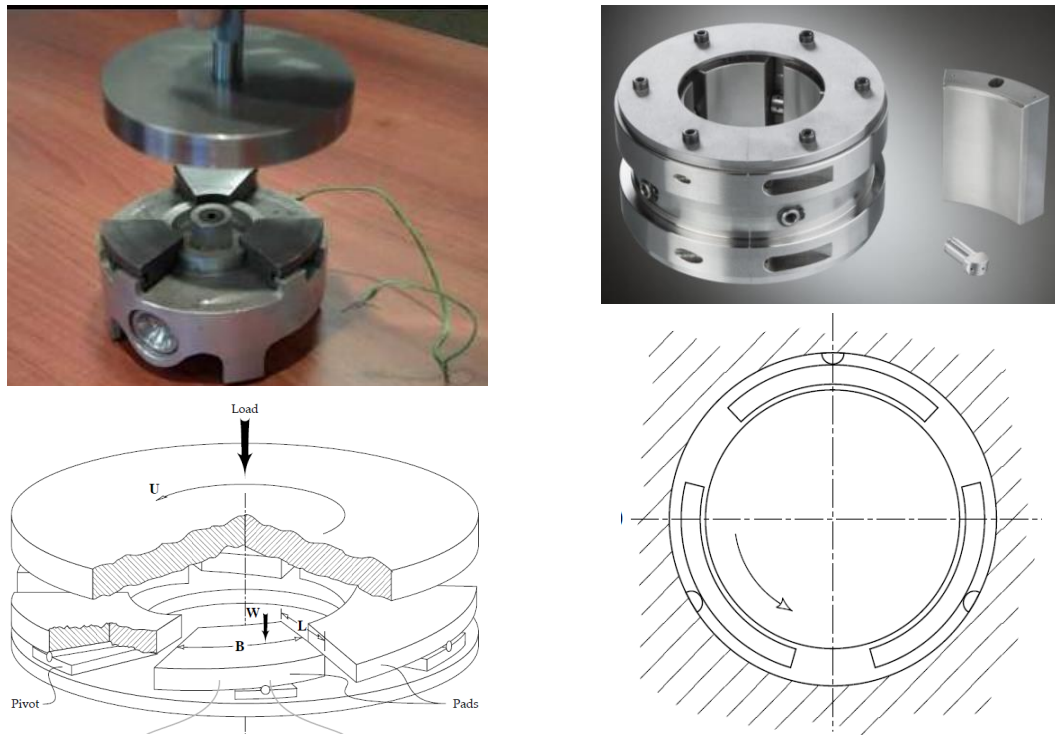


Figura 3.17: Imágenes y esquemas representando el cojinete plano de zapata pivotante (izquierda) y el cojinete radial de zapatas pivotantes (derecha).

“tilting-pad journal bearing”) (Boyd y Raimondi, 1962; Hamrock *et al.*, 2004; Cerda Varela *et al.*, 2013). En ambos casos, cada sector puede oscilar sobre un punto fijo ante algún cambio en las condiciones de operación.

El TPJB es una adaptación del cojinete hidrodinámico radial, con el muñón soportado por un cojinete parcial articulado, o una serie de ellos, por lo que resulta de interés en esta tesis. El número de zapatas que soporta el rotor, así como sus características geométricas, varía en función del desempeño deseado. El mejor diseño es el que se basa en zapatas libres de pivotar tanto axial como tangencialmente. Estos dos grados de libertad permiten el ajuste total de cualquier error de alineación entre muñón y cojinete. Normalmente las zapatas son todas iguales y se distribuyen uniformemente a lo largo de la circunferencia. La Figura 3.18 esquematiza dos modelos de TPJBs con múltiples zapatas pivotantes y presenta ejemplos de ambos. En uno, los pivotes son rótulas esféricas rígidas y en el otro, vástagos flexibles.

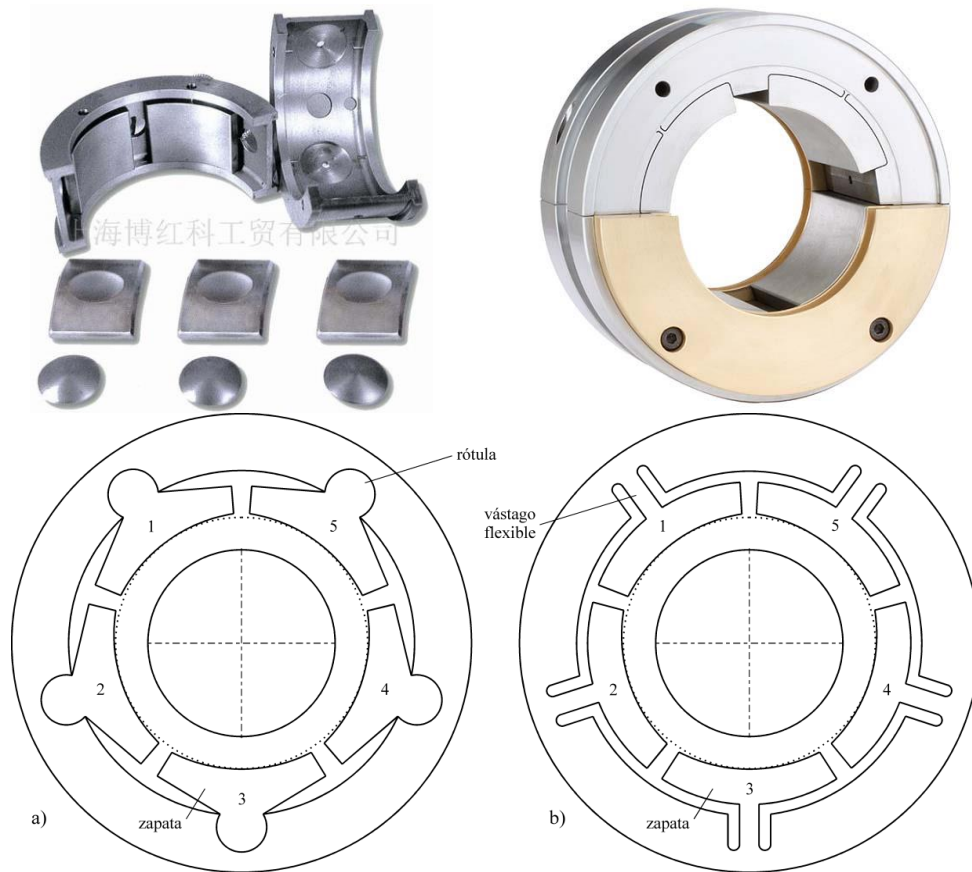


Figura 3.18: Cojinetes de zapatas pivotante con pivote sobre rótulas (a) y con pivote flexible (b).

Los TPJBs también se pueden clasificar según la posición de las zapatas respecto de la carga predominante. En este sentido, las configuraciones más comunes son las denominadas “Load On Pad” (LOP), donde el rotor descarga sobre una única zapata (ver Figura 3.19(a)), y “Load Between Pads” (LBP), donde el rotor reparte la carga en dos zapatas (Figura 3.19(b)).

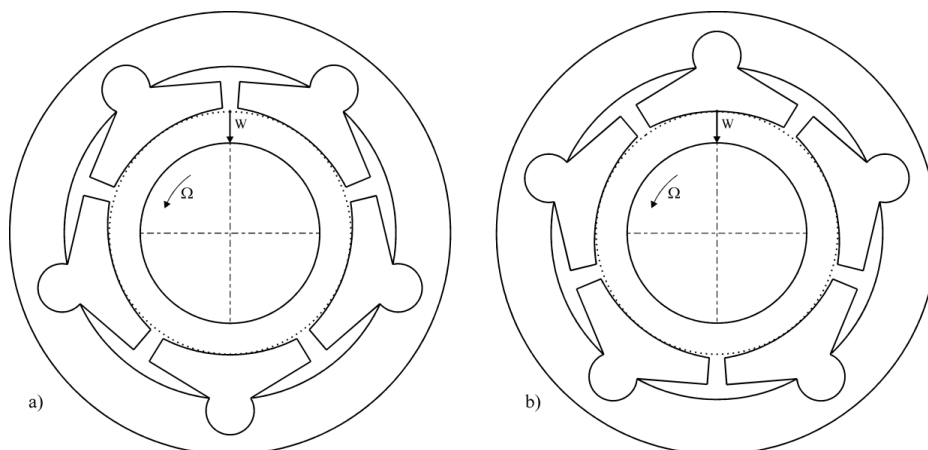


Figura 3.19: Cojinetes de zapatas pivotantes con configuración “Load On Pad” (a) y “Load Between Pads” (b).

La Figura 3.20 muestra los principales parámetros de diseño generalmente asociados a este tipo de cojinetes. A partir de ellos se definen dos características distintivas de cada zapata, la “precarga”, r_p , y el “offset”, ambos entre 0 y 1.

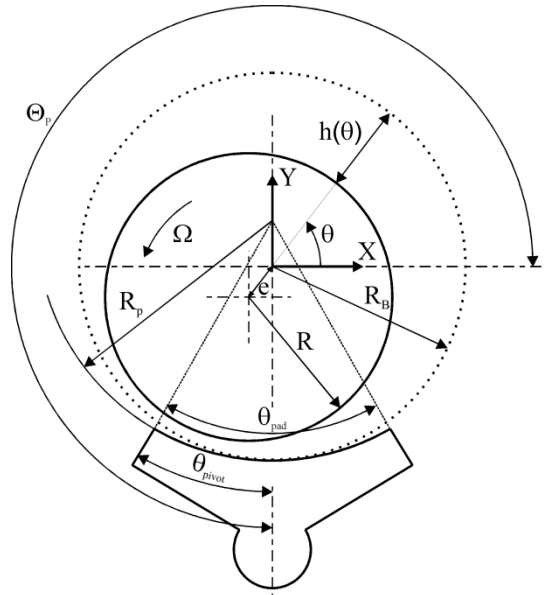


Figura 3.20: Esquema de un TPJB mostrando los principales parámetros.

La precarga se obtiene ubicando la zapata de manera de generar un espesor inicial no uniforme de lubricante. Ella se calcula como

$$r_p = 1 - \frac{C_b}{C_p}, \quad \text{con } C_b = c = R_b - R \quad \text{y} \quad C_p = R_p - R, \quad (161)$$

donde, C_b (ó simplemente c , siguiendo la nomenclatura del cojinete tradicional) es la diferencia entre el radio de cojinete imaginario determinado por los puntos de pivoteo de las zapatas (R_b) y el radio del muñón (R), C_p es la diferencia entre el radio de curvatura de la superficie de la zapata (R_p) y el radio del muñón. Por otro lado, el offset de una zapata se calcula como:

$$\text{offset} = 1 - \frac{\theta_{pivot}}{\theta_{pad}}, \quad (162)$$

donde θ_{pad} y θ_{pivot} son los ángulos que definen la extensión angular de la zapata y el ángulo de ubicación del pivote medido desde el borde de la zapata.

La capacidad portante del TPJB no es sensible a la ubicación del pivote cuando se usan aceites lubricantes, por lo que en estos casos el pivote se ubica en el centro de la zapata (offset = 0,5, $\theta_{pivot} = \theta_{pad}/2$), permitiendo rotación en ambas direcciones. Por otro lado, cuando se usan fluidos de baja viscosidad, como agua o gases, el pivote se coloca hacia el borde final de

la zapata (offset $< 0,5$) de manera de mejorar la capacidad portante (Boyd y Raimondi, 1962).

Cada zapata rota y se alinea en función del perfil de presiones que se genere, lo cual implica que el espesor de la película fluida para cada zapata es diferente, así como su dependencia con θ . La siguiente ecuación muestra la expresión para estimar $h^k(\theta)$, el perfil del espesor de la película de fluido para una zapata k .

$$h^k(\theta) = C_p + e_x \cos(\theta) + e_y \sin(\theta) - r_p \cos(\theta - \Theta_p^k) - R_s \delta^k \sin(\theta - \Theta_p^k). \quad (163)$$

Como se observa, el perfil depende de la posición del rotor relativa al centro del cojinete (posición horizontal, e_y , posición vertical, e_x) y del ángulo de inclinación de la zapata, δ , además de la posición angular del pivote de la zapata, Θ_p^k , y otras variables geométricas (Gómez *et al.*, 2008, 2013).

Como ya se comentara, los TPJBs se utilizan para mejorar las características dinámicas de los sistemas rotantes. Ellos eliminan los problemas de inestabilidad debido a que no existen los coeficientes de elasticidad cruzada que se encuentran presentes en otras geometrías (Childs, 1993). Además, cada zapata puede girar respecto de su pivote, y dado que éste no puede absorber momentos, la resultante de la acción de la presión en el área de la zapata (fuerza portante) debe pasar por el centro de rotación. Esto produce que el desplazamiento del rotor se produzca en una dirección colineal a la de la carga actuante sobre el mismo. Así, por ejemplo, una carga vertical produce únicamente un desplazamiento en esa misma dirección (ver Figura 3.21), eliminándose así el comportamiento cruzado presente en los cojinetes fijos.

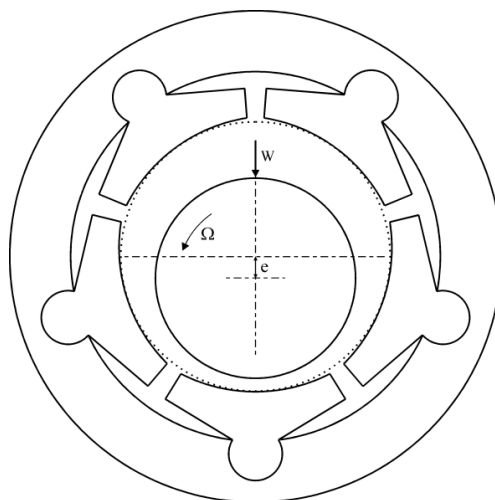


Figura 3.21: Desplazamiento del rotor ante una carga vertical.

A pesar de su alto costo, los TPJBs presentan la ventaja de tener excelentes propiedades dinámicas. El hecho de que este tipo de cojinetes no provoquen inestabilidades en el rotor hace

que sean muy utilizados en ejes flexibles de alta velocidad, los cuales están sujetos a una gran variedad de desequilibrios, independientemente del apoyo del que dispongan. Bajo estas circunstancias los TPJBs proveen la mejor disipación ante factores desestabilizadores externos y han permitido duplicar las velocidades de giro de las grandes turbomáquinas (Nicholas y Kirk, 1979; San Andrés, 1996; Sim y Kim, 2007; Carter y Childs, 2008; Cerda Varela *et al.*, 2013). Se usan, por ejemplo, en aplicaciones críticas de grandes máquinas que operan de continuo con bajo margen de falla (como en hélices de barcos, donde las importantes deformaciones elásticas que sufre el barco se trasladan en desalineaciones entre los cojinetes unidos al barco y los ejes de las hélices), y en máquinas que manejan muy altas velocidades con baja carga (como en compresores centrífugos de alta velocidad) por su muy buena estabilidad.

Dada la importancia de este tipo de cojinetes, y la posibilidad que se dio de realizar un trabajo experimental con ellos durante el desarrollo de esta tesis, se ha incluido aquí una presentación básica como precedente del trabajo que se presentará en el Capítulo 6.

REFERENCIAS

- Ausas, R., Ragot, P., Bayada, G., Buscaglia, G., Ciuperca, I. y Jai, M., Avances en la Simulación Numérica de Lubricación Hidrodinámica y el Diseño de Superficies Óptimas, *Mecánica Comput.*, Vol. XXVI, pp. 1921-1942, 2007.
- Ausas, R., Jai, M. y Buscaglia, G., A Mass-Conserving Algorithm for Dynamical Lubrication Problems with Cavitation, *J. Tribol.*, Vol. 131(3), 031702, 2009.
- Bird, R.B., Stewart, W.E. y Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, 2da. Ed., J. Wiley and Sons, 2002.
- Boyd, J. y Raimondi, A.A., Clearance Considerations in Pivoted Pad Journal Bearings, *ASLE Trans.*, Vol. 5, pp. 418-426, 1962.
- Carter, C.R. y Childs, D.W., Measurements Versus Predictions for the Rotordynamic Characteristics of a Five-Pad Rocker-Pivot Tilting-Pad Bearing in Load-Between-Pad Configuration, *J. Eng. Gas Turbines Power*, Vol. 131, pp. 1-9, 2008.
- Cerda Varela, A., Bjerregaard Nielsen, B. y Ferreira Santos, I., Steady State Characteristics of a Tilting Pad Journal Bearing with Controllable Lubrication: Comparison Between Theoretical and Experimental Results, *Tribol. Int.*, Vol. 58, pp. 85-97, 2013.
- Childs, D., *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis*, Wiley-Interscience, 1993.
- Elrod, H.G. y Brewe, D.E., Thermohydrodynamic Analysis for Laminar Lubricating Films, *Tribology Series*, Vol., pp. 443-450, 1987.
- Girón, P. y Cortínez, V., Una Generalización de la Ecuación de Reynolds Para el Análisis de Problemas de Lubricación en Cojinetes, *Mecánica Comput.*, Vol. XXII, pp. 1399-1410, 2003.
- Gómez, J.L., Torres, J.E., Ruiz, R.O., y Díaz, S.E., Estimación de Coeficientes Dinámicos en Cojinetes de Zapatas Pivotantes, *Mecánica Comput.*, Vol. XXVII, pp. 3447-3456, 2008.
- Gómez, J.L., Pineda, S. y Díaz, S.E., On the Effect of Pad Clearance and Preload Manufacturing Tolerances on Tilting Pad Bearings Rotordynamic Coefficients, *Proceeding de ASME Turbo Expo 2013: Turbine Technical Conference and Exposition*, pp. 1-10, 2013.

- Hamrock, B.J. , Schmid, S.R. y Jacobson, B.O., *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, 2da. Ed., Marcel Dekker, 2004.
- Hunsaker, J.C. y Rightmire, B.G., *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1947.
- Mokhtar, M.O.A., Floating Ring Journal Bearings: Theory, Design and Optimization, *Tribol. Int.*, Vol. 14, pp. 113-119, 1981.
- Mori, H., Yabe, H. y Fujita, Y., On the Separation Boundary Condition for Fluid Lubrication Theories of Journal Bearings. *ASLE Trans.*, Vol. 11, pp. 196-203, 1968.
- Nicholas, J.C. y Kirk, R.G., Selection and Design of Tilting Pad and Fixed Lobe Journal Bearings for Optimum Turborotor Dynamics, Proceeding de *Eight Turbomachinery Symposium*, pp. 43-57, 1979.
- Pinkus, O., *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw-Hill Book Co., 1961.
- Raimondi, A.A. y Boyd, J., Applying Bearing Theory to the Analysis and Design of Pad-Type Bearings, *Trans ASME*, Vol. 77, pp. 287-309, 1955.
- Reynolds, O., On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments Including an Experimental Determination of Olive Oil, *Proc. Royal Soc. London*, Vol. 40, pp. 191-203, 1886.
- San Andrés, L., Turbulent Flow, Flexure-Pivot Hybrid Bearings for Cryogenic Applications, *J. Tribol.*, Vol. 118, pp. 190-200, 1996.
- San Andres, L., Rivadeneira, J.C., Gjika, K., Groves, C. y LaRue, G., Rotordynamics of Small Turbochargers Supported on Floating Ring Bearings. Highlights in Bearing Analysis and Experimental Validation, *J. Tribol*, Vol. 129, pp. 391-397, 2006.
- Savage, M.D., Cavitation in Lubrication. Part 1. On Boundary Conditions and Cavity-fluid Interfaces, *J. Fluid Mech.*, Vol. 80, pp. 743-755, 1977.
- Sim, K. y Kim, D., Design of Flexure Pivot Tilting Pads Gas Bearings for High-Speed Oil-Free Microturbomachinery, *J. Tribol.*, Vol. 129, pp. 112-119, 2007.
- Szeri, A.Z., *Fluid Film Lubrication*, 2da Ed., Cambridge Univ. Press, 2011
- Swift, H.W., The Stability of Lubricating Films in Journal Bearings, En *Minutes of the Proceedings*. Inst. Civil Eng., Thomas Telford, Vol. 233, pp. 267-88 y 289-322, 1932.
- Swift, H.W., Fluctuating Loads in Sleeve Bearings, *J. Inst. Civil Eng.*, Vol. 5, pp. 151-195, 1937.
- Tamunodukobipi, D., Kim, C.H., Lee, Y.B., Dynamic Performance Characteristics of Floating-Ring Bearings With Varied Oil-Injection Swirl-Control Angles, *J. Dynam. Syst., Measur. Contr.*, Vol. 137, pp. 1-11, 2015
- Tian, L., Wang, W.J. y Peng, Z.J., Nonlinear Effects of Unbalance in the Rotor-Floating Ring Bearing System of Turbochargers, *Mech. Syst. Signal Processing*, Vol. 34, pp. 298-320, 2013.
- Wasilczuk, M., Wodtke, M. y Braun, W., Centrally Pivoted Tilting Pad Thrust Bearing with Carbon-Based Coated Collar. Experimental Results of Low- and Medium-Speed Operation, *Tribol. Trans.*, Vol. 58, pp. 882-893, 2015.

CAPÍTULO 4

SOLUCIONES ANALÍTICAS APROXIMADAS PARA COJINETES CORTOS

Habiendo encontrado las expresiones de los balances de conservación que describen el flujo incompresible y laminar de un fluido Newtoniano en el cojinete hidrodinámico radial cilíndrico, y la Ecuación de Reynolds que resulta de la combinación de aquellos para el caso isotérmico, resta encontrar su solución. Como se viera en el Capítulo anterior, la Ecuación de Reynolds tiene solución analítica en los casos límite de cojinetes muy cortos (ISJB) o muy largos (ILJB) pero no para el caso general de los cojinetes de longitud finita. Estas son las soluciones más ampliamente utilizadas, no sólo por el hecho de ser analíticas sino porque indican las tendencias y muchas veces fijan los límites de operación de un cojinete hidrodinámico.

La creciente demanda de máquinas más potentes, eficientes, veloces y pequeñas ha elevado los estándares de diseño y fabricación. El impacto de tales exigencias sobre los cojinetes hidrodinámicos ha ido modificando no sólo los materiales de fabricación de las superficies y la calidad y composición de los lubricantes, sino también su tamaño y geometría. En la actualidad, el valor de la relación de aspecto (D/L) para un cojinete estándar suele ubicarse entre $\frac{1}{2}$ y 2, y la tendencia apunta hacia la fabricación de cojinetes cada vez más cortos.

Como es de esperar, son varios los investigadores que han intentado resolver la Ecuación de Reynolds para cojinetes de longitud finita usando diferentes aproximaciones y realizando diferentes suposiciones o simplificaciones. En este Capítulo se resumen algunos de los métodos y soluciones analíticas encontrados en la bibliografía y se propone un nuevo método basado en teoría de perturbación. También se presentan dos variantes para el tratamiento del balance de energía a fin de considerar la influencia del cambio de temperatura en el desarrollo

de la película fluida. En todo el Capítulo se considera sólo situaciones de estado estacionario.

4.1 SOLUCIONES ANALITICAS APROXIMADAS DE LA ECUACION DE REYNOLDS

La ecuación de Reynolds, Ec. (73) del Capítulo 3, para el caso de fluido Newtoniano incompresible en régimen estacionario y temperatura constante es:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12\pi^2} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial\Theta} \tilde{h}^3 \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (1)$$

con \tilde{h} el espesor relativo de la capa fluida, $\tilde{h} = \frac{h}{c} = 1 + \eta \cos(\pi\Theta)$, η la excentricidad relativa,

$\eta = \frac{e}{c}$, Θ la variable angular adimensional, $\Theta = \frac{\theta}{\pi} = \frac{X}{\pi R} = \frac{x}{\pi}$, y z la dirección axial, $z = \frac{Z}{L}$.

Las variables geométricas que aparecen en esta ecuación son las definidas en la Figura 4.1 donde la única diferencia respecto de las de la Figura 3.1 es que los ejes se han ubicado, por conveniencia, centrados en el largo del cojinete. Es decir, Z se extiende ahora desde $-L/2$ hasta $L/2$.

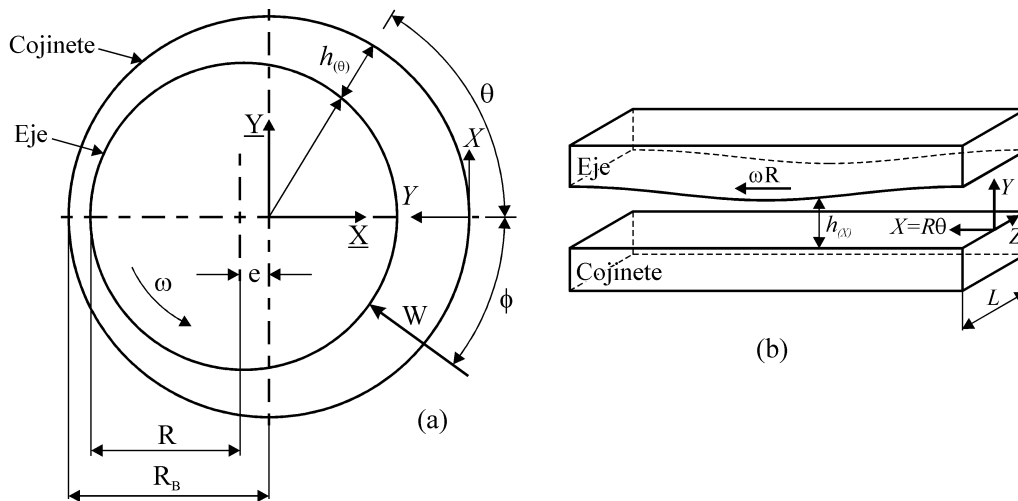


Figura 4.1: Geometría de un cojinete hidrodinámico y nomenclatura asociada (a), y esquema de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b).

La Ec. (1) es una ecuación diferencial no-homogénea a derivadas parciales que es lineal en la variable buscada, la presión. Su solución ha sido ampliamente buscada y estudiada pero, sin embargo, todavía no ha podido resolverse de manera analítica, ni siquiera bajo las restricciones de flujo isotérmico y fluido Newtoniano. Los intentos de resolverla han llevado a que existan muy diversas soluciones aproximadas, basadas incluso en analogías eléctricas,

métodos de relajación, y métodos gráficos o numéricos (Pinkus, 1961; Hamrock *et al.*, 2004; Szeri, 2011). Asimismo, se cuenta con gran número de formulaciones de soluciones analíticas que exploran la naturaleza de la Ecuación de Reynolds y los diversos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales que pueden aplicarse a ella. Cabe señalar que la mayoría de estos intentos contemplan las soluciones de ISJB o ILJB como límite.

Una de las propuestas más conocidas por su extrema sencillez es la que combina las soluciones del ISJB y el ILJB como si cada campo de presión fuese un elemento elástico en serie (Reason y Narang, 1982). Es decir, se propone:

$$\frac{1}{p(\theta, z)} = \frac{1}{P_{ISJB}} + \frac{1}{P_{ILJB}} . \quad (2)$$

El fundamento de esta metodología se basa en la observación de los perfiles de presión para cada caso, ya que, a medida que cada una de las soluciones límite se aproxima a la solución numérica de la Ecuación de Reynolds, la otra tiende a infinito. Esta simple herramienta heurística predice comportamientos sorprendentemente buenos en un rango amplio de relaciones de aspecto y excentricidades, y resulta práctica para cálculos a nivel industrial de parámetros de diseño relacionados con el funcionamiento en estado estacionario de cojinetes. En base a esta idea se han propuesto correcciones, como la de Hirani y colaboradores (1997) que formulan:

$$\frac{1}{p(\theta, z)} = \frac{f(\eta, l/D)}{P_{ISJB}} + \frac{g(\eta, l/D)}{P_{ILJB}} , \quad (3)$$

donde f y g son funciones que ponderan el peso de cada solución límite en función de los valores de la relación de aspecto y la excentricidad. De esta manera, se pretende construir tablas más exactas de predicciones que ayuden en el diseño y no involucren cálculos matemáticos o numéricos engorrosos.

Un enfoque distinto, pero que comparte de alguna manera el concepto, es el que calcula el vector movilidad (o la correspondiente impedancia) para cojinetes de longitud finita, como la suma ponderada (en forma vectorial) de las movilidades para las soluciones límite (Childs *et al.*, 1977; Moes y Bosma, 1981). Esta técnica empírica también permite la obtención de resultados analíticos razonables y rápidos.

Existen otras propuestas empíricas que surgen del ajuste de datos experimentales o numéricos, como por ejemplo, la de Bastani y De Queiroz (2010). Estos autores proponen el uso de funciones correctivas respecto de la capacidad portante del ILJB o el ISJB, para describir la del cojinete hidrodinámico convencional. Los factores de corrección son

calculados con expresiones polinomiales que obtienen por ajuste del cociente de valores numéricos de la fuerza respecto de las expresiones en el ILJB o el ISJB.

En cuanto a soluciones analíticas matemáticamente justificadas, una propuesta que se ha usado con diversas variantes según el tipo de flujo de lubricación, es la que asume la existencia de una solución particular y una solución homogénea de la Ecuación de Reynolds,

$$p(\theta, z) = p_H(\theta, z) + p_P(\theta, z), \quad (4)$$

donde p_H satisface la ecuación homogénea (que contempla sólo los términos que contienen la presión) y p_P es una solución particular, como puede ser la del ILJB (Pinkus, 1961; Sfyris y Chasalevris, 2012; Chasalevris, 2015). En este caso, la solución homogénea puede pensarse como un 'factor de corrección' del caso particular. Además, este tratamiento permite aplicar el método de "separación de variables", $p_H(\theta, z) = \zeta(z) \xi(\theta)$ (Szeri, 2011; Chasalevris, 2015). Este es un método que se usa frecuentemente en mecánica de fluidos y transferencia de calor y masa para resolver situaciones de interés práctico (Bird *et al.*, 2002). Al aplicarlo, la ecuación diferencial a derivadas parciales resultante da lugar a dos ecuaciones diferenciales ordinarias (una para cada función) que, conjuntamente con las CBs, pueden resolverse usando la teoría de "Sturm-Liouville" (Bender y Orszag, 1978; Bird *et al.*, 2002; Chasalevris, 2015).

La desventaja de este método, que, por otra parte, es la desventaja de la mayoría de las soluciones aproximadas, es que el resultado queda expresado en forma de una serie infinita de productos de funciones, lo que dificulta su aplicación directa. Una alternativa a la serie es el tratamiento de la solución homogénea por métodos variacionales (Zhang *et al.*, 2014) o directamente el planteo de soluciones híbridas numérico-analíticas que se obtienen combinando métodos variacionales e integrales (Santos *et al.*, 2012).

Las aproximaciones más frecuentemente empleadas para resolver la ecuación de Reynolds son, sin embargo, las que contemplan el uso de métodos de perturbación para obtener soluciones asintóticas (Eckhaus y De Jager, 1966; Bender y Orszag, 1978; Boas, 2006). Esta metodología, que será descrita en detalle en la próxima Sección, ha sido usada para encontrar soluciones aproximadas del flujo de lubricación en cojinetes de diversos tipos. El objetivo principal en este caso es contemplar la influencia de parámetros no considerados en las soluciones simplificadas y, de esa manera, extender su rango de aplicación. La limitación de estos métodos radica en que los resultados encontrados son válidos en un entorno relativamente reducido de la solución simplificada, por lo que el reto también está en lograr soluciones aproximadas válidas en el rango más extenso posible.

Así, por ejemplo, se han obtenido soluciones asintóticas por métodos de perturbación

singular para cojinetes infinitamente largos de patín y de deslizamiento y para cojinetes escalonados de aplastamiento (squeeze film) contemplando los efectos del borde final y para alcanzar menores valores de aplastamiento y de relación de aspecto (Gross y Zachmanoglou, 1961; Di Prima, 1968, 1969, 1973; Capriz y Cimatti, 1978; Schmitt y Di Prima, 1978; Ling, 1986). En estos casos se usa el método de 'matched asymptotic expansion' típico de problemas de capa límite, para desarrollar una solución asintótica para la presión para valores de $\frac{L}{D}$ grandes, y así calcular la capacidad portante y parámetros relacionados. En el caso particular de incluir una discontinuidad en la pendiente, Schmitt y Di Prima (1976) encontraron que esta técnica les permitió describir no sólo la capa límite en el borde del cojinete, sino también el desarrollo de una capa límite en la derivada de la presión en el escalón. De igual manera se han analizado cojinetes cilíndricos infinitamente largos buscando una representación asintótica explícita, uniformemente válida, de la presión (Gross y Zachmanoglou, 1961; Tayler, 1968). Tayler (1968) analizó en particular el cojinete radial de longitud finita con grandes excentricidades. Para ello usó una expansión asintótica interna y una externa al punto singular de mínimo espesor (excentricidad tendiendo a 1).

De igual manera, otros autores han contemplado los efectos de inercia y curvatura, no presentes en la Ecuación de Reynolds, en el ILJB, usando diferentes métodos de expansión en serie (Wannier, 1950; Wood, 1957; Kamal, 1966; Di Prima y Stuart, 1972; Myllerup y Hamrock, 1994; Kakoty y Majumdar, 1999). En particular, Myllerup y Hamrock (1994) realizan un detallado y exhaustivo análisis de la aplicación del método de perturbación regular usando la relación de aspecto de la película fluida como parámetro pequeño. Ellos muestran cómo este método incluso permite demostrar el efecto no despreciable de la corrección por curvatura cuando se quieren calcular los términos correctivos respecto de la solución del ILJB.

En el caso de cojinetes cortos de deslizamiento y cilíndricos de arco parcial, se ha rectificado la predicción del ISJB linealizando la teoría y desarrollando un análisis asintótico para corregir los campos de presión cerca de los bordes, donde las condiciones de borde de presión no se pueden cumplir (Schuss y Etsion, 1981; Buckholz *et al.*, 1984; Buckholz y Hwang 1986), y resolviendo la ecuación de Euler-Lagrange mediante una aproximación de perturbación singular para relaciones de aspecto pequeñas (Rohde y Li, 1980) asumiendo una forma de perfil de velocidad. De hecho, también se han usado series de perturbación regular para extender el rango de aplicabilidad del ISJB y para cuantificar el alcance de dicha solución límite (Buckholz y Hwang, 1986) y para calcular el efecto de la desalineación

(Gómez-Mancilla y Nosov, 2001, 2002).

En relación con los métodos y soluciones antes comentadas, debe tenerse en cuenta que la Ecuación de Reynolds es una ecuación multi-paramétrica, por lo que las diferentes soluciones de métodos de expansión en serie tienen limitaciones y restricciones asociadas a los parámetros elegidos.

4.2 SOLUCIONES USANDO MÉTODOS DE PERTURBACIÓN

4.2.1 Descripción general

La mayoría de los problemas en física e ingeniería están definidos mediante ecuaciones que dependen de diversos parámetros (densidad, viscosidad, constante de Planck, velocidad de la luz, carga eléctrica, etc.), de modo que las soluciones arrastran la dependencia con dichos parámetros. Por otro lado, la mayoría de estos problemas involucran dificultades tales como ecuaciones de comportamiento no lineal, de coeficientes variables, o condiciones de frontera no lineales en fronteras complejas conocidas o desconocidas. Por ello frecuentemente es difícil encontrar la solución exacta del problema.

Cuando los métodos conocidos no permiten obtener soluciones exactas de ecuaciones diferenciales, o cuando la solución exacta es muy compleja como para que resulte útil, entonces se debe tratar de determinar una solución aproximada. En particular, los métodos asintóticos son un conjunto de métodos que permiten encontrar soluciones aproximadas analíticas que facilitan el estudio de problemas complejos (Bender y Orszag, 1978; Boas, 2006). Las aproximaciones asintóticas son una herramienta muy usada en las matemáticas aplicadas y en la resolución de problemas físicos.

Los métodos asintóticos pueden dividirse en dos grandes categorías: análisis global y análisis local. El análisis local busca representar la solución de una ecuación sólo en la vecindad de un punto (métodos asintóticos propiamente dicho), mientras que el análisis global persigue la determinación de la solución en todo un dominio y se basan en la existencia de un parámetro relativamente pequeño (métodos de perturbación).

El procedimiento general de los métodos de perturbación es identificar el parámetro pequeño (generalmente identificado como ε), de manera que cuando $\varepsilon = 0$, el problema es soluble (solución de "orden cero"). La solución global a un dado problema surge, entonces, de un análisis local (expansión en serie) alrededor de $\varepsilon=0$.

Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \varepsilon y = 4 \quad \text{con } y(0) = 0 \quad (5)$$

para el caso de un valor muy pequeño de ε tiene una solución sencilla por el método de perturbación. Ella se obtiene proponiendo la serie de perturbación:

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + O(\varepsilon^3) . \quad (6)$$

La solución de orden cero, y_0 , se calcula con $\varepsilon=0$ y haciendo cumplir la CB. En este caso resulta $y_0=4x$. Luego se introduce la expresión de "orden uno" de y en la ecuación diferencial ($y = y_0 + \varepsilon y_1$), y se eliminan los términos de orden dos para obtener una ecuación diferencial para y_1 . En este caso queda $y_1'+4x=0$, que se resuelve para y_1 . Y así se continúa hallando una a una las funciones de la serie en la Ec. (6).

La solución encontrada resulta "local" en ε pero global en x . Si ε es realmente pequeño, es de esperar que la solución quede razonablemente bien descripta usando solo unos pocos términos de la serie de perturbación. De hecho, ya el primer término (y_1) resulta de gran interés, porque permite analizar el efecto que la presencia del término de la ecuación diferencial en que aparece ε tiene sobre la solución de orden cero.

En este tema se debe distinguir entre problemas de perturbación regular y los de perturbación singular. Un problema de perturbación regular es aquel cuya serie de perturbación es una serie en potencias de ε que converge a la solución de orden cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Un problema de perturbación singular es uno cuya serie de perturbación no toma la forma de una serie en potencias de ε o, si lo hace, no converge a la solución de orden cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Es decir, se suelen obtener series perturbadas que divergen cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. En este caso la solución exacta no existe en $\varepsilon=0$.

4.2.2 Aplicación a la Ecuación de Reynolds

En el Capítulo 3 se han obtenido y discutido dos soluciones de orden cero de la Ecuación de Reynolds, Ec. (1), correspondientes a dos situaciones geométricas particulares: la del ILJB ($L/D \rightarrow \infty$, o $D/L \rightarrow 0$) y la del ISJB ($L/D \rightarrow 0$), válidas para todo valor de excentricidad relativa, η . El comportamiento de los cojinetes de longitud finita podría, entonces, describirse mediante soluciones aproximadas obtenidas empleando métodos de perturbación regular usando D/L , o bien L/D , como parámetro de perturbación según se desee 'acortar' el cojinete infinitamente largo, o 'alargar' el infinitamente corto, respectivamente.

Como se viera en el Capítulo 3, en el límite de $\frac{L}{R} \rightarrow \infty$, o su equivalente $\frac{R}{L} \rightarrow 0$, la Ec. (1)

se reduce a:

$$\frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{6\pi} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial\Theta} \tilde{h}^3 \right) \quad (7)$$

donde la presión ha sido adimensionalizada con:

$$P_c = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c} \right)^2. \quad (8)$$

La solución de esta ecuación, que describe el ILJB, es:

$$p = 6 \frac{\eta (2 + \eta \cos(\pi\Theta)) \sin(\pi\Theta)}{(2 + \eta^2)(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^2} \quad (9)$$

al considerar que $p=0$ en $\Theta=0$.

Por otro lado, en el límite de $\frac{L}{R} \rightarrow 0$, la Ec. (1) se reduce a:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12} \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (10)$$

una vez que se adimensionaliza la presión con

$$P_c = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2. \quad (11)$$

La solución de esta ecuación, que describe el ISJB, es:

$$p = \frac{3 \eta \sin(\pi\Theta)}{(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^3} \left(\frac{1}{4} - z^2 \right), \quad (12)$$

donde también se ha considerado que $p=0$ en $\Theta=0$.

Ambas soluciones podrían englobarse en una única nomenclatura usando como presión de referencia la presión promedio, $P_p = \frac{F}{2RL}$. Es decir, haciendo $p = \frac{P - P_0}{P_p}$, la Ec. (1) se puede

escribir como

$$\frac{1}{2\pi} S' \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12\pi^2} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial\Theta} \tilde{h}^3 \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (13)$$

donde $S' = \frac{\mu U}{P_p R} \left(\frac{R}{c} \right)^2$, es el número de Sommerfeld equivalente al definido en el Capítulo 3

($S' = 2\pi S$).

Las soluciones límite, Ecs. (9) y (12), quedarían entonces respectivamente expresadas como:

$$p = 6 S' \frac{\eta (2 + \eta \cos(\pi\Theta)) \sin(\pi\Theta)}{(2 + \eta^2)(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^2} \quad (14)$$

y

$$p = 3 O' \frac{\eta \sin(\pi\Theta)}{(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^3} \left(\frac{1}{4} - z^2 \right), \quad (15)$$

donde O' es el número de Sommerfeld modificado conocido como "número de Ocvirk" (Dubois y Ocvirk, 1953; McHugh, 1999):

$$O' = \frac{\mu U}{R P_p} \left(\frac{R}{C} \right)^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2, \quad O' = S' \left(\frac{L}{R} \right)^2 \quad (16)$$

Como se viera en el Capítulo 3, la Ec. (14), correspondiente a $\frac{L}{R} \rightarrow \infty$, es conocida como "solución de Sommerfeld", y la Ec. (15), correspondiente a $\frac{L}{R} \rightarrow 0$, como "solución de Ocvirk".

En la Sección 1, se mostró que varios autores han utilizado teoría de perturbación para obtener algún tipo de solución aproximada relacionada con el comportamiento de cierto tipo de cojinete. Sin embargo, prácticamente ninguno ha utilizado esta robusta herramienta matemática para describir el comportamiento de cojinetes hidrodinámicos radiales cilíndricos de longitud finita en flujo laminar. De hecho, sólo Buckholz y Hwang (1986) la usaron para describir el comportamiento global del flujo en cojinetes cortos simples extendiendo la teoría del ISJB, y Gómez-Mancilla y Nosov (2001, 2002) en cojinetes cortos desalineados. Como se comentara al inicio del Capítulo, la mayoría de los cojinetes estándar que actualmente se construyen tienen relaciones de aspecto entre $\frac{1}{2}$ y 2, y la tendencia es hacia la fabricación de cojinetes cada vez más cortos. Si además se tiene en cuenta que la resolución de las ecuaciones de conservación se simplifica notoriamente al asumir que la relación longitud a diámetro tiende a cero ($L/D \rightarrow 0$), surge que el análisis de cojinetes de longitud nula es una herramienta útil para la estimación del comportamiento de cojinetes hidrodinámicos modernos.

En el caso de Buckholz y Hwang (1986), estos autores propusieron el análisis de la ecuación de Reynolds para cojinetes de longitud finita mediante la perturbación regular de la presión, empleando como parámetro de perturbación al cuadrado de la relación de aspecto,

$\left(\frac{L}{D}\right)^2$. Para ello, adimensionalizaron la ecuación de Reynolds para estado estacionario, de manera de escribirla como:

$$2 \frac{d\tilde{h}}{d\theta} = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tilde{h}^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \quad (17)$$

donde:

$$p = \frac{P - P_0}{3 \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2} ; \quad \lambda = \frac{L}{D} ; \quad \xi = \frac{2Z}{L} ; \quad \theta = \frac{X}{R} \quad (18)$$

y $\tilde{h} = 1 + \eta \cos(\theta)$.

Puede apreciarse que la presión característica utilizada por estos autores se corresponde con la de un ISJB (además de incluir un factor de 3). La expansión en serie de la presión que ellos proponen es, entonces:

$$p = p_0 + \lambda^2 p_1 + \lambda^4 p_2 + \dots \quad (19)$$

donde p_0 es la solución de orden cero ($\lambda=0$) dada por la ecuación diferencial (equivalente a la Ec. (10)):

$$2 \frac{d\tilde{h}}{d\theta} = \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p_0}{\partial \xi^2} , \quad (20)$$

cuya solución se corresponde con la solución de Ocvirk para ISJB, con las CB: $p_0|_{\xi=-1} = 0$ y $p_0|_{\xi=1} = 0$,

$$p_0 = \frac{\eta \sin(\theta)}{(1 + \eta \cos(\theta))^3} \frac{1}{4} (1 - \xi^2) . \quad (21)$$

Por otra parte, para órdenes superiores, la Ec. (17) resulta en:

$$\frac{\partial^2 p_{k+1}}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{\tilde{h}^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tilde{h}^3 \frac{\partial p_k}{\partial \theta} \right) \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

luego de mantener sólo los términos dominantes (al eliminar el término de orden λ frente a los otros dos). La solución de esta ecuación es relativamente sencilla ya que, conocida p_0 , la solución de orden uno, p_1 , sale directamente de integrar respecto de la dirección axial, y así sucesivamente para los términos de mayor orden. Por otro lado, también se observa que cada presión es expresable como:

$$p_k = F_k(\xi)G_k(\theta) \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

y por comparación con las Ecs. (21) y (22), se deduce que:

$$F_0 = \frac{1}{4}(1 - \xi^2) \quad \text{y} \quad G_0 = -\frac{1}{\tilde{h}^3} \frac{d\tilde{h}}{d\theta} = \frac{\eta \sin(\theta)}{(1 + \eta \cos(\theta))^3} \quad (24)$$

y

$$\frac{d^2 F_{k+1}}{d\xi^2} = F_k(\xi) \quad \text{y} \quad G_{k+1} = -\frac{1}{\tilde{h}^3} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\tilde{h}^3 \frac{dG_k(\theta)}{d\theta} \right) \right). \quad (25)$$

La expresión analítica de la presión que resulta de reunir las Ecs. (19), (21) y (23) es:

$$p(\xi, \theta) = \frac{\eta \sin(\theta)}{(1 + \eta \cos(\theta))^3} \frac{1}{4}(1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} F_k(\xi) G_k(\theta) \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

donde las funciones F_k y G_k resultan de resolver las Ecs. (25). Las F_k son de la forma

$$F_k = \sum_{i=1}^{k+1} C_i (1 - \xi^2)^i \quad \text{con los valores de } C_i \text{ determinados empleando las CB axiales}$$

$F_k(-1) = F_k(1) = 0$, y las G_k se obtienen de derivar las expresiones trigonométricas. Así, para el orden uno es:

$$F_1 = -\frac{1}{12}(1 - \xi^2) - \frac{1}{48}(1 - \xi^2)^2$$

$$G_1 = -\frac{\eta \sin(\theta) [3\eta^2 + 2\eta^2 \cos(\theta)^2 + 4\eta \cos(\theta) - 1]}{1 + 5\eta \cos(\theta) + 10\eta^2 \cos(\theta)^2 + 10\eta^3 \cos(\theta)^3 + 5\eta^4 \cos(\theta)^4 + \eta^5 \cos(\theta)^5} \quad (27)$$

La presión queda entonces representada por:

$$p(\xi, \theta) = \frac{\eta \sin(\theta)}{(1 + \eta \cos(\theta))^3} \frac{1}{4}(1 - \xi^2) +$$

$$+ \lambda^2 \frac{\left[\frac{1}{12}(1 - \xi^2) + \frac{1}{48}(1 - \xi^2)^2 \right] \eta \sin(\theta) [3\eta^2 + 2\eta^2 \cos(\theta)^2 + 4\eta \cos(\theta) - 1]}{1 + 5\eta \cos(\theta) + 10\eta^2 \cos(\theta)^2 + 10\eta^3 \cos(\theta)^3 + 5\eta^4 \cos(\theta)^4 + \eta^5 \cos(\theta)^5} + \quad (28)$$

$$+ O(\lambda^4)$$

Cabe mencionar que los términos de orden superior de la Ec. (26) tienden a cero para excentricidades bajas, pero no sucede lo mismo cuando se manejan excentricidades relativas cercanas a la unidad. En ese caso, los términos de orden superior divergen en lugar de converger. La justificación a ese comportamiento se dará posteriormente cuando se compare el método propuesto en este trabajo de tesis con el aquí presentado, sin embargo se puede acotar que esta divergencia ocurre porque éste flujo es, en realidad, un problema multi-

paramétrico. Para corregir esta divergencia, los autores propusieron un escalado más riguroso de la ecuación de Reynolds considerando que la relación de aspecto, λ , y la excentricidad relativa, η , son del mismo orden de magnitud. De esta manera logran resaltar el hecho que la componente de flujo Poseuille en la dirección del deslizamiento se torna importante en cercanías del espesor mínimo de película para altas excentricidades. Ellos reemplazaron la variable adimensional θ por $\theta^* = \frac{\theta}{1-\eta}$, lo que amplifica la importancia de la dirección

circunferencial cuando η tiende a 1. Este tratamiento genera la aparición del factor $\frac{\tilde{h}}{1-\eta}$ en los términos que contienen derivadas de la presión, y este nuevo factor resulta de orden uno en cercanías del espesor mínimo de película ya que $\tilde{h} \rightarrow 1-\eta$ cuando $\theta \rightarrow \pi$. En esa condición, se puede considerar que $(1-\eta)$ es de $\mathcal{O} = \lambda$. No obstante, el método pierde generalidad ya que permite un análisis sólo local, y los autores no profundizaron en los resultados generados con este escalado.

Los resultados de Buckholz y Hwang en cuanto al comportamiento de la presión para cojinetes cortos contemplando el efecto correctivo del término de orden uno respecto de la solución de Ocvirk se mostrarán en los apartados siguientes, en comparación con los resultados del método propuesto en esta Tesis.

4.2.3 Nueva Solución

Como se comentara anteriormente, el estudio de la solución de Ocvirk cobra importancia para la evaluación de las propiedades de los cojinetes dada la importante tendencia al uso de cojinetes cortos. Dubois y Ocvirk (1953) sugirieron que la aproximación del ISJB podría usarse hasta relaciones de aspecto de orden uno. Sin embargo, los estudios experimentales posteriores han demostrado que la suposición de $L/D \rightarrow 0$ resulta justificable sólo en cojinetes con valores de L/D menores a $\sim 1/8$ para toda excentricidad. Aún así, en la práctica, la suposición de ISJB se suele usar para L/D hasta $\sim 1/2$ y excentricidades hasta 0,75 (San Andrés, 2006).

Observando la Ec. (13) puede apreciarse que hay tres parámetros que rigen el comportamiento del sistema: el número de Sommerfeld, la relación longitud a radio al cuadrado, $\left(\frac{L}{R}\right)^2$, y, menos directamente, la excentricidad relativa, η , a través del espesor de la capa fluida. Tradicionalmente, el comportamiento de los cojinetes se lo relaciona con el

número de Sommerfeld, sin embargo, en el análisis de cojinetes cortos resulta más conveniente trabajar con el número de Ocvirk, Ec. (16). Como ya se viera, el número de Sommerfeld representa la relación entre la presión característica de los cojinetes de longitud infinita y P_p (fuerza proyectada por unidad de área) mientras que el número de Ocvirk corresponde a la relación entre la presión característica de los cojinetes cortos y P_p .

Cabe mencionar que, tradicionalmente, el número de Sommerfeld fue definido utilizando la velocidad de rotación en RPS (Sommerfeld, 1904; Pinkus, 1961; Hamrock *et. al.*, 2004; San Andrés, 2006), lo que lleva a la definición usada en el Capítulo 3, esto es:

$$S = \frac{P_c}{2\pi P_p} = \frac{\mu\omega}{2\pi P_p} \left(\frac{R}{c}\right)^2 = \frac{\mu N}{P_p} \left(\frac{R}{c}\right)^2, \quad (29)$$

mientras que también se puede usar la definición planteada en la Sección anterior,

$$S' = \frac{P_c}{P_p} = \frac{\mu\omega}{P_p} \left(\frac{R}{c}\right)^2 = \frac{\mu U}{R P_p} \left(\frac{R}{c}\right)^2. \quad (30)$$

En esta Sección se usará esta definición (la de la Ec. (30)), y la equivalente del número de Ocvirk (que por simplicidad se la identificará directamente con O en lugar de O'):

$$O = \frac{\mu U}{R P_p} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2. \quad (31)$$

Los comentarios anteriores deben tenerse en cuenta al comparar con resultados de la literatura ya que puede existir un factor de 2π de diferencia.

Reordenando la Ec. (13) y multiplicando por $\left(\frac{L}{D}\right)^2$, resulta:

$$\frac{1}{2\pi} O \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial\Theta} \tilde{h}^3\right) + \frac{1}{12} \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (32)$$

que contiene la ecuación para cojinetes infinitamente cortos,

$$\frac{1}{2\pi} O \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12} \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (33)$$

Observando esta ecuación, puede notarse que para que se cumpla la igualdad, el orden de magnitud de O debe ser 1, y el de S debe ser $(D/L)^2$. Esto limita la validez de la solución a valores de S elevados (L/D pequeños), lo que es consistente con la intención planteada de analizar cojinetes cortos.

A continuación se presentará una nueva solución de la Ecuación de Reynolds para cojinetes cortos en estado estacionario y flujo isotérmico de fluido Newtoniano mediante el

método de perturbación regular usando la relación de aspecto $\left(\frac{L}{D}\right)^2$ como parámetro de perturbación, ε . Lo novedoso del tratamiento que se plantea es que se propone la expansión en serie no solo de la presión, p , sino también del número de Ocvirk, O . Esta decisión se tomó sobre la base que el número de Sommerfeld (o el de Ocvirk) es una medida adimensional de la presión de referencia y esta cambia al cambiar el largo del cojinete (ver Ecs. (8) y (11)), siendo función de L/D . Se espera, de esta manera, que el campo de presión resultante de considerar sólo los primeros términos de las series se aproxime al real hasta mayores relaciones de aspecto y/o excentricidades que cuando se usa sólo la expansión de la presión. Las variables geométricas que se usarán en la derivación son las definidas en la Figura 4.1.

Como se dijera, el método propuesto se basa en la expansión en serie de p y O , esto es:

$$p = p_0 + \left(\frac{L}{D}\right)^2 p_1 + \mathcal{O}\left(\frac{L}{D}\right)^4 \quad \rightarrow \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (34)$$

$$O = O_0 + \left(\frac{L}{D}\right)^2 O_1 + \mathcal{O}\left(\frac{L}{D}\right)^4 \quad \rightarrow \quad O = O_0 + \varepsilon O_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (35)$$

y reemplazando en la Ec. (32) tomando sólo los dos primeros términos de ambas series, se tiene:

$$(O_0 + \varepsilon O_1) \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{2}{3\pi} \varepsilon \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\tilde{h}^3 \frac{\partial p_0}{\partial\Theta} \right) + \frac{\pi}{6} \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 (p_0 + \varepsilon p_1)}{\partial z^2} . \quad (36)$$

que contiene dos términos de orden cero y tres de orden ε . Dejando sólo los términos de orden cero, es decir, haciendo tender a 0 el parámetro de perturbación, se obtiene:

$$O_0 \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{\pi}{6} \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2} , \quad (37)$$

de donde sale la solución de orden cero de Ocvirk ya vista, esto es:

$$p_0 = 3O_0 \left[\frac{1}{4} - z^2 \right] \frac{\eta \sin(\pi\Theta)}{[1 + \eta \cos(\pi\Theta)]^3} . \quad (38)$$

Las CB usadas para obtener este perfil de presión son $p_0 = 0$ en $z = -1/2$ (borde) y $\frac{dp_0}{dz} = 0$ en $z = 0$ (mitad del largo). Este campo de presión satisface automáticamente las CB azimutales, esto es, $p_0 = 0$ en $\Theta = 0$ y $\Theta = 1$.

El cálculo de p_1 se hace a partir de la Ec. (36), a la que se le resta la Ec. (37), es decir, a partir de la ecuación diferencial:

$$O_1 \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{2}{3\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\tilde{h}^3 \frac{\partial p_0}{\partial \Theta} \right) + \frac{\pi}{6} \tilde{h}^3 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} . \quad (39)$$

donde p_0 está dada por la Ec. (37). A partir de esta ecuación se obtiene la expresión de p_1 , implícita en O_0 y O_1 . La misma, resulta:

$$p_1 = \frac{2(\alpha_1 \eta \sin(\pi\Theta) + \alpha_2 \eta^2 \sin(2\pi\Theta) + \frac{1}{4} \alpha_2 \eta^3 \sin(3\pi\Theta))}{\alpha_3 \cos(\pi\Theta) + \alpha_4 \cos(2\pi\Theta) + \alpha_5 \cos(3\pi\Theta) + \alpha_6 \cos(4\pi\Theta) + \alpha_7 \cos(5\pi\Theta) + \alpha_8} \quad (40)$$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{O_0}{4} (5 - 24z^2 + 16z^4) (2 - 7\eta^2) + \frac{3O_1}{2} (1 - 4z^2) (4 + \eta^2) \\ \alpha_2 &= O_0 (5 - 24z^2 + 16z^4) + 6 O_1 (1 - 4z^2) \\ \alpha_3 &= 80\eta + 120\eta^3 + 10\eta^5 \\ \alpha_4 &= 80\eta^2 + 40\eta^4 \\ \alpha_5 &= 40\eta^3 + 5\eta^5 \\ \alpha_6 &= 10\eta^4 \\ \alpha_7 &= \eta^5 \\ \alpha_8 &= 16 + 80\eta^2 + 30\eta^4 \end{aligned} \quad (41)$$

Las expresiones de O_0 y O_1 salen de la definición del número de Ocvirk, Ec. (31), para lo cual se necesita calcular P_p , la carga o capacidad portante proyectada por unidad de área:

$$P_p = \frac{W}{LD} , \quad (42)$$

donde

$$W = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} , \quad (43)$$

F_x y F_y son las componentes de la fuerza realizada por el flujo sobre el rotor (que es igual y opuesta a W ya que $c \ll R$) en las respectivas direcciones X e Y . Como se viera en el Capítulo 3 (Ecs. (90) y (91)), estas fuerzas se calculan como

$$\begin{aligned} F_x &= LR\pi \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 P \cos(\pi\Theta) d\Theta dz \\ F_y &= LR\pi \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 P \sin(\pi\Theta) d\Theta dz \end{aligned} \quad (44)$$

Reuniendo las Ecs. (42) a (44), y considerando que $p = (P - P_0)/P_p$, se tiene:

$$\frac{4}{\pi^2} = \left[\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 (p_0 + \varepsilon p_1) \cos(\pi\Theta) d\Theta dz \right]^2 + \left[\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 (p_0 + \varepsilon p_1) \sin(\pi\Theta) d\Theta dz \right]^2, \quad (45)$$

que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} = & \left[\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_0 \cos(\pi\Theta) d\Theta dz \right]^2 + \left[\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_0 \sin(\pi\Theta) d\Theta dz \right]^2 + \\ & + 2\varepsilon \left[\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_0 \cos(\pi\Theta) d\Theta dz \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_1 \cos(\pi\Theta) d\Theta dz \right] + \\ & + 2\varepsilon \left[\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_0 \sin(\pi\Theta) d\Theta dz \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_1 \sin(\pi\Theta) d\Theta dz \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (46)$$

Considerando primero los términos de orden cero de esta ecuación se tiene:

$$\frac{4}{\pi^2} = \left[\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_0 \cos(\pi\Theta) d\Theta dz \right]^2 + \left[\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_0 \sin(\pi\Theta) d\Theta dz \right]^2, \quad (47)$$

que permite calcular O_0 al reemplazar p_0 por la expresión en la Ec. (38). Así, el término dominante del número de Ocvirk resulta:

$$O_0 = \frac{4 \kappa^2}{\eta \sqrt{4\eta^2 + \pi^2 \kappa^4 I_0^2}} \quad (48)$$

donde:

$$\kappa = (1 - \eta^2) \quad \text{e} \quad I_0 = \int_0^1 \frac{\sin^2(\pi\Theta)}{(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^3} d\Theta \quad (49)$$

Considerando ahora los términos de orden ε de la Ec. (46), es:

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_0 \cos(\pi\Theta) d\Theta dz \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_1 \cos(\pi\Theta) d\Theta dz \right] + \\ & + \left[\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_0 \sin(\pi\Theta) d\Theta dz \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 p_1 \sin(\pi\Theta) d\Theta dz \right] \end{aligned} \quad (50)$$

que permite calcular O_1 considerando que p_0 , p_1 y O_0 están dados por las Ecs. (38), (40)-(41) y (48)-(49). El término de orden uno del número de Ocvirk resulta entonces:

$$O_1 = \frac{2}{5} O_0 \frac{3\eta^2(1+\eta^2) - 2\pi^2\kappa^5 I_0 [\beta + (2-7\eta^2)I_{s11}]}{\kappa\eta^2 + \pi^2\kappa^5 I_0 [\beta - (4+\eta^2)I_{s11}]} \quad (51)$$

donde κ e I_0 están dados en la Ec. (49) y el resto de las funciones son:

$$\begin{aligned} \beta &= \eta (4I_{s12} + \eta I_{s13}) & I_{s11} &= \int_0^1 \frac{-\sin^2(\pi\Theta)}{\text{denom}} d\Theta \\ I_{s12} &= \int_0^1 \frac{\sin(\pi\Theta) \sin(2\pi\Theta)}{\text{denom}} d\Theta & I_{s13} &= \int_0^1 \frac{\sin(\pi\Theta) \sin(3\pi\Theta)}{\text{denom}} d\Theta \end{aligned} \quad (52)$$

con

$$\text{denom} = \alpha_3 \cos(\pi\Theta) + \alpha_4 \cos(2\pi\Theta) + \alpha_5 \cos(3\pi\Theta) + \alpha_6 \cos(4\pi\Theta) + \alpha_7 \cos(5\pi\Theta) + \alpha_8$$

Los coeficientes α_i son los definidos en la Ec. (41).

El método propuesto será identificado en el análisis que sigue como “Perturbación-P&O”, haciendo alusión al hecho que, ambos, la presión y el número de Ocvirk han sido expandidos en serie para extender la solución del ISJB para describir cojinetes de longitud finita. Los resultados del método propuesto serán comparados con predicciones numéricas y con los de otras dos expansiones de perturbación en las que sólo la presión es expandida en serie. En una, que llamaremos “Perturbación-P0”, p_1 , será calculada usando sólo el término dominante del número de Ocvirk, O_0 , lo que equivale a hacer $O_1 = 0$ en la Perturbación-P&O. Este método produce un perfil de presión que no satisface la Ec. (45) pero que es de orden ε . El motivo para incluir esta predicción en el análisis es que la comparación entre la Perturbación-P&O y la Perturbación-P0 permite examinar el efecto de O_1 en el método propuesto. La otra expansión a considerar es aquella en que el número de Ocvirk, O , se calcula directamente, introduciendo la expresión expandida de la presión, $p_0 + \varepsilon p_1$, en la Ec. (45). Esta metodología, que llamaremos “Perturbación-P”, produce un O que es función de ε , por lo que da lugar a un perfil de presión que no es de orden ε , ya que $p = p_0(O) + \varepsilon p_1(O)$. De hecho, el término de orden cero de la presión no coincidirá con la solución del ISJB cuando se considere más de un término en el cálculo de p . Esta solución es equivalente a la utilizada por Buckholz y Hwang (1986) cuando se consideran sólo dos términos.

En las Secciones que siguen se presentan los resultados de perfiles de presión, número de Ocvirk y capacidad portante, tensión en la pared y fricción, y perfiles de velocidad y caudal, correspondientes al método de Perturbación-P&O, comparándolos con la solución de Ocvirk

(solución ISJB), la solución numérica de la Ecuación de Reynolds¹, y las predicciones de las otras dos expansiones de perturbación antes comentadas. La comparación se realiza para relaciones L/D hasta 1 y excentricidades entre 0 y 1.

4.2.4 Número de Ocvirk

La Figura 4.2 presenta los componentes del número de Ocvirk de la Perturbación-P&O calculados con las Ecs. (48) y (51) en función de la excentricidad relativa, η . Ambas funciones tienen la típica forma de “S” del número de Sommerfeld. Se puede observar que O_0 coincide con la solución del ISJB descrito en el capítulo anterior, difiriendo con la curva (b) de la Figura 3.7 en el factor 2π . La solución de primer orden, por su parte, tiene valores que producen un aumento relativo de O respecto de la solución de orden cero, que es más grande a excentricidades chicas que a η grandes.

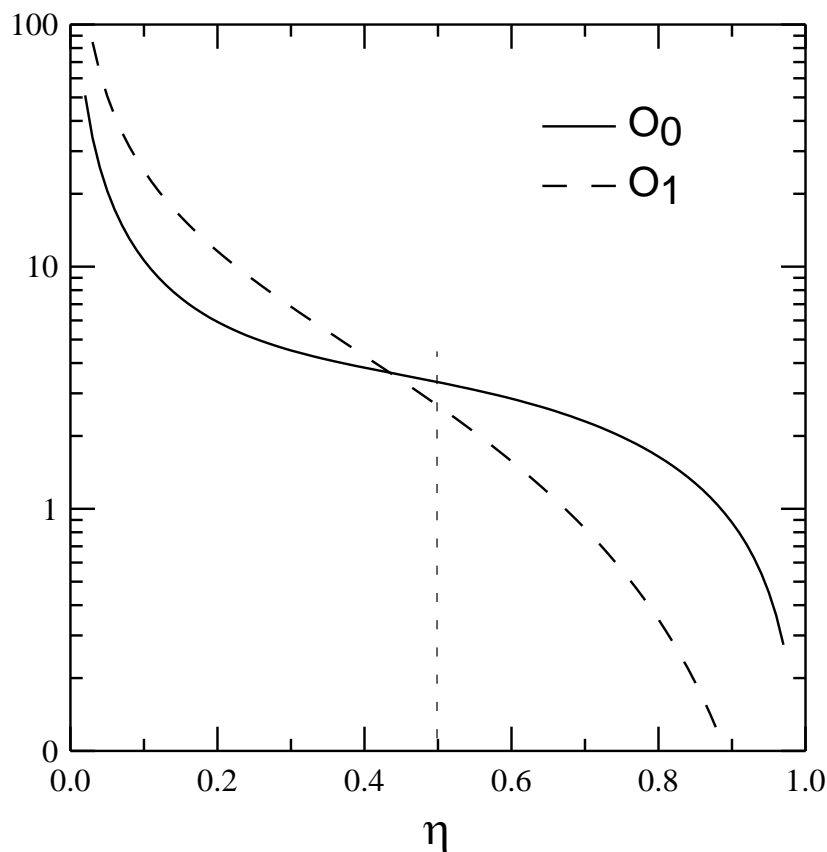


Figura 4.2: Componentes de orden cero y orden uno del número de Ocvirk según el método de Perturbación-P&O en función de la excentricidad relativa.

¹ El mecanismo usado para la solución numérica de la Ecuación de Reynolds se comentará en el Cap. V, cuyos resultados se usan en este capítulo para comparar con las soluciones analíticas aproximadas.

El número de Ocvirk completo, $O = O_0 + \varepsilon O_1$, de la Perturbación-P&O se calcula combinando los componentes del número de Ocvirk de la Figura 4.2. La Figura 4.3 muestra estos resultados para cuatro valores de L/D y los compara con la solución de Ocvirk (que coincide con la Perturbación-P0), la predicción de la Perturbación-P, y los resultados numéricos de Raimondi y Boyd (Raimondi y Boyd, 1958) y de resolver la ecuación de Reynolds, Ec. (32), según la metodología que se describirá en el próximo Capítulo. La diferencia entre la solución numérica de Raimondi y Boyd y la que aquí se presenta radica en la CB aplicada para la presión. Mientras que Raimondi y Boyd usaron la CB de Reynolds (ver Capítulo 3), en la solución numérica obtenida para esta comparación se usa la CB de Gumbel, que es la empleada en las soluciones analíticas aproximadas.

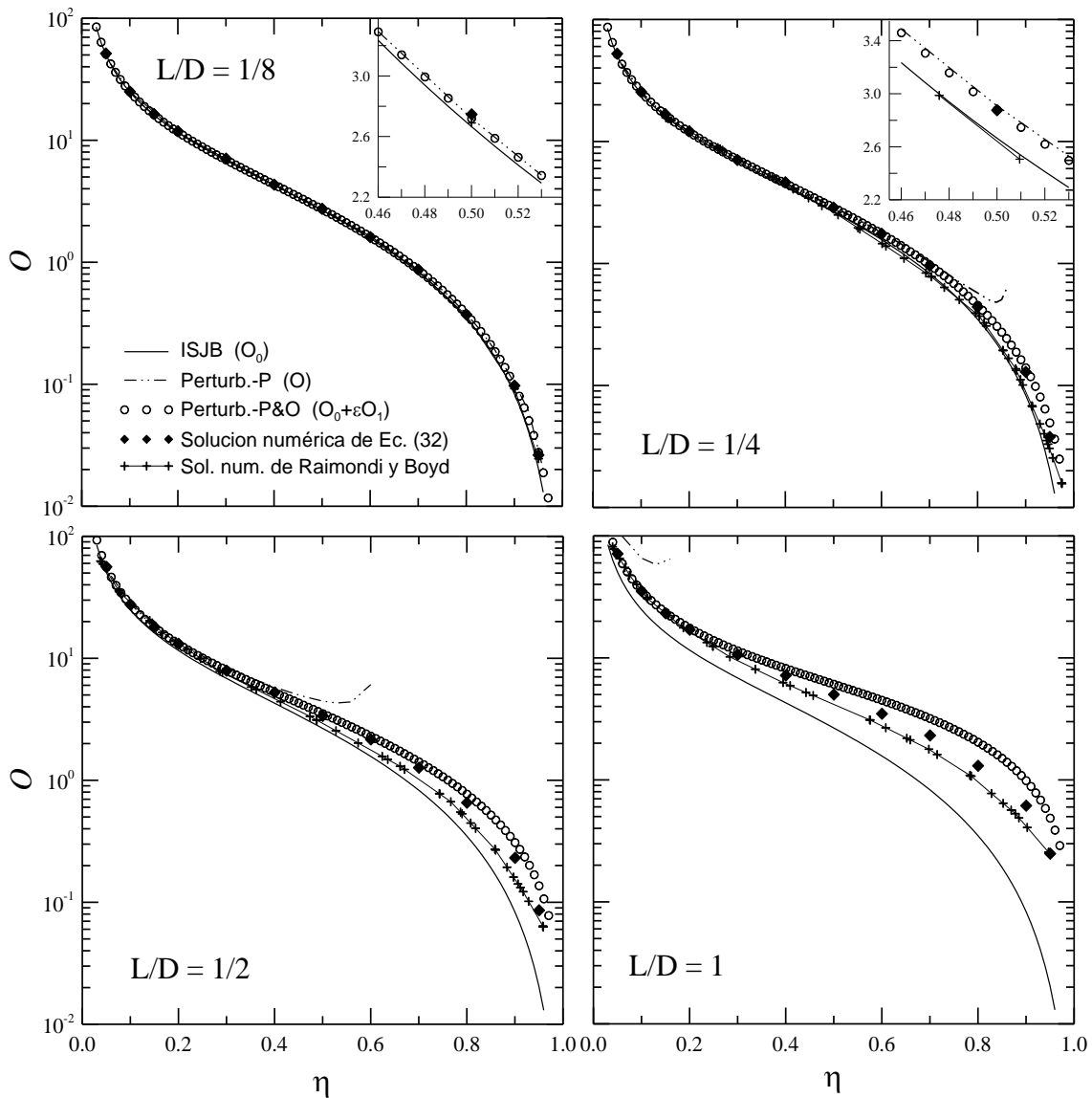


Figura 4.3: Número de Ocvirk en función de la excentricidad relativa calculado con distintos métodos para diferentes valores de L/D .

Como se puede observar, todos los resultados coinciden cuando $L/D \rightarrow 0$ y/o cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. De hecho las curvas son prácticamente indistinguibles en $L/D = 1/8$. A medida que la relación de aspecto y la excentricidad aumentan, la solución de Ocvirk tiende a subestimar cada vez más el valor de O (comparar la solución del ISJB con la solución numérica). Se observa que cuando el valor de L/D aumenta, las curvas se separan, siendo el número de Ocvirk calculado por el método Perturbación-P&O el que más se mantiene próximo a la solución numérica. De hecho, los resultados de la Perturbación-P&O son prácticamente coincidentes con los valores numéricos a $L/D = 1/4$ para todo η , coinciden hasta casi $\eta \cong 0,6$ a $L/D = 1/2$, y hasta $\eta \cong 0,3$ a $L/D = 1$. La distancia entre la solución del ISJB y las predicciones del método de Perturbación-P&O se debe al valor de O_1 , cuyo aporte lleva a una leve sobreestimación de O a η relativamente grandes, que aumenta cuando L/D aumenta (aunque prácticamente indistinguible en la escala de valores de la Figura 4.3 en gran parte del rango cubierto). El número de Ocvirk de la Perturbación-P, que es siempre mayor que $O_0 + \varepsilon O_1$ del método aquí propuesto, muestra una mejora respecto de la solución del ISJB a bajas excentricidades en el rango de aplicabilidad de la solución de Ocvirk, pero da resultados no realistas fuera de este rango.

Otra manera de presentar la información de la Figura 4.3 es para valores de excentricidad relativa constante y en función de la relación de aspecto. La Figura 4.4 ilustra estos resultados para $\eta = 0,5$. Como es de esperar, la solución de Ocvirk no varía con L/D mientras que la solución numérica y la del método de Perturbación-P&O aumentan cuando L/D aumenta. Se observa que, para la excentricidad relativa elegida, el valor de O de la Perturbación-P&O es

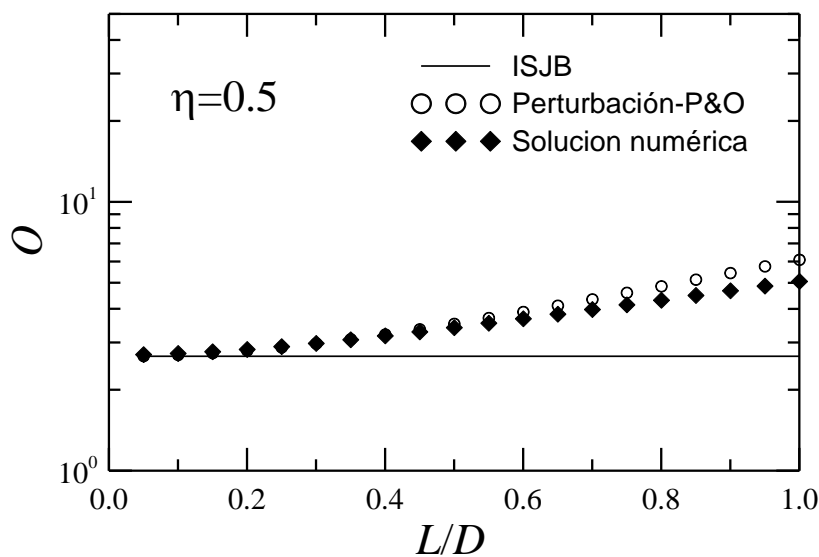


Figura 4.4: Número de Ocvirk en función de la relación de aspecto para $\eta=0,5$.

prácticamente coincidente con la solución numérica hasta $L/D \cong 0,65$, siendo la solución de Ocvirk correcta para $L/D < 0,2$. La corrección introducida por O_1 indudablemente mejora el valor de O , aun cuando existe sobreestimación cuando L/D aumenta

Una tercera manera de comparar los resultados es siguiendo un criterio similar al usado por Pandazaras y Petropoulos (2005), esto es, calculando las excentricidades relativas a las cuales se dan ciertos valores del número de Ocvirk en función de la relación de aspecto. En la Figura 4.5 se presentan los resultados para $O = 100, 10$ y 1 , siendo las predicciones de la solución de Ocvirk (y la del método de Perturbación-P0) constantes, ya que los O no son función de L/D . A medida que la relación de aspecto aumenta, el resultado numérico y del método de Perturbación-P&O se separan del ISJB pero resultan coincidentes a altos O (bajas excentricidades) y muy similares en números de Ocvirk de 10 y 1 (excentricidades ya bastante cercanas a 1 en este último caso).

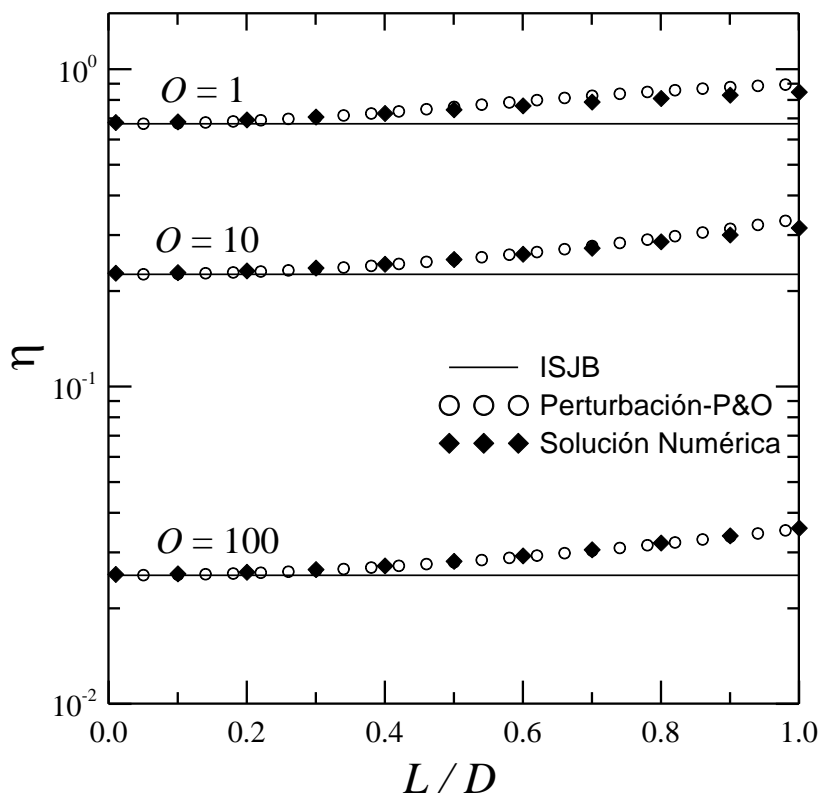


Figura 4.5: Excentricidad adimensional en función de la relación de aspecto para tres valores distintos del número de Ocvirk.

4.2.5 Perfiles de presión

La Figura 4.6 muestra los perfiles de las componentes de presión, p_0 y p_1 , predichos por el método de Perturbación-P&O en $z = 0$ para distintos valores de excentricidad relativa. Ellos fueron calculados con las Ecs. (38) y (40) usando los valores de O_0 y O_1 que se mostraron en

la Figura 4.2. La solución de orden cero define el mismo comportamiento que el descrito en el Capítulo anterior para cojinetes cortos, con un máximo en el perfil de presión que se desplaza hacia la zona de espesor mínimo de película cuando la excentricidad aumenta. La solución de primer orden, por su parte, presenta curvas que, en general, tienden a incrementar el valor de la solución de orden cero para ángulos pequeños y reducirla para ángulos grandes. En concordancia con lo esperado, el efecto es más notorio a medida que aumenta la excentricidad relativa.

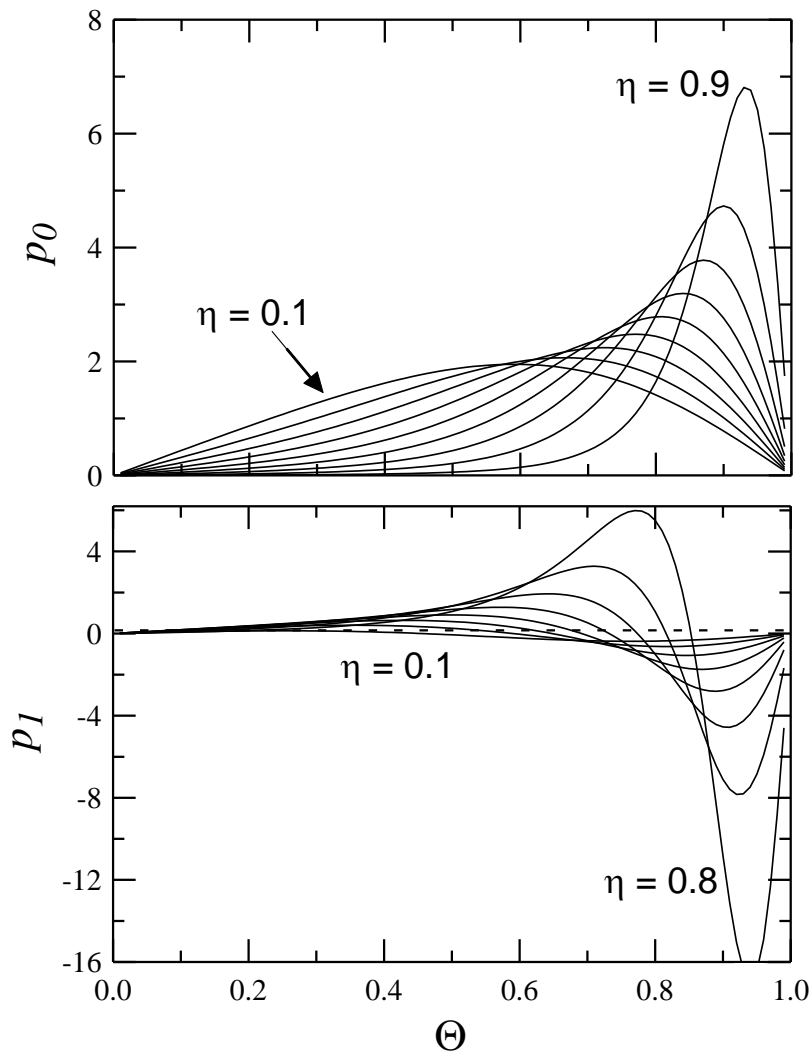


Figura 4.6: Perfiles de presión correspondientes a las soluciones de orden cero y uno en $z=0$.

Además, la Figura 4.6 permite observar que, a excentricidades pequeñas e intermedias, la corrección de orden uno tiene el efecto de desplazar levemente la curva de p_0 asemejándola a una correspondiente a una excentricidad levemente inferior (aumenta p_0 a ángulos intermedios y la baja a Θ grandes, cerca del espesor mínimo de lubricante). A excentricidades grandes, la corrección impuesta por p_1 también se torna importante, al punto que, a relaciones de aspecto

grandes, se predicen valores negativos de presión a Θ grandes. La Figura 4.7 ilustra este comportamiento para valores de relaciones de aspecto entre 0,45 y 0,89 (correspondientes a $(L/D)^2$ entre 0,2 y 0,8, respectivamente). Como se puede observar, a partir de relaciones de aspecto de $\sim 0,4$ comienzan a aparecer los primeros valores de presión negativa a Θ cercanos a 1 y $\eta > 0,8$. Luego, a medida que L/D aumenta, los valores de presión se hacen más negativos en la zona de Θ cercanos y mayores a 0,9.

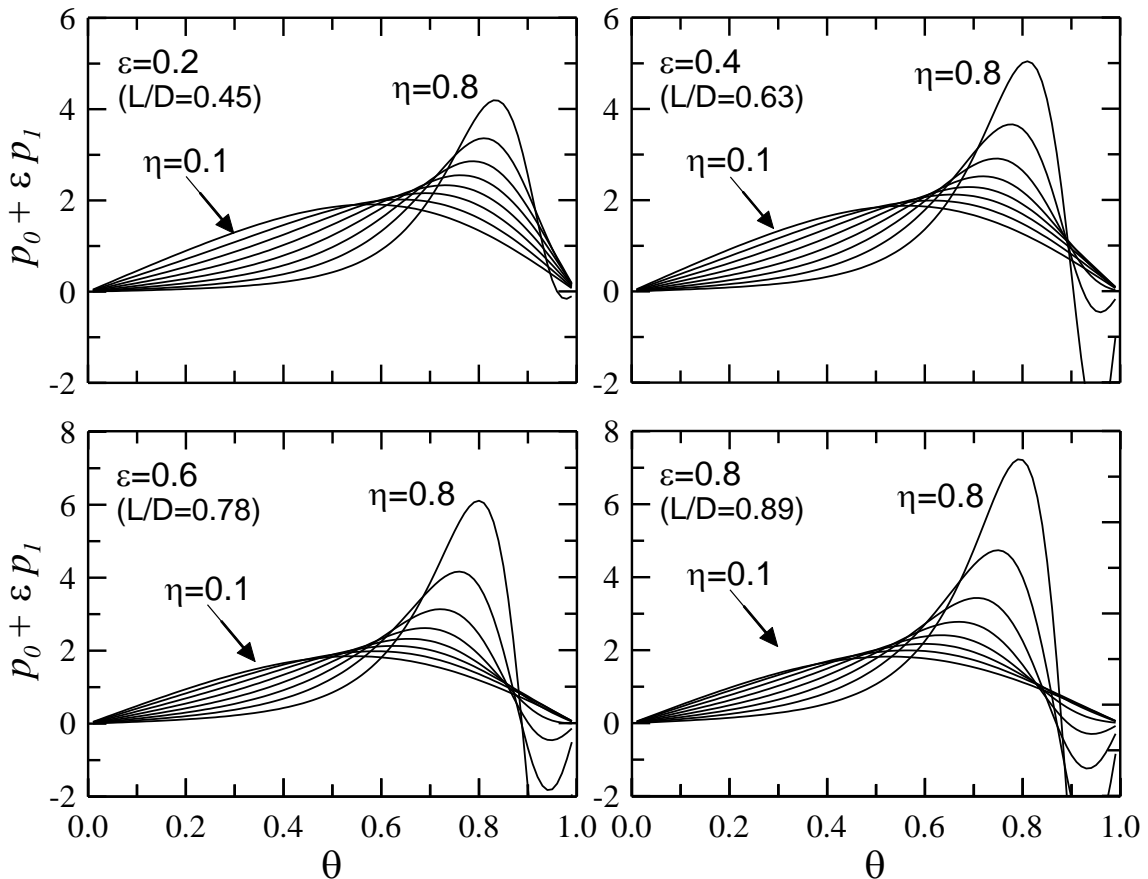


Figura 4.7: Perfiles de presión en función de la posición azimutal predichos por el modelo de Perturbación-P&O para relaciones de aspecto mayores a 0,45.

A modo de ejemplo, en la Figura 4.8 se comparan los perfiles de $p(\Theta)$ predichos por la aproximación del ISJB y los distintos métodos de perturbación para $L/D = 0,5$ y $\eta = 0,5$. También se incluye la solución exacta de la ecuación de Reynolds obtenida numéricamente. Todos los perfiles fueron calculados en $z = 0$. Se observa que, para las condiciones seleccionadas, todos los perfiles son cualitativamente correctos, aunque el que más se aproxima a la solución numérica es el predicho por la Perturbación-P&O, al menos hasta $\Theta \cong 0,75$. La solución de Ocvirk subestima la presión hasta $\Theta \cong 0,7$, comenzando a bajos ángulos con una variación de la presión con Θ menor que la esperada para compensar luego con una pendiente

más aguda a mayores ángulos que producen la sobreestimación de la presión a partir de $\Theta \cong 0,7$. El método de Perturbación-P0, que usa O_0 en el cálculo de p_1 (es decir, equivale a la Perturbación-P&O con $O_1=0$), es el que globalmente predice valores de presión más alejados de los resultados numéricos. Se observa una leve mejora respecto del ISJB a ángulos pequeños ($\Theta < 0,45$) pero luego sobreestima significativamente la presión a ángulos mayores, cuando p_1 se hace relativamente grande y negativa. Cabe recordar que, el uso forzado de $O = O_0$, hace que la integral de este perfil no satisfaga el cálculo de la capacidad portante, por lo que tampoco lo hace P_p , que es la presión con que está adimensionalizada p . Este método se incluye en la comparación porque también entrega resultados de orden uno y permite analizar el efecto de O_1 en los cálculos.

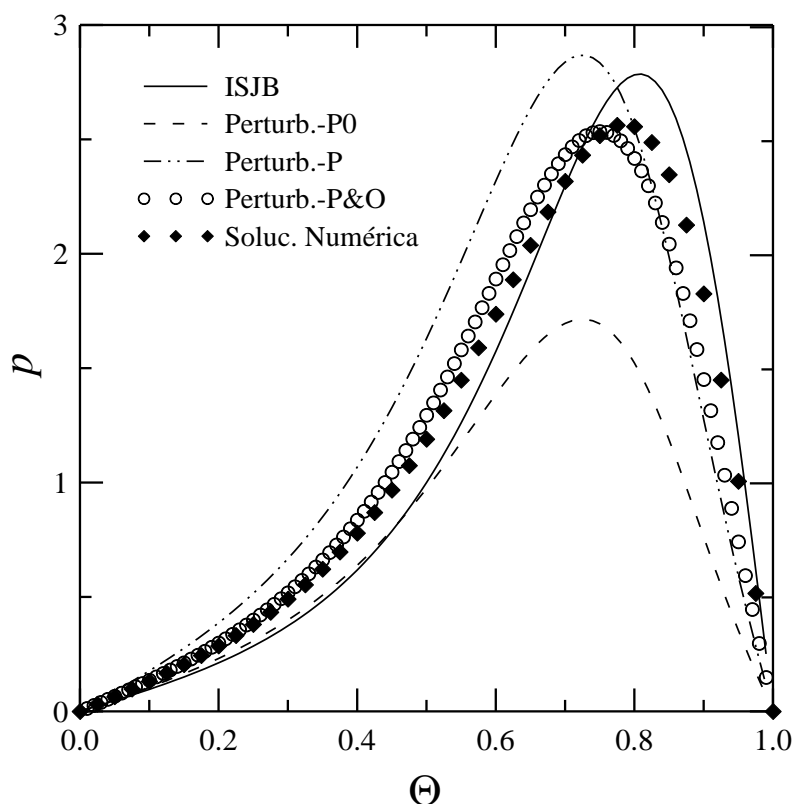


Figura 4.8: Comparación de perfiles de presión para $z=0, L/D=0,5$ y $\eta=0,5$.

En el método identificado como Perturbación-P (equivalente al uso de dos términos en la serie calculada por Buckholz y Hwang (1986)), el número de Ocvirk es calculado expandiendo en serie sólo la presión. Como se puede ver, la introducción de un término correctivo de la presión da lugar al comportamiento correcto, en el sentido que si se compara con la solución de Ocvirk, la presión comienza variando más rápidamente con la posición tangencial. Sin embargo la corrección es excesiva, y la solución de Perturbación-P termina

sobreestimando la presión en todos los ángulos hasta $\Theta \cong 0,8$, para luego subestimarla a mayores ángulos.

Los resultados de la Figura 4.8 muestran que la predicción de la Perturbación-P&O es la que más se aproxima a la solución numérica, captando mejor la física del flujo, al menos en la relación de aspecto y excentricidades medias que se consideran en este ejemplo. Este método predice un campo de presión que prácticamente coincide con la solución exacta hasta $\Theta \cong 0,4$ y se mantiene como la más cercana hasta $\Theta \cong 0,6$. De hecho, si se calcula la suma de las diferencias entre los valores de los logaritmos de las presiones predichas por los distintos métodos y los de las calculadas numéricamente en $0 < \Theta < 1$, resulta:

$$\sum_i |\log p_i - \log p_{i,num}| = \dots \quad 1.55 \text{ (ISJB)} \ ; \ 0.687 \text{ (Pert. - P \& O)} \ ; \ 2.29 \text{ (Pert. - P)}$$

al considerar los Θ cada 0,05 (se usan los logaritmos de las presiones para llevar a todos los valores al mismo orden de magnitud). Como se puede observar, el mínimo valor de la suma de diferencias corresponde a la Perturbación-P&O, seguido de la aproximación del ISJB. Es más, el perfil de la solución propuesta presenta una diferencia en Θ_{max} , es decir, en la posición en la que se da p_{max} , de aproximadamente 0,03, siendo el error porcentual en la magnitud de p_{max} de 1.3%, mientras que la solución de Ocvirk se excede en un 8.6%.

La Figura 4.9 presenta un análisis más completo de las capacidades y limitaciones del método propuesto. En ella se incluyen los perfiles de presión calculados en $z=0$ en función de la relación de aspecto (con $\eta = 0,5$) y de la excentricidad relativa (con $L/D = 0,5$) en tres posiciones distintas de Θ . Como se puede observar, la solución de Ocvirk coincide con la numérica en los tres ángulos considerados sólo a muy bajas relaciones de aspecto ($L/D < 0,1$ a $\eta = 0,5$) y excentricidades ($\eta < 0,05$ a $L/D = 0,5$). Estos valores aumentan si se disminuye η o L/D respectivamente, y viceversa. El método de Perturbación-P0, por su parte, no resulta, en general, apropiado. Sólo en ángulos pequeños, y un rango intermedio de excentricidades, este método presenta una leve mejora respecto de la solución de Ocvirk, independientemente de la relación L/D . Indudablemente, O_1 juega un papel fundamental en el progreso que representa el método de Perturbación-P&O.

El método de Perturbación-P, por otro lado, mejora la predicción del ISJB en los tres Θ simultáneamente en $L/D < 0,25-0,3$ (para $\eta = 0,5$) y $\eta < 0,2-0,3$ (para $L/D = 0,5$). Fuera de estos rangos, sobreestima la presión y rápidamente diverge a valores no reales. De hecho, de acuerdo a los resultados de la Figura 4.9, en un análisis global, la aproximación de ISJB

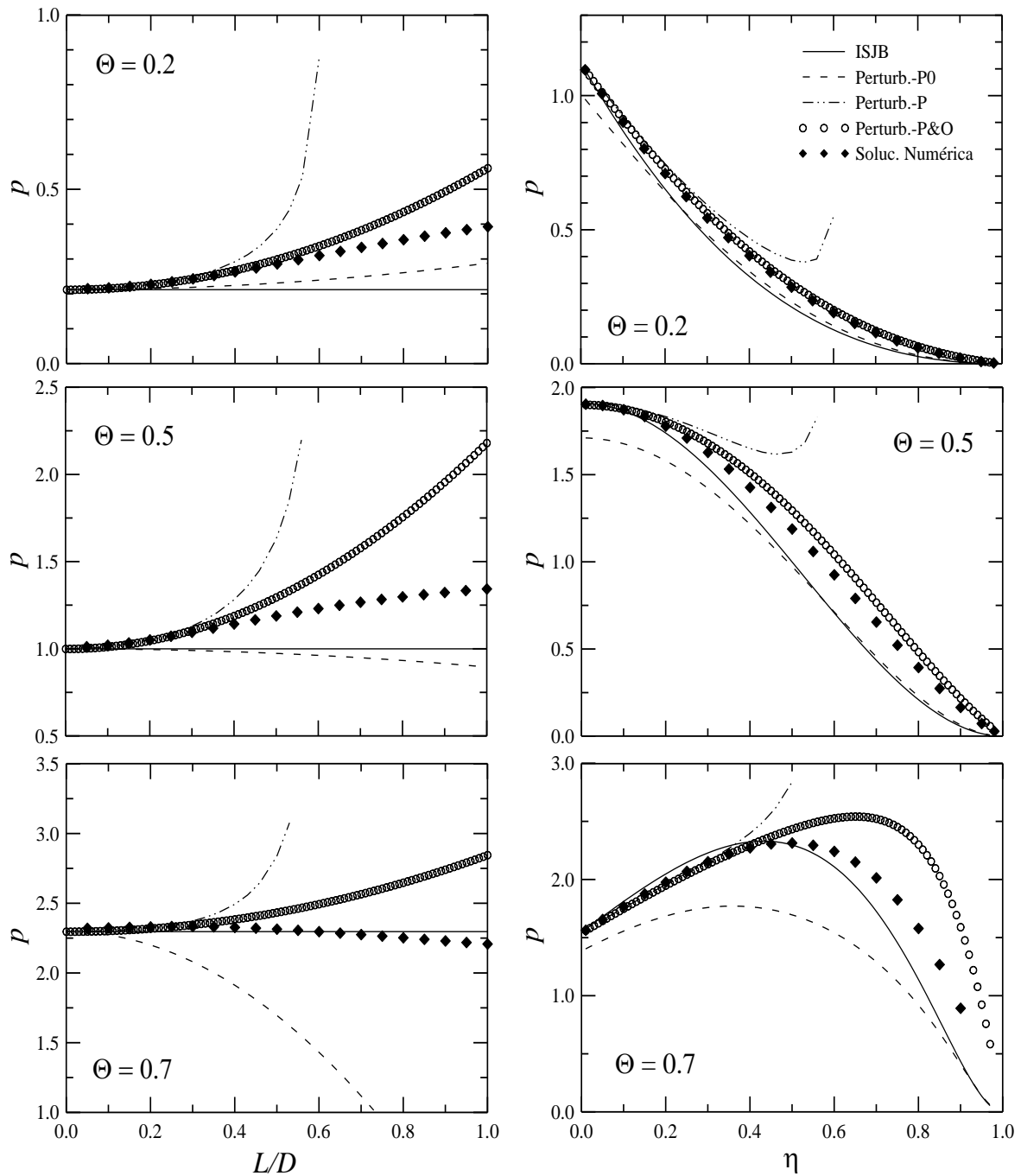


Figura 4.9: Perfiles de presión adimensional para tres diferentes posiciones tangenciales en función de la relación de aspecto (izq.) para $\eta = 0,5$, y en función de la excentricidad relativa (der.) para $L/D = 0,5$. En todos los casos, $z=0$.

realiza mejores predicciones de $p(\Theta)$ que los métodos de perturbación identificados como Perturbación-P y Perturbación-P0. Por otro lado, el método aquí propuesto, mejora notablemente las predicciones de la solución de Ocvirk. La presión calculada con la Perturbación-P&O coincide con la obtenida numéricamente en un rango más amplio de L/D y η , y da resultados realistas fuera de esos rangos. De hecho, la presión predicha por este método es prácticamente igual a la calculada numéricamente para $L/D < 0,35$ (para $\eta = 0,5$) y η

$<0,35$ (para $L/D=0,5$) en todo Θ , rango que se hace más extenso a Θ pequeños.

La variable que resta analizar es la funcionalidad de la presión con la dirección axial, z . La solución de Ocvirk, Ec. (38), predice una dependencia parabólica, $p \sim z^2$, mientras que la corrección de orden uno del método de Perturbación-P&O tiene una dependencia de tipo $p \sim z^4$ (ver Ecs. (40) y (41)). La Figura 4.10 muestra las predicciones del ISJB (que coinciden con

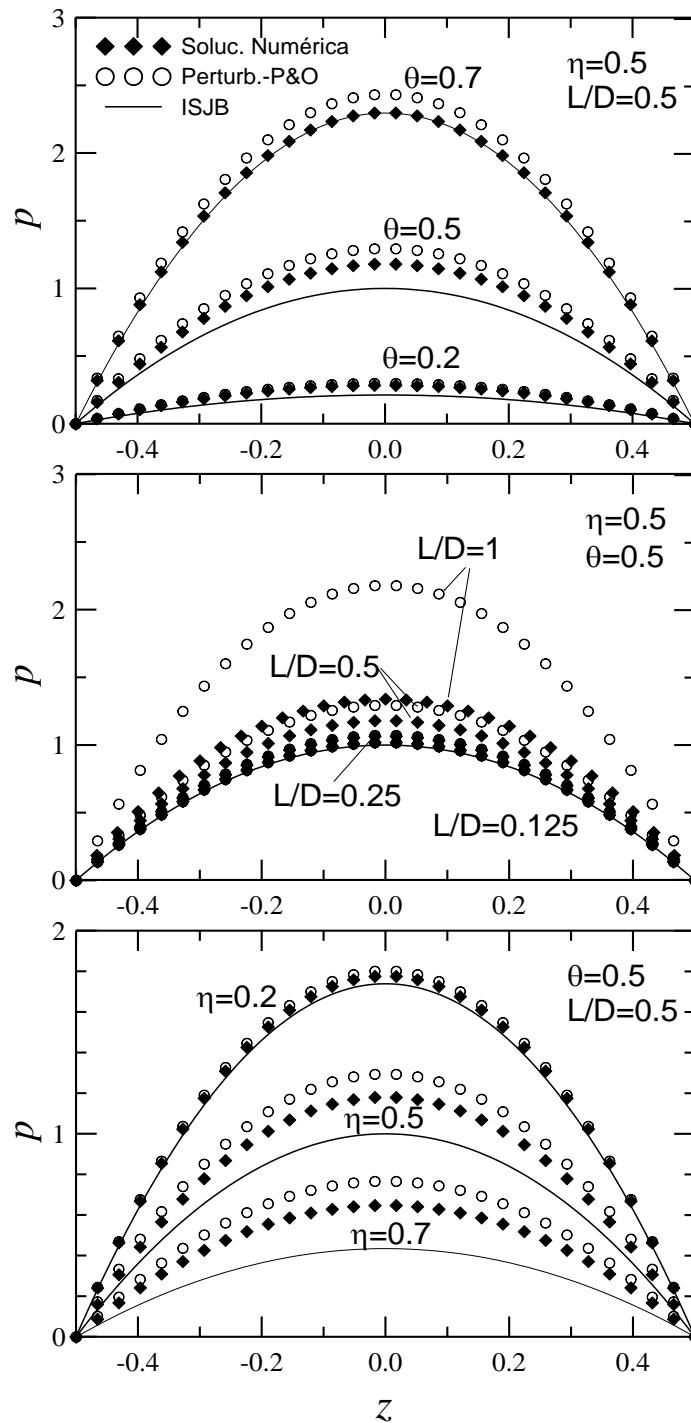


Figura 4.10: Perfiles de presión adimensional en función de la dirección axial para diferentes posiciones tangenciales (arriba), relaciones de aspecto (centro) y excentricidades relativas (abajo).

las de orden cero del método de perturbación propuesto) junto a las de Perturbación-P&O y la solución numérica de la Ecuación de Reynolds, para $-1/2 < z < 1/2$ y distintas combinaciones de posición azimutal, Θ , excentricidad, η , y relaciones de aspecto, L/D .

Como se puede observar, todos los perfiles tienen una simetría que no dista mucho de la forma parabólica de la solución de Ocvirk en cada caso. En cuanto a las posición relativa de las curvas, ésta es la misma que la comentada en las figuras previas para datos correspondientes a $z=0$. Se vuelve a notar que, en general, la aproximación de Ocvirk subestima los perfiles de presión y que la corrección impuesta por el término de orden uno es en la dirección adecuada (aumentando p en la mayoría de las condiciones estudiadas), aun cuando en general termina sobreestimando el valor de presión.

En cuanto a la forma de los perfiles, la Figura 4.11 muestra, a modo de ejemplo, el cociente de los perfiles de presión obtenidos para $\Theta=0,5$, $\eta=0,5$ y $L/D=0,5$ con el método de Perturbación-P&O y por solución numérica, respecto del perfil de orden cero (ISJB). Las diferencias respecto del perfil parabólico son realmente pequeñas (distancia de los símbolos respecto de las líneas sólidas delgadas). El gráfico incluye también el cociente entre el perfil predicho por el método de perturbación (círculos vacíos) y la solución numérica (círculos

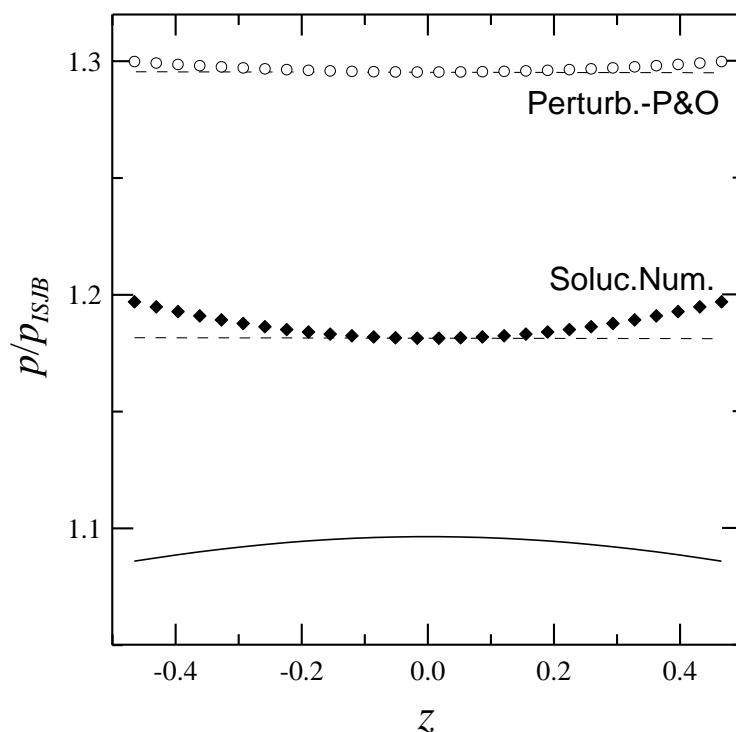


Figura 4.11: Cociente de los perfiles de presión calculados mediante solución numérica y usando el método de Perturbación-P&O respecto del correspondiente a la aproximación de Ocvirk. La línea sólida inferior corresponde al cociente del perfil de perturbación respecto de la solución numérica. Los cálculos corresponden a $\Theta=0,5$, $\eta=0,5$ y $L/D=0,5$.

llos) mostrado con una línea sólida (línea inferior). Como se puede ver, la dependencia con z del perfil real es levemente más marcada que la del tipo $p \sim z^4$ predicha por el método de Perturbación-P&O.

4.2.6 Capacidad portante

La carga o capacidad portante, W , se obtiene en forma directa de las Ecs. (31) y (42) una vez calculado el número de Ocvirk, quedando:

$$W = 2 \frac{\mu U L}{O} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2, \quad (53)$$

donde O es el número de Ocvirk dado por las soluciones de los diferentes métodos de cálculo y presentados en la Figura 4.3 para determinadas relaciones de aspecto. La Figura 4.12 presenta las correspondientes curvas de W adimensionalizada, W' ,

$$W' = \frac{W}{\mu U L \left(\frac{R}{c} \right)^2} = \frac{8}{O} \left(\frac{L}{D} \right)^2, \quad (54)$$

que básicamente corresponden a la inversa de las presentadas en la Figura 4.3. En el caso de la Perturbación-P&O, la expresión analítica de W se obtiene usando $O = O_0 + \varepsilon O_1$ con las expresiones de O_0 y O_1 calculadas con las Ecs. (48) y (51) respectivamente. Coincidiendo con los comentarios de la Figura 4.3, se observa que las predicciones del método propuesto resultan muy buenos, siendo excelentes para toda excentricidad a bajos L/D . Los valores de W' predichos comienzan a separarse de los calculados numéricamente a partir de $\eta \cong 0,6$ para $L/D = 1/2$, y de $\eta \cong 0,3$ para $L/D = 1$.

Como se observa, la capacidad portante calculada numéricamente es siempre menor a la predicha por la teoría del cojinete infinitamente corto, con una diferencia que aumenta a medida que la excentricidad y la relación de aspecto aumentan. En ese sentido, la corrección de primer orden introducida por el método de Perturbación-P&O es en la dirección correcta, aunque termina subestimando el valor.

Resulta interesante observar, además, que los datos de la Figura 4.12 enfatizan el concepto ya conocido del efecto de lubricación en los cojinetes. Se ve que para que la excentricidad relativa pase de casi nula a casi uno, la carga debe aumentar unas 4 décadas.

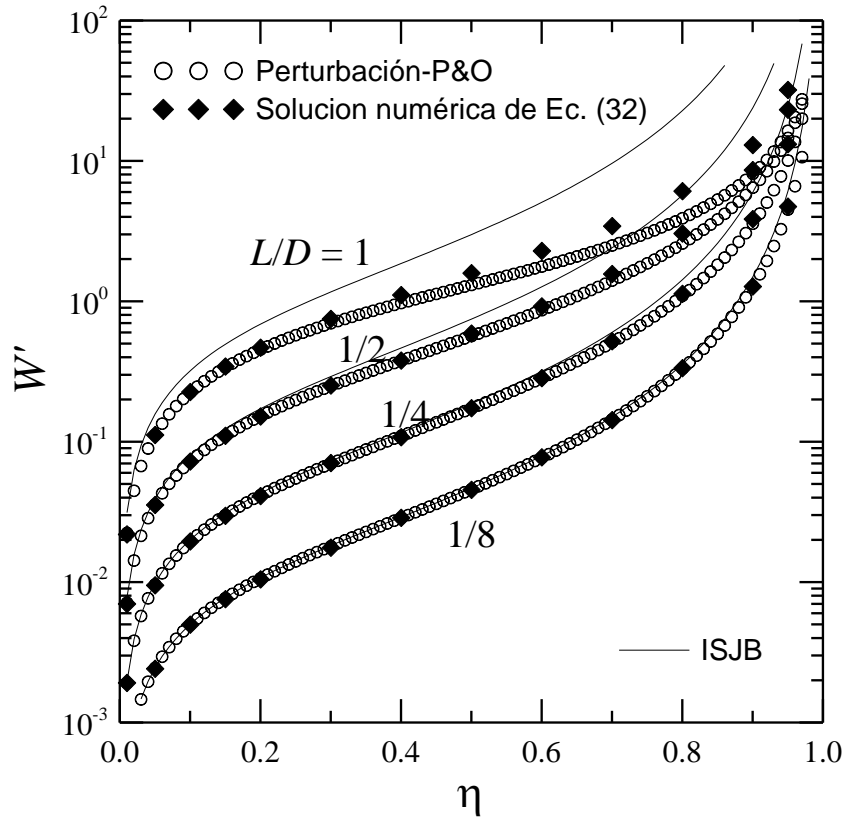


Figura 4.12: Capacidad portante en función de la excentricidad relativa calculada con distintos métodos para diferentes valores de L/D .

4.2.7 Tensión sobre la pared y fricción

De las componentes de tensión de corte presentes en este flujo, sin duda la más importante es asociada al gradiente de la velocidad en la dirección principal de movimiento circunferencial respecto de la dirección transversal (dirección del espesor de la película). En particular, resulta de interés calcular la tensión de corte en la pared en movimiento, esto es:

$$\tau_{YX}|_{Y=h} = -\mu \left. \frac{\partial V_X}{\partial Y} \right|_h = -\frac{\mu U}{c} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\bar{h}}, \quad (55)$$

que en forma adimensional se identifica como:

$$T = \frac{\tau|_h c}{\mu U} = - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\bar{h}}. \quad (56)$$

Este esfuerzo corresponde a una primera integración (en dirección y) del balance de cantidad de movimiento adimensional en dirección Θ (ver Ec. (64) del Capítulo 3) evaluado en la pared en movimiento. Para la zona $0 < \Theta < 1$, es:

$$T = -\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\tilde{h}} = -\left(\frac{1}{\pi O} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\tilde{h}}{2} + \frac{1}{\tilde{h}}\right). \quad (57)$$

Esta expresión muestra que la tensión tiene un aporte del flujo Couette de arrastre, que cobra más importancia cuanto menor es el espesor de la película, y otro debido al campo de presión generado. Este último será un aporte positivo a Θ chicos, cuando la presión aumenta a medida que Θ aumenta, y negativo, $\frac{\partial p}{\partial \Theta} < 0$, a Θ grandes. En el ángulo de presión máxima el aporte del flujo Poiseuille es nulo.

La Figura 4.13 muestra la distribución de tensión de corte en la pared del eje en función de la posición circunferencial, correspondiente a los perfiles de presión de la Figura 4.8. De igual manera, la Figura 4.14 presenta las distribuciones de T en función de L/D y η , correspondiente a los perfiles de presión de la Figura 4.9. La información contenida en estas figuras demuestra que las capacidades y limitaciones del método de Perturbación-P&O son las mismas al momento de predecir tanto la presión como la tensión de corte.

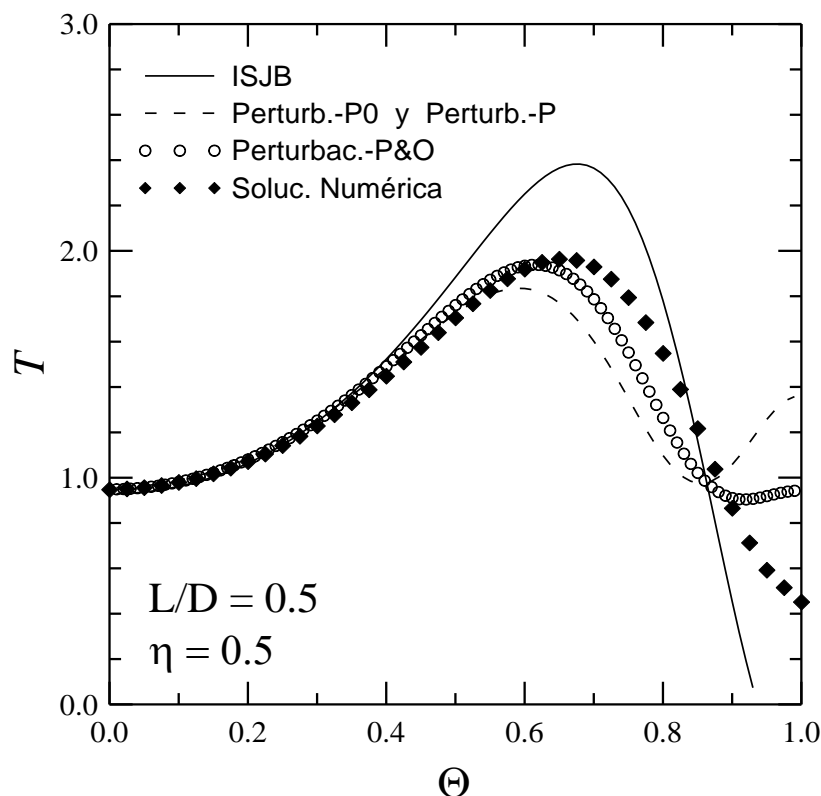


Figura 4.13: Esfuerzo de corte adimensional en función de la posición tangencial para $\eta=0,5$ y $L/D=0,5$, en $z=0$.

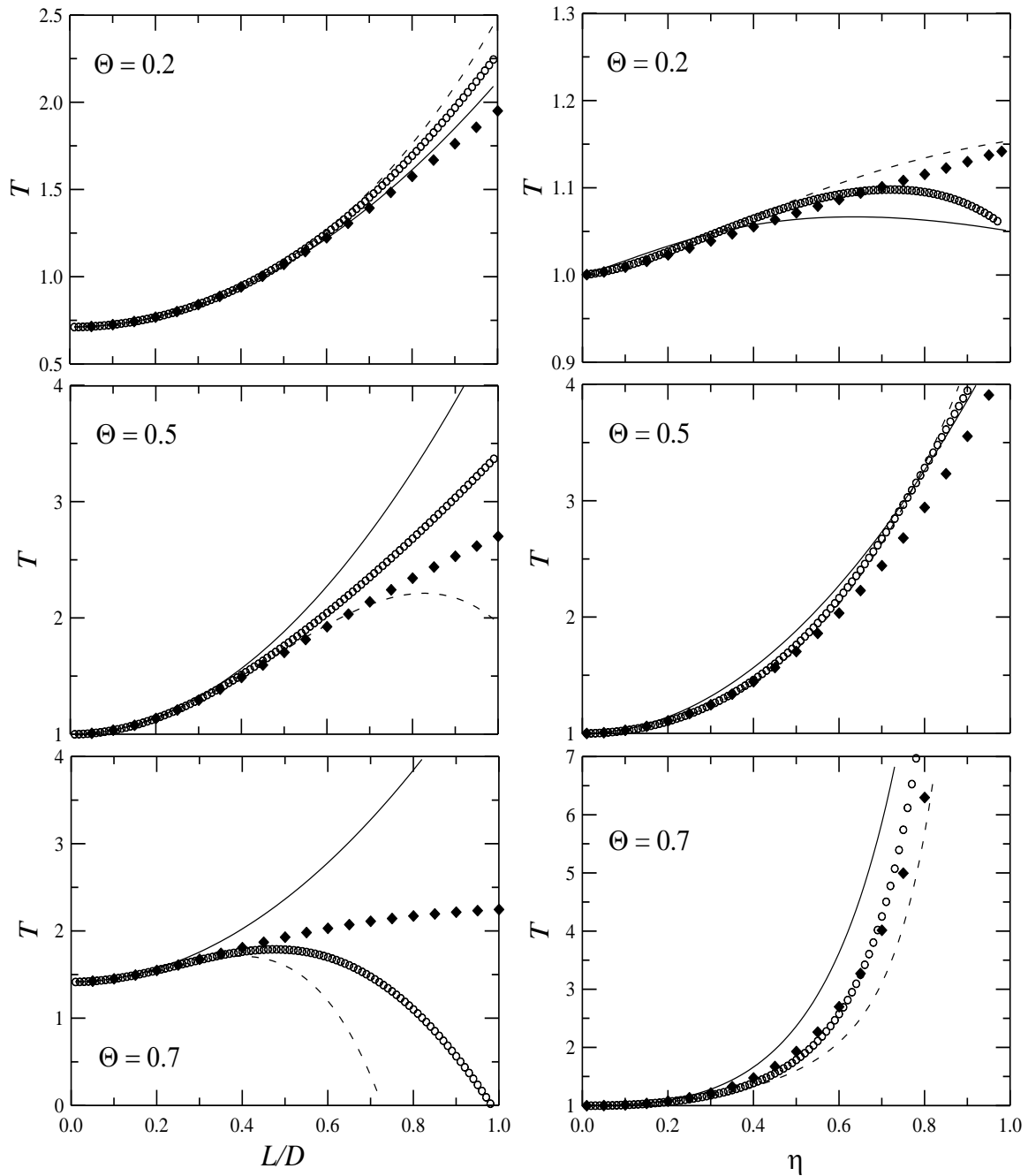


Figura 4.14: Esfuerzo de corte adimensional para tres posiciones tangenciales diferentes en función de la relación de aspecto (izq.) para $\eta=0,5$, y en función de la excentricidad relativa (der.) para $L/D=0,5$. En todos los casos, $z=0$.

Coincidiendo con los comentarios previos, la solución de Ocvirk resulta correcta al momento de describir el comportamiento de cojinetes muy cortos y de poca excentricidad. Los métodos de Perturbación-P y Perturbación-P0 dan como resultado los mismos perfiles de esfuerzo de corte, al menos en el rango de valores reales de O de la Perturbación-P. Esto se debe a que $p(\Theta)$ tiene la misma expresión analítica en ambos casos, que es proporcional al correspondiente O , por lo que la Ec. (57) da el mismo resultado.

De acuerdo con los resultados de las Figuras 4.13 y 4.14, nuevamente el método de Perturbación-P&O da resultados cercanos a la solución numérica en un rango mucho más amplio que la aproximación de ISJB. La solución de perturbación obtenida con el método propuesto coincide con la solución numérica hasta L/D de al menos 0,4 en los tres ángulos, y la mejora fuera de ese rango en prácticamente todas las condiciones analizadas. La desviación respecto de la solución numérica, al igual que ocurre en los demás métodos, se hace más notable a Θ grandes, sobre todo al aumentar la relación de aspecto. Esto se debe a que cuanto menor es el espesor de la película fluida (Θ grandes) el efecto del valor de la $\frac{\partial p}{\partial \Theta}$ se hace más notable. Recordar que esta derivada es máxima y negativa en Θ cercanos a 1 (ver Figura 4.8), e incluso pasa por cero y luego se hace positiva cuando el perfil de presión alcanza valores negativos (ver Figura 4.7). Cabe señalar que éste es un resultado que se vería muy afectado por un cambio en la CB de p en $\Theta = 1$, donde seguramente mejoraría al poner una CB sobre el valor de $\frac{\partial p}{\partial \Theta}$ en $\Theta = 1$.

La integración de la tensión de corte en la pared sobre toda la superficie del cojinete permite calcular la fuerza de fricción, F_f , que el fluido realiza sobre el mismo,

$$F_f = \int_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} \tau|_h \pi RL dz d\Theta \quad (58)$$

y el correspondiente coeficiente de fricción, f , definido como el cociente de la fuerza de fricción relativa a la capacidad portante,

$$f = \frac{F_f}{F} \quad (59)$$

Combinando luego esta ecuación con las Ecs. (56) y (58), y las definiciones de O y P_p dadas en Ecs. (31) y (42), resulta

$$f = \int_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} T \frac{\pi}{2} O \left(\frac{R}{L} \right)^2 \left(\frac{c}{R} \right) dz d\Theta \quad (60)$$

o, lo que es lo mismo

$$f \frac{R}{c} \left(\frac{L}{R} \right)^2 = \int_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\pi}{2} O T dz d\Theta \quad (61)$$

Esta integral se puede resolver en dos partes al considerar que T está dada por la Ec. (56) en el rango $0 < \Theta < 1$, y asumiendo que en $1 < \Theta < 2$ sólo existe flujo Couette (como si la presión fuera constante y nula),

$$f \frac{R}{c} \left(\frac{L}{R} \right)^2 = \frac{\pi}{2} O \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\tilde{h}} dz d\Theta + \frac{\pi}{2} O \int_1^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\tilde{h}} dz d\Theta, \quad (62)$$

que, en combinación con la Ec.(57), y reordenando, resulta en:

$$f \frac{R}{c} \left(\frac{L}{R} \right)^2 = \varepsilon \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{h} \left. \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right|_{\tilde{h}} dz d\Theta + \frac{1}{2} \pi O \int_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\tilde{h}} dz d\Theta \quad (63)$$

Esta ecuación queda formada por dos términos, el primero, de orden ε , es correctivo del segundo, que es dominante. Este segundo término corresponde al flujo por arrastre sobre toda la superficie del eje, mientras que el primero se refiere al efecto del gradiente de presión en la sección convergente del flujo en el cojinete. Por otro lado, esta relación muestra que el lado izquierdo de la ecuación tiene que tener el mismo orden de magnitud que el término dominante de la derecha, ya que sólo hay tres términos en la igualdad. Esto significa que el

producto $f \frac{R}{c} \left(\frac{L}{R} \right)^2$ es de orden cero, y el factor $f \frac{R}{c}$ es de orden $\left(\frac{R}{L} \right)^2$.

Analizando la Ec. (63) también se observa que el valor de $f \frac{R}{c} \left(\frac{L}{R} \right)^2$ para la aproximación del ISJB ($L/D \rightarrow 0$) coincide con el término de orden cero de los métodos de Perturbación-P0 y Perturbación-P&O (usando O_0). No así con el de Perturbación-P, que se basa en el uso de O , calculado de la integración de fuerzas usando la presión expandida. Los términos correctivos, de orden uno, de los métodos de Perturbación-P y Perturbación-P0 están dados por el primer término integral de la Ec. (63) usando la expresión de orden cero de la presión, p_0 . En cambio, el método de Perturbación-P&O contempla un término adicional de primer orden, el que se obtiene de reemplazar O por $O_0 + \varepsilon O_1$ en la segunda integral. Es decir:

Para el ISJB:

$$f \frac{R}{c} \left(\frac{L}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi O_0 \int_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\tilde{h}} dz d\Theta \quad (64)$$

Para Perturbación -P0:

$$f \frac{R}{c} \left(\frac{L}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi O_0 \int_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\tilde{h}} dz d\Theta + \varepsilon \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{h} \left. \frac{\partial p_0}{\partial \Theta} \right|_{\tilde{h}} dz d\Theta + O(\varepsilon^2) \quad (65)$$

Para Perturbación -P:

$$f \frac{R}{c} \left(\frac{L}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi O \int_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\tilde{h}} dz d\Theta + \varepsilon \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{h} \left. \frac{\partial p_0}{\partial \Theta} \right|_{\tilde{h}} dz d\Theta + O(\varepsilon^2) \quad (66)$$

Para Perturbación -P&O:

$$f \frac{R}{c} \left(\frac{L}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi O_0 \int_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\tilde{h}} dz d\Theta + \varepsilon \left[\int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{h} \left. \frac{\partial p_0}{\partial \Theta} \right|_{\tilde{h}} dz d\Theta + \frac{1}{2} \pi O_1 \int_0^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\tilde{h}} dz d\Theta \right] + O(\varepsilon^2) \quad (67)$$

que se resuelven con $\tilde{h} = \frac{h}{c} = 1 + \eta \cos(\pi\Theta)$ y la expresión de p_0 dada en la Ec. (38).

La Figura 4.15 muestra el coeficiente de fricción adimensional en función de la excentricidad para los cuatro valores de L/D usados en las Secciones anteriores. Estas figuras también incluyen los resultados de la solución numérica de la Ecuación de Reynolds y de la solución numérica de Raimondi & Boyd. Se observa que para $L/D = 1/8$, los coeficientes predichos son prácticamente indistinguibles a todas las excentricidades. Lo mismo ocurre a η pequeños en las otras relaciones de aspecto, aunque el rango de coincidencia entre las predicciones decrece a medida que L/D aumenta.

El término de primer orden en la solución de Perturbación-P0 (generado por la variación azimutal de p) aumenta ligeramente el valor del coeficiente de fricción del ISJB, el cual es aún muy bajo comparado con la solución exacta, principalmente para grandes valores de L/D . El método de Perturbación-P da resultados más próximos a la solución numérica, sobre todo hasta relaciones de aspecto de aproximadamente 0,5, pero luego se aleja y termina generando resultados no reales a excentricidades que rápidamente decrecen al aumentar L/D . Las mejores predicciones son las que se obtienen con el método de Perturbación-P&O, que coinciden casi exactamente con los resultados numéricos, y hasta logran predecir satisfactoriamente el factor de fricción para valores de $L/D > 1$ y $\eta \rightarrow 1$. El método de Perturbación-P&O, al contemplar la expansión de ambos, la presión y el número de Ocvirk (una medida de la presión media adimensional), es el que mejor captura la naturaleza del flujo en el cojinete hidrodinámico.

Finalmente, la Figura 4.16 muestra curvas del coeficiente de fricción en función de la relación de aspecto para tres valores constantes del número de Ocvirk. Este método ya fue usado para relacionar las variables geométricas en función de este parámetro operativo

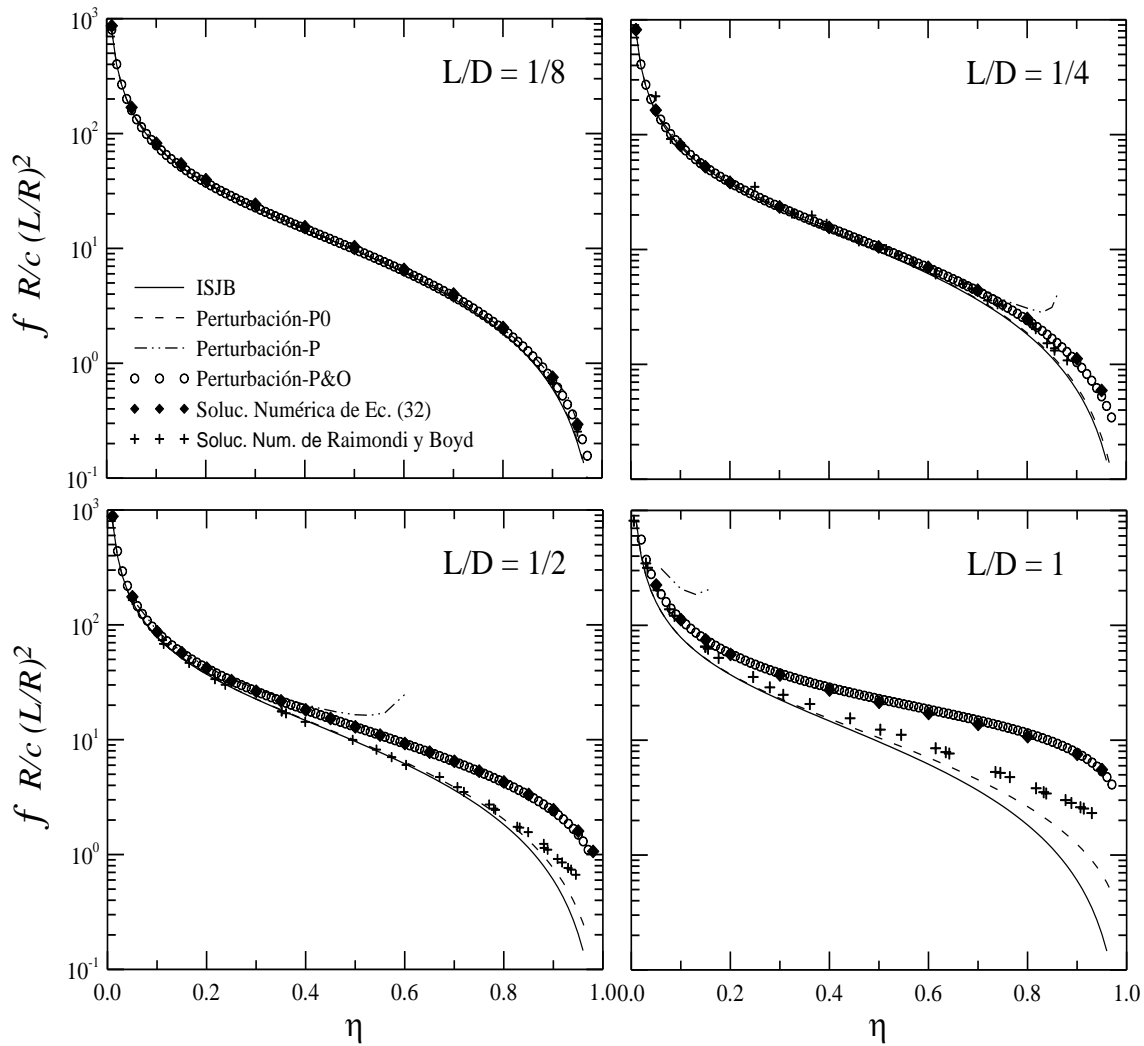


Figura 4.15: Coeficiente de fricción adimensional en función de la excentricidad para distintas relaciones de aspecto.

(Figura 4.5) correspondiendo a la propuesta de Pandazaras y Petropoulos (2005). Así como la Figura 4.5 muestra que distintos valores de O determinan diferentes rangos de excentricidad que deben usarse en el rango de $0 < L/D < 1$, la Figura 4.16 muestra que esos valores del número de Ocvirk determinan también diferentes rangos del coeficiente de fricción. Como es de esperar, a medida que O decrece, la excentricidad aumenta y el coeficiente $f \frac{R}{c} \left(\frac{L}{R}\right)^2$ decrece. La figura muestra que, a bajos valores de L/D , todas las curvas coinciden en todos los números de Ocvirk, pero que, a medida que la relación de aspecto aumenta, las curvas operacionales se separan. La aproximación de ISJB predice valores constantes en cada O mientras que los otros métodos generan curvas cuyos valores aumentan a medida que L/D lo hace. También se aprecia que, cuanto menor es el valor de O , mayor es la separación relativa de las curvas, y que, coincidiendo con los resultados previos comentados, el método de

Perturbación-P&O es el que sigue más de cerca la solución numérica de la Ecuación de Reynolds.

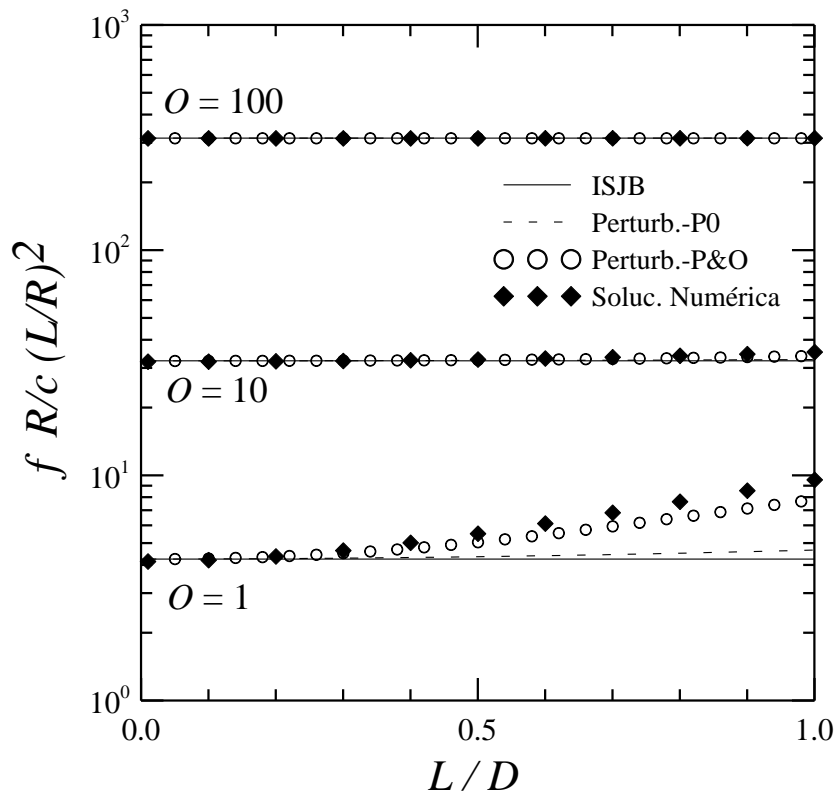


Figura 4.16: Coeficiente de fricción en función de L/D calculado para tres valores de número de Ocvirk.

4.2.8 Caudal de fluido

El fluido lubricante es constantemente introducido en el cojinete hidrodinámico a través de un orificio central o ranura con un caudal que iguala el caudal con que sale por los bordes (en $z = \pm 1/2$). Por lo tanto, el caudal de fluido que debe suministrarse al cojinete, Q_s , se puede calcular integrando la velocidad axial en las secciones de salida. Para una de ellas sería:

$$Q_s = \int_0^{2\pi} \int_0^h V_z \Big|_{z=L/2} R dY d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{\pi U c R^2}{L} w \Big|_{z=1/2} dy d\Theta \quad (68)$$

donde se ha considerado que el $\mathcal{O}(y)$ es c , y el $\mathcal{O}(V_z)$ es UR/L (ver Ec. (26) del Capítulo 3).

Por otra parte, el perfil de velocidad axial surge de la integración de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en dirección z , lo que resulta en la Ec. (67) del Capítulo 3. Expresando esa ecuación en base a la nueva presión de referencia, P_p (ver inicio de Sección 2.3), es:

$$w = \frac{1}{2O} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - \tilde{h} y) . \quad (69)$$

Reemplazando la Ec. (69) en la (68), y usando $U = 2\pi RN$, resulta:

$$Q_s = \int_0^1 \int_0^{\tilde{h}} \frac{\pi U c L}{2O} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=1/2} (y^2 - \tilde{h} y) dy d\Theta = -\frac{\pi^2}{6} \frac{RNcL}{O} \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta , \quad (70)$$

donde se ha considerado que $p=0$ en la sección divergente del cojinete. El caudal adimensional, q_s , será:

$$q_s = \frac{Q_s}{RNcL} = -\frac{\pi^2}{6O} \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta . \quad (71)$$

Para la aproximación de ISJB, el cálculo de caudal resulta muy sencillo ya que, de acuerdo con la Ec. (38), es:

$$\frac{dp_0}{dz} \Big|_{z=1/2} = -3O_0 \frac{\eta \sin(\pi\Theta)}{[1 + \eta \cos(\pi\Theta)]^3} = 3O_0 \frac{\eta \sin(\pi\Theta)}{\tilde{h}^3} . \quad (72)$$

que introducida en la Ec. (71), resulta en:

$$q_{s,Ockirk} = \pi\eta \quad (73)$$

Este resultado coincide con la predicción de orden cero del método de Perturbación-P&O. Para encontrar la corrección de orden uno del caudal es necesario operar sobre la Ec. (71). Para ello,

$$\begin{aligned} q_{s,P\&O} &= \frac{Q_{s,P\&O}}{RNcL} = -\frac{\pi^2}{6O} \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta = -\frac{\pi^2}{6} \frac{\int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial(p_0 + \varepsilon p_1)}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta}{O_0 + \varepsilon O_1} = \\ &= -\frac{\pi^2}{6} \frac{\int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_0}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta + \varepsilon \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta}{O_0 + \varepsilon O_1} \end{aligned} \quad (74)$$

que se puede multiplicar y dividir por $O_0 - \varepsilon O_1$ de manera que en el denominador quede una expresión de orden cero con corrección de orden dos (despreciable al calcular los términos de orden uno). Así:

$$\begin{aligned}
 q_{s,P\&O} &= -\frac{\pi^2}{6} \frac{\int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_0}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta + \varepsilon \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta}{O_0 + \varepsilon O_1} \frac{O_0 - \varepsilon O_1}{O_0 - \varepsilon O_1} = \\
 &= -\frac{\pi^2}{6} \frac{\left(\int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_0}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta + \varepsilon \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta \right) (O_0 - \varepsilon O_1)}{O_0^2 - \varepsilon^2 O_1^2} = \\
 &\cong -\frac{\pi^2}{6} \frac{O_0 \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_0}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta + \varepsilon O_0 \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta - \varepsilon O_1 \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_0}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta + O(\varepsilon^2)}{O_0^2} = \\
 &= -\frac{\pi^2}{6} \left[\frac{1}{O_0} \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_0}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta + \varepsilon \frac{1}{O_0} \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta - \varepsilon \frac{O_1}{O_0^2} \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_0}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta \right] + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{75}$$

Lo que lleva a:

$$q_{s,0} \Big|_{P\&O} = q_{s,Ocvirk} = \pi\eta \tag{76}$$

y

$$\begin{aligned}
 q_{s,1} \Big|_{P\&O} &= -\frac{\pi^2}{6} \left[\frac{1}{O_0} \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta - \frac{O_1}{O_0^2} \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_0}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta \right] = \\
 &= -\frac{\pi^2}{6O_0} \int_0^1 \tilde{h}^3 \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=1/2} d\Theta + \frac{O_1}{O_0} q_{s,0}
 \end{aligned} \tag{77}$$

Los resultados de caudal de lubricante de la solución numérica exacta de la Ecuación de Reynolds y de la aproximación de Ocvirk y el método de Perturbación-P&O se presentan en la Figura 4.17 en función del número de Ocvirk. Como se puede observar, el caudal adimensional lateral, q_s , aumenta a medida que la excentricidad aumenta. Esto se debe a que la presión en el centro del cojinete relativa a la presión exterior aumenta. Por otro lado, también se observa que la predicción de la aproximación de Ocvirk subestima el caudal lateral. A medida que L/D aumenta, q_s disminuye. En este sentido, la predicción del método de Perturbación-P&O representa una mejora respecto del ISJB, aunque, como sucede con otros parámetros, introduce una corrección demasiado grande y termina subestimando el caudal.

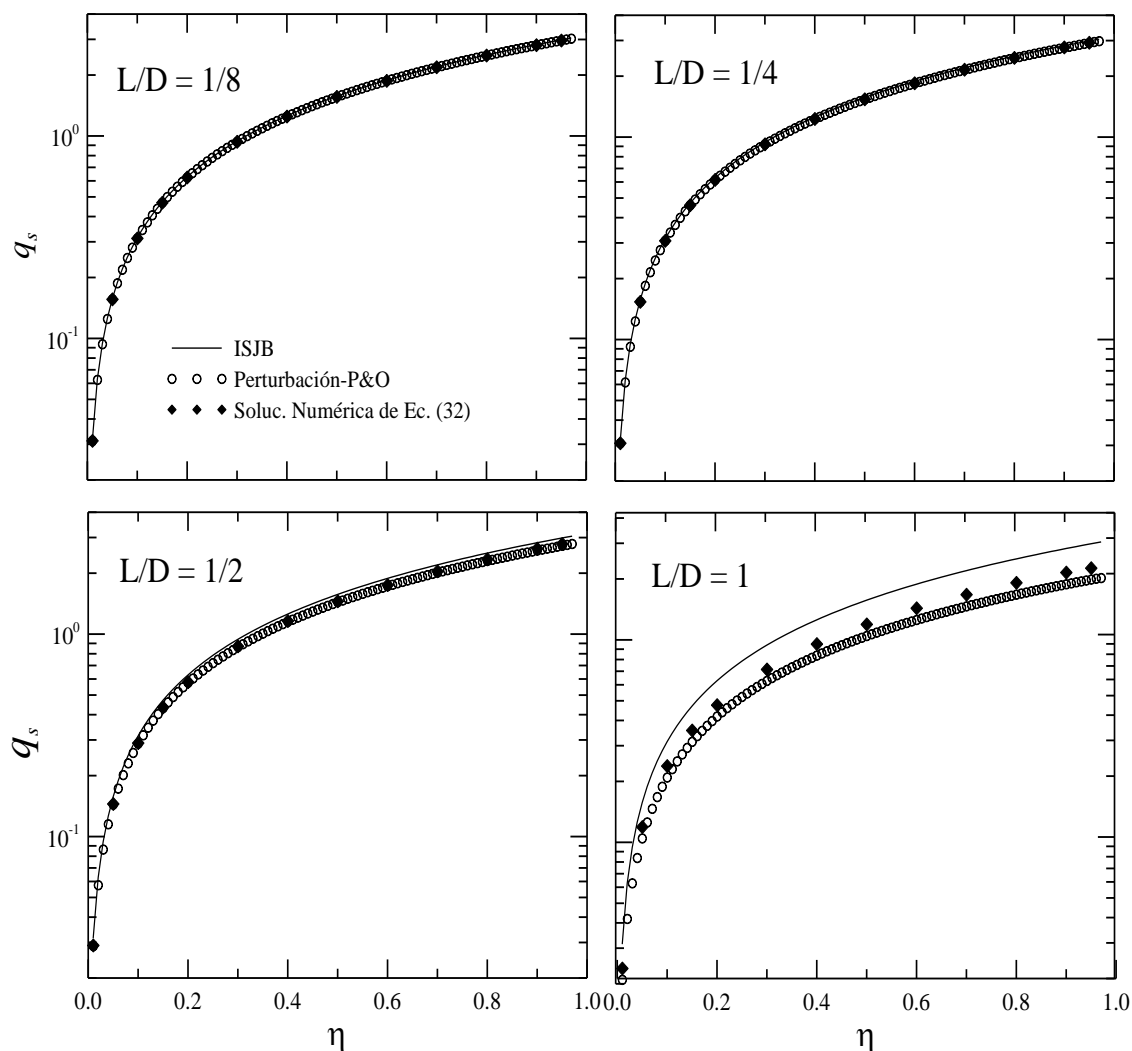


Figura 4.17: Caudal de suministro adimensional en función de la excentricidad, calculado para distintos valores de L/D .

4.2.9 Discusión del método propuesto

El mecanismo de cálculo propuesto se basa en la utilización del método de perturbación regular para obtener una solución analítica aproximada de la ecuación de Reynolds en cojinetes relativamente cortos, tomando como parámetro de perturbación a la relación $(L/D)^2$. La novedad del método reside en que la expansión en serie se hace sobre la variable de la ecuación, p , y también sobre uno de los parámetros de la misma, el número de Ocvirk (O), manteniendo como solución de orden cero la del cojinete infinitamente corto (ISJB). La propuesta se fundamenta en el hecho que el número de Ocvirk es una presión media adimensional y que el orden magnitud de esta presión varía con la relación de aspecto.

En el desarrollo presentado se han analizado las principales variables del sistema: presión y tensión de corte, así como los parámetros de funcionamiento que surgen de la integración de las mismas: capacidad portante, fricción y caudal de suministro. En el estudio se ha

considerado la variación de estas variables y funciones con respecto a la posición azimutal y axial (cuando corresponde) y con respecto a la relación de aspecto (hasta $L/D=1$) y la excentricidad relativa.

Los resultados obtenidos mediante el método propuesto son comparados con los correspondientes a la solución de Ocvirk, al método de perturbación expandiendo sólo la presión, y los resultados exactos obtenidos mediante la solución numérica de la ecuación diferencial gobernante. Así se infieren los siguientes límites en cuanto a la correcta descripción del comportamiento de cojinetes cortos:

Método	$L/D=1/8$	$L/D=1/4$	$L/D=1/2$	$L/D=1$
ISJB	$\eta < \sim 1$	$\eta < \sim 0,6$	$\eta < \sim 0,2$	$\eta \rightarrow 0$
Perturb.-P	$\eta < \sim 1$	$\eta < \sim 0,5$	$\eta < \sim 0,3$	$\eta \rightarrow 0$
Perturb.-P&O	$\eta < \sim 1$	$\eta < \sim 0,9$	$\eta < \sim 0,6$	$\eta < \sim 0,4$

En particular, en el caso de variables calculadas mediante la integración del campo de presión o de tensión, como la capacidad portante, el factor de fricción y el caudal lateral, e incluso el número de Ocvirk mismo, la mejora en cuanto a la ampliación del rango de precisión en la predicción es grande. El factor de fricción, por ejemplo, es bien descrito incluso para cojinetes con relación de aspecto de hasta 1 y excentricidades medias a altas.

Se concluye, entonces, que el considerar el número de Ocvirk como una variable expandible produce mejoras notables en la descripción analítica de los campos de flujo de cojinetes hidrodinámicos, e incluso mejoras sobresalientes en el cálculo de la capacidad portante y el coeficiente de fricción.

Por otro lado, como ya se comentara, se observa que la corrección que representa el incluir los términos de orden uno de p y O respecto de la solución de Ocvirk, tiende a ser mayor a la necesaria, sobre todo a medida que η y/o L/D aumentan. Esta es una conclusión típica de la aplicación del método de perturbación para encontrar soluciones analíticas cuando se mantiene sólo el primer término corrector de las serie, el de orden uno. Este término suele captar la naturaleza del fenómeno despreciado por la solución de orden cero, pero la falta de otros términos de la serie, hacen que la corrección sea relativamente brusca (Bender y Orszag, 1978; Deen, 1998; Boas, 2006).

4.3 ANÁLISIS TERMOHIDRODINÁMICO DE COJINETES CORTOS

Como ya se comentara, la teoría de lubricación hidrodinámica isotérmica es extensamente utilizada para determinar el comportamiento de cojinetes hidrodinámicos. Sin embargo, a medida que aumentan las necesidades desde el punto de vista tecnológico, las condiciones de operación a las que se ven sometidos los cojinetes se hacen más severas. Esto implica, en general, mayor carga unitaria y velocidad de rotación, ocasionando que la temperatura del fluido lubricante varíe notablemente como consecuencia de la disipación de energía por efectos viscosos. Dado que las propiedades del fluido son función de la temperatura, sobre todo la viscosidad, cuanto más severas sean las condiciones de operación de un cojinete, menos certera será la predicción de su funcionamiento utilizando la hipótesis de flujo isotérmico. Por ende, se necesita la solución conjunta de los balances de cantidad de movimiento, masa y energía para poder obtener perfiles más exactos de presión y temperatura.

En esta Sección se presenta la solución analítica semi-acoplada de las ecuaciones de conservación para el caso del cojinete corto lubricado con un fluido Newtoniano con viscosidad variable con la temperatura. Se usan para ello dos planteos diferentes. El sistema es semi-acoplado porque se puede resolver primero el perfil de temperatura, el cual luego afecta al perfil de presión a través de la viscosidad. Lo novedoso del tratamiento radica en la incorporación de una temperatura promedio representativa como variable al momento de resolver el sistema de ecuaciones, lo que disminuye el grado de no-linealidad.

El sistema en estudio se muestra en la Figura 4.18. Este es equivalente al considerado en las Secciones previas, con la salvedad que ahora se necesita especificar la posición donde se suministra fluido a temperatura T_0 a la película lubricante, señalada con el ángulo β en la Figura.

Como se viera en el Capítulo 3 a través de las Ecs. (54) a (57), las ecuaciones de conservación adimensionales que describen el flujo de un fluido Newtoniano de densidad, ρ , y capacidad calorífica, C_v , constantes, para $c \ll R$, son:

$$\text{BM:} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \quad (78)$$

$$\text{BCM (X):} \quad 0 \approx -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (79)$$

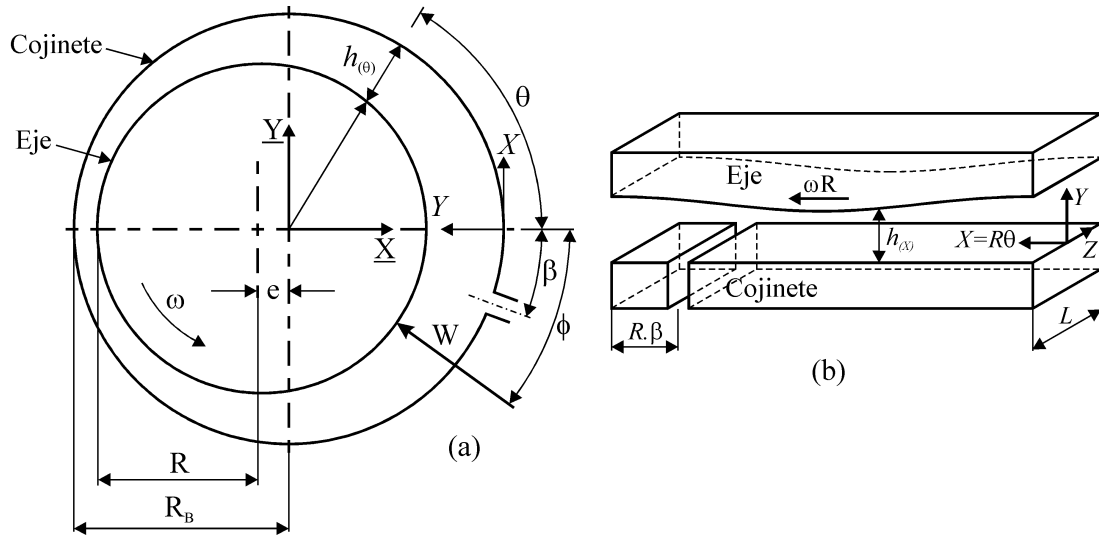


Figura 4.18: Geometría de un cojinete hidrodinámico y de su equivalente en coordenadas cartesianas, en la que señala la ubicación del ingreso de lubricante al sistema.

$$\text{BCM (Z): } 0 \approx -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (80)$$

$$\text{BE: } \frac{\partial t}{\partial t} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 w \frac{\partial t}{\partial z} \approx \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \quad (81)$$

donde se había considerado la viscosidad del fluido μ constante, el número de Brickman de orden 1, las temperatura y presión características, o de referencia²: $T_{ref} = \frac{\mu U}{\rho C_v R} \left(\frac{R}{c}\right)^2$ y

$P_{ref} = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c}\right)^2$, y las adimensionalizaciones:

$$x \rightarrow \frac{X}{R} ; \quad y \rightarrow \frac{Y}{c} ; \quad z \rightarrow \frac{Z}{L} ; \quad u \rightarrow \frac{V_x}{U} ; \quad v \rightarrow \frac{V_y}{V} ; \quad w \rightarrow \frac{V_z}{W} \quad (82)$$

con $V = U \frac{c}{R}$ y $W = U \frac{R}{L}$.

Permitiendo que la viscosidad varíe con la temperatura, y considerando el uso del orden de magnitud de V_z y la presión característica correspondientes a cojinetes cortos, esto es,

$W = U \frac{L}{R}$ y $P_{ref} = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2$, respectivamente, las ecuaciones para flujo no-isotérmico

en estado estacionario resultan:

² Dado que en esta sección se usa el subíndice 'c' en T_c para referenciar la temperatura del 'cojinete', se usará el subíndice 'ref' para los valores característicos, o de referencia, de la presión y la temperatura.

$$\text{BM:} \quad 0 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (83)$$

$$\text{BCM (X):} \quad 0 = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial \Theta} + f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (84)$$

$$\text{BCM (Z):} \quad 0 \approx -\frac{\partial p}{\partial z} + f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (85)$$

$$\text{BE:} \quad \left(\frac{u}{\pi} \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \lambda \left[\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right] + f \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (86)$$

donde $\lambda = \frac{kR}{Uc^2 \rho C_v}$, siendo k la conductividad del fluido. El parámetro λ sería equivalente a

la inversa del número de Péclet (Pe) multiplicado por la relación radio a huelgo, es decir, $\frac{1}{\lambda} = \frac{Uc \rho C_v}{k} \left(\frac{c}{R} \right) = Pe \left(\frac{c}{R} \right)$. Cabe recordar que el Balance de Cantidad de Movimiento en

dirección y y no se incluye ya que, al ser de orden de magnitud $\frac{c}{R}$, permite asumir que la presión no depende de esta coordenada. Con la misma justificación, en las ecuaciones anteriores se ha supuesto, además, que la viscosidad en la película fluida tampoco depende de la dirección y , quedando definida por

$$\mu = \mu_0 f \quad (87)$$

donde f sería una función de las coordenadas axial y azimutal, $f(\Theta, z)$, que depende de la ley de variación de la viscosidad con la temperatura escogida, y μ_0 es la viscosidad a la temperatura T_0 . La presión y la temperatura características quedan, entonces, definidas por:

$$p = \frac{P - P_0}{P_{ref}} \quad \text{con} \quad P_{ref} = \frac{\mu_0 U}{R} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2, \quad \text{y} \quad (88)$$

$$t = \frac{T - T_0}{T_{ref}} \quad \text{con} \quad T_{ref} = \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left(\frac{R}{c} \right)^2.$$

Al ingresar el lubricante por la ranura (ver Figura 4.18), tanto los perfiles de velocidad como de temperatura se verían afectados. El cociente entre la distancia necesaria para desarrollar el perfil térmico y la requerida para el perfil de velocidad estaría determinada por el cociente de los números de Péclet y de Reynolds, $\frac{Pe}{Re} = Pr$, donde Pr es el número de Prandtl. La longitud característica que debería usarse tanto en el Pe como en el Re en este

cálculo, es el diámetro del cojinete, ya que las longitudes características para desarrollar los perfiles están sin duda relacionadas con el perímetro del eje. Siendo así, sería $Pe_D \gg 1$ y $Re_D \gg 1^3$. Además, es de esperar que el $Pr \gg 1$, como ocurre típicamente en los líquidos no-metálicos como glicerol y aceites, aún a altas temperaturas (Holman, 1999; Bird *et al.*, 2002). Se deduce así que el perfil de velocidad se desarrolla sensiblemente más rápido que el térmico. Sin duda, representar esta condición matemáticamente es una tarea compleja que sólo puede analizarse en forma numérica, por lo que no será abordada aquí.

Volviendo al sistema de ecuaciones, dado que ni p ni f dependen de y , las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento, Ecs. (83) a (85), pueden integrarse fácilmente en el espesor de la película fluida. Para llevar a cabo esta operación se requieren las condiciones de borde sobre las superficies del eje, en $y = \tilde{h}(\Theta)$, y del cojinete, en $y = 0$. Para las componentes de la velocidad se tiene:

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= 0 ; & u|_{y=\tilde{h}} &= 1 \\ v|_{y=0} &= 0 ; & v|_{y=\tilde{h}} &= \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} . \\ w|_{y=0} &= 0 ; & w|_{y=\tilde{h}} &= 0 \end{aligned} \tag{89}$$

Para la temperatura, sin embargo, las condiciones de borde no son simples ni se puede esperar que exista una temperatura uniforme en el espesor de fluido. De hecho, el mecanismo de transmisión de calor entre el lubricante y las paredes que lo contienen, puede pensarse asociado a diferentes mecanismos y, por lo tanto, expresarse de diversas formas. Por un lado, se transmite calor desde el lubricante al cojinete, el cual es conducido por el cuerpo de éste hacia el exterior, donde otro fluido lo recibe y transporta (aire del ambiente o fluido de refrigeración). Sin embargo, en general, el valor de este flujo de calor suele ser pequeño si se lo compara con el que es transportado por convección por el mismo lubricante. Bajo esta suposición el cojinete puede considerarse, entonces, adiabático. Esto es:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 . \tag{90}$$

Asimismo, del otro lado de la capa lubricante se encuentra la superficie del muñón. Esta se podría asumir isotérmica ya que el muñón se mueve a alta velocidad tangencial y la

³ Para los cojinetes estudiados, el número de Reynolds con base en el huelgo se corresponde al establecido en la Teoría de Lubricación, es decir $Re_c \approx 1$. Como $(R/c) \gg 1$, resulta que $Re_D \gg 1$.

conductividad del eje suele ser elevada comparada con la del lubricante. Es decir, al girar rápido, un mismo punto de la superficie atraviesa zonas de distinta temperatura en un breve lapso de tiempo, alcanzando una temperatura “media” de la vuelta, T_M . Esto plantea, sin embargo, un problema cuando se desea determinar el flujo de calor entre el lubricante y el muñón. Se puede esperar, sin embargo, que dado que el eje es cilíndrico y al ser su temperatura exterior constante, las isothermas dentro del mismo sean círculos concéntricos. Esto indicaría que el flujo de calor entre el lubricante y el eje es el mismo para cualquier valor de Θ . No obstante, esta conclusión es poco factible y el argumento de temperatura constante sobre el eje se torna difícil de sostener sin la existencia de una capa límite térmica o algún tipo de evolución del perfil térmico sobre el muñón donde se compatibilicen las temperaturas y sus derivadas entre el fluido lubricante y la superficie móvil. Para intuir dicho comportamiento conviene analizar el BE de la Ec. (86). En este balance, para que el término conductivo (primero de la derecha) sea de orden uno, el parámetro λ también debe ser de orden uno, y el Pe debe ser de orden $\left(\frac{R}{c}\right)$, que es $\gg 1$. Ello indica la preponderancia del flujo térmico convectivo frente al difusivo (Bird *et al.*, 2002).

Una alternativa viable, que se usará en este trabajo de tesis, es recurrir a una condición de borde de tipo convectiva en que la densidad de flujo de calor interfacial se expresa como el producto de un coeficiente medio superficial de transmisión de calor, α , y la diferencia de temperaturas entre la superficie, T_M , y el seno del fluido, T_b (‘bulk temperature’). Así, se tiene:

$$t(\Theta, \tilde{h}, z) = t_M \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{\tilde{h}} = \left(\frac{1}{k} \right) k \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{\tilde{h}} = - \left(\frac{1}{k} \right) \alpha (t_M - t_b) \quad , \quad (91)$$

donde $t_b = \frac{T_b - T_0}{T_{ref}}$ y $t_M = \frac{T_M - T_0}{T_{ref}}$.

Para poder determinar los campos de presión y temperatura son necesarias, además, CBs en las coordenadas Θ y z en las que se especifiquen la presión y temperatura de suministro, la presión exterior y las condiciones de simetría. Estas son:

$$\begin{aligned} t(-\beta, y, z) = 0 \quad ; \quad p(-\beta, z) = 0 \quad ; \quad p(\Theta, \frac{1}{2}) = 0 \\ \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{(\Theta, y, 0)} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{(\Theta, 0)} = 0 \quad , \quad (92) \end{aligned}$$

donde β es el ángulo entre el origen de coordenadas y el suministro de aceite (ver Figura 4.18). Respecto de la cavitación, se emplea por simplicidad la CB tipo Gumbel, $p(1 < \Theta < 2, z) =$

0, y se asume que en la zona divergente del flujo la presencia de gas, ya sea aire o vapor del lubricante, afecta sólo a la presión (Suganami y Szeri, 1979), despreciando el impacto energético del cambio de fase.

Al integrar los balances de masa y cantidad de movimiento en el espesor de la película, utilizando las correspondientes CB, se tiene:

$$\text{BCM}(\Theta): \quad u = \frac{1}{2\pi f} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial \Theta} (y^2 - \tilde{h}y) + \frac{y}{\tilde{h}}, \quad (93)$$

$$\text{BCM}(z): \quad w = \frac{1}{2\pi f} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - \tilde{h}y), \quad (94)$$

$$\text{BM}: \quad \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial u}{\partial \Theta} dy - \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial w}{\partial z} dy = \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \quad (95)$$

En función de estas ecuaciones, si se desea conocer el comportamiento de un cojinete (ε, P, T) en función de su geometría (R, L, c, β), propiedades del fluido ($\mu(T), \rho, C_v$), velocidad de rotación (Ω) y carga aplicada (W), debería establecerse un diagrama de cálculo como el que se muestra en la Figura 4.19.

De acuerdo con este esquema, dada una carga externa aplicada sobre el rotor, se propone una excentricidad tentativa y una distribución de viscosidad y se resuelven los balances de las Ecs. (93-95) para determinar la presión. Posteriormente debe aplicarse el Balance de Energía para obtener el perfil de temperatura asociado a la distribución de presión obtenida. En este esquema de cálculo, el criterio global de convergencia se logra cuando la carga aplicada al cojinete se “igualar” a la que es capaz de soportar. Si no se cumple la igualdad, se modifican la excentricidad y/o la distribución de viscosidad y se recalcula. Esto se repite hasta lograr convergencia. La solución de un diagrama como este puede presentar gran complejidad debido a la no linealidad de algunas de las ecuaciones. Por ello en las Secciones 3.2 y 3.3 se proponen dos nuevos criterios de simplificación basados en diferentes tratamientos de la temperatura, uno en base al cálculo de la temperatura media en el espesor, y el otro al cálculo de la temperatura de mezcla (*bulk temperature*).

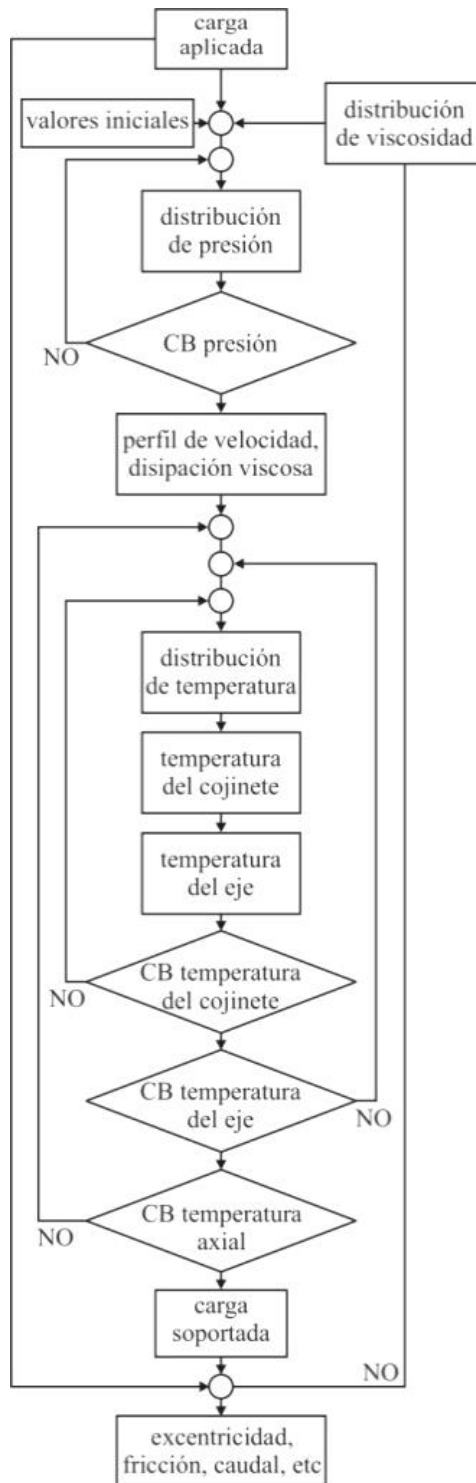


Figura 4.19: Diagrama de cálculo para la solución de los balances acoplados.

4.3.1 Metodologías de resolución aproximada existentes

Como se comentara en el Capítulo 2, el hecho que la viscosidad varíe no sólo afecta profundamente el desempeño de los artefactos tribológicos sino que además determina el valor de la temperatura máxima de operación, uno de los criterios, junto con el de espesor

mínimo de película, de falla en cojinetes y sellos. Por ello son muchos los autores que han analizado el comportamiento térmico de cojinetes. El presente apartado pretende profundizar el análisis bibliográfico del Capítulo 2 principalmente en el tratamiento de la incorporación del Balance de Energía o partes del mismo para cuantificar el impacto térmico sobre la película fluida.

El modelo más simple existente es el que permite el cálculo de las características de los cojinetes mediante el modelo clásico (isotérmico), empleando un valor específico de la viscosidad, llamado “viscosidad efectiva”, la cual es compatible con el aumento de temperatura en el cojinete. Generalmente, esto se logra proponiendo una temperatura inicial de trabajo, para luego determinar las características del cojinete en estudio (incluyendo la temperatura de trabajo resultante). Así, mediante un proceso iterativo, se determina la “temperatura efectiva” del cojinete ajustando la temperatura propuesta hasta coincidir con la resultante del cálculo. Por ejemplo, Boswall (1928) calculó la viscosidad efectiva sobre la base de los siguientes supuestos:

- todo el calor generado por acción viscosa es arrastrado por el lubricante,
- el lubricante que fluye axialmente lo hace a temperatura uniforme $T_{med} = T_0 + \frac{\Delta T}{2}$,
donde $\Delta T = T_f - T_0$ es el incremento de temperatura desde el suministro, a T_0 , hasta el final de la película fluida, a T_f .

Así, considerando como Q al caudal circunferencial total y Q_{st} al caudal lateral de fluido que sale por los dos lados, un balance macroscópico de energía bajo las consideraciones anteriores resulta en:

$$\begin{aligned}
 \dot{m}\Delta\hat{H} &= \dot{W}_\tau \\
 \Rightarrow \rho(Q - Q_{st})\hat{C}_p\Delta T + \rho Q_{st}\hat{C}_p\frac{\Delta T}{2} &= 2\pi f_F WRN \\
 \Rightarrow \rho Q\left(1 - \frac{Q_{st}}{Q}\right)\hat{C}_p\Delta T + \rho Q\frac{Q_{st}}{2Q}\hat{C}_p\Delta T &= 2\pi f_F P_p 2R^2 LN \\
 \Rightarrow \rho Q\left(1 - \frac{Q_{st}}{2Q}\right)\hat{C}_p\Delta T &= 2\pi f_F P_p 2R^2 LN \\
 \Rightarrow \rho\frac{\hat{C}_p\Delta T}{P_p} &= 4\pi f_F R^2 LN / Q\left(1 - \frac{Q_{st}}{2Q}\right) \\
 \Rightarrow \frac{\rho\hat{C}_v\Delta T}{P_p} &= f_F \frac{R}{c} \frac{4\pi}{q\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q}{Q_{st}}\right)}
 \end{aligned} \tag{96}$$

donde \hat{H} es la entalpía específica del fluido, \dot{W}_τ la velocidad de ingreso de trabajo al sistema debido a los esfuerzos viscosos, N la velocidad angular, W la carga exterior aplicada al rotor, $q = \frac{Q}{RNcL}$ el caudal circunferencial adimensional similar al definido en la Ec. (71), $C_v = C_p$ la capacidad calorífica del líquido lubricante, y f_F el factor de fricción definido en la Ec. (59), designado así para evitar confusión con la viscosidad adimensional.

En el caso del ISJB con condición de borde tipo Gumbel, el cálculo de los caudales y el factor de fricción y su reemplazo en la ecuación anterior, lleva a:

$$\Delta T = 8\pi^2 \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{\mu N}{\rho C_v (2-\eta) \sqrt{1-\eta^2}}, \quad (97)$$

que permite estimar la diferencia máxima de temperatura que se produciría en el lubricante en un cojinete corto.

Más tarde, Raimondi y Boyd (1958) resolvieron numéricamente la Ec. (96) para otras geometrías, y calcularon una temperatura efectiva, definida como:

$$T_{ef} = T_0 + \lambda \Delta T, \quad (98)$$

donde λ es un parámetro de ponderación. Raimondi y Boyd, como lo había hecho previamente Boswall, consideraron que T_{ef} se corresponde con la temperatura media en el fluido, T_{med} . Es decir, tomaron $\lambda = 1/2$. En un trabajo posterior, Cameron (1966) propuso usar $2/3 < \lambda < 1$, pero siempre empleando el mecanismo de viscosidad efectiva, $\mu(T_{ef})$. En todos

estos trabajos, el parámetro $\frac{\rho C_v \Delta T}{P_p} \rightarrow \infty$ cuando $\eta \rightarrow 0$ dado que en esa situación $P_p \rightarrow 0$.

A pesar que el concepto de viscosidad efectiva es atractivo, en realidad es sólo una aproximación, ya que el valor de la viscosidad depende de la geometría del cojinete, los materiales involucrados, las propiedades del lubricante, la carga y velocidad del sistema, y de las condiciones de borde térmicas. Aun así, dada su simplicidad, la aproximación iso-viscosa se sigue empleando, con resultados aceptables para un limitado rango de condiciones de operación (Tanaka, 2000; Yu y Sadeghi, 2001; Stahl y Jacobson, 2001; Stahl, 2002; Talmage y Carpino, 2002; Johansson y Wettergren, 2004; Boedo y Booker, 2004). Cabe señalar que, como se comentara en el Capítulo 2, Seireg y Ezzat (1972) probaron que para una geometría y temperatura de entrada dados, existe una velocidad para la cual el modelo de viscosidad efectiva produce resultados de presión que coinciden con resultados experimentales (ver Figura 4.20).

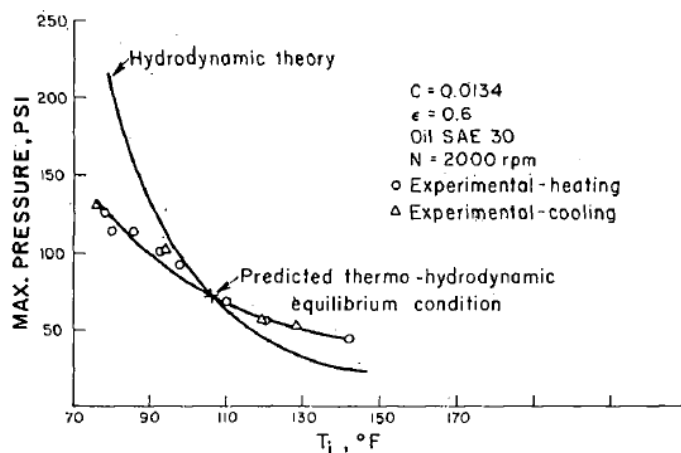


Figura 4.20: Variación de la presión máxima en función de la temperatura de ingreso del lubricante (Seireg y Ezzat, 1972).

La incorporación de una viscosidad función de la temperatura, con un campo de temperatura variable punto a punto, sólo se puede tratar si se incorpora el balance de energía para ser resuelto acoplado a los de masa y cantidad de movimiento. El análisis de todos los balances acoplados se denomina teoría termohidrodinámica (THD). Como se comentara en el Capítulo 2, la primera aplicación del balance de energía a la lubricación hidrodinámica fue realizada por Cope (Cope, 1949; Charnes *et al.*, 1952). El modelo de Cope se basa en dos suposiciones: la temperatura es constante en el espesor de película y la transmisión de calor por conducción hacia y desde las superficies sólidas es despreciable. Esto da lugar a un balance de energía simplificado que debe resolverse simultáneamente con la Ec. de Reynolds isotérmica (dado que entre las hipótesis se considera que la temperatura, y por ende la viscosidad, no cambian en el espesor). Dicho sistema puede resolverse analíticamente sólo bajo la consideración de simplificaciones geométricas.

La unificación rigurosa de los efectos térmicos e hidrodinámicos en la teoría de lubricación hidrodinámica fue consumada con la publicación de la Ecuación de Reynolds Generalizada realizada por Dowson (1962). Esta aproximación considera la variación local de densidad y viscosidad debida a la temperatura y su efecto en los campos de velocidad y presión. Naturalmente, surgen inconvenientes a la hora de resolverla, por el acople con el balance de energía producido por la viscosidad. Esta propiedad depende del campo de temperatura, el cual influye en el flujo de lubricante, y afecta a la presión hidrodinámica y la generación de calor por efectos viscosos. En otro trabajo, Dowson y Hudson (1963) fueron los primeros en reconocer la importancia de la conducción de calor dentro de la película. Estos trabajos son considerados pilares de la teoría THD. La ecuación de Reynolds generalizada propuesta por

Dowson, para un fluido newtoniano incompresible en estado estacionario resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\tilde{h} - \tilde{h} \frac{F_1}{F_0} \right) = \frac{1}{12\pi^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta} F_2 \tilde{h}^3 \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} F_2 \tilde{h}^3 \right), \quad (99)$$

con: $F_0 = \int_0^1 \frac{1}{f} dy$, $F_1 = \int_0^1 \frac{y}{f} dy$ y $F_2 = \int_0^1 \frac{y}{f} \left(y - \frac{F_1}{F_0} \right) dy$, siendo $f(\Theta, y, z)$ la viscosidad adimensional.

El balance de energía propuesto para acompañar a la ecuación precedente es el mismo que el ya presentado en la Ec.(53) del Capítulo 3, que para estado estacionario resulta:

$$\frac{u}{\pi} \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v \frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 w \frac{\partial t}{\partial z} \approx \frac{1}{Br} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (100)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior debe usarse un método numérico iterativo con las condiciones de borde adecuadas para la presión, temperatura y flujo de calor. En este sentido, los métodos de diferencias finitas y Gauss-Seidel con sobre-relajación han sido los más empleados. El procedimiento iterativo en general se realiza según los lineamientos presentados en la Fig. 4.19 y ha sido empleado por la mayoría de los investigadores en el área, como por ejemplo, Dowson y March (1967), Ferron *et al* (1983), Mitsui (1987), y Singh y Majumdar (2005).

El primer trabajo que corresponde mencionar, en el que se hiciera una ardua labor para obtener la distribución analítica de temperatura en un cojinete de longitud finita, contemplando la variación de viscosidad en la película, es el de Tipei y Nica (1967, 1970). Ellos asumieron que la viscosidad cambia según lo hace el espesor de película, y resolvieron el balance de energía empleando una distribución de presión ya conocida. Para ello dividieron la geometría en una región cargada ($0 \leq \theta < \pi$) y una descargada ($\pi \leq \theta < 2\pi$). De esta manera obtuvieron resultados que, para ciertas condiciones, llegaron a coincidir con mediciones experimentales (Tipei y Nica, 1959). Las falencias de este trabajo resultaron de considerar la temperatura constante en el espesor de película y del empleo de la CB de Gumbel.

A este le siguieron otros trabajos con diferentes suposiciones realizadas en la búsqueda de la solución del problema THD. Lund y Hansen (1984) usaron un polinomio de cuarto grado para representar la dependencia de la viscosidad y la temperatura con la posición dentro del espesor de la película. Así obtuvieron perfiles analíticos de temperatura que mostraron buena correlación con resultados experimentales sobre la región cargada, pero no así en la descargada. Gupta y colaboradores (1990) propusieron una teoría simplificada que permite

resolver dos ecuaciones diferenciales ordinarias, las de cantidad de movimiento y energía, con una expresión algebraica para la viscosidad. Vijayaraghavan (1996) desarrolló un método donde las propiedades, como la viscosidad, son determinadas a través de la película solamente en algunos puntos (puntos de Lobatto), mientras que sus distribuciones en el espesor son expresadas por polinomios de Legendre. De esa forma, teniendo sólo tres puntos no equidistantes en la película, se obtiene una buena correlación con resultados experimentales.

A pesar de la cantidad y variedad de tratamientos dados al tema (de los que se ha mencionado sólo una pequeña fracción), los modelos en los cuales se trata el fenómeno que ocurre en el espesor del lubricante con mayor grado de detalle son aquellos que reflejan de manera más precisa el fenómeno físico real (Boncompain *et al.*, 1986; Khonsari y Beaman, 1987; Ma y Taylor, 1994; Paranjpe y Han, 1995; Vijayaraghavan, 1996; Hatakenaka *et al.*, 2002; Costa *et al.*, 2003). Sin embargo, la solución del problema sigue presentando grandes dificultades, requiriendo en general de la aplicación de métodos numéricos complejos.

Una alternativa que logra balancear la dificultad de resolución del sistema de ecuaciones con la correspondencia con resultados experimentales radica en el empleo de un balance de energía que considere todos los flujos de calor aunque asuma una temperatura representativa, constante en el espesor de película (Suganami y Szeri, 1979). El trabajo quizás más característico de esta propuesta es el desarrollado por San Andrés (2010), quien propone un balance de energía (dimensional) con la forma:

$$\hat{C}_v \left(\frac{\partial(\rho h \bar{T})}{\partial T} + \frac{\partial(\rho h \bar{V}_x \bar{T})}{\partial X} + \frac{\partial(\rho h \bar{V}_z \bar{T})}{\partial Z} \right) + Q_w = \bar{T} \beta_t h \left(\frac{\partial P}{\partial T} + \bar{V}_x \frac{\partial P}{\partial X} + \bar{V}_z \frac{\partial P}{\partial Z} \right) + h \frac{R\Omega}{2} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu}{h} \left[k_c \left(V_t^2 + \frac{R\Omega}{2} \bar{V}_x \right) + k_r R\Omega \left(\frac{R\Omega}{4} - \bar{V}_x \right) \right], \quad (101)$$

donde \bar{V}_x , \bar{V}_z y \bar{T} son los valores medios de estas variables en el espesor, β_t es el coeficiente de expansión volumétrica del lubricante, $V_t = \sqrt{\bar{V}_x^2 + \bar{V}_z^2}$ la velocidad media del fluido, $\mu(X,Z)$ la viscosidad, $Q_w = \alpha_c (\bar{T} - T_c) + \alpha_r (\bar{T} - T_r)$ el flujo de calor del fluido hacia los bordes (cojinete y rotor) cuyas superficies se encuentran a temperaturas T_c y T_r , respectivamente, y α_c y α_r representan sus coeficientes convectivos de transferencia de calor. k_c y k_r son los parámetros de corte para flujo turbulento, que son función del número de Reynolds. Una ecuación de este tipo permite el acoplamiento directo con la ecuación de Reynolds (sin necesidad de emplear las ecuaciones de Navier-Stokes y el balance de masa por separado), dado que ambas presentan variables independientes de la coordenada y , pudiéndose

integrar (generalmente por métodos numéricos) en x y z . No obstante, puede apreciarse que para lograr tal formulación, el análisis se basa fundamentalmente en la presencia de flujo turbulento en la película fluida, condición que escapa al alcance de la presente tesis.

En las próximas dos Secciones se analizarán dos propuestas para el planteo del balance de energía y su correspondiente solución analítica aproximada acoplada a la ecuación de Reynolds: una basada en el cálculo de la temperatura media en el espesor de película y la otra basada en el cálculo de la temperatura del seno del fluido (*bulk temperature*). Ambas propuestas se aplican a ISJB considerando CB adiabática en el cojinete y CB isotérmica en el rotor.

4.3.2 Método basado en la temperatura media en el espesor

Se propone aquí una aproximación que contempla la resolución del sistema de ecuaciones considerando que el aporte convectivo en el balance de energía se puede calcular con las correspondientes velocidades medias, esto es:

$$u_{med} = \frac{\int_0^{\tilde{h}} u \, dy}{\int_0^{\tilde{h}} dy}, \quad v_{med} = \frac{\int_0^{\tilde{h}} v \, dy}{\int_0^{\tilde{h}} dy}, \quad y \quad w_{med} = \frac{\int_0^{\tilde{h}} w \, dy}{\int_0^{\tilde{h}} dy}, \quad (102)$$

es decir:

$$u_{med} = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^{\tilde{h}} u \, dy, \quad v_{med} = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^{\tilde{h}} v \, dy, \quad y \quad w_{med} = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^{\tilde{h}} w \, dy. \quad (103)$$

Esta suposición se desprende del Método de Inercia Promediada que se suele emplear para considerar los efectos inerciales en los balances de cantidad de movimiento (Deen, 1998). Ello facilita la integración del balance de energía, Ec. (86), en el espesor de la película fluida para obtener una temperatura media del fluido en esa dirección, T_m , que será independiente de la coordenada y . Esto es:

$$\int_0^{\tilde{h}} \left(\frac{u}{\pi} \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) dy = \int_0^{\tilde{h}} \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy + \int_0^{\tilde{h}} f \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (104)$$

$$\Rightarrow \frac{u_{med}}{\pi} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial t}{\partial \Theta} dy + v_{med} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial t}{\partial y} dy + w_{med} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial t}{\partial z} dy \approx \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_0^{\tilde{h}} + f \int_0^{\tilde{h}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

Esta ecuación se resuelve usando condición adiabática en la superficie del cojinete ($y=0$) y

condición isotérmica en el eje ($y = \tilde{h}$). La temperatura del eje se toma como una temperatura media, T_M , que se obtiene como la media de T_m en todo el fluido, mientras que la temperatura de suministro, T_0 , se supone conocida (Mitsui, 1987). La Figura 4.21 resume la nomenclatura usada para las distintas temperaturas.

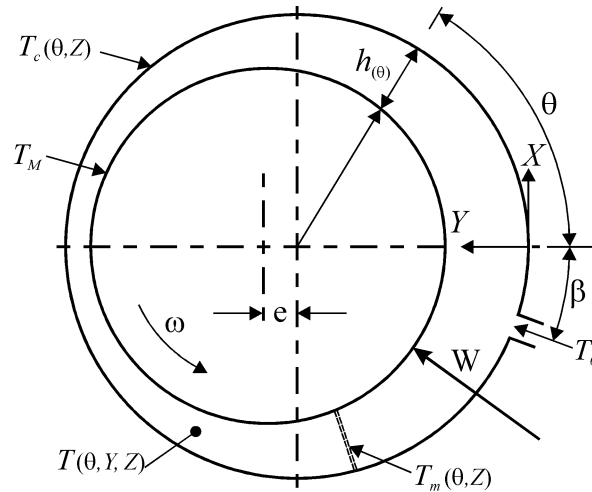


Figura 4.21: Esquema de cojinete mostrando la nomenclatura utilizada para las diversas temperaturas.

Cada una de las temperatura definidas se adimensionaliza usando la definición dada en la Ec. (88), es decir:

$$t_c = \frac{T_c - T_0}{T_{ref}} \quad , \quad t_m = \frac{T_m - T_0}{T_{ref}} \quad , \quad t_M = \frac{T_M - T_0}{T_{ref}} \quad , \quad (105)$$

y se define:

$$t_m = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^{\tilde{h}} t \, dy \quad \text{y} \quad t_M = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^2 t_m \, d\Theta \, dz}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^2 d\Theta \, dz} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^2 t_m \, d\Theta \, dz \quad (106)$$

La Ec. (102) se resuelve, entonces, haciendo uso de las definiciones anteriores y aplicando la *regla de Leibnitz* para intercambiar las operaciones de integración y derivación en el primer término, esto es:

$$\int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial t}{\partial \Theta} \, dy = \frac{\partial}{\partial \Theta} \int_0^{\tilde{h}} t \, dy - \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} t \Big|_{y=\tilde{h}} = \frac{\partial}{\partial \Theta} (\tilde{h} t_m) - t_M \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \tilde{h} \frac{\partial t_m}{\partial \Theta} + (t_m - t_M) \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \quad (107)$$

resultando:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{med}}{\pi} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial t}{\partial \Theta} dy + v_{med} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial t}{\partial y} dy + w_{med} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial t}{\partial z} dy &\approx \lambda \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_0^{\tilde{h}} + f \int_0^{\tilde{h}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \\
 \Rightarrow \frac{u_{med}}{\pi} \left[\tilde{h} \frac{\partial t_m}{\partial \Theta} + (t_m - t_M) \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \right] + v_{med} (t_M - t_c) + w_{med} \tilde{h} \frac{\partial t_m}{\partial z} &\approx \\
 &\approx \lambda \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_0^{\tilde{h}} + f \int_0^{\tilde{h}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy
 \end{aligned} \tag{108}$$

donde queda por resolver el término conductivo.

La dependencia de la viscosidad con la temperatura se considerará descrita por la Ley de Vogel, que describe la típica dependencia exponencial encontrada en los lubricantes líquidos (Bird *et al.*, 2022; Singhal, 2004),

$$\mu = \mu_0 f = \mu_0 e^{-\beta_0 (T_m - T_0)} = \mu_0 e^{-\beta_0 t_m T_{ref}} \tag{109}$$

donde β_0 es una constante que depende del lubricante.

El conjunto de Ecs. (93) a (95), junto con la Ecs. (108) y (109), definen el comportamiento del cojinete THD. Si el estudio se efectúa para cojinetes infinitamente cortos (ISJB), las ecuaciones se simplifican aún más, y además puede asumirse que la variación de temperatura en la dirección axial es despreciable frente a la variación en la dirección tangencial, quedando $t(\Theta)$. Ello se debe a la alta conductividad térmica del eje y cojinete. De hecho, estas hipótesis resultan aplicables aún para cojinetes de $L/D \approx 1$ (Ionescu, 2005; Singhal, 2004).

Asimismo, de acuerdo con el criterio presentado por Tipei y Nica (1967, 1970) de asociar la temperatura con el espesor de película, se propone que la temperatura de la superficie del cojinete, T_c , es proporcional a T_m según $T_c = \frac{\nu}{h} T_m$, donde ν es un coeficiente de proporcionalidad, considerado como $\nu = 0,7$.

Resumiendo, las ecuaciones que se proponen para la descripción del cojinete THD infinitamente corto, $L/D \rightarrow 0$, por el método de temperaturas medias, son:

$$\text{BCM}(\Theta): \quad u = \frac{y}{\tilde{h}} \tag{110}$$

$$\text{BCM}(z): \quad w = \frac{1}{2\pi f} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - \tilde{h}y) \tag{111}$$

$$\text{BM}: \quad \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial u}{\partial \Theta} dy - \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial w}{\partial z} dy \tag{112}$$

$$\frac{u_{med}}{\pi} \left[\tilde{h} \frac{dt_m}{d\Theta} + (t_m - t_M) \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \right] + v_{med} \left(t_M - \frac{\nu t_m}{\tilde{h}} \right) \approx -\frac{\lambda}{k} \alpha (t_M - t_m) + f \int_0^{\tilde{h}} \left[\left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right] dy \quad (113)$$

donde v_{med} se obtiene de asumir una variación lineal de v desde $y=0$ hasta $y=\tilde{h}$, de acuerdo a lo presentado por Szeri (Safar y Szeri, 1974; Suganami y Szeri, 1979). Por otro lado, si se considera μ descripta por la Ec. (109) y se introduce la Ec. (110) en la (113), resulta

$$\frac{1}{2\pi} \left[\tilde{h} \frac{dt_m}{d\Theta} + t_m \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \left(1 - \frac{\nu}{\tilde{h}} \right) \right] \approx -\frac{\lambda}{k} \alpha (t_M - t_m) + \frac{\mu_0}{\tilde{h}} e^{-\beta_0 t_m T_{ref}} \quad (114)$$

que es una ecuación desacoplada del resto, que permite calcular $t_m(\Theta)$ empleando como condición de borde $t_m|_{\Theta=-\beta} = 0$ (ver Fig. 4.21) para luego calcular f de acuerdo a la Ec. (109) y por último p con las Ecs. (110) a (112) y una CB tipo Gumbel. No obstante, a pesar de su aparente sencillez, la Ec. (114) requiere de un esquema numérico para su resolución, imposibilitando la obtención de una expresión analítica para $t_m(\Theta)$ y, por ende, para f . Sin embargo, dado que en los ISJB se considera que la viscosidad sólo varía con Θ , siendo $f(\Theta)$, la combinación de las Ecs. (110) a (112) resulta en una ecuación de Reynolds modificada, con la forma:

$$\frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{\tilde{h}^3}{6\pi f} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (115)$$

que es igual a la ya presentada Ec.(7) salvo por la presencia de f . La integración de la Ec. (115) considerando $\tilde{h} = 1 + \eta \cos(\pi\Theta)$, resulta en:

$$p = \frac{3f\eta \sin(\pi\Theta)}{(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^3} \left(\frac{1}{4} - z^2 \right), \quad (116)$$

donde f aparece como un factor de escala si se compara este resultado con la Ec. (12) del perfil de presión para ISJB isotérmicos. Dado que, como ya se comentara, la Ec. (114) no puede ser resuelta analíticamente, y f sólo puede obtenerse numéricamente, el cálculo de la presión con la Ec. (116) se puede realizar solamente para los ángulos Θ_i para los que se haya resuelto numéricamente $f(\Theta_i)$.

A fin de incluir el fenómeno de cavitación en esta propuesta, se asume que en la zona divergente del flujo la densidad global del fluido varía a fin de que se cumpla el balance de masa. Esto se logra suponiendo que una fracción del líquido se vaporiza. Como consecuencia,

la capacidad calorífica del fluido también se ve alterada dado que su valor cambia al cambiar de fase. El calor involucrado en la vaporización, sin embargo, no es tenido en cuenta, como ya se comentara. Para ello, se considera que el caudal másico que fluirá en el cojinete en la zona divergente es igual al caudal másico presente en la sección correspondiente al espesor mínimo de película, $\tilde{h}(\Theta=1) = \tilde{h}_0$, donde el lubricante es líquido, con una densidad $\rho_L = \rho$. Así, la densidad para la zona divergente del flujo se estima como

$$\rho_{div} = \frac{\rho_v \rho}{\rho_v (1 - \chi) + \rho \chi} , \quad (117)$$

donde $\chi(\Theta)$ es la fracción másica de fluido vaporizado en cada posición, con densidad ρ_v . De igual manera se puede calcular la capacidad calorífica y la viscosidad de referencia en cada posición,

$$\hat{C}_{v_{div}} = \hat{C}_v (1 - \chi) + \hat{C}_{v_v} \chi \quad \text{y} \quad \mu_{0_{div}} = \mu_0 (1 - \chi) + \mu_{0_v} \chi . \quad (118)$$

Para determinar la fracción vaporizada χ se aplica un balance de masa, tal que $\rho \tilde{h}_0 = \rho_{div} \tilde{h} = cte$ en cada posición circunferencial, que resulta en:

$$\chi = \frac{\rho_v (\tilde{h} - \tilde{h}_0)}{\tilde{h}_0 (\rho - \rho_v)} , \quad \text{para } 1 < \Theta < 2 . \quad (119)$$

Cabe mencionar que este tratamiento de la cavitación considera que el fluido en la zona divergente es una mezcla homogénea de líquido y vapor, omitiendo la estratificación que se produce en la práctica y que fue descrita en capítulos previos.

Resumiendo, el comportamiento THD de cojinetes predicho por el método basado en la temperatura media en el espesor, y aplicado en el ISJB, queda descrito por las Ecs. (114) y (116), donde se asume que la temperatura sobre el rotor es constante, y definida por la Ec. (106) como la temperatura media del fluido, y que la temperatura del cojinete se relaciona con la temperatura media en el espesor según $T_c = \frac{U}{h} T_m$. Además, para la región divergente de flujo, $1 < \Theta < 2$, se incluye el efecto de la vaporización al considerar la presencia de una mezcla homogénea líquido-vapor cuya proporción queda establecida por la Ec.(119).

Para mostrar los resultados obtenidos con la metodología propuesta, se eligió trabajar con un cojinete de $L/D = 1/8$ y las propiedades geométricas y del fluido listadas en la Tabla 4.1. Las propiedades del fluido y algunas de las condiciones coinciden con la que fueron empleadas por Mitsui (1987) y que serán usadas en el Capítulo 5 para comparación con otros

métodos. Las Figuras 4.22 y 4.23 muestran, respectivamente, los perfiles de temperatura y presión obtenidos en función de Θ para toda la circunferencia considerando diferentes excentricidades relativas.

Tabla 4.1: Características del cojinete analizado

L/D	0,125
R/C	1000
L	0,125 m
β_0	0,029 K ⁻¹
α	50 W/m ² K
N	2250 rpm
μ_0	0,0192 Pa.s
ρ	859 kg/m ³
\hat{C}_v	1970 J/kg K
ρ	859 kg/m ³
μ_{0v}	0,0192 Pa.s
ρ_v	0,859 kg/m ³
\hat{C}_{v_v}	985 J/kg K

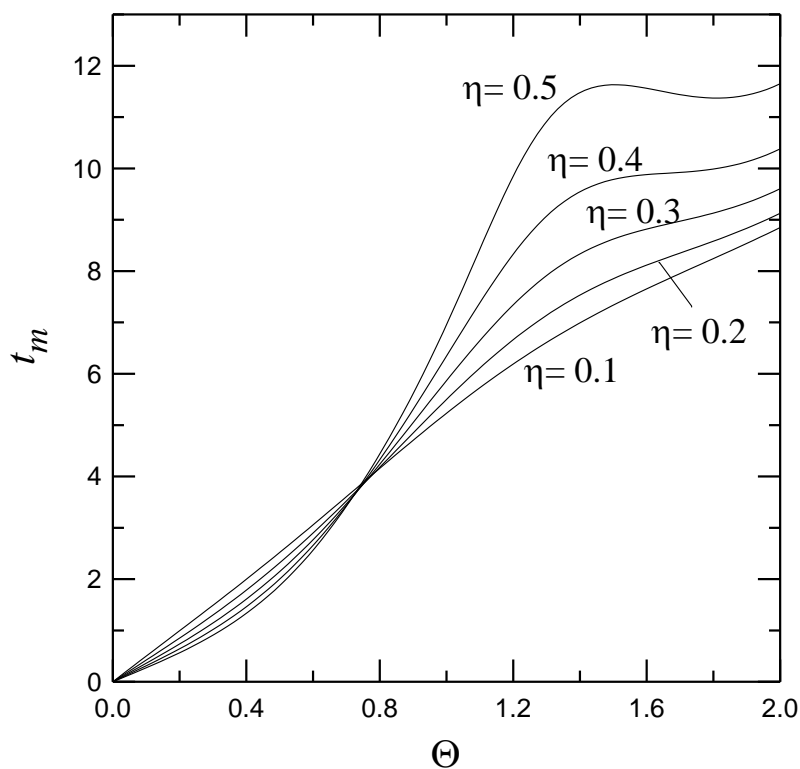


Figura 4.22: Perfiles de temperatura adimensional en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas, en $z=0$.

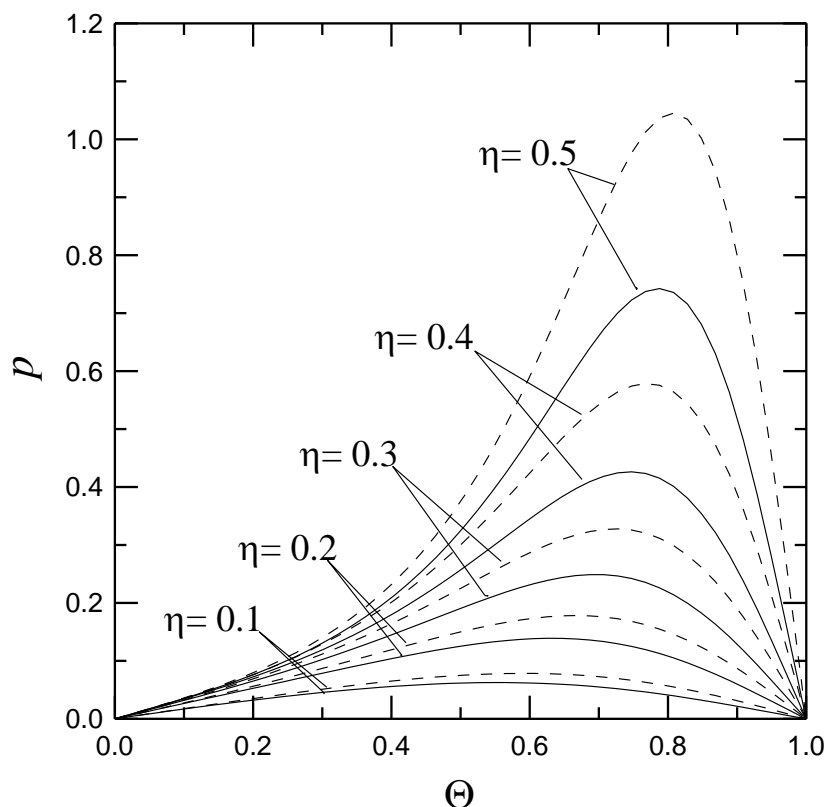


Figura 4.23: Perfiles de presión adimensional en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas calculadas con el método propuesto (—) y mediante la solución isotérmica (- - -), en $z=0$.

Puede apreciarse que la disipación viscosa produce un marcado aumento de la temperatura en dirección azimutal, que resulta mayor según aumenta la excentricidad (ya que la disipación viscosa aumenta según se acercan las superficies sólidas en movimiento relativo). Este aumento de temperatura produce una disminución de la viscosidad del lubricante, que se traduce en una menor presión alcanzada en la película fluida, si se la compara con la alcanzada por el flujo isotérmico a T_0 . Así, a mayor excentricidad relativa, mayor discrepancia entre las presiones predichas por para flujo isotérmico y el no isotérmico.

La Figura 4.24 muestra la variación adimensional de la viscosidad en el flujo, $f = \mu/\mu_0$, que, por otra parte, como se ve en la Ec. (116), coincide con el cociente de la presión en el ISJB THD respecto del isotérmico en la región $0 < \Theta < 1$ (cociente de líneas sólidas respecto de líneas punteadas en la Figura 4.23). Como se comentara anteriormente, la consideración del fenómeno THD produce una disminución de la viscosidad y, consecuentemente, de la presión desarrollada por el flujo, respecto de la homónima isotérmica.

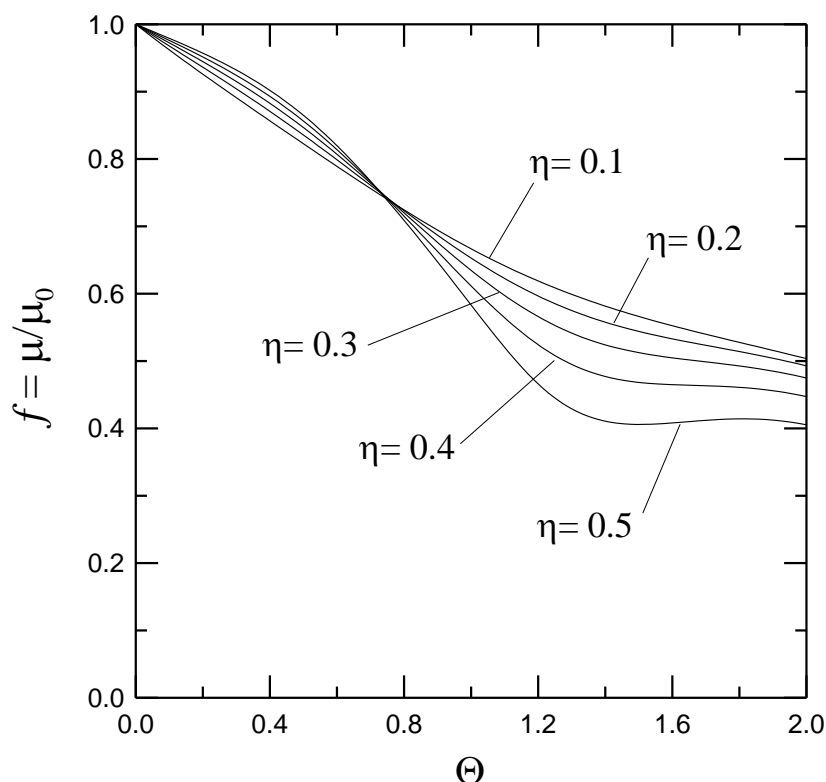


Figura 4.24: Perfiles de viscosidad adimensional $f = \mu/\mu_0$ sobre el cojinete en función de la posición azimutal, para distintas excentricidades relativas.

Por otro lado, la Figura 4.25 muestra los perfiles de temperatura sobre el cojinete correspondiente a los perfiles de T_m de la Figura 4.22, valiéndose de la relación empleada en los cálculos, $T_c = \frac{v}{h} T_m$ (Tipei y Nica ,1967, 1970). Puede apreciarse que la temperatura sobre el cojinete presenta su valor máximo en cercanías del espesor mínimo de película (excepto a excentricidades muy pequeñas), para luego disminuir en la zona divergente como consecuencia de la divergencia geométrica del flujo y la modificación de las propiedades del fluido por la presencia de cavitación.

4.3.3 Método basado en la temperatura de mezcla (o del 'bulk')

La complejidad del Balance de Energía también se puede reducir incorporando una temperatura representativa del espesor de la película que además incluya la influencia de la velocidad en la sección considerada, denominada temperatura de mezcla (bulk temperature). En general, los coeficientes de transferencia de calor como el empleado en la Ec. (91) se usan para describir el transporte entre una interfase y el seno del fluido (bulk). Cuando el fluido se

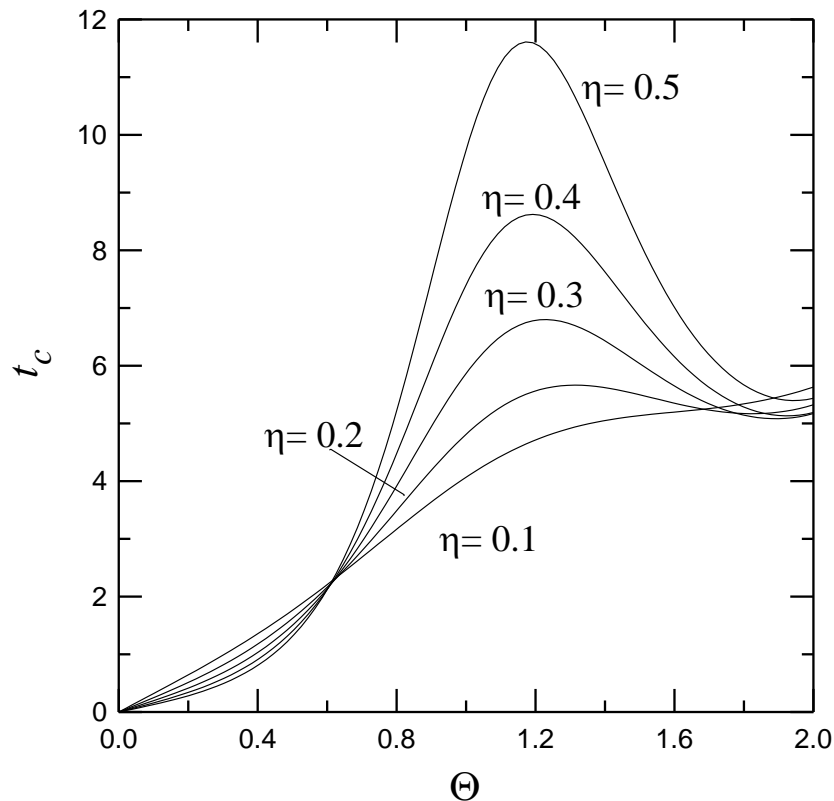


Figura 4.25: Perfiles de temperatura adimensional sobre el cojinete en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas, en $z=0$.

extiende una distancia indefinida desde la interfase y su temperatura tiende a un valor constante en su seno, T_b , es esa temperatura la que se usa para determinar el intercambio de calor. Sin embargo, en flujos confinados, donde la extensión no puede considerarse “infinita”, es necesario emplear algún tipo de promedio para hallar T_b (Deen, 1998).

En situaciones de flujos confinados, en los que la convección es el medio principal de transporte de energía, el flujo de calor por unidad de tiempo a través de un área, dA , se expresa:

$$d\underline{Q} = \rho C_v \underline{V} T dA , \quad (120)$$

siendo \underline{V} la velocidad del fluido en el punto considerado, en dirección perpendicular al área. El flujo de calor a través del área se calcula integrando sobre la sección transversal,

$$\underline{Q} = \int_A \rho C_v \underline{V} T dA . \quad (121)$$

La temperatura promedio para el cálculo de flujo de calor en la sección, T_b , sería:

$$\underline{Q} = T_b \int_A \rho C_v \underline{V} dA , \quad (122)$$

donde la sección en este caso es la definida por: $0 \leq y \leq \tilde{h}$ y $-1/2 \leq z \leq 1/2$.

Dividiendo las Ecs. (121) y (122), y suponiendo ρ y C_v constantes, resulta, entonces, la definición de la temperatura media del bulk, T_b , también conocida como “temperatura media isentálpica” (Isachenko *et al.*, 1979):

$$T_b = \frac{\int_A |\underline{V}| T dA}{\int_A |\underline{V}| dA} \quad (123)$$

El denominador de la Ec. (123) es el caudal volumétrico que atraviesa la sección transversal normal a \underline{V} . T_b también se puede interpretar como la temperatura uniforme que tendría el fluido al pasar por la sección si lo hiciera “mezclado”. Por ello también se la denomina “temperatura de mezcla”.

Para el caso del flujo de lubricante en un cojinete hidrodinámico, la Ec. (123) puede escribirse, de forma adimensional, desdoblada en las dos direcciones principales de flujo como:

$$t_{b\Theta} = \frac{\int_0^{\tilde{h}} t u dy}{\int_0^{\tilde{h}} u dy} \quad (124)$$

$$t_{bz} = \frac{\int_0^{\Theta_1} \int_0^{\tilde{h}} t w dy d\Theta}{\int_0^{\Theta_1} \int_0^{\tilde{h}} w dy d\Theta} \quad (125)$$

donde se ha considerado a modo de ejemplo que el flujo se desarrolla entre $0 < \Theta < \Theta_1$ para el cálculo de t_{bz} . Asimismo la Ec.(125) podría reescribirse como:

$$t'_{bz} = \frac{\int_0^{\tilde{h}} t w dy}{\int_0^{\tilde{h}} w dy} \quad (126)$$

donde $t'_{bz} = t'_{bz}(\Theta, z)$ sería una temperatura de mezcla axial para cada posición circunferencial.

Retomando el BE de la Ec. (86)

$$\left(\frac{u}{\pi} \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \lambda \left[\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right] + f \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (127)$$

se aprecia que los términos convectivos pueden reescribirse con la ayuda de las siguientes derivaciones de productos:

$$u \frac{\partial t}{\partial \Theta} = \frac{\partial}{\partial \Theta} (t u) - t \frac{\partial u}{\partial \Theta}, \quad v \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (t v) - t \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{y} \quad w \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (t w) - t \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (128)$$

Reemplazando estas expresiones en la Ec. (127), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} (t u) + \frac{\partial}{\partial y} (t v) + \frac{\partial}{\partial z} (t w) - t \left(\frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \lambda \left[\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right] + f \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \Rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} (t u) + \frac{\partial}{\partial y} (t v) + \frac{\partial}{\partial z} (t w) &= \lambda \left[\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right] + f \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (129)$$

donde se ha hecho uso del BM, Ec. (83). Integrando en y , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial}{\partial \Theta} (t u) dy + \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial}{\partial y} (t v) dy + \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial}{\partial z} (t w) dy &= \lambda \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy + f \int_0^{\tilde{h}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \\ \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial}{\partial \Theta} (t u) dy + (t v) \Big|_0^{\tilde{h}} + \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial}{\partial z} (t w) dy &= \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_0^{\tilde{h}} + f \int_0^{\tilde{h}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \end{aligned} \quad (130)$$

donde pueden aplicarse las condiciones de borde de las Ecs. (89) a (92). Es decir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial}{\partial \Theta} (t u) dy + t_M \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} + \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial}{\partial z} (t w) dy &= \\ = -\frac{\lambda}{k} \alpha (t_M - t_b) + f \int_0^{\tilde{h}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \end{aligned} \quad (131)$$

Aplicando la *regla de Leibnitz* para intercambiar las operaciones de integración y derivación al primer y tercer término convectivo se tiene:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \int_0^{\tilde{h}} t u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\tilde{h}} t w dy = -\frac{\lambda}{k} \alpha (t_M - t_b) + f \int_0^{\tilde{h}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy, \quad (132)$$

donde $t_M \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta}$ se anula en el reordenamiento. Incorporando luego las definiciones de temperatura de mezcla dadas en las Ecs. (124) y (126), se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(t_{b\Theta} \int_0^{\tilde{h}} u \, dy \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(t'_{bz} \int_0^{\tilde{h}} w \, dy \right) = \\ = -\frac{\lambda\alpha}{k} (t_M - t_b) + f \int_0^{\tilde{h}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy . \end{aligned} \quad (133)$$

La Ec. (133) corresponde al Balance de Energía para la película fluida considerando como variables térmicas a $t_{b\Theta}$ y t'_{bz} , ambas independientes de y . Esta ecuación, junto con las Ecs. (93) a (95) y las expresión de f , describen el flujo en el cojinete THD.

En el caso particular de cojinetes cortos, $L/D \rightarrow 0$, se pueden despreciar, además, los cambios de temperatura en la dirección axial, siendo entonces $t_b(\Theta)$ y $t'_{bz}(\Theta)$. Los balances que describen el flujo resultan, entonces:

$$\text{BCM}(\Theta): \quad u = \frac{y}{h} \quad (134)$$

$$\text{BCM}(z): \quad w = \frac{1}{2\pi f} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - \tilde{h}y) \quad (135)$$

$$\text{BM}: \quad \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial v}{\partial y} \, dy = \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \, dy - \int_0^{\tilde{h}} \frac{\partial w}{\partial z} \, dy \quad (136)$$

$$\text{BE}: \quad \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(t_{b\Theta} \int_0^{\tilde{h}} u \, dy \right) = -\frac{\lambda\alpha}{k} (t_M - t_{b\Theta}) + f \int_0^{\tilde{h}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \, dy . \quad (137)$$

donde $f = e^{-\beta_0 t_b T_{ref}}$ y $\tilde{h} = \frac{h}{c} = 1 + \eta \cos(\pi\Theta)$. Cabe señalar, que la temperatura sobre la superficie del eje, T_M , corresponde al valor medio de T_b en el perímetro del cojinete (Ionescu, 2005), es decir:

$$T_M = \frac{1}{2} \int_0^2 T_b \, d\Theta . \quad (138)$$

El conjunto de ecuaciones anteriores, Ecs. (134) a (137), constituyen una alternativa para la descripción del ISJB termodinámico respecto del conjunto de Ecs. (110) a (113). Igual que en la primera propuesta, al considerar como variable de interés a la temperatura de mezcla, $t_b(\Theta)$, en lugar de t , y al asumir que el cojinete es infinitamente corto, el sistema puede tratarse en forma semi-desacoplada. Esto es, al introducir la Ec. (134) en el BE, éste se resuelve independientemente de la distribución de presión, y las Ecs. (134-136) se pueden

integrar para obtener $p(\Theta, z)$, resultando:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial t_{b\Theta}}{\partial \Theta} = -\frac{\lambda\alpha}{k}(t_M - t_{b\Theta}) + f \frac{1}{\bar{h}}, \text{ y} \quad (139)$$

$$p = \frac{3f\eta \sin(\pi\Theta)}{(1 + \eta \cos(\pi\Theta))^3} \left(\frac{1}{4} - z^2 \right) \quad (140)$$

Puede apreciarse que el perfil de presión dado por la Ec. (140) equivale al de la Ec. (116), donde el valor de $t_{b\Theta}$ actúa modificando la viscosidad afectando el campo de presión a través de f , el que se comporta como un factor de escala que corrige la presión obtenida mediante la solución de Ocvirk. Como ocurre con el método anterior, la solución de la Ec. (139) requiere de la implementación de un método numérico para obtener $t_{b\Theta}$, por lo que la presión sólo se puede calcular en los Θ discretos para los que se haya calculado f al resolver numéricamente la Ec. (139). El fenómeno de cavitación es tratado con la misma metodología que en el apartado previo.

Las Figuras 4.26 y 4.27 muestran los perfiles de temperatura y presión, respectivamente, calculados para un cojinete de $L/D=1/8$ usando esta nueva metodología propuesta para

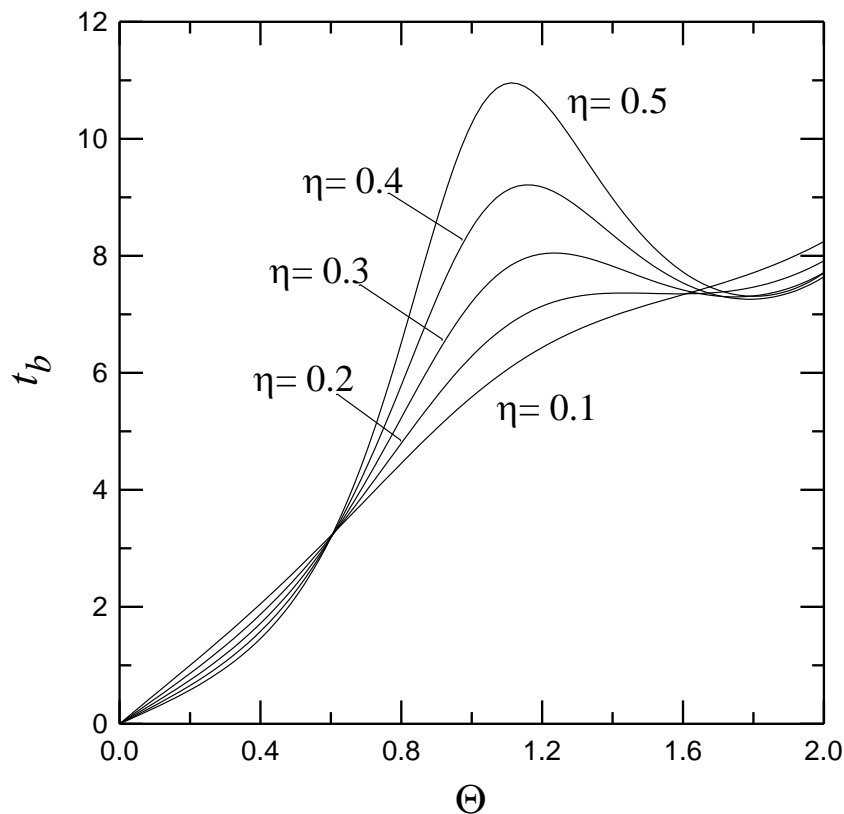


Figura 4.26: Perfiles de temperatura “bulk” adimensional en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas, en $z=0$.

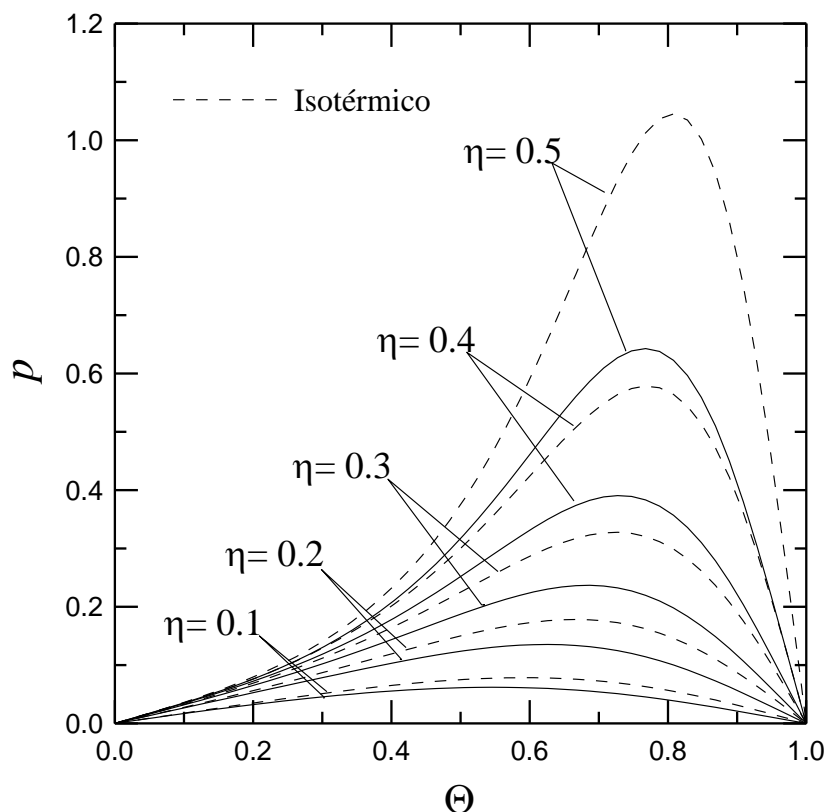


Figura 4.27: Perfiles de presión adimensional en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas calculadas con el método propuesto (—) y mediante la solución isotérmica (- - -), en $z=0$.

distintas excentricidades relativas. Las condiciones geométricas y del fluido consideradas son las mismas de la metodología previa, listadas en la Tabla 4.1.

Los perfiles de temperatura “bulk” mostrados en la Figura 4.26 resultan similares a los de temperatura sobre el cojinete, T_c , predichos con el modelo de temperatura media en el espesor, mostrados en la Figura 4.25. Ello indica que la temperatura “bulk” podría tomarse como representativa de la temperatura del cojinete. Asimismo, la Figura 4.27 muestra que, al igual que con las predicciones del modelo de temperatura media en el espesor, la disipación viscosa produce una disminución en la viscosidad del lubricante, mayor según aumenta la excentricidad, que se traduce en una menor presión alcanzada en la película fluida, si se la compara con la alcanzada por el flujo isotérmico a T_0 .

La Figura 4.28 muestra el perfil de viscosidad adimensional, $f = \mu/\mu_0$, predicho por la nueva metodología propuesta, para distintas excentricidades. Como ya se viera, para $0 < \Theta < 1$, estos perfiles se corresponden con los respectivos cocientes entre la presión del cojinete THD y la homónima para la solución isotérmica. Para ayudar a la comparación, se incluyen en la figura las curvas de viscosidad adimensional obtenidas con el método de temperatura media en el espesor (datos en la Figura 4.24). Se observa que los valores mínimos de la función son

semejantes en ambos procedimientos pero que la consideración de la temperatura “bulk” produce una marcada caída en la viscosidad (correspondiente a un aumento de la temperatura) en la zona del espesor mínimo de película ($\Theta \approx 1$) mientras que el método de temperatura media en el espesor produce los valores mínimos de viscosidad dentro de la zona divergente.

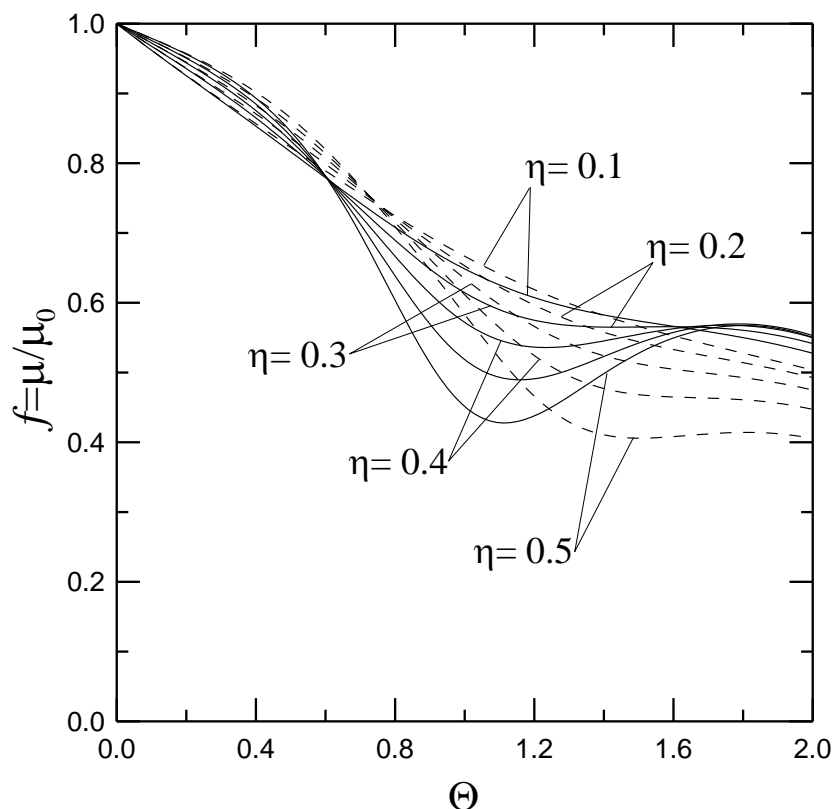


Figura 4.28: Viscosidad adimensional en función de la posición azimutal para distintas excentricidades relativas, calculada con el método de temperatura “bulk” (—) y mediante temperatura media en el espesor (- -).

Del análisis de los resultados presentados puede decirse que los métodos propuestos permiten el cálculo termo-hidrodinámico de cojinetes cortos de una manera sencilla al resolverse en forma desacoplada el BE del BM y el BCM. Con la variación de temperatura así determinada se calcula el perfil de viscosidad y luego el correspondiente a la presión de la película fluida. La temperatura sobre el cojinete, determinada mediante la propuesta de temperatura media en el espesor, muestra buena correspondencia con la temperatura “bulk” calculada para el lubricante, indicando que estas dos variables se encuentran relacionadas. Los datos aquí presentados serán considerados nuevamente en el Capítulo 5 al compararlos con los resultados exactos obtenidos por métodos numéricos y con los calculados por Mitsui. Cabe señalar que la validación de las alternativas presentadas deberá realizarse en el futuro mediante resultados experimentales.

REFERENCIAS

- Bastani, Y. y De Queiroz, M., A New Analytic Approximation for the Hydrodynamic Forces in Finite-Length Journal Bearings, *J. Tribol.*, Vol. 132(1), 014502-1-9, 2010.
- Bender, C.M. y Orszag, S.A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw Hill Co, 1978.
- Bird, R.B., Stewart, W.E. y Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, 2da. Ed., J. Wiley and Sons, 2002.
- Boas, M.L., *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 3ra Ed., John Wiley & Sons, 2006.
- Boedo, S. y Booker, J.F., Classical Bearing Misalignment and Edge Loading: A Numerical Study of Limiting Cases, *J. Tribol.*, Vol. 126(3), pp. 535-541, 2004.
- Boncompain, R., Fillon, M. y Frene, J., Analysis of Thermal Effects in Hydrodynamic Bearings, *J. Tribol.*, Vol. 108(2), pp. 219-224, 1986.
- Boswall, R.O., *The Theory of Film Lubrication*, Longmans, Green and Co., 1928.
- Buckholz, R.H., Lin, J. y Pan, C.H.P., On the Role of Axial Edge Effects and Cavitation in Lubrication for Short Journal Bearings. *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 52, pp. 267-73, 1984.
- Buckholz, R.H. y Hwang, B., The Accuracy Of Short Bearing Theory For Newtonian Lubricants, *J. Tribol.*, Vol. 108, pp. 73-79, 1986.
- Cameron, A., *The Principles of Lubrication*, Wiley, New York, 1966.
- Capriz, G. y Cimatti, G., On Some Singular Perturbation Problems In The Theory Of Lubrication, *Appl. Math. Optim.*, Vol. 4, pp. 285-297, 1978.
- Chasalevris, A.C., Evaluation of the Dynamic Characteristics of the Three-Lobe Journal Bearing with Finite Length Using Analytical Methods, *Proceedings de Int. Conf. on Eng. Vibration*, Ljubljana, Eslovenia, pp. 1-12, 2015.
- Childs, D., Moes, H. y Van Leeuwen, H., Journal Bearing Impedance Descriptions for Rotordynamic Applications, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 99, pp. 198-210, 1977.
- Charnes, A., Osterle, F. y Saibel, E., On the energy equation for fluid-film lubrication, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 214, pp.133-136, 1952.
- Cope, W. F., A hydrodynamical theory of film lubrication, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 197, pp. 201-217, 1949.
- Costa, L., Miranda, A.S., Fillon, M. y Claro, J.C.P., An analysis of the influence of oil supply conditions on the thermohydrodynamic performance of a single-groove journal bearing, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers- Part J: Journal of Engineering Tribology*, Vol. 217 (2), pp. 133-144, 2003.
- Deen, W.M., *Analysis of Transport Phenomena*, Oxford Univ. Press, 1998.
- Di Prima, R.C., Asymptotic Methods For An Infinitely Long Slider Squeeze-Film Bearing, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 90, pp. 173-83, 1968.
- Di Prima, R.C., Higher Order Approximations In The Asymptotic Solution Of The Reynolds Equation For Slider Bearings At High Bearing Numbers, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 91, pp. 45-51, 1969.
- Di Prima, R.C. y Stuart, J.T., Flow Between Eccentric Rotating Cylinders, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 94, pp. 266-74, 1972.
- Di Prima, R.C., Asymptotic Methods For An Infinitely Long Step Slider Squeeze Bearing, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 95, pp. 208-16, 1973.
- Dowson, D., A Generalized Reynold's Equation for Film Lubrication, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 4, pp. 159-170, 1962.
- Dowson, D. y Hudson, J.D. Thermohydrodynamic analysis of the finite slider bearing, I, II, *Instn. Mech. Engrs., Lubrication & Wear Convention*, Paper Nos. 4 & 5, 1963.
- Dowson, D. y March, C.N., A thermohydrodynamic analysis of journal bearings. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol. 181, pp. 117-126, 1967.

- Dubois, G. B., and Ocvirk, F. W., Analytical Derivation of Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings, *NACA Report 1157*, 1953.
- Eckhaus, W. y De Jager, E.M., Asymptotic Solutions Of Singular Perturbation Problems For Linear Differential Equations Of Elliptic Type. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 23 pp. 26-86, 1966.
- Ferron, J., Frene, J. y Boncompain, R., A study of the performance of a plain journal bearing - comparison between theory and experiments, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 105, pp. 422-428, 1983.
- Gómez-Mancilla, J. y Nosov, V., Short Journal Bearings with Misaligned Axes, Proceeding de *1st. Int. Symp. Control of Rotating Machinery*, Lake Tahoe, EEUU, 2001.
- Gómez-Mancilla, J. y Nosov, V., Perturbed Pressure Field Solution for Misaligned Short Journal Bearings, Proceeding de *9th Int. Symp. Transport Phenom. and Dynam. Rotating Machinery*, Hawai, 2002.
- Gross, W.A. y Zachmanoglou E.C., Perturbation Solutions For Gas-Lubricating Films, *J. Fluid Eng.*, Vol. 83, pp. 139-144, 1961.
- Gupta, G., Hammond, C.R. y Szeri, A.Z., An Approximate THD Theory for Journal Bearings, *J. Tribol.*, Vol. 112(2), pp. 224-229, 1990.
- Hamrock, B.J. , Schmid, S.R. y Jacobson, B.O., *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, 2da. Ed., Marcel Dekker, 2004.
- Hatakenaka, K., Tanaka, M. y Suzuki, K., A Theoretical Analysis of Floating Bush Journal Bearing With Axial Oil Film Rupture Being Considered, *J. Tribol.*, Vol. 124(3), pp. 494-505, 2002.
- Hirani, H., Rao, T., Athre, K. y Biswas, S. Rapid Performance Evaluation of Journal Bearings. *Trib. Int.*, Vol. 30, pp. 825-834, 1997.
- Holman, J.P., *Transferencia de Calor*, 10ma. Ed., Co. Continental, México, 1999.
- Ionescu, M. G., Ionescu, V-C. M., An Approximate Analytical Model of Thermohydrodynamic Estimation of Finite Length Journal Bearings, *Proceedings of WTC2005*, 2005.
- Isachenko, V., Orsipova, V. y Sukomel, A., *Transmisión del Calor*, Marcombo, 1979.
- Johansson, L. y Wettergren, H., Computation of the Pressure Distribution in Hydrodynamic Bearings Using Newton's Method, *J. Tribol.*, Vol. 126(2), pp. 404-407, 2004.
- Kakoty, S.K. y Majumdar, B.C., Effect of Fluid Inertia on Stability of Flexibly Supported Oil Journal Bearings: Linear Perturbation Analysis, *Tribol. Int.*, Vol. 32, pp. 217-228, 1999.
- Kamal, M.M., Separation In The Flow Between Eccentric Rotating Cylinders, *J. Fluid Eng.*, Vol. 88, pp. 717-724, 1966.
- Khonsari, M.M. y Beaman, J.J., Thermohydrodynamic analysis of laminar incompressible journal bearings, *ASLE Trans.*, Vol. 29, pp. 141-150, 1986.
- Ling, F., Asymptotic Analyses in Isothermal Fluid Film Lubrication Theories. *SIAM Rev.*, Vol. 28, pp. 343-66, 1986.
- Lund, J.W. y Hansen, P.K., An Approximate Analysis of the Temperature Conditions in a Journal Bearing. Part I: Theory, *J. Tribol.*, Vol. 106(2), pp. 228-236, 1984.
- Ma M.T., y Taylor C.M., Effects of Oil feed Temperature on the Performance of an Elliptical Bore Bearing, *Lubricants and Lubrication - Proceedings of the 21st Leeds-Lyon Symposium on Tribology held at the Institute of Tribology, University of Leeds, U.K.*, pp 143-151, 1994.
- McHugh, J.D., Learning from unexpected consequences-the roots of Tribology, *Lubric. Eng.*, Vol. 55, pp. 33-39, 1999.
- Mitsui, J., A Study of Thermohydrodynamic Lubrication in a Circular Journal Bearing, *Tribol. Int.*, Vol. 20, pp. 331-341, 1987.
- Moes, H. y Bosma, R., Mobility and Impedance Definitions for Plain Journal Bearings, *Trans. J. Lubric. Tech.*, Series F., Vol. 103, pp. 468 -470, 1981.
- Myllerup, C.M. y Hamrock, B.J., Perturbation Approach to Hydrodynamic Lubrication Theory, *J. Tribol.*, Vol. 116, pp. 110-18, 1994.

- Pandazaras, C. y Petropoulos, G., Tribological design of hydrodynamic sliding journal bearings. Formulating new functional charts, *Ind. Lubric. Tribol.*, Vol. 57, pp. 4-11, 2005.
- Paranjpe, R.S. y Han, T., A Transient Thermohydrodynamic Analysis Including Mass Conserving Cavitation for Dynamically Loaded Journal Bearings, *J. Tribol.*, Vol. 117(3), pp. 369-378, 1995.
- Pinkus, O., *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw-Hill Book Co., 1961.
- Raimondi, A.A., y Boyd, J., A Solution for the Finite Journal Bearing and Its Application to Analysis and Design-III, *Trans. ASLE*, Vol. 1, No. 1, 1958.
- Reason, B.R. y Narang, I.P. Rapid Design and Performance Evaluation of Steady-State Journal Bearings—A Technique Amenable to Programmable Hand Calculators, *ASLE Trans*, 25, pp. 429-444, 1982.
- Rohde, S.M. y Li, D.F., A Generalized Short Bearing Theory, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 102, pp. 278-82, 1980.
- Safar, Z. y Szeri, A.Z., Thermohydrodynamic Lubrication in Laminar and Turbulent Regimes, *J. Lubric. Tech.*, pp. 48-57, 1974.
- San Andrés, L., *Static Load Performance of Plain Journal Bearings*, Class Notes on Modern Lubrication, Texas A&M University, College Station, TX, 2006.
- San Andrés, L., *Thermohydrodynamic Bulk-Flow Model in Thin Film Lubrication*, Class Notes on Modern Lubrication, Texas A&M University, College Station, TX, 2010.
- Santos, E.N., Blanco, C.J.C., Macêdo, E.N., Maneschy, C.E.A. y Quaresma, J.N.N. Integral transform solutions for the analysis of hydrodynamic lubrication of journal bearings, *Tribol. Int.*, Vol. 52, pp. 161-169, 2012.
- Schmitt, J.A. y Di Prima, R.C. Asymptotic Methods For An Infinite Slider Bearing With A Discontinuity In Film Slope, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 98, pp. 446-52, 1976.
- Schmitt, J.A. y Di Prima, R.C., Asymptotic Methods For A General Finite Width Gas Slider Bearing, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 100, pp. 254-60, 1978.
- Schuss, Z. y Etsion, I., On the Solution of Lubrication Problems Involving Narrow Configurations, *ASLE Trans.*, Vol. 24, pp. 186-90, 1981.
- Seireg, A. y Ezzat, H., Thermohydrodynamic phenomena in fluid film lubrication. *J. of Lubrication Tech.*, Vol. 95(2), pp. 187-194, 1972.
- Sfyris, D. y Chasalevris, A., An Exact Analytical Solution Of The Reynolds Equation For The Finite Journal Bearing Lubrication. *Trib. Int.*, Vol. 55, pp. 46-58, 2012.
- Singh, D.S. y Majumdar, B.C., Computer-aided design of hydrodynamic journal bearings considering thermal effects, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol. 219 Part J, pp. 133-143, 2005.
- Singhal, S., *A Simplified Thermohydrodynamic Stability Analysis of the Plain Cylindrical Hydrodynamic Journal Bearings*, Msc Thesis (Department of Mechanical Engineering, Louisiana State University), 2004.
- Sommerfeld, A., Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung, *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol. 50, pp. 97-155, 1904.
- Stahl, J., Narrow journal bearings, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol. 216 Part J, pp. 346-346, 2002.
- Stahl, J. y Jacobson, B.O., Design functions for hydrodynamic bearings, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol. 215 Part J, pp. 405-416, 2001.
- Suganami T. y Szeri, A.Z., A Thermohydrodynamic Analysis of Journal Bearings, *J. Lubric. Tech.*, Vol. 101, pp. 21-27, 1979.
- Szeri, A.Z., *Fluid Film Lubrication*, 2da Ed., Cambridge Univ. Press, 2011.
- Talmage, G. y Carpino M., Performance of a Plain Journal Bearing with Flooded Ends, *Trib. Trans.*, Vol. 45 (3), pp. 310-317, 2002.
- Tanaka, M., Journal bearing performance under starved lubrication, *Trib. Int.*, Vol. 33, pp. 259-264, 2000.

- Taylor, A.B. A Uniformly Valid Asymptotic Solution Of Reynolds's Equation: The Finite Journal Bearing With Small Clearance. *Proc. Roy. Soc. A*, Vol. 305, pp. 345-61, 1968.
- Tipei, N., y Nica, A., A Thermodynamic Analysis of Sliding Bearings, *Rev. Roum. Sc. Tech. Mech. Appl.*, Vol. 15 pp. 193-217, 1970.
- Tipei, N., y Nica, A., Investigations on the Operating Conditions of Journal Bearings, *Revue de Mécanique Appliquée*, Vol. 4, pp. 609-612, 1959.
- Tipei, N., y Nica, A., On the Field of Temperatures in Lubricating Films, *J. of Lubrication Tech.*, Vol. 89 (4), pp. 491-492, 1967.
- Vijayaraghavan, D., An efficient numerical procedure for Thermohydrodynamic analysis of cavitating Bearings, *J. Tribol.*, Vol. 118, pp. 555-563, 1996.
- Wannier, G.H., A Contribution To The Hydrodynamics Of Lubrication, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 8, pp. 1-32, 1950.
- Wood, W.W., The Asymptotic Expansions At Large Reynolds Numbers For Steady Motion Between Non-Coaxial Rotating Cylinders, *J. Fluid Mech.*, Vol. 3, pp. 159-75, 1957.
- Yu, T.H. y Sadeghi, F., Groove Effects on Thrust Washer Lubrication, *J. Tribol.*, Vol. 123, pp. 295-304, 2001.
- Zhang, Y., Hei, D., Liu, Ch., Guo, B., Lu, Y. y Müller, N. An approximate solution of oil film forces of turbulent finite length journal bearing, *Trib. Int.*, Vol. 74, pp. 110-120, 2014.

CAPÍTULO 5

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

Habiendo encontrado las expresiones de los balances de conservación que describen el flujo incompresible y laminar de un fluido Newtoniano en el cojinete hidrodinámico radial cilíndrico, y la Ecuación de Reynolds que resulta de la combinación de aquellos para el caso isotérmico, resta encontrar su solución exacta. Como se viera en el Capítulo anterior, la Ecuación de Reynolds tiene solución analítica en los casos límite de cojinetes muy cortos (ISJB) o muy largos (ILJB) pero no para el caso general de los cojinetes de longitud finita. En ese caso sólo se han podido obtener soluciones analíticas aproximadas, como la propuesta en este trabajo de tesis. Las soluciones límite son, sin embargo, ampliamente utilizadas, no sólo por el hecho de ser exactas sino porque indican las tendencias y muchas veces fijan los límites de operación de un cojinete hidrodinámico. Para la solución exacta de cojinetes finitos, aún en el caso isotérmico, sólo se puede recurrir al empleo de métodos numéricos.

En el presente Capítulo se presenta la solución numérica tanto de la Ecuación de Reynolds como de los balances de conservación acoplados, proponiendo metodologías alternativas de cálculo. Nuevamente, en este Capítulo sólo se considera las situaciones de estado estacionario.

5.1 PLANTEO NUMERICO PARA EL COJINETE HIDRODINAMICO

5.1.1 Métodos Numéricos

La mayoría de las situaciones asociadas al transporte de masa, cantidad de movimiento y energía son descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales que es necesario resolver para encontrar el valor de las variables en el dominio espacial.

Resolver estas ecuaciones numéricamente requiere aplicar un proceso de discretización para convertirlas en un conjunto de ecuaciones algebraicas, que luego se pueden resolver usando técnicas de álgebra lineal para dar valores de las variables en puntos discretos del dominio. Los métodos más conocidos para obtener las ecuaciones discretas son los métodos de “elementos finitos”, “diferencias finitas”, “volúmenes finitos”, etc. (Tucker, 1989; Burden y Faires, 2002, Chapra y Canale, 2006). De ellos, el método de diferencias finitas es el más antiguo y el más simple de implementar. Su mayor ventaja frente a los otros es precisamente su simpleza tanto en la implementación como en la interpretación, siendo también el método en que resulta más fácil ingresar los datos. Su mayor desventaja radica en las dificultades que se presentan al momento de ajustar contornos complejos. Pero, aun así, el método de diferencias finitas es el más desarrollado y más entendido. En cuanto a la precisión y tiempo de cómputo, no se diferencia sustancialmente de las demás técnicas. En virtud de sus ventajas, y dado que la geometría en el cojinete no es compleja y que el flujo se encuentra completamente definido por las condiciones de borde, en este trabajo de tesis se decidió usar la técnica de diferencias finitas para discretizar las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales.

Diversos autores han analizado el flujo en cojinetes cilíndricos usando métodos numéricos. Algunos de ellos se han basado en métodos de diferencias finitas (Raimondi y Boyd, 1958; Mitsui, 1987), elementos finitos (Booker y Huebner, 1972; Zhang *et al.*, 2002; Liu *et al.*, 2004; Durany *et al.*, 2006), volúmenes finitos (Arghir *et al.*, 2002). En la mayoría de los casos, se han enfocado en la resolución de la ecuación de Reynolds, con sus diferentes variantes. El trabajo quizás más emblemático por el impacto en el estado del arte de la época fue el presentado por Raimondi y Boyd (1958), el cual a pesar de su edad, sigue en vigencia y la metodología empleada para definir las variables se ha convertido en un estándar.

El algoritmo desarrollado por Raimondi y Boyd permitía la integración numérica de la ecuación de Reynolds isotérmica con condición de borde de Reynolds para la cavitación (u omitiendo la cavitación en la parte divergente). La influencia de la temperatura sobre el comportamiento del flujo fue realizada mediante la incorporación de una viscosidad efectiva, como ya se detallara en el Capítulo 4. La discretización del dominio llegó hasta una malla de 60×16 en las direcciones circunferencial y axial, respectivamente, para los cálculos con alta excentricidad (η hasta 0,97), y el criterio de convergencia adoptado fue que $\sigma \leq 0,00005$ siendo $\sigma = \frac{p_k - p_{k-1}}{p_k}$ y p_k la presión para cada punto de la grilla en la k -

ésima iteración. El método elegido para el tratamiento de las ecuaciones fue el de diferencias finitas. Los resultados de este notable trabajo de Raimondi y Boyd fueron ya presentados en el Capítulo 4 para comparar con los de soluciones analíticas. A partir de entonces se sucedieron un sinnúmero de aportes de soluciones numéricas para muchas variantes de condiciones y métodos. La inclusión de la temperatura entre las variables de cálculo se comenzó a realizar luego de la presentación de la ecuación de Reynolds Generalizada hecha por Dowson (1962), Ec. (99) del Capítulo 4. Entre los trabajos se destaca el de Mitsui (1987), quien complementa sus cálculos con verificaciones experimentales. Mitsui propuso las siguientes hipótesis para su modelo:

- El lubricante nuevo que ingresa por la ranura de alimentación axial se calienta por la mezcla con el lubricante remanente dentro del cojinete. La temperatura que alcanza la mezcla en la ranura, que es una de las condiciones de borde del modelado, se estima mediante el empleo de coeficientes de mezcla determinados experimentalmente.
- La temperatura sobre la superficie del rotor, la cual es otra condición de borde térmica, se obtiene de la estimación de la tasa de disipación de calor desde las superficies del eje al exterior.
- La temperatura sobre la superficie del cojinete se determina estimando el coeficiente de transferencia de calor entre el exterior del cojinete y el ambiente.
- Se considera una condición de borde tipo Reynolds para considerar la cavitación.
- La generación y disipación de calor en la zona cavitada se trata considerando las estrías de vapor (fingers) descritas previamente en el Capítulo 2. Cada estría se considera continua en la zona divergente. El ancho de cada una se ajusta de modo de mantener el Balance de Masa y sobre cada una puede emplearse el Balance de Energía al igual que en la zona convergente. La cantidad y tamaño de las mismas se determina experimentalmente mediante un cojinete transparente.

En cuanto al método de resolución, este autor discretizó el sistema de ecuaciones usando diferencias finitas para la integración numérica. Los resultados de este trabajo se muestran en apartados posteriores como punto de comparación de los aquí obtenidos.

En la actualidad se cuenta con un gran número de modelos y métodos de solución, pero éstos se orientan en general a brindar información funcional al diseñador de cojinetes y resulta difícil contar con información fluidodinámica detallada respecto de los perfiles de velocidad, de tensiones tangenciales, de presión, de temperatura, etc. Para ello, se requiere del tratamiento sobre el conjunto de los balances a fin de obtener una solución 3-D completa, es

decir: $u(\Theta, y, z)$, $v(\Theta, y, z)$, $w(\Theta, y, z)$, $\tau_{ij}(\Theta, y, z)$, $p(\Theta, y, z)$, $t(\Theta, y, z)$, etc. Ello suele, sin embargo, realizarse mediante el empleo de programas comerciales para resolución de flujo de fluidos. A modo de ejemplo, puede citarse el uso del software ANSYS Fluent (Gertzos *et al.*, 2008, Manshoor *et al.*, 2013), del software COMSOL (Alyaqout y Elsharkawy, 2011; Wolfinger, 2011), entre otros. En consecuencia, en este Capítulo, se plantea y analiza la resolución numérica de las ecuaciones de conservación acopladas que describen el flujo de un fluido Newtoniano incompresible en estado estacionario en el cojinete, es decir, una solución 3-D completa. De esta manera, se pretende conocer con exactitud la dependencia de las variables de interés con la posición espacial (Θ, y, z) . El esquema de cálculo escogido se basa en el método de diferencias finitas, aunque presenta una variante que se comenta más adelante en el Capítulo respecto del método tradicional.

En general, la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales que describe un problema físico por el método de diferencias finitas involucra tres pasos:

- la generación de una malla de nodos que represente la geometría del dominio y que provea de los puntos discretos en los que se calcularán las soluciones,
- la discretización de las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas de diferencias finitas válidas en los nodos de la grilla, y
- la resolución numérica de las ecuaciones de diferencias.

A continuación se describen los dos primeros, mientras que los métodos de resolución numérica se tratan en la próxima Sección.

5.1.2 Método de Diferencias Finitas y Discretización del Dominio

Básicamente el método de diferencias finitas consiste en reemplazar las derivadas por aproximaciones en diferencias finitas, convirtiendo entonces un problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico fácilmente resoluble con herramientas relativamente simples (especialmente matriciales). Este mecanismo de resolución surge de expandir en series de Taylor a las variables de interés, y el orden de la solución depende de la cantidad de términos de la serie que se empleen (Tucker, 1989; Chapra y Canale, 2006).

Así, dada la función continua $f(x)$ definida en un intervalo (a,b) , que tiene hasta la k -ésima derivada, la expansión de $f(x)$ usando series de Taylor alrededor del punto x_i , contenido en el intervalo (a,b) es

$$f(x) = f(x_i) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} (x - x_i) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_i} \frac{(x - x_i)^2}{2} + \dots + \left. \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right|_{x_i} \frac{(x - x_i)^k}{k!} \quad (1)$$

Las expresiones de las derivadas de distinto orden discretizadas resultan de escribir esta expresión en puntos ubicados a una distancia discreta de x y reordenar. Por ejemplo, la *derivada de primer orden por diferencias progresivas*, o *hacia adelante*, resulta de elegir $x = x_i + \Delta x$ y $k=2$, esto es:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} \Delta x + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_i} \frac{\Delta x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (2)$$

donde el error de truncamiento es de orden Δx . En una notación más simplificada, resulta:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (3)$$

donde el subíndice i representa la ubicación x_i y el subíndice $i+1$ la ubicación un Δx más adelante en x . De igual manera, se pueden obtener las expresiones de la *derivada de primer orden por diferencias regresivas*, o *hacia atrás* (eligiendo $x = x_i - \Delta x$, y con $k=2$),

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (4)$$

y la *derivada de primer orden por diferencias centradas* (con $k=3$, escribiendo las expresiones para $x = x_i + \Delta x$ y $x = x_i - \Delta x$, y restándolas),

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2 \Delta x} \quad \Rightarrow \quad f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (5)$$

que tienen un error de truncamiento de orden Δx y Δx^2 , respectivamente. También se pueden construir derivadas de orden Δx^2 , Δx^3 , etc., eligiendo puntos a distancias de $2\Delta x$, $3\Delta x$, etc., pero que no son tan frecuentemente utilizadas porque el resolverlas implica mayor complejidad algebraica.

De forma análoga se construyen aproximaciones en diferencias finitas de orden mayor. Por ejemplo, la *derivada de segundo orden por diferencias progresivas* resulta de escribir la expresión para $x = x_i + 2\Delta x$ y restarle el doble de la expresión para $x = x_i + \Delta x$, usando $k=3$, esto es:

$$\begin{aligned}
 f(x_i + 2\Delta x) &= f(x_i) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} 2\Delta x + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_i} 2\Delta x^2 + O(\Delta x^3) \\
 \Rightarrow f(x_i + 2\Delta x) - 2f(x_i + \Delta x) &= -f(x_i) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_i} \Delta x^2 \\
 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_i} &\approx \frac{f(x_i + 2\Delta x) - 2f(x_i + \Delta x) + f(x_i)}{\Delta x^2}
 \end{aligned} \tag{6}$$

donde el error de truncamiento es de orden Δx y se representaría como:

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{\Delta x^2} \tag{7}$$

De igual manera, se pueden obtener, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 f_i'' &= \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{\Delta x^2} \quad ; \quad f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad ; \\
 f_i'' &= \frac{-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i}{\Delta x^2} \quad ; \quad f_i'' = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12 \Delta x^2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

que tienen un error de truncamiento de orden Δx , Δx , Δx^2 y Δx^4 , respectivamente.

En el caso de derivadas en dos o tres dimensiones, los mecanismos anteriores de discretización se aplican a una dimensión por vez, lo que en realidad proviene de aplicar el teorema de Taylor para funciones en dos o tres variables. Por ejemplo, para una función continua $f(x,y,z)$, las derivadas primeras respecto de x , y y z se calcularían por diferencias hacia adelante como:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}_{(i,j,k)} &= \frac{f_{(i+1,j,k)} - f_{(i,j,k)}}{\Delta x} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}_{(i,j,k)} &= \frac{f_{(i,j+1,k)} - f_{(i,j,k)}}{\Delta y} \\
 \frac{\partial f}{\partial z}_{(i,j,k)} &= \frac{f_{(i,j,k+1)} - f_{(i,j,k)}}{\Delta z}
 \end{aligned} \tag{9}$$

El primer paso para aplicar la metodología de diferencias finitas consiste en discretizar el recinto en el que se quiere resolver la o las ecuaciones con una malla. La malla representa la geometría y provee los puntos discretos, o nodos, en los que se calculará la solución. Por ejemplo, dada una región rectangular asociada a las direcciones x e y , se la dividiría en $n \times m$ secciones en la que los nodos de la malla quedarían identificados como se muestra en la Figura 5.1:

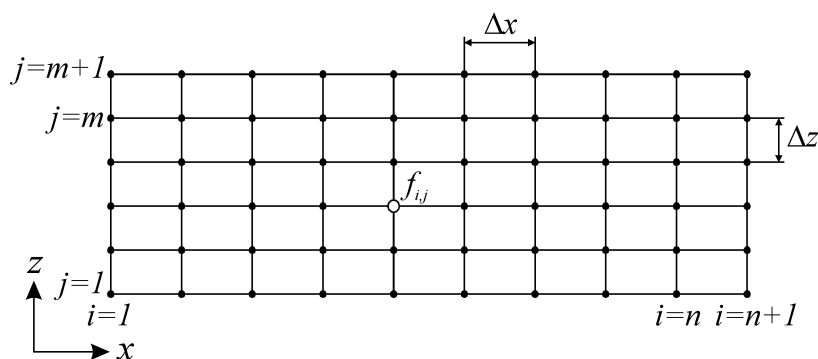


Figura 5.1: Discretización de un dominio rectangular

En el caso del cojinete hidrodinámico, el dominio continuo ocupado por el lubricante quedaría transformado en un espacio discreto a través de una grilla como la de la Figura 5.2.

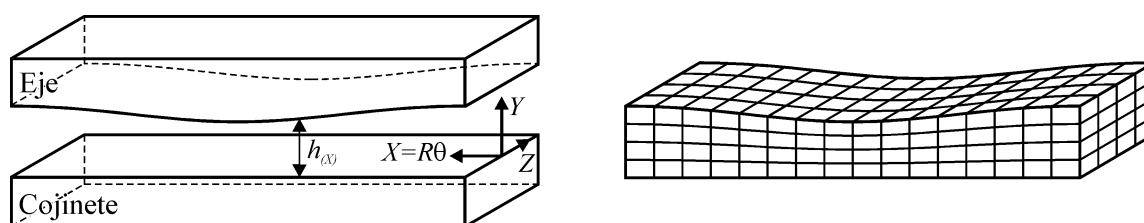


Figura 5.2: Discretización del dominio 3D de la película lubricante.

El manejo de dominios irregulares como el señalado en la Figura 5.2 es manejado fácilmente por métodos como el de elementos finitos. En el caso de diferencias finitas, su empleo en dominios de forma irregular requiere de interpolación y manipulación numérica sobre las fronteras físicas. Estas operaciones son normalmente engorrosas, reducen la exactitud del método, y lo hacen difícil de aplicar a programas de propósito general (Tucker, 1989). Sin embargo, la metodología de diferencias finitas también puede manejar con facilidad y exactitud un dominio irregular si se usan técnicas de generación de grilla numérica.

La generación de la grilla numérica es esencialmente una técnica de transformación (mapping). En primer lugar, un dominio físico con geometría compleja es llevado a uno computacional de forma regular. Luego, el problema físico se plantea en el nuevo dominio transformando las ecuaciones gobernantes. Y por último, las igualdades transformadas se resuelven en el dominio computacional utilizando el método tradicional de diferencias finitas.

Estas transformaciones requieren relaciones entre ambos sistemas de coordenadas, que están dadas por un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (Tucker, 1989). En este sentido, existen varios métodos de generación de grilla numérica, que se basan

en ecuaciones diferenciales de distinto tipo: parabólicas, hiperbólicas o elípticas. En este trabajo de tesis se emplean ecuaciones generadoras de grillas elípticas porque distribuyen los nodos suavemente (regularmente) en el dominio físico y manejan efectivamente discontinuidades y singularidades en las fronteras.

En el caso del flujo en el cojinete, la transformación deseada de grilla en coordenadas físicas a coordenadas computacionales es la que se muestra en la Figura 5.3, que solo involucra dos dimensiones ya que la región es uniforme en z .

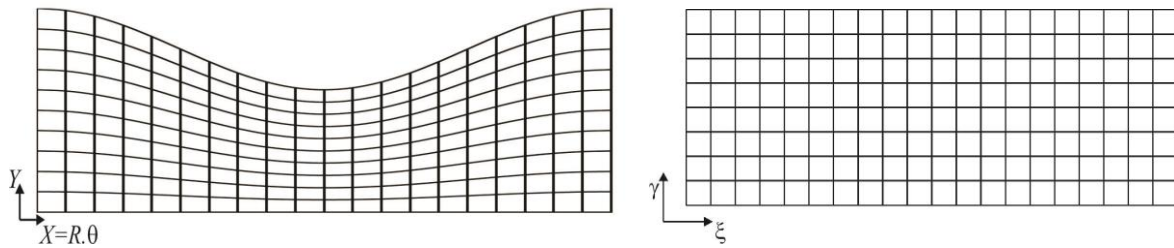


Figura 5.3: Transformación de coordenadas del dominio físico al computacional.

Las ecuaciones elípticas de generación de grillas tipo Poisson para un problema bidimensional (Tucker, 1989) son:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = S_{(\xi,\gamma)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = Q_{(\xi,\gamma)} \quad (10)$$

donde (Θ, y) son las coordenadas físicas, y (ξ, γ) son las coordenadas curvilíneas computacionales. S y Q son funciones de control de grilla que permiten manipular la distribución de nodos en el dominio físico.

La resolución de las Ecs. (10) para generar el par (Θ, y) correspondiente a cada (ξ, γ) resulta en:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \gamma} + \delta \frac{\partial^2 x}{\partial \gamma^2} + J^2 \left(S \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right) &= 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \gamma} + \delta \frac{\partial^2 y}{\partial \gamma^2} + J^2 \left(S \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

donde J es el Jacobiano de transformación dado por

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial x}{\partial \gamma} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (12)$$

y los coeficientes geométricos α , β y δ son:

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma} \right)^2, \quad \beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \gamma}, \quad \text{y} \quad \delta = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2. \quad (13)$$

La solución de las Ecs. (11) a (13) genera la grilla. En este trabajo, dado que se conoce a priori la función que describe la superficie irregular del dominio ($y = \tilde{h} = 1 + \eta \cos(\pi\Theta)$), se utilizan funciones de control $S(\gamma, \xi)$ y $Q(\gamma, \xi)$ definidas como:

$$S(\gamma, \xi) = 0 \quad \text{y} \quad Q(\gamma, \xi) = -\frac{1}{\tilde{h}^2} \gamma \left(\tilde{h}(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \xi^2} - 2 \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \xi} \right)^2 \right) \quad (14)$$

que garantizan la distribución uniforme de nodos. De esta manera, la transformación de coordenadas queda definida por:

$$\Theta = \xi \quad \text{e} \quad y = \gamma \tilde{h}(\xi) = \gamma (1 + \eta \cos(\pi\xi)). \quad (15)$$

El paso siguiente en la resolución del problema es la transformación de las ecuaciones gobernantes y sus condiciones de borde al dominio computacional. Para ello, debe tenerse en cuenta que:

$$d\varphi(\gamma, \xi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi, \quad (16)$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\gamma, \xi)}{\partial X} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial X} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} \\ \frac{\partial \varphi(\gamma, \xi)}{\partial Y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial Y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} \end{aligned} \quad (17)$$

Así, las derivadas de interés respecto de Θ e y , de una variable φ cualquiera, quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} &= \frac{1}{\tilde{h}} \left(\tilde{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{\tilde{h}} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{1}{\tilde{h}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} \end{aligned} \quad (18)$$

permaneciendo las derivadas respecto de z sin cambios.

Por último, una vez que se transforma el sistema de ecuaciones al dominio computacional, resta definir la estrategia de cálculo. En la siguiente Sección se presentan

las diferentes estrategias utilizadas en este trabajo.

5.2 MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUCION UTILIZADOS

Tal como se ha mencionado previamente, el método elegido en este trabajo se basa en un esquema de diferencias finitas no tradicional. En la variante elegida no se discretizan las variables del dominio tridimensional mediante diferencias (modelo de diferencias finitas 3D tradicional) para resolverse como un problema de frontera. El mecanismo escogido se basa en la reformulación de las ecuaciones para que puedan integrarse como un problema de valor inicial, seguido de una técnica de “shooting”. Si bien las técnicas de shooting pueden presentar problemas de inestabilidad, los métodos de diferencias finitas tradicionales requieren más recursos computacionales para obtener la misma exactitud (Burden y Faires, 2002), que fue lo que se priorizó en este caso.

A continuación se presentan conceptualmente los métodos numéricos que se utilizan para desarrollar los algoritmos. Cabe destacar, que el hecho de abordar sólo los métodos empleados no implica que los mismos sean los únicos capaces de resolver los problemas planteados, ni que sean los únicos bajo estudio o los más óptimos para ello. Simplemente, son los escogidos en base a análisis, experiencia y trabajo.

5.2.1 Método de Shooting

Esta técnica recibe su nombre por la analogía que muestra con el procedimiento de dispararle a objetos situados en un blanco fijo (Kaw, 2009). A modo ilustrativo, en la Figura 5.4 se presenta un ejemplo para un sistema de una sola variable.

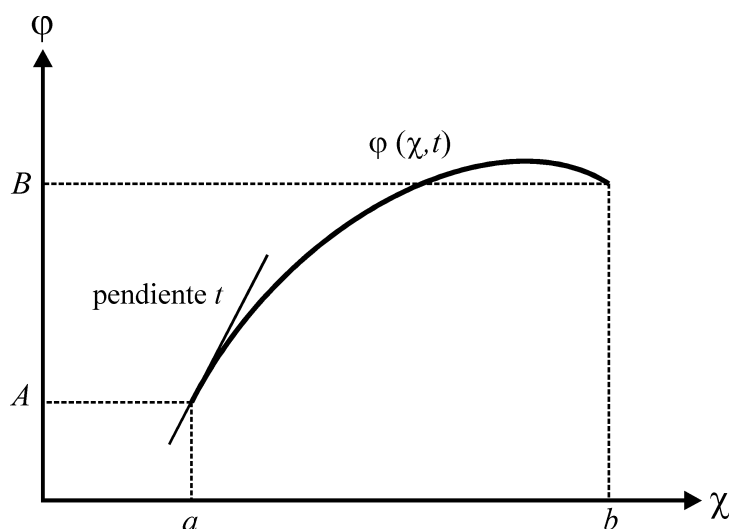


Figura 5.4: Disparo desde un punto (a,A) a un objetivo en (b,B) , con una trayectoria ϕ .

El “disparo” realizado desde (a,A) con una pendiente inicial t_0 a un objeto que está ubicado en (b,B) es un problema de valor inicial descrito por la curva:

$$\varphi'' = f(\chi, \varphi, \varphi') . \tag{19}$$

Una vez resuelto, el valor de $\varphi(b,t_0)$ seguramente no coincide con el objetivo, B , por lo que se corrige la aproximación seleccionando diferentes pendientes, t_1, t_2 , etc. (ver Figura 5.5) hasta que $\varphi(b,t_n)$ esté lo suficientemente cerca de B como para considerar que se ha “acertado al blanco”.

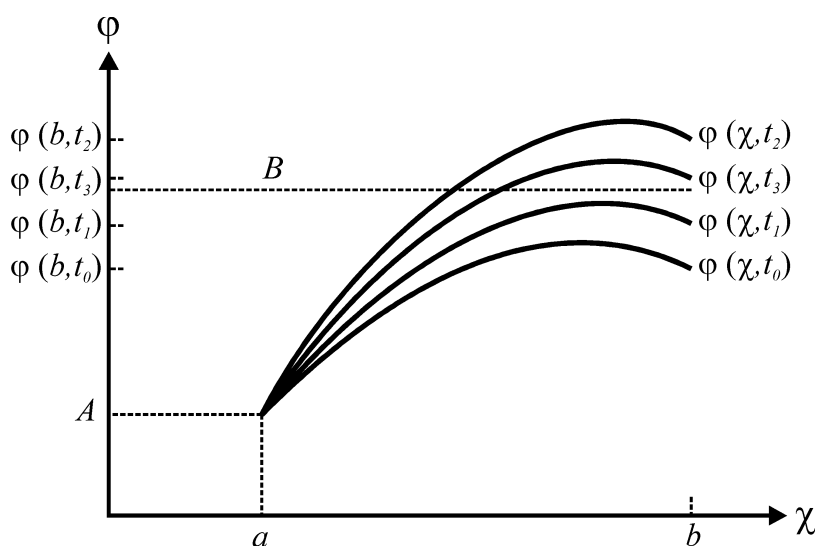


Figura 5.5: Disparos desde un punto (a,A) con diferentes pendientes iniciales de la función φ .

Los valores de t_i saldrían de:

$$\varphi(b,t) - B = 0 . \tag{20}$$

Esta ecuación puede resolverse usando varios métodos, con el objetivo de buscar su raíz. Por ejemplo, empleando el “método de la secante”, bastará con elegir las aproximaciones iniciales t_0 y t_1 y luego generar los términos restantes de la sucesión mediante:

$$t_k = t_{k-1} - \frac{[\varphi(b,t_{k-1}) - B](t_{k-1} - t_{k-2})}{\varphi(b,t_{k-1}) - \varphi(b,t_{k-2})} \quad \text{con } k = 2, 3, \dots . \tag{21}$$

Un método sensiblemente más robusto para generar la sucesión $\{t_k\}$ es el “método de Newton”, que sólo necesita de la aproximación inicial t_0 . En este caso, cada iteración tiene la forma

$$t_k = t_{k-1} - \frac{\varphi(b,t_{k-1}) - B}{\frac{d\varphi}{dt}(b,t_{k-1})} \tag{22}$$

que requiere conocer $\frac{d\varphi}{dt}(b, t_{k-1})$. Esto presenta el problema de que no se conoce a-priori una representación explícita de $\varphi(b, t)$ y, por lo tanto, requiere la solución en simultáneo de dos problemas de valor inicial en cada iteración, el correspondiente a la Ec. (19) y otro dado por:

$$\frac{\partial \varphi''}{\partial t}(\chi, t) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\chi, \varphi, \varphi') \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\chi, t) + \frac{\partial f}{\partial \varphi'}(\chi, \varphi, \varphi') \frac{\partial \varphi'}{\partial t}(\chi, t), \quad (23)$$

que, empleando la notación $G(\chi, t)$ para denotar $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\chi, t)$, es:

$$G''(\chi, t) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\chi, \varphi, \varphi') G(\chi, t) + \frac{\partial f}{\partial \varphi'}(\chi, \varphi, \varphi') G'(\chi, t). \quad (24)$$

De acuerdo con la Ec. (22), resulta entonces:

$$t_k = t_{k-1} - \frac{\varphi(b, t_{k-1}) - B}{G(b, t_{k-1})}. \quad (25)$$

Los cálculos propuestos en las Ecs. (21) y (25) son válidos para la aproximación de una única función φ . Si se requiere la aproximación simultánea de más de una función (y por ende, más de una variable), el problema debe tratarse como multidimensional o multivariadas y requiere de una generalización del método.

5.2.2 Método de Shooting Multidimensional

Si el problema a resolver es multivariadas (es decir, consta de un conjunto de ecuaciones e incógnitas), la resolución del mismo pasará de ser la búsqueda de la raíz de la Ec. (20) a la búsqueda de las raíces del sistema de ecuaciones en cuestión. Un sistema de n ecuaciones no lineales con n incógnitas tiene la forma,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Este sistema puede representarse también mediante una función vectorial \underline{F} , como:

$$\underline{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^T. \quad (27)$$

Con esta notación, el sistema a resolver adopta la forma $\underline{F}(\underline{x})=0$.

Como ya se mencionó para el caso del método de shooting aplicado a una única variable, la herramienta más robusta para determinar raíces de \underline{F} es el Método de Newton para sistemas no lineales, una técnica que por lo general converge en forma cuadrática, siempre y cuando se conozca un valor inicial suficientemente preciso y exista J^{-1} , la inversa de la matriz Jacobiana (Burden y Faires, 2002):

$$J(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

El procedimiento de iteración funcional, equivalente al de la Ec. (22), para un sistema multivariable pasa de seleccionar $\underline{x}_{(0)}$ a generar, para $k \geq 1$,

$$\underline{x}_{(k)} = \underline{x}_{(k-1)} - J(\underline{x}_{(k-1)})^{-1} \underline{F}(\underline{x}_{(k-1)}) \quad (29)$$

Este método requiere que, en cada iteración, se calculen las derivadas de las funciones (la matriz Jacobiana) y resolver un sistema lineal de $n \times n$ que la contiene. La matriz Jacobiana asociada a un sistema de n ecuaciones no lineales escritas en la forma $\underline{F}(\underline{x})=0$ requiere determinar y evaluar n^2 derivadas parciales de las n funciones componentes de $\underline{F}(\underline{x})$. La determinación de esta matriz puede ser analítica o numérica. En el primer caso, se la introduce luego de calcular manualmente todas las derivadas que la componen. En el segundo, se emplean diferencias para aproximar a las derivadas, y se calculan numéricamente.

La magnitud del problema y la necesidad de que el método de resolución sea independiente del sistema de ecuaciones empleado, restringe en este trabajo el uso de derivadas analíticas, calculándose las mismas de forma numérica, a expensas del esfuerzo computacional que ello implica. Se verá luego, que el tiempo de cálculo requerido para determinar la matriz Jacobiana es el paso controlante del algoritmo desarrollado para resolver los problemas de lubricación estudiados. Por ello se presentan en esta Sección otras variantes que permiten resolver el problema sin la necesidad de calcular esta matriz, o bien calculándola en un número mínimo de pasos antes de lograr convergencia.

Método de Broyden

La primer alternativa para disminuir los cálculos es el empleo del método de la secante

(equivalente al ya presentado en la Ec. (21) para una variable) generalizado a los sistemas no lineales, conocido como “método de Broyden” (Burden y Faires, 2002). Este método reemplaza la matriz Jacobiana J del método de Newton con una matriz de aproximación, A , que se actualiza en cada iteración, requiriendo sólo n evaluaciones de funciones escalares por iteración. Así, el procedimiento de iteración se convierte en,

$$\underline{x}_{(i)} = \underline{x}_{(i-1)} - A_i^{-1} \underline{F}(\underline{x}_{(i-1)}), \quad (30)$$

donde

$$A_i = A_{i-1} + \frac{(\underline{y}_{(i)} - A_{i-1} \underline{s}_{(i)}) \underline{s}_{(i)}^t}{\underline{s}_{(i)} \cdot \underline{s}_{(i)}^t}, \quad \underline{y}_i = \underline{F}(\underline{x}_{(i)}) - \underline{F}(\underline{x}_{(i-1)}) \quad \text{y} \quad \underline{s}_i = \underline{x}_i - \underline{x}_{i-1} \quad (31)$$

La principal desventaja del método de Broyden radica en que se pierde la convergencia cuadrática de Newton.

Para inicializar el método, se requiere el empleo de una matriz inicial A_0 . En general, se emplea $A_0=J_0$, lo que implica el cálculo de la matriz Jacobiana en el paso inicial. Una alternativa válida es el empleo de $A_0=I$, la matriz identidad, pero el método pierde convergencia (Biegler, 2000). En este trabajo se implementaron ambas variantes ($A_0=J_0$ y $A_0=I$), lográndose convergencia sólo con la primera de ellas. En cuanto al algoritmo de Broyden implementado, se usó un método sencillo de control en la actualización de A , propuesto por Broyden (Dahlquist y Björck, 1974), que consiste en agregar un factor escalar, s_k , en la Ec. (30), de modo que:

$$\underline{x}_{(i)} = \underline{x}_{(i-1)} - s_k A_i^{-1} \underline{F}(\underline{x}_{(i-1)}), \quad (32)$$

donde el valor que adopta s_k es igual a 1 si la norma euclídea de $\underline{F}(\underline{x}_j)$ es menor a la de $\underline{F}(\underline{x}_{j-1})$. De lo contrario,

$$s_k = \frac{(1+6\alpha)^{1/2} - 1}{3\alpha}, \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n (\underline{F}(\underline{x}_{(i)}))^2}{\sum_{i=1}^n (\underline{F}(\underline{x}_{(i-1)}))^2}. \quad (33)$$

Métodos de Optimización Multidimensional

Otro enfoque adoptado en la búsqueda de mejorar los tiempos de cálculo se basa en la aplicación de métodos de optimización multidimensional (Chapra y Canale, 2006). La aplicación de estos métodos se limita a la búsqueda del óptimo de una función multivariable, la que puede ser generada a través de los “residuos” de un sistema de ecuaciones

multivariadas. Es decir, en la búsqueda de la solución del sistema $\underline{F}(\underline{x})=0$, se pasará por j iteraciones sucesivas, en cada una de las cuales en realidad resulta $\underline{F}(\underline{x})=\underline{R}^j$, donde \underline{R}^j es el “residuo” resultante de la iteración j y, si el algoritmo converge, $\underline{R}^j \rightarrow 0$ a medida que $j \rightarrow \infty$. La idea es, entonces definir una función $g^j(\underline{x})$, que se calcule en cada iteración a partir de \underline{R}^j , y que permita lograr que $\underline{R}^j \rightarrow 0$ a medida que $g^j(\underline{x}) \rightarrow \text{óptimo}$. Por ejemplo, si se define

$$g^j = \sum_{i=1}^n (R_i^j)^2 \tag{34}$$

claramente se cumple la citada relación, y puede aplicarse un método de optimización a $g^j(\underline{x})$ para resolver $\underline{F}(\underline{x})=0$.

Al igual que lo descrito para búsqueda de raíces, las técnicas para la optimización multidimensional sin restricciones se pueden clasificar según requieran la evaluación de la derivada (métodos gradiente) o no (métodos directos). Entre los primeros, puede citarse al método de Newton y sus variantes, que se basan en aplicar el método de Newton previamente mostrado a un sistema $\underline{G}(\underline{x})=0$, tal que $\underline{G} = \underline{\nabla}g$. Así, al buscar los ceros de las derivadas de la función, se obtiene un óptimo. El procedimiento de iteración se convierte en,

$$\underline{x}_{(i)} = \underline{x}_{(i-1)} - H_i^{-1} \underline{\nabla}g(\underline{x}_{(i)}) , \tag{35}$$

donde H es la matriz Hessiana, definida como

$$H(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} . \tag{36}$$

Este método converge en forma cuadrática cerca del óptimo, pero requiere tanto el cálculo de las segundas derivadas como la inversión de H en cada iteración.

Los métodos directos varían desde procedimientos de simple fuerza bruta, a técnicas más elegantes que intentan explotar la naturaleza de la función. En esta instancia se considera provechosa la evaluación de ambos extremos. Entre los procesos de fuerza bruta, resulta de

interés el método implementado en la rutina DUMPOL de la librería IMSL¹, mientras que entre los más elaborados resulta de interés el método de Powell (Chapra y Canale, 2006).

La rutina DUMPOL emplea el algoritmo Politopo para encontrar el punto mínimo de una función $g(\underline{x})$ de N variables. El método del Politopo se basa en la comparación de funciones sin asumir suavidad. Comienza con $N+1$ puntos $(x_1, x_2, \dots, x_{N+1})$, y en cada iteración, genera un nuevo punto para reemplazar el peor punto, x_j , que es el que tiene el mayor valor de la función entre esos $N+1$ puntos. El procedimiento avanza garantizando que cada x_j es reemplazado por un x_k tal que $g(x_k) < g(x_j)$ hasta que se alcanza el criterio de convergencia. Dado que esta rutina usa sólo información de evaluación de la función en cada paso para determinar una nueva aproximación al mínimo, puede ser muy ineficiente comparado con otros métodos que hacen uso de información de la forma de la función (Visual Numerics, 1997).

Existen algoritmos formales que capitalizan la idea de las direcciones patrón para encontrar los valores óptimos en forma eficiente. El más conocido de dichos algoritmos es el llamado “método de Powell”, que capitaliza el concepto de búsqueda mediante direcciones conjugadas. Así, se puede demostrar que si $f(\chi, \varphi)$ es una función cuadrática, las búsquedas secuenciales a lo largo de las direcciones conjugadas convergerán exactamente en un número finito de pasos, sin importar el punto de partida. Puesto que una función general no lineal a menudo puede estar razonablemente aproximada a una función cuadrática, los métodos basados en direcciones conjugadas son por lo común bastante eficientes y son en realidad convergentes en forma cuadrática cuando se aproximan al óptimo. El método de Powell (o sus variantes) es recomendado cuando el cálculo de las derivadas es tedioso ya que no son necesarias para su ejecución (Press *et al.*, 1992; Chapra y Canale, 2006).

A continuación se presenta en forma gráfica el “método de Powell simplificado” para encontrar el máximo de la función ejemplo

$$f(\chi, \varphi) = c - (\chi - a)^2 - (\varphi - b)^2, \quad (37)$$

donde a , b y c son constantes positivas. Esta ecuación resulta en contornos circulares en el plano $\{\chi, \varphi\}$, como se muestra en la Figura 5.6 (Chapra y Canale, 2006).

¹ IMSL (International Mathematics and Statistics Library) es una colección comercial de bibliotecas de software de funcionalidad numérica y análisis que se implementan en los lenguajes de programación de C, Java, C# .NET y Fortran. Las bibliotecas IMSL las proporciona Rogue Wave Software.

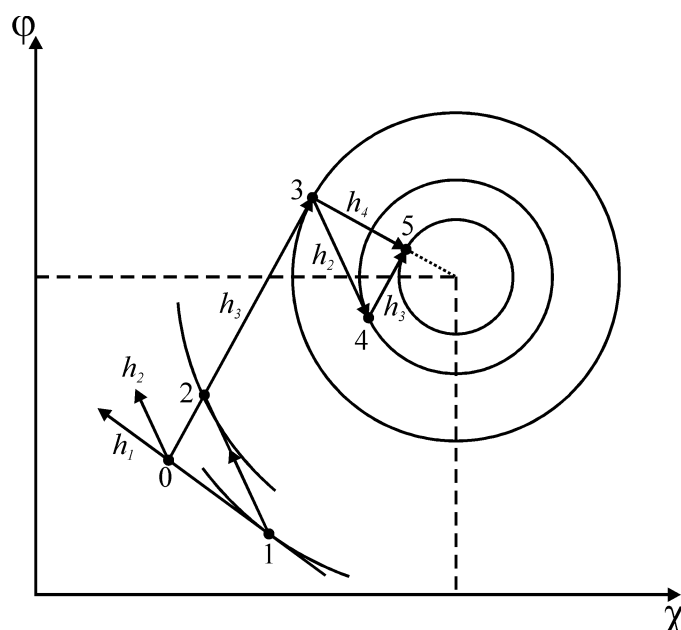


Figura 5.6: Representación gráfica del método de Powell simplificado.

La búsqueda se inicia en el punto 0 con las direcciones iniciales h_1 y h_2 , que no son necesariamente direcciones conjugadas. Desde allí, por desplazamiento a lo largo de la dirección h_1 se localiza un máximo, que resulta en un punto 1. Luego, por desplazamiento desde el punto 1 a lo largo de la dirección h_2 se busca otro máximo, que estará en un punto 2. Para la búsqueda del punto 3 siguiente, el desplazamiento se realiza desde 2 en una dirección h_3 que pasa por los puntos 0 y 2. Una vez localizado ese máximo, en el punto 3, la búsqueda siguiente se vuelve a hacer en la dirección h_2 hasta que se localiza el máximo en un punto 4. Del punto 4 se llega al máximo siguiente, punto 5, buscando de nuevo en dirección h_3 . Teniendo ya dos puntos, 5 y 3, que se han localizado por búsqueda en dirección h_3 , se define la dirección siguiente de búsqueda, h_4 (determinada por esos puntos) que, según demostrara Powell, forma con h_3 un par de direcciones conjugadas. La búsqueda desde el punto 5 a lo largo de la dirección h_4 lleva directamente al máximo buscado de la función.

El método de Powell, aun cuando puede refinarse para hacerlo más eficiente, ya es un método eficiente que converge en forma cuadrática sin requerir evaluación de la derivada, por lo que se usará como tal. En este trabajo se emplea el paquete NEWUOA (NEW Unconstrained Optimization Algorithm) cuyo propósito es minimizar una función multivariable mediante un método de región de confianza que forma modelos cuadráticos por interpolación (Powell, 2007). NEWUOA es un desarrollo del paquete UOBYQA (Powell, 2002), que no es propicio para problemas de gran número de variables, N , dado que se construyen por interpolación de $(N+1)(N+2)/2$ valores de la función objetivo. El número de condiciones de interpolación en NEWUOA es un parámetro (cuyo valor recomendado es

$2N+1$), que reduce la magnitud de trabajo de la rutina de N^4 a un valor entre N^2 y N^3 . De esta manera, NEWUOA ha sido probado exitosamente en la bibliografía para resolver problemas de hasta 200 variables. En las pruebas realizadas para el sistema presentado en el presente trabajo, el método funcionó correctamente con 270 variables y presenta muy buen potencial para problemas de menor envergadura.

5.2.3 Métodos de Integración

Lo expuesto hasta este punto es independiente del método de resolución empleado para integrar la Ec. (19) desde a hasta b . En este paso intervienen las condiciones de borde.

Un problema de valor inicial de la ecuación diferencial de n -simo orden:

$$\frac{d^n \varphi}{d\chi^n} = f(\chi, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}) , \tag{38}$$

que se supone bien planteada, en el sentido que satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad, consiste en encontrar su solución en un intervalo $a-b$, que satisfaga en el punto χ_0 del intervalo $a-b$, las n condiciones:

$$\begin{aligned} \varphi(\chi_0) &= \varphi_0 \\ \varphi'(\chi_0) &= \varphi_1 \\ \varphi''(\chi_0) &= \varphi_2 \\ &\vdots \\ \varphi^{(n-1)}(\chi_0) &= \varphi_{n-1} \end{aligned} . \tag{39}$$

El procedimiento numérico más sencillo para resolver la Ec. (38) con las condiciones planteadas en la Ec. (39) es el denominado “método de Euler” (Chapra y Canale, 2006). Además de éste, existe un sinnúmero de variantes y métodos para resolver este tipo de problemas, con los que se mejoran tanto la exactitud como la convergencia, no obstante se muestra el método de Euler dado su desarrollo simple e intuitivo.

Método de Euler

La idea es que, dado que se conocen las relaciones de la Ec. (39) en el punto χ_0 , puede desarrollarse la serie de Taylor

$$\varphi(\chi_0 + \Delta\chi) = \varphi(\chi_0) + \Delta\chi f(\chi_0, \varphi(\chi_0)) + O(\Delta\chi^2) , \tag{40}$$

y aproximar $\varphi(\chi_1) = \varphi(\chi_0) + \Delta\chi f(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ para un $\Delta\chi$ pequeño. Este proceso puede repetirse luego en $\chi_2 = \chi_1 + \Delta\chi$ para obtener una aproximación de $\varphi(\chi_0 + 2\Delta\chi)$, es decir, de

$\varphi(\chi_2) = \varphi(\chi_1) + \Delta\chi f(\chi_1, \varphi(\chi_1))$. Así, se puede proceder paso por paso para obtener una secuencia de aproximaciones para $\varphi(\chi_i)$ donde

$$\chi_i = \chi_0 + i \Delta\chi \quad \text{y} \quad \varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta\chi f(\chi_i, \varphi(\chi_i)) \quad \text{con } i = 0, 1, \dots \quad (41)$$

con una magnitud constante de paso, $\Delta\chi$. Sin embargo, no es necesario que los pasos sean todos iguales, y de hecho, en muchos casos es preferible variarlo en cada paso, como se verá a continuación.

Métodos Multipasos

En el método de Euler y demás algoritmos que funcionan bajo el mismo concepto, la aproximación del punto χ_{i+1} contiene información proveniente de uno solo de los puntos anteriores χ_i . Aunque estas técnicas pueden usar información relativa a la evaluación de funciones en los puntos entre χ_i y χ_{i+1} , no la conservan para utilizarla directamente en aproximaciones futuras. Toda la información que emplean se obtiene dentro del subintervalo en que va a aproximarse la solución.

Como la solución aproximada está disponible en los puntos $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_i$, antes de obtener la aproximación χ_{i+1} , y como el error de la aproximación tiende a aumentar a medida que χ_i se aleja de χ_0 , parece justificarse el empleo de datos precedentes para aproximar la solución en χ_{i+1} . Los métodos que lo hacen son los denominados “métodos multipasos”. Se define como método multipasos de paso m a aquel cuya ecuación de diferencias para obtener la aproximación φ_{i+1} en el punto χ_{i+1} se representa como:

$$\varphi_{i+1} = a_{m-1}\varphi_i + a_{m-2}\varphi_{i-1} + \dots + a_0\varphi_{i+1-m} + \Delta\chi \left[b_m f(\chi_{i+1}, \varphi(\chi_{i+1})) + b_{m-1} f(\chi_i, \varphi(\chi_i)) + \dots + b_0 f(\chi_{i+1-m}, \varphi(\chi_{i+1-m})) \right] \quad \text{con } i = m-1, m, \dots, N-1 \quad (42)$$

donde a_0, a_1, \dots, a_{m-1} y b_0, b_1, \dots, b_m son constantes, $\Delta\chi = \frac{b-a}{N}$, y los valores iniciales son:

$$\varphi_0 = \alpha_0, \quad \varphi_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad \varphi_{m-1} = \alpha_{m-1} \quad (43)$$

Distintos valores para los a_i y b_i definen variantes de los métodos conocidos como “métodos de Adams” (Burden y Faires, 2002).

Métodos Multipasos de Gear

Considerando la fórmula general de los métodos multipasos, Ec. (42), se puede deducir que

la misma da el valor exacto de φ_{i+1} , cuando φ_χ es un polinomio de grado menor o igual a m , si se cumplen las siguientes restricciones de exactitud (también llamadas restricciones de consistencia):

$$\sum_{m=0}^{p-1} a_m = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{m=0}^{p-1} (-m)^p a_m + j \sum_{m=0}^p (-m)^{j-1} b_m = 1 \quad \text{con } j=1,2,\dots,k \quad (44)$$

La familia de los “métodos multipasos de Gear” (Pozrikidis, 1998) se identifica por tener todos los coeficientes b_m , excepto b_0 , nulos, en oposición a los métodos de Adams que tienen todos los coeficientes a_m , excepto a_0 , nulos. Dado que $b_0 \neq 0$, los métodos de Gear son métodos implícitos.

El método de Gear de orden k se obtiene haciendo $p = k - 1$, y $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = 0$, que conduce a la fórmula implícita:

$$\varphi_{n+1} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \varphi_i + \Delta\chi b_0 f(\varphi_{n+1}, \chi_{n+1}), \quad (45)$$

que debe resolverse para cada paso, para obtener el valor actualizado de φ_{n+1} . Ello requiere la resolución de un sistema de $M \times M$ (si el sistema es de M ecuaciones diferenciales) y la consecuente factorización de la matriz Jacobiana si se lo resuelve mediante el método de Newton ya explicado. Por lo tanto, es necesario normalmente, iterar el corrector más de una vez. A fin de minimizar el volumen de cálculo asociado a cada paso, Gear emplea la siguiente estrategia específica de control de convergencia, paso y error (Gear, 1971):

- (a) Si hay convergencia del corrector en 3 iteraciones o menos, se sigue utilizando la misma factorización de la matriz Jacobiana.
- (b) Si en 3 iteraciones no hay convergencia, y si no se había calculado la matriz inmediatamente antes, se calcula y se factoriza nuevamente, y se repiten las iteraciones.
- (c) Si no hay convergencia con una nueva matriz, se reduce $\Delta\chi$ en un factor 16, se calcula la nueva matriz, y se repiten las iteraciones.

Hasta aquí se han presentado variantes para implementar los tres pasos necesarios enunciados para la resolución numérica de un sistema de ecuaciones diferenciales. En este trabajo de tesis se ha implementado un esquema de diferencias finitas de segundo orden para discretizar el dominio y las ecuaciones gobernantes, previa aplicación de una transformación elíptica de coordenadas para obtener un dominio regular. Las ecuaciones de diferencias resultantes se integran mediante el método de Gear entre la superficie del cojinete y la del

rotor, siguiendo una técnica de shooting multidimensional. Para verificar el resultado del “disparo” se comparan los resultados de las variables sobre la superficie del rotor con las condiciones de contorno que deben lograrse. El ajuste del nuevo disparo se logra mediante el método de Broyden, de Newton o de Powell. Todos ellos fueron probados y analizados. El algoritmo implementado fue desarrollado en orden creciente de complejidad, comenzando por el cálculo de cojinetes isotérmicos para luego migrar a su análisis termohidrodinámico.

5.3 SOLUCIÓN DE FLUJO ISOTÉRMICO

Tal como se dedujera en el Capítulo 3, las ecuaciones que describen el flujo isotérmico de un fluido Newtoniano incompresible en el cojinete hidrodinámico son:

$$\text{BM:} \quad 0 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (46)$$

$$\text{BCM (X):} \quad 0 \approx -\frac{1}{\pi} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (47)$$

$$\text{BCM (Y):} \quad 0 \approx -\left(\frac{L}{c} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (48)$$

$$\text{BCM (Z):} \quad 0 \approx -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (49)$$

que fueron deducidas para propiedades ρ , \hat{C}_v , k y μ constantes, y asumiendo que el huelgo $c = R_b - R$ es mucho menor que el tamaño del cojinete ($c \ll R$ y $c \ll L$), la aceleración local y convectiva son despreciables (si $\text{Re} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \rightarrow 0$ con $\text{Re} = \rho UR / \mu$), y los efectos gravitatorios son despreciables. En estas ecuaciones se ha considerado, además, que c , R y L son los valores característicos (VC) de las dimensiones transversal (Y), longitudinal (X) y axial (Z), que las velocidades en esas direcciones tienen los VCs: $U \frac{c}{R}$, U y $U \frac{L}{R}$, respectivamente, y que la presión característica es $P_c = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2$, la P_c de cojinetes cortos. Como se puede observar, los VCs de V_Z y la presión son los correspondientes al análisis de cojinetes cortos (ver Capítulo 3).

Si, además, se considera que la presión es constante en el espesor de la película fluida

$\left(\frac{\partial P}{\partial Y} \ll \frac{\partial P}{\partial X} \approx \frac{\partial P}{\partial Z}\right)$, las Ecs. (47) y (49) se pueden integrar para calcular V_x y V_z . La introducción de estos resultados en el BM y su posterior integración en dirección Y , da lugar a la Ecuación de Reynolds:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} = \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta} \tilde{h}^3\right) + \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \tilde{h}^3\right) \quad (50)$$

presentada nuevamente en variables adimensionales según se definieran en los Capítulos 3 y 4.

Antes de presentar el esquema numérico para la resolución del sistema multivariable descrito por las Ecs. (46) a (49), se describe a continuación el correspondiente para la solución de la ecuación de Reynolds, Ec. (50), principalmente por dos motivos. Por un lado, su solución exacta se necesita para la comparación con los resultados analíticos aproximados obtenidos en el Capítulo 4, y por otro, porque representa la situación límite del citado sistema que se intenta resolver.

5.3.1 Ecuación de Reynolds

Como se enunciara en apartados previos, la ecuación de Reynolds ha sido ampliamente estudiada y sometida a tratamientos numéricos diversos. Se trata de una ecuación diferencial no-homogénea a derivadas parciales que describe la presión en función de las direcciones azimutal y axial, $p(\Theta, z)$. El modo más simple de resolverla, al igual que lo hicieran Raimondi y Boyd (1958), es mediante diferencias finitas ya que el sistema de ecuaciones resultante se encuentra completamente definido por las condiciones de borde. Motivo por el cual dicho método es el adoptado en el presente trabajo de tesis.

El primer paso consiste en considerar el dominio espacial y generar la grilla computacional correspondiente. En este caso se trata de una región rectangular en el plano determinado por $0 \leq \Theta < \pi$ y $-1/2 < z < 1/2$ (si se considera la condición de Gumbel para la zona divergente), por lo que la discretización resulta sencilla. La zona se divide en (n) secciones en Θ y (m) secciones en z , equivalentemente a lo que se muestra en la Figura 5.1.

Para la discretización de la ecuación diferencial se consideran diferencias centradas (ver Ecs. (5) y (8)), quedando las derivadas de la presión y del espesor de película aproximadas en cada nodo (i, j) por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial \Theta_{(i,j)}} &= \frac{1}{2} \frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i-1,j)}}{\Delta \Theta} \\
 \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2_{(i,j)}} &= \frac{P_{(i+1,j)} - 2P_{(i,j)} + P_{(i-1,j)}}{\Delta \Theta^2} \\
 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2_{(i,j)}} &= \frac{P_{(i,j+1)} - 2P_{(i,j)} + P_{(i,j-1)}}{\Delta z^2} \\
 \frac{dh}{d\Theta_{(i)}} &= \frac{1}{2} \frac{h_{(i+1)} - h_{(i-1)}}{\Delta \Theta}
 \end{aligned} \tag{51}$$

De esta manera, y luego de desarrollar la derivada según Θ del producto, la Ec. (50) queda expresada para cada nodo (i,j) de la malla como:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{\Delta \Theta} &= \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left[\tilde{h}_i^3 \left(\frac{P_{(i+1,j)} - 2P_{(i,j)} + P_{(i-1,j)}}{\Delta \Theta^2} \right) + \right. \\
 &\left. + \frac{3}{4} \tilde{h}_i^2 \left(\frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{\Delta \Theta} \right) \left(\frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i-1,j)}}{\Delta \Theta} \right) \right] + \frac{1}{12} \tilde{h}_i^3 \left(\frac{P_{(i,j+1)} - 2P_{(i,j)} + P_{(i,j-1)}}{\Delta z^2} \right)
 \end{aligned} \tag{52}$$

De esta manera se tiene un sistema de $(n+1) \times (m+1)$ ecuaciones con $(n+1) \times (m+1) + 2(n+1) + 2(m+1)$ incógnitas. El número de incógnitas resulta mayor ya que las diferencias finitas utilizadas están tomando para el cálculo los puntos externos de la malla. En este sentido, falta considerar aún las condiciones de borde de la presión, que establecen que $p=0$ en los cuatro bordes del espacio considerado. Esto es:

$$p_{(i,j)} = 0 \quad \text{en} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n+1 \quad \forall j \\ j = 1, 2, \dots, m+1 \quad \forall i \end{cases} \tag{53}$$

De esta manera se agregan $2(n+1) + 2(m+1)$ datos al sistema que queda ahora descrito por $(n+1) \times (m+1)$ ecuaciones con $(n+1) \times (m+1)$ incógnitas, siendo factible su resolución mediante alguna estrategia de cálculo numérico.

En la presente tesis se resolvió este sistema mediante el empleo del software Maple. Entre la gran variedad de funciones y comandos que ofrece, este software brinda la posibilidad de resolver sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales mediante el comando `fsolve`, requiriendo únicamente la formulación correcta del sistema de ecuaciones. `Fsolve` lo resuelve numéricamente mediante la aplicación del método de Newton si puede calcular el Jacobiano. Caso contrario cambia al método de Broyden o a variantes del método de Powell. Todo ello, en una interfaz opaca para el usuario y con una convergencia global $<10^{-8}$. En el Anexo I se muestra el algoritmo implementado.

En el Capítulo 4 ya se adelantaron varios de los resultados obtenidos al resolver la ecuación de Reynolds mediante diferencias finitas, ya que permitieron verificar la validez de los métodos analíticos propuestos. Aun así, se muestran a continuación los perfiles de presión obtenidos con una malla de 40×40 . El uso de una malla más gruesa, de hasta 10×10 , también genera resultados aceptables, pero la integración de los perfiles de presión para obtener, por ejemplo, la capacidad portante, requiere una malla como la empleada si se desea mantener el error acotado.

La Figura 5.7 muestra los perfiles de presión en función de la posición longitudinal Θ para un cojinete de $\eta = 0,5$ y $R/c = 1000$ para diversas relaciones L/R en $z = 0$ (centro del cojinete). Asimismo, la Figura 5.8 muestra los perfiles de presión en función de la posición axial z , para el mismo cojinete, en una posición tangencial $\Theta = 0,5$. Los resultados se comparan con las soluciones analíticas ya presentadas para el ISJB (solución de Ocvirk) y el ILJB (solución de Sommerfeld), las que se presentan en forma de puntos discretos para permitir distinguir la soluciones numéricas con las que prácticamente se solapan. Los datos para $L/R=100$ y los del ILJB han sido multiplicados por un factor de 500 para poder

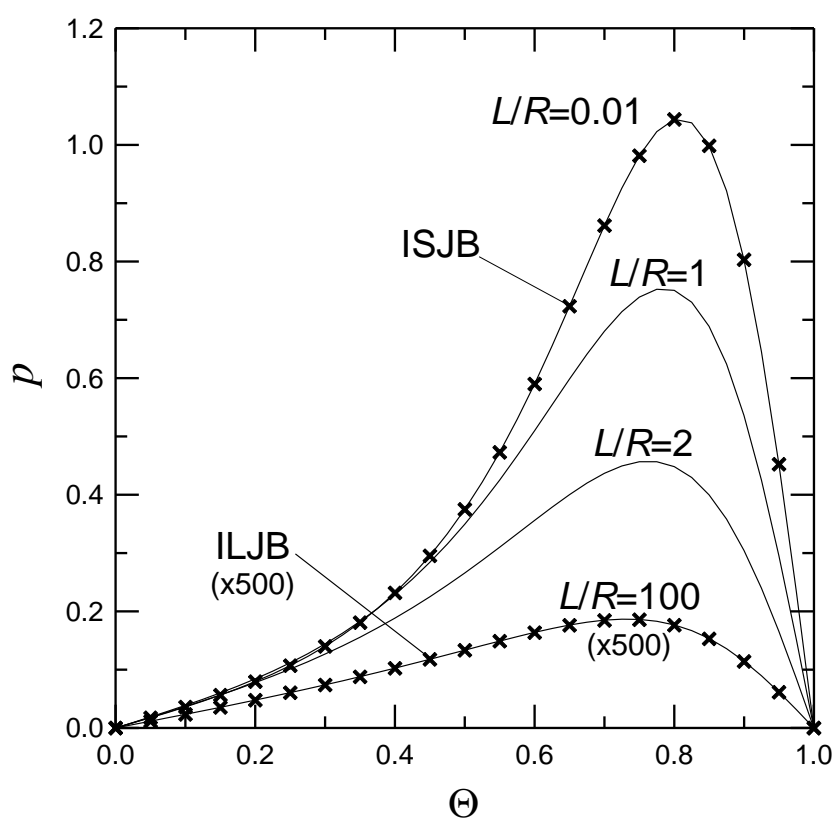


Figura 5.7: Perfiles de presión obtenidos mediante la solución numérica de la Ecuación de Reynolds en función de la posición longitudinal, calculados para distintas relaciones de aspecto y $\eta=0,5$ en $z=0$. Se incluyen las soluciones límite del ISJB y el ILJB (\times).

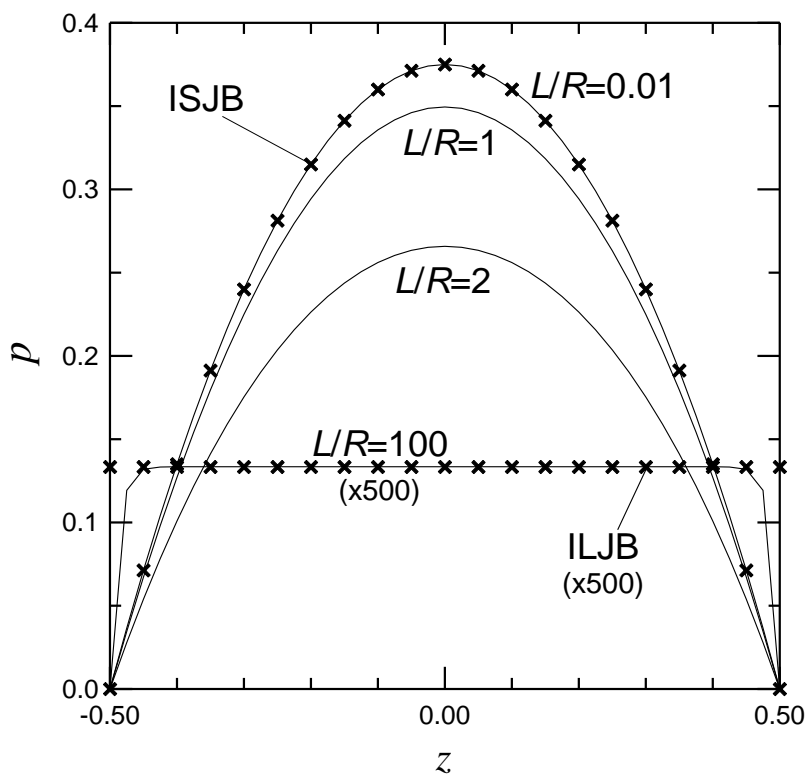


Figura 5.8: Perfiles de presión obtenidos de la solución numérica de la Ecuación de Reynolds en función de la posición axial calculados para distintas relaciones de aspecto en $\Theta=0,5$, para $\eta=0,5$. Se incluyen las soluciones límite del ISJB y el ILJB (\times)

presentarlos en la misma figura ya que son de mucho menor magnitud. Puede apreciarse que los resultados numéricos son prácticamente indistinguibles de las soluciones límite de cojinetes infinitamente cortos y largos al usar relaciones de 0.01 o 100 respectivamente. De hecho, las máximas diferencias son de $\sim 0,3\%$.

5.3.2 Generación de la Grilla para el Análisis de Flujo Tridimensional

Como ya se comentara, para el estudio tridimensional del flujo en un cojinete, se ha implementado en esta tesis una variante del método de diferencias finitas tradicional. Este enfoque no demanda de la discretización por intervalos de todo el volumen del dominio como podría intuirse de la Figura 5.2, sino que requiere de la discretización sobre el plano inferior del mismo (plano $\xi - z$ de la Figura 5.3, cualitativamente similar a la Figura 5.1). El número de nodos para cada plano $\xi - z$ está dado por el producto $(N_x+1)(N_z+1)$, donde N_x y N_z son la cantidad de divisiones que se consideran en el eje ξ y z , respectivamente. Las ecuaciones de diferencias sobre los nodos deben transformarse al sistema $\xi - \gamma - z$ para poder ser integradas en un dominio regular mediante el método de Gear entre la superficie del cojinete y la del rotor, siguiendo luego una técnica de shooting multidimensional asociada al

método de Newton para el cálculo de los disparos sucesivos.

5.3.3 Planteo del Sistema de Ecuaciones Discretizadas

Habiendo generado la grilla rectangular en el dominio $\{\xi, z\}$, las Ecs. (46) a (49) deben pasarse a este dominio. Ello se hace con ayuda de la Ec. (15) que define:

$$\xi = \Theta \quad \text{y} \quad \gamma = y / \tilde{h}(\Theta), \quad (54)$$

por lo que, por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Theta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \Theta} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{y}{\tilde{h}^2} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \frac{\partial}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\tilde{h}} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{1}{\tilde{h}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \end{aligned} \quad (55)$$

Reemplazando, entonces, en los balances, Ecs. (46) a (49), resulta:

$$\text{BM:} \quad 0 = \frac{1}{\pi} \left(\tilde{h} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \gamma \frac{d\tilde{h}}{d\xi} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial v}{\partial \gamma} + \tilde{h} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (56)$$

$$\text{BCM}(\xi): \quad 0 = -\frac{\tilde{h}}{\pi} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\tilde{h} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \gamma \frac{d\tilde{h}}{d\xi} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) \quad (57)$$

$$\text{BCM}(\gamma): \quad 0 = -\tilde{h} \left(\frac{L}{c} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial \gamma} \right) \quad (58)$$

$$\text{BCM}(z): \quad 0 = -\tilde{h}^2 \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial w}{\partial \gamma} \right), \quad (59)$$

La solución numérica del problema planteado es compleja debido al acoplamiento de las ecuaciones. Como se comentara previamente, la resolución del mismo se realiza empleando una discretización por diferencias finitas en las coordenadas ξ (azimutal) y z (axial) dejando la coordenada γ (transversal) sin discretizar ya que en esa dirección se empleará el método de Gear que ajusta automáticamente el paso de integración en función de los resultados que va obteniendo.

Las derivadas de las ecuaciones diferenciales son discretizadas considerando diferencias de orden dos centrales en los nodos interiores, y diferencias hacia adelante o hacia atrás, según corresponda, en los extremos (Tucker, 1989; Failla *et al.*, 1996). De esta manera, el sistema resultante consiste de M ecuaciones diferenciales ordinarias en la coordenada γ , donde M es el producto del número total de nodos en el plano $\xi - z$ por el

número de variables por nodo.

El número de variables por nodo con las que se trabaja es seis: u , v , w , $\partial u / \partial \gamma$, $\partial w / \partial \gamma$ y p . Las variables $\partial u / \partial \gamma$ y $\partial w / \partial \gamma$ aparecen ya que las derivadas segundas de u y w se tratan como las derivadas primeras de estas variables en el método de shooting. La tercera, en este caso, $\partial v / \partial \gamma$, no es necesaria ya que el balance de masa la expresa en función de las otras dos. Dado que las ecuaciones de conservación brindan sólo cuatro de las seis ecuaciones necesarias, se definen dos ecuaciones adicionales “triviales” para las nuevas variables, du y dw , esto es: $\frac{\partial u}{\partial \gamma} = du$ y $\frac{\partial w}{\partial \gamma} = dw$. En cuanto al número de nodos, como ya se viera, es por cada plano $\zeta - z$ es $(N_x+1)(N_z+1)$.

Ahora es necesario reorganizar las ecuaciones gobernantes, Ecs. (56) a (59), para obtener las derivadas de las seis variables respecto de la coordenada γ de forma explícita. Así, se tendría:

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} = du \quad (60)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma} = dw \quad (61)$$

del BM:

$$\frac{\partial v}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\pi} \left(\tilde{h} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \gamma \frac{d\tilde{h}}{d\xi} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) - \tilde{h} \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\pi} \left(\tilde{h} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \gamma \frac{d\tilde{h}}{d\xi} du \right) - \tilde{h} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (62)$$

del BCM(z):

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial w}{\partial \gamma} \right) = \frac{\partial dw}{\partial \gamma} = \tilde{h}^2 \frac{\partial p}{\partial z} \quad (63)$$

y del BCM(ξ) y el BCM(γ), donde queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, resultan:

$$\frac{\partial p}{\partial \gamma} = \frac{\gamma \left(\frac{L}{R} \right)^2 \tilde{h} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \pi \frac{\partial du}{\partial \xi} + \pi \frac{1}{\tilde{h}} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} du - \pi^2 \frac{\partial dw}{\partial z}}{\left(\frac{L}{c} \right)^2 \left(\pi^2 + \gamma^2 \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{d\tilde{h}}{d\xi} \right)^2 \right)} \quad (64)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) = \frac{\partial du}{\partial \gamma} = \frac{\left(\frac{L}{R} \right)^2 \pi \tilde{h}^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} + \left(\frac{c}{R} \right)^2 \gamma \left(\tilde{h} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} \frac{\partial du}{\partial \xi} - \left(\frac{d\tilde{h}}{d\xi} \right)^2 du + \pi \tilde{h} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} \frac{\partial dw}{\partial z} \right)}{\pi^2 + \gamma^2 \left(\frac{c}{R} \right)^2 \left(\frac{d\tilde{h}}{d\xi} \right)^2} \quad (65)$$

Las seis variables se identifican en el código numérico con la letra Z , siendo:

$$u \rightarrow Z1 \quad v \rightarrow Z2 \quad w \rightarrow Z3 \quad \frac{du}{d\gamma} \rightarrow Z4 \quad \frac{dw}{d\gamma} \rightarrow Z5 \quad p \rightarrow Z6 \quad (66)$$

y sus derivadas respecto de γ son las variables ZP . De esta manera, las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (ya que las variables son sólo función de γ) basadas en la discretización del plano $\{\xi, z\}$, correspondientes a las Ecs. (60) a (66), quedan expresadas para los nodos interiores como:

$$\frac{du}{d\gamma} \rightarrow ZP1_{(i,k)} = Z4_{(i,k)} \quad (67)$$

$$\frac{dv}{d\gamma} \rightarrow ZP2_{(i,k)} = -\frac{h_i}{\pi} \left(\frac{Z1_{(i+1,k)} - Z1_{(i-1,k)}}{2 \Delta \xi} \right) + \gamma \frac{dh_i}{\pi} Z4_{(i,k)} - h_i \left(\frac{Z3_{(i,k+1)} - Z3_{(i,k-1)}}{2 \Delta z} \right) \quad (68)$$

$$\frac{dw}{d\gamma} \rightarrow ZP3_{(i,k)} = Z5_{(i,k)} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{du}{d\gamma} \right) \rightarrow ZP4_{(i,k)} = & \frac{1}{\left(\pi^2 + \frac{c^2}{R^2} \gamma^2 dh_i^2 \right)} \left[\pi \frac{L^2}{R^2} h_i^2 \left(\frac{Z6_{(i+1,k)} - Z6_{(i-1,k)}}{2 \Delta \xi} \right) + \right. \\ & + \frac{c^2}{R^2} \gamma h_i dh_i \left(\frac{Z2_{(i+1,k)} - Z2_{(i-1,k)}}{2 \Delta \xi} \right) - \frac{c^2}{R^2} \gamma dh_i^2 Z4_{(i,k)} + \\ & \left. + \pi \frac{c^2}{R^2} \gamma h_i dh_i \left(\frac{Z5_{(i,k+1)} - Z5_{(i,k-1)}}{2 \Delta z} \right) \right] \quad (70) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\gamma} \left(\frac{dw}{d\gamma} \right) \rightarrow ZP5_{(i,k)} = h_i^2 \left(\frac{Z6_{(i,k+1)} - Z6_{(i,k-1)}}{2 \Delta z} \right) \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\gamma} \rightarrow ZP6_{(i,k)} = & \left(\frac{c^2}{L^2} \right) \frac{1}{\left(\pi^2 + \frac{c^2}{R^2} \gamma^2 dh_i^2 \right)} \left[\gamma h_i dh_i \frac{L^2}{R^2} \left(\frac{Z6_{(i+1,k)} - Z6_{(i-1,k)}}{2 \Delta \xi} \right) - \right. \\ & \left. - \pi^2 \left(\frac{Z5_{(i,k+1)} - Z5_{(i,k-1)}}{2 \Delta z} \right) - \pi \left(\frac{Z2_{(i+1,k)} - Z2_{(i-1,k)}}{2 \Delta \xi} \right) + \pi \frac{1}{h_i} dh_i Z4_{(i,k)} \right] \quad (72) \end{aligned}$$

donde i y k señalan la posición del nodo sobre los ejes ξ y z , respectivamente, y h_i y dh_i

equivalen al espesor adimensional $\tilde{h}(\xi)$ y su derivada respecto de ξ , respectivamente, en una dada posición del eje ξ . En forma equivalente, para las fronteras del dominio, se reemplazan las diferencias centrales de las Ecs. (67) a (72) por diferencias hacia adelante o hacia atrás, según corresponda.

En cuanto a las CB, sólo se cuenta con los valores de las tres velocidades en ambos extremos, lo que suma seis CB pero no son una por ecuación diferencial. Por ello, el sistema de ecuaciones resultante se resuelve por el método de Gear acoplado a una técnica de shooting, ya que sólo se conocen la mitad de los valores iniciales de las variables de integración (u , v y w en $\gamma=0$). Los valores iniciales de las otras tres variables $\left(\frac{\partial u}{\partial \gamma}, \frac{\partial w}{\partial \gamma}, y p\right)$ son estimaciones que se ajustan en cada iteración hasta cumplir con las condiciones en el otro borde (u , v y w en $\gamma=1$). Para ello, se implementó un algoritmo modular en Visual Fortran, considerando la posibilidad y facilidad de expandirlo a situaciones más complejas. En el Anexo II se detalla el algoritmo desarrollado empleando el método de Newton de provisto en las librerías IMSL, mientras que en el Anexo III se muestra el empleado para integrar las ecuaciones por el método de Gear,

5.3.4 Condiciones de Borde

Los valores conocidos de las variables son: las componentes de velocidad en las superficies del eje ($y = \tilde{h} \rightarrow \gamma = 1$) y del cojinete ($y = 0 \rightarrow \gamma = 0$), la presión exterior al sistema, P_0 , y la presión de suministro de lubricante (asumida P_0):

$$\begin{aligned}
 u|_{y=0} &= 0 & u|_{y=\tilde{h}} &= 1 \\
 v|_{y=0} &= 0 & v|_{y=\tilde{h}} &= \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \\
 w|_{y=0} &= 0 & w|_{y=\tilde{h}} &= 0 \\
 p|_{\Theta=0} &= 0 & p|_{\Theta=1} &= 0 & p|_{1<\Theta<2} &= 0 \\
 p|_{z=-1/2} &= 0 & p|_{z=1/2} &= 0
 \end{aligned} \tag{73}$$

En estas ecuaciones se ha empleado una condición de borde tipo Gumbel, donde se considera que la presión adimensional en $1 < \Theta < 2$ es nula. Si bien en este apartado se considera este modelo sencillo, un tratamiento más realista y complejo se presenta posteriormente.

5.3.5 Resultados

A continuación se presentan, en primer lugar, los perfiles de presión obtenidos para diversas condiciones geométricas y operativas. La Figura 5.9 muestra los perfiles tangenciales de presión en el centro del cojinete ($z=0$) calculados con la metodología antes propuesta considerando una excentricidad relativa $\eta=0,5$ y una relación $c/R=0,001$. Los perfiles corresponden a cuatro relaciones de aspecto, y fueron calculados en la posición transversal $\gamma=0$. Para los cálculos se usó una malla de 20×10 y una tolerancia global para la convergencia de 10^{-8} . En la Figura 5.9 también se presentan las curvas de presión (líneas llenas) calculadas con las soluciones de los cojinetes infinitamente corto (ISJB) e infinitamente largo (ILJB). Como se puede observar, y como era de esperar, los valores calculados numéricamente para $L/R=0,01$ y 100 prácticamente coinciden con los predichos por esas dos aproximaciones. Las diferencias porcentuales máximas entre los valores calculados y los resultados teóricos son de $0,033$ y $3,4\%$ respectivamente, y ocurren en la zona de $\Theta=0,8-0,9$. Cabe acotar que los valores calculados coinciden con los presentados en el Capítulo 3 y no con los del Capítulo 4 dado el VC usado para la presión.

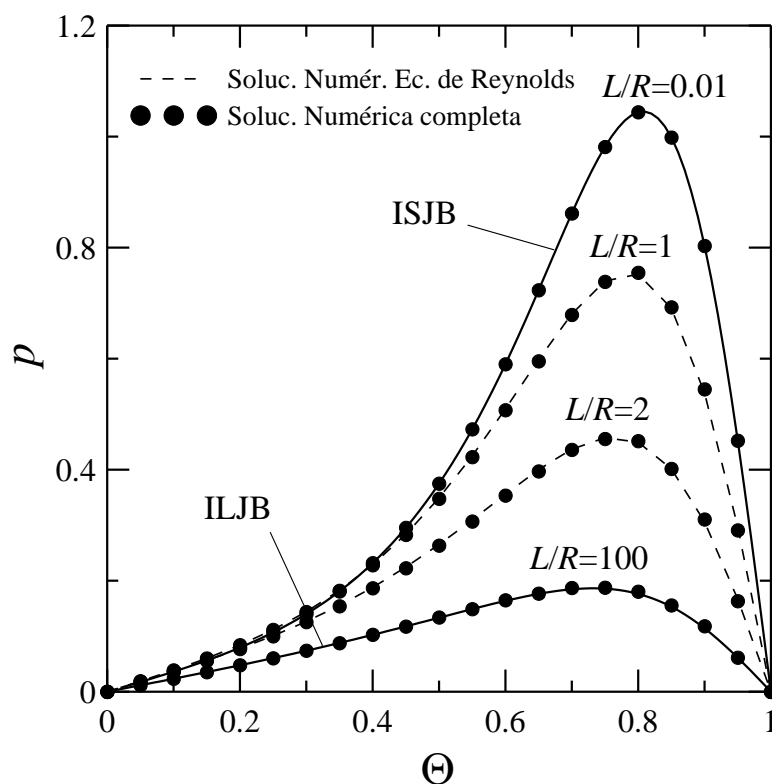


Figura 5.9: Perfiles de presión en función de la posición longitudinal calculados para distintas relaciones de aspecto en $z=0$ y $\gamma=0$, para $\eta=0,5$. Se incluye la solución numérica de la Ecuación de Reynolds (---), y las soluciones límite del ISJB y el ILJB (—).

La figura también incluye las curvas de presión calculadas mediante la solución numérica de la Ecuación de Reynolds, Ec. (52), para los cuatro valores de L/R (indistinguibles en el caso de L/R de 0,01 y 100). Las diferencias porcentuales máximas entre los valores calculados y las soluciones de la Ecuación de Reynolds para $L/R=1$ y 2 son de 1,2 y 1,4% respectivamente, y también ocurren en la zona de $\Theta=0,8-0,9$.

La Figura 4.9 completa el análisis presentando valores de presión calculados en $z = 0$ en función de la relación de aspecto (con $\eta=0,5$) y de la excentricidad relativa (con $L/D=0,5$) en dos posiciones circunferenciales, $\Theta = 0,5$ y $0,7$. Se puede apreciar que en ambas posiciones, los resultados de la solución numérica de la ecuación de Reynolds y de la resolución simultánea del balance de masa y todos los balances de cantidad de movimiento son prácticamente indistinguibles, con errores máximos del orden del 2%. Cabe señalar que los valores, e incluso forma, de las curvas de la Figura 5.10 difiere de sus homónimas de la Figura 4.9 debido a que se han obtenido con un valor característico distinto de la presión.

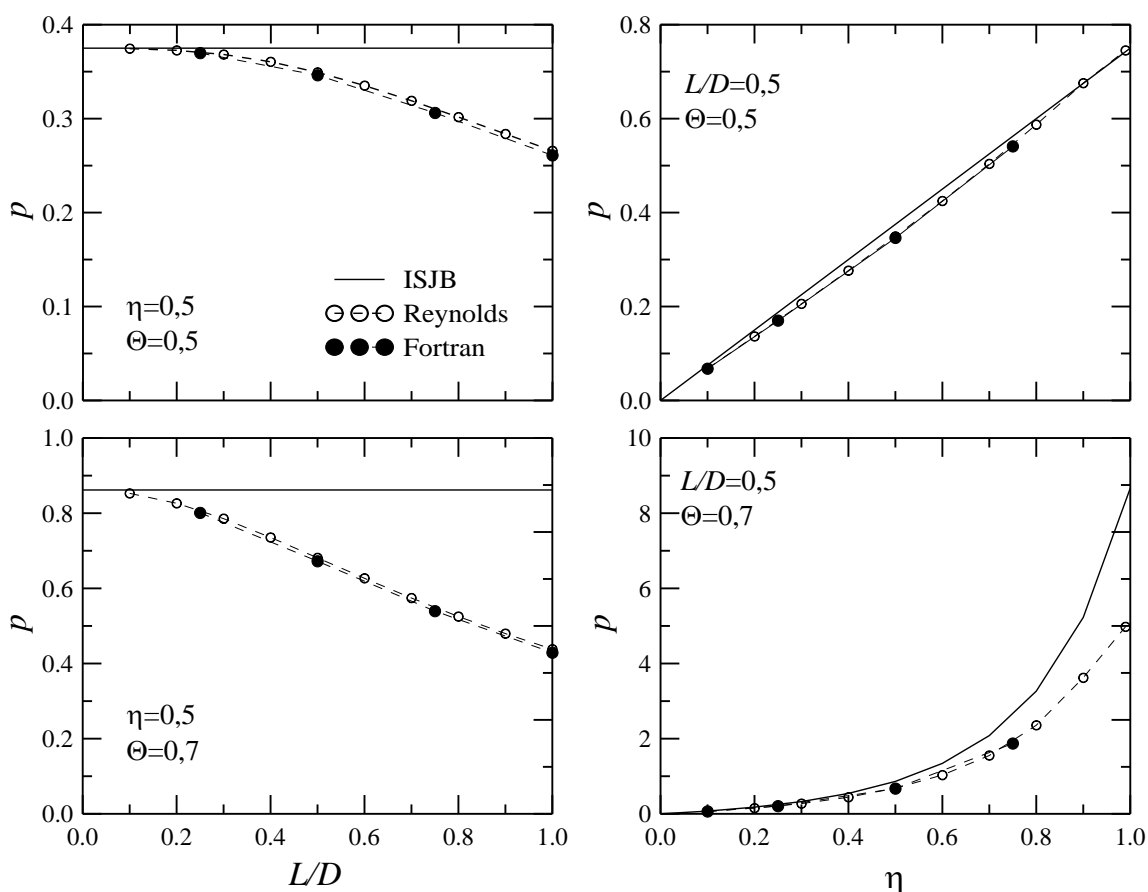


Figura 5.10: Perfiles de presión adimensional para dos posiciones tangenciales diferentes en función de la relación de aspecto (izq.) para $\eta=0,5$, y de la excentricidad relativa (der.) para $L/D=0,5$. En todos los casos, $z=0$.

Como se viene haciendo anteriormente, los resultados también se comparan con los de la solución de Ocvirk, que coinciden con los numéricos sólo a muy bajas relaciones de aspecto y excentricidades (aunque los rangos de coincidencia cambian con Θ , η y L/D).

De igual manera, en la Figura 5.11 se presentan los perfiles de presión en función de la posición axial obtenidos en $\Theta=0.5$ y $\gamma=0$ para las cuatro relaciones de aspecto anteriores y considerando $\eta=0.5$, $c/R=0.001$ y la misma malla y las condiciones de convergencia que para la Figura 5.9. Se observa nuevamente que los valores de presión calculados numéricamente para $L/R=0.01$ y 100 prácticamente coinciden con los predichos por las aproximaciones de ISJB e ILJB. A $L/R=0.01$ se confirma la forma parabólica del perfil y a $L/R=100$ la de una presión prácticamente independiente de z . Es interesante notar que la solución numérica muestra que, a esta relación de aspecto grande, además de la zona central de presión constante existen dos regiones de capa límite en los extremos donde la presión cae bruscamente al valor externo. Para los cojinetes cortos ($L/R=1$ y 2) el perfil comienza a perder su forma parabólica alejándose de la solución límite. También se observa que la coincidencia con los perfiles obtenidos a partir de la ecuación de Reynolds sigue siendo muy alta.

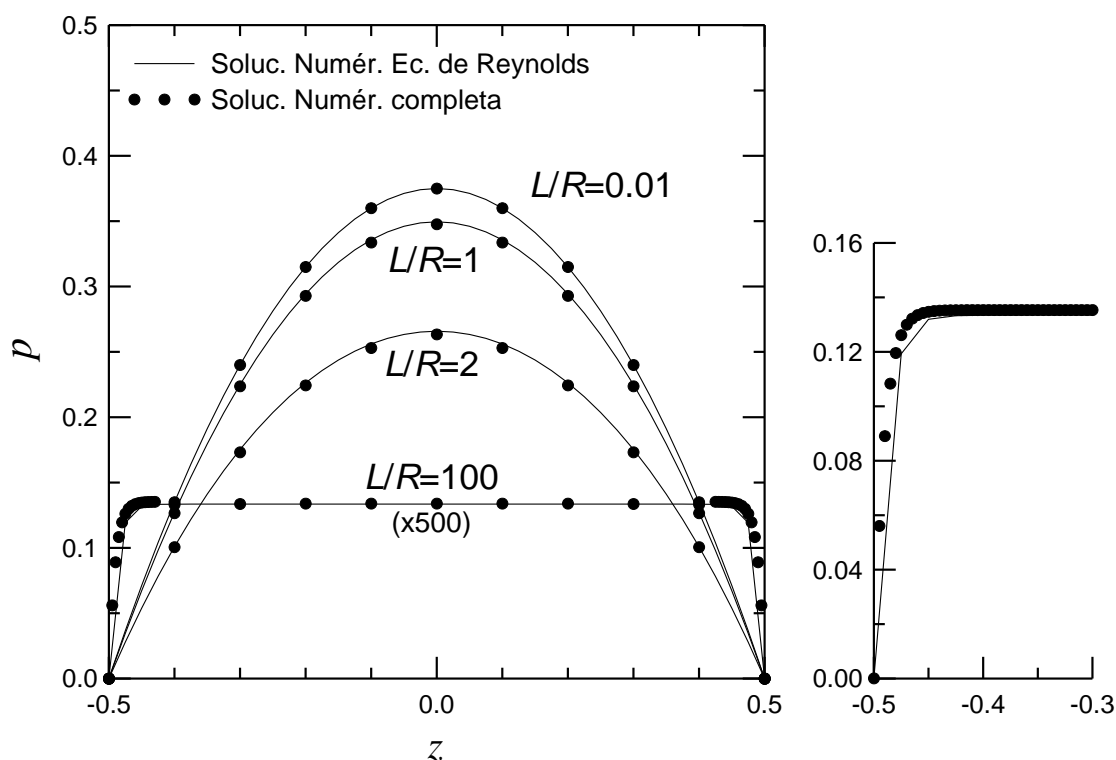


Figura 5.11: Perfiles de presión en función de la posición axial calculados para distintas relaciones de aspecto en $\Theta=0.5$ y $\gamma=0$, para $\eta=0.5$. Se incluye la solución numérica de la Ecuación de Reynolds y la presión calculadas con las aproximaciones del ISJB y el ILJB.

La diferencia entre las predicciones del algoritmo elaborado y las de la Ecuación de Reynolds debería aparecer principalmente al evaluar los perfiles radiales ($0 \leq y < \tilde{h}$) ya que la Ecuación de Reynolds asume que la presión es constante en esta dirección, $p(\Theta, z)$. Por lo tanto, a fin de evaluar las capacidades del algoritmo elaborado, en la Figura 5.12 se analizaron los perfiles radiales de presión para distintas relaciones c/R en a $z=0$ y $\Theta=0,5$, para $\eta=0,5$ y $L/R=1$. Cabe señalar que, para que los resultados fuesen realmente exactos, debería trabajarse en un sistema que no desprecie la curvatura de la película fluida, probablemente en coordenadas cilíndricas. Aun así, las predicciones numéricas muestran la tendencia de los cambios en el perfil de presión al aumentar el espesor de la película fluida. Los resultados presentados en la figura señalan que la presión puede considerarse independiente de la coordenada transversal hasta valores de $c/R \cong 0,01$, por lo que la suposición usada para derivar la Ecuación de Reynolds es totalmente válida para relaciones de huelgo/radio menores a ese valor. Para relaciones c/R mayores a aproximadamente 0,01 la presión comienza a variar en el espesor de la película. Igualmente, debe señalarse que esta dependencia es pequeña (no llega al 2% de variación en el valor de la presión en el perfil a $c/R = 0,1$), al menos en las condiciones consideradas, por lo que no es de esperar que dicho

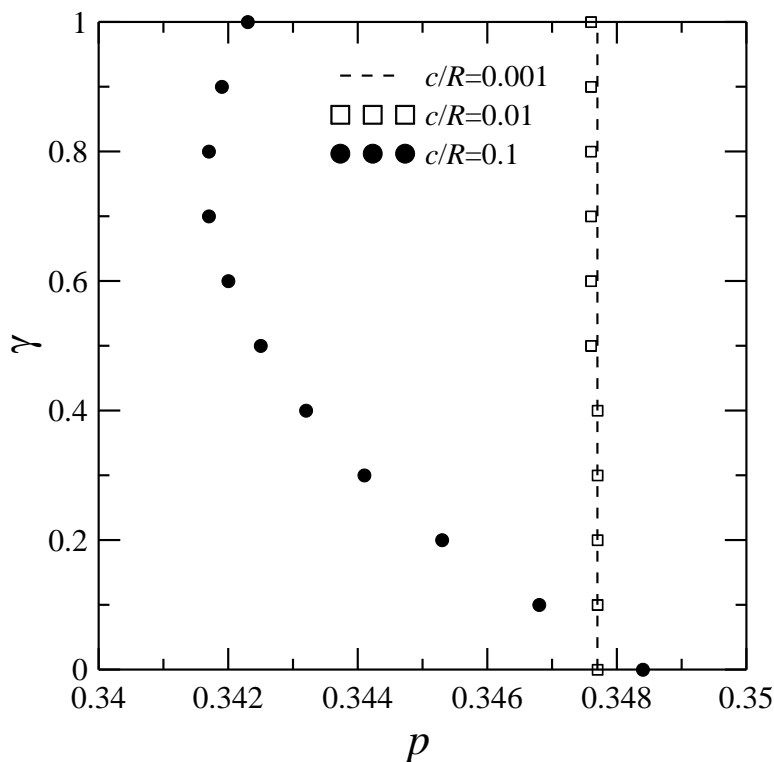


Figura 5.12: Perfiles de presión en función de la posición transversal calculados usando el método numérico propuesto para distintos valores de la relación huelgo a radio en $z=0$ y $\Theta=0,5$ para $\eta=0,5$ y $L/R=1$.

resultado cambie demasiado en un estudio realizado en coordenadas cilíndricas. Este análisis corrobora, además, las capacidades del algoritmo desarrollado y la posibilidad de extenderlo para evaluar, por ejemplo, variaciones de presión debidas a cambios de temperatura en el espesor, como se analizará en la Sección siguiente.

Vista la descripción tridimensional del campo de presión que se logra con el algoritmo, se decidió analizar más en detalle el campo de presión en los cojinetes largos. La Figura 5.13 muestra perfiles axiales de presión para cojinetes comúnmente denominados “largos” con el objetivo de evaluar el espesor de la zona de los bordes, donde se produce la caída brusca de presión. La aproximación de cojinete infinitamente largo (vista en el Capítulo 3) predice que la presión depende únicamente de la variable Θ y no cumple con la condición de $p=0$ en los bordes (esto puede verse también en la Figura 5.11). En la práctica, la presión resulta prácticamente constante en el interior del cojinete generándose una “capa límite” adyacente a los extremos del cojinete donde la presión cae del valor en la zona central a cero. En esta zona la suposición de “infinitamente largo” (por la que los cambios en z fueron despreciados) deja de cumplirse y es de esperar que el orden de magnitud de Z ya no sea L sino R o D , siendo el espesor adimensional de la capa ($z=Z/L$) de orden R/L o D/L (Barrero Ripoll y Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, 2005). Para mostrar este fenómeno

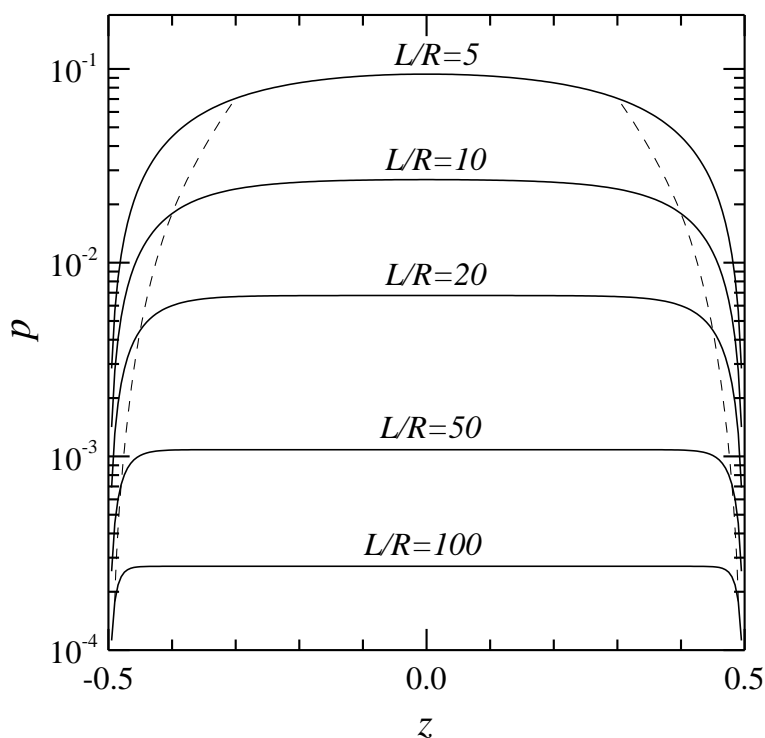


Figura 5.13: Perfiles axiales de presión obtenidos mediante el método numérico propuesto para $\Theta=0,5$, $\eta=0,5$, $c/R=0,001$ y distintos valores de L/R de cojinetes “largos”. La línea de trazos señala el espesor de la “capa límite” estimado en R/L .

se muestran los perfiles de presión en escala logarítmica y se superpone sobre los mismos una línea en cada extremo que corta a cada perfil con el valor de distancia respecto del borde igual al R/L correspondiente.

En función de los resultados mostrados hasta aquí, resulta claro que para el análisis de cojinetes isotérmicos, la solución de la ecuación de Reynolds ofrece resultados excelentes. Asimismo, su empleo trae consigo varias ventajas relacionadas: se trabaja con una sola ecuación diferencial para una sola variable por lo que el algoritmo que se requiere para su resolución resulta ser sencillo en comparación con el requerido para resolver los balances de masa y cantidad de movimiento acoplados, como puede notarse en los Anexos I y II. Asimismo, el tiempo requerido para el cálculo es sensiblemente inferior.

5.4 SOLUCIÓN DE FLUJO NO-ISOTÉRMICO

Como ya se discutiera, el análisis termo-hidrodinámico (THD) de cojinetes puede dividirse en dos categorías (Elrod, 1987). En la primera de ellas se incluye el tratamiento completo del balance de energía en el espesor de la película fluida (acoplado a los de masa y cantidad de movimiento) usando métodos de diferencias o elementos finitos (Mitsui, 1987). En la segunda se encuentran los tratamientos como los desarrollados en el Capítulo 4 que usan alguna aproximación para considerar el fenómeno térmico que sucede en el espesor, usualmente empleando la distribución local de temperatura a través de algún valor “representativo”. Las ventajas y desventajas de los análisis de la primera categoría radican en la exactitud de los cálculos a expensas de complejidad y tiempo de cálculo, mientras que en los métodos de la segunda se gana en sencillez a expensas de exactitud del modelo. Dependiendo de las necesidades, puede optarse por uno u otro enfoque.

Se presenta aquí la ampliación de la plataforma numérica desarrollada en el apartado previo, en la que se resuelven todos los balances de conservación de manera acoplada. Es decir, en esta etapa del desarrollo, la cual se encuadra dentro de la primer categoría mencionada, se ha incorporado el balance de energía para considerar el campo térmico dentro de la película fluida, así como un tratamiento más adecuado de la existencia de cavitación en la misma. El objetivo es, además, comparar con las predicciones de los tratamientos con temperaturas medias propuestos en el Capítulo 4.

Gran parte de las ecuaciones, condiciones de contorno y consideraciones del modelo ya fueron presentadas previamente. No obstante, dada la magnitud del problema, se considera oportuno redundar en ello y desarrollar nuevamente el sistema que describe el modelo.

Considerando siempre las condiciones de fluido Newtoniano, propiedades ρ , \hat{C}_v y k constantes, $c \ll R$ y $c \ll L$, aceleración local y convectiva despreciables, efectos gravitatorios despreciables, y número de Brinkman de orden 1, pero permitiendo que la viscosidad dependa de la temperatura (y, por lo tanto, de la posición), los balances de las Ecs. (58) a (61) del Capítulo 3 quedarían expresados:

$$\text{BM:} \quad 0 = \frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} + \frac{\partial V_z}{\partial Z} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \text{BCM (X):} \quad 0 &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial Y} \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} \\ &\rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial X} + \mu \left[-\beta_0 \frac{\partial T}{\partial Y} \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} \right] \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \text{BCM (Y):} \quad 0 &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial Y} \frac{\partial V_y}{\partial Y} + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} \\ &\rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \mu \left[-\beta_0 \frac{\partial T}{\partial Y} \frac{\partial V_y}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} \right] \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \text{BCM (Z):} \quad 0 &= -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial Y} \frac{\partial V_z}{\partial Y} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial Y^2} \\ &\rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \mu \left[-\beta_0 \frac{\partial T}{\partial Y} \frac{\partial V_z}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial Y^2} \right] \end{aligned} \quad (77)$$

$$\text{BE:} \quad \rho \hat{C}_v \left(V_x \frac{\partial T}{\partial X} + V_y \frac{\partial T}{\partial Y} + V_z \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \mu \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial Y} \right)^2 \right] \quad (78)$$

donde se ha adoptado la Ley de Vogel para describir la dependencia de la viscosidad con la temperatura,

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta_0 (T-T_0)}, \quad (79)$$

donde μ_0 es la viscosidad a la temperatura de referencia, T_0 , y β_0 es una constante que depende del fluido que determina la sensibilidad de la viscosidad con la temperatura.

En forma adimensional, con

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{X}{\pi R}, \quad y = \frac{Y}{c}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad u = \frac{V_x}{U}, \quad v = \frac{V_y}{U} \frac{R}{c}, \quad w = \frac{V_z}{U} \frac{R}{L}, \\ p &= \frac{P - P_0}{P_{ref}} \quad \text{con} \quad P_{ref} = \frac{\mu_0 U}{R} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2, \quad t = \frac{T - T_0}{T_{ref}} \quad \text{con} \quad T_{ref} = \frac{\mu_0 U}{\rho \hat{C}_v R} \left(\frac{R}{c} \right)^2, \end{aligned} \quad (80)$$

los balances resultan:

$$\text{BM:} \quad 0 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (81)$$

$$\text{BCM } (\Theta): \quad 0 = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial \Theta} + \frac{\mu}{\mu_0} \left(-\kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (82)$$

$$\text{BCM } (y): \quad 0 = -\left(\frac{L}{c} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\mu_0} \left(-\kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (83)$$

$$\text{BCM } (z): \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\mu_0} \left(-\kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (84)$$

$$\text{BE:} \quad \left(\frac{u}{\pi} \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\mu_0} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (85)$$

que son equivalentes a las Ecs. (46) a (49) de la Sección anterior, excepto por la consideración de viscosidad variable y la incorporación del BE. En las presentes

ecuaciones, $\lambda = \frac{kR}{Uc^2 \rho \hat{C}_v}$ y $\kappa_1 = \beta_0 T_{ref} = \beta_0 \frac{\mu_0 U}{\rho \hat{C}_v R} \left(\frac{R}{c} \right)^2$, donde κ_1 es un parámetro

adimensional que mide la sensibilidad de la viscosidad con la temperatura adimensional, como se puede ver si se escribe el modelo de Vogel en función de la misma,

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta_0 (T-T_0)} = \mu_0 e^{-\beta_0 T_{ref} t} = \mu_0 e^{-\kappa_1 t} . \quad (86)$$

En flujo isotérmico, el balance de cantidad de movimiento en dirección y es de orden de magnitud $\left(\frac{c}{R} \right)^2$ y, por lo tanto, despreciable frente a los otros dos. En principio, en el

flujo no-isotérmico también podría asumirse que la presión es prácticamente independiente de la coordenada y , mientras se cumpla que $c \ll R$. Sin embargo este balance debe ser tenido en cuenta debido a la variación de temperatura dentro de la película fluida, lo que hace aparecer el coeficiente κ_1 , que puede modificar el orden de magnitud de la ecuación. Desarrollada, la Ec. (83) es:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + e^{-\kappa_1 t} \left[-\beta_0 \frac{\mu_0 U}{\rho \hat{C}_v R} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{c}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right], \quad (87)$$

donde claramente puede observarse que el término que contiene la derivada primera de la

presión con y cobra importancia a medida que la relación $\left(\frac{R}{L}\right)^2$ aumenta (cojinete más cortos). Esta consideración suele obviarse en el análisis THD de cojinetes cuando se trabaja con la Ecuación de Reynolds Generalizada, la cual no contempla la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en la dirección y .

5.4.1 Planteo del Sistema de Ecuaciones Discretizadas

El tratamiento numérico del caso de flujo no-isotérmico se hará nuevamente discretizando en el plano $\{\xi, z\}$ y usando el método de Gear acoplado a una técnica de shooting para integrar en dirección transversal, γ . En este caso se incorporan dos variables a las seis del flujo isotérmico, la temperatura y su derivada primera respecto de la dirección y . Por lo tanto, las variables por nodo ahora son: $u, v, w, t, \partial u / \partial \gamma, \partial w / \partial \gamma, \partial t / \partial \gamma$ y p . Para las tres derivadas primeras definidas como variables se definen ecuaciones adicionales “triviales” que se agregan a las cinco ecuaciones de conservación, Ecs. (81) a (85), formando el conjunto de las ocho ecuaciones necesarias. Ellas se reacomodan de manera de despejar las derivadas primeras de las ocho variables respecto de γ . La integración por el método de shooting permite, entonces, calcular las ocho variables en cada nodo.

Designando du, dw y dt a las nuevas variables $\frac{\partial u}{\partial \gamma} = du, \frac{\partial w}{\partial \gamma} = dw$ y $\frac{\partial t}{\partial \gamma} = dt$,

respectivamente, las ecuaciones gobernantes que permiten obtener las derivadas de las ocho variables en el dominio computacional de forma explícita, son:

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} = du \quad (88)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma} = dw \quad (89)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \gamma} = dt \quad (90)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\pi} \left(\tilde{h} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \gamma \frac{d\tilde{h}}{d\xi} du \right) - \tilde{h} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (91)$$

$$\frac{\partial dw}{\partial \gamma} = e^{\kappa_1 t} \tilde{h}^2 \frac{\partial p}{\partial z} + \kappa_1 dt dw \quad (92)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \gamma} = \frac{\gamma \left(\frac{L}{R}\right)^2 \tilde{h} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \pi e^{-\kappa_1 t} \left[\kappa_1 \left(dt \frac{\partial u}{\partial \xi} + \pi dt \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial du}{\partial \xi} + \frac{1}{\tilde{h}} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} du - \pi \frac{\partial dw}{\partial z} \right]}{\left(\frac{L}{c}\right)^2 \left(\pi^2 + \gamma^2 \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{d\tilde{h}}{d\xi}\right)^2 \right)} \quad (93)$$

$$\frac{\partial du}{\partial \gamma} = \frac{\left(\frac{L}{R}\right)^2 \pi e^{\kappa_1 t} \tilde{h}^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} - \left(\frac{c}{R}\right)^2 \kappa_1 \gamma \left[\tilde{h} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} dt \frac{\partial u}{\partial \xi} - \gamma \left(\frac{d\tilde{h}}{d\xi}\right)^2 dt du + \pi \tilde{h} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} dt \frac{\partial w}{\partial z} \right]}{\pi^2 + \gamma^2 \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{d\tilde{h}}{d\xi}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{c}{R}\right)^2 \gamma \left[\tilde{h} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} \frac{\partial du}{\partial \xi} - \left(\frac{d\tilde{h}}{d\xi}\right)^2 du + \pi \tilde{h} \frac{d\tilde{h}}{d\xi} \frac{\partial dw}{\partial z} \right] + \pi^2 \kappa_1 dt du}{\pi^2 + \gamma^2 \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{d\tilde{h}}{d\xi}\right)^2} \quad (94)$$

$$\frac{\partial dt}{\partial \gamma} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\tilde{h}}{\pi} u \left(\tilde{h} \frac{\partial t}{\partial \xi} - \gamma \frac{d\tilde{h}}{d\xi} dt \right) + v \tilde{h} dt + w \tilde{h}^2 \frac{\partial t}{\partial z} - e^{-\kappa_1 t} \left[du^2 + \left(\frac{L}{R}\right)^2 dw^2 \right] \right] \quad (95)$$

Estas ecuaciones fueron discretizadas considerando diferencias centrales en los nodos interiores, y diferencias hacia adelante o hacia atrás en los bordes, según corresponda, de manera equivalente a lo hecho en el caso isotérmico. Las ecuaciones discretizadas resultantes se asemejan al sistema de Ecs. (67) a (72), y se pueden ver en la subrutina “fcn” que se incluye en el Anexo IV, que es una expansión de la homónima presentada en el Anexo II. El número de nodos por plano $\xi - z$ es, entonces, $8(N_x+1)(N_z+1)$. Así, para una grilla de, por ejemplo, 125 nodos en el plano $\xi - z$, se genera un sistema de 1000 ecuaciones diferenciales ordinarias en la coordenada γ .

A fin de explicitar el tamaño del problema que se termina resolviendo, vale resaltar que el paso estándar que usa el integrador por el método de Gear (subrutina “Drive” del Anexo III) es de 10^{-6} . Asumiendo que en la integración no se afina el paso en todo el espesor del dominio (de $\gamma=0$ a 1), y se tiene un sistema típico como el mencionado, de 125 nodos en el plano $\xi - z$, se llega a 125000000 nodos en la malla 3D, equivalentes a 10^9 variables a resolver.

5.4.2 Condiciones de Borde

Similarmente al caso isotérmico, el problema queda parcialmente determinado por las CB de velocidad sobre las superficies del eje ($y = \tilde{h}$) y del cojinete ($y = 0$), la presión

exterior al sistema, y la presión y temperatura de suministro del lubricante. Esto es:

$$\begin{aligned}
 u|_{y=0} &= 0 & u|_{y=\tilde{h}} &= 1 \\
 v|_{y=0} &= 0 & v|_{y=\tilde{h}} &= \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta} \\
 w|_{y=0} &= 0 & w|_{y=\tilde{h}} &= 0 \\
 p|_{\Theta=0} &= 0 & p|_{z=-1/2} &= 0 & p|_{z=1/2} &= 0 \\
 t|_{\Theta=0} &= 0 & \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0
 \end{aligned} \tag{96}$$

Para completar la formulación del problema, es necesario definir el mecanismo de transmisión de calor entre el lubricante y las paredes que lo contienen, el cual, como ya se discutiera en el Capítulo anterior, puede expresarse de diversas formas. Por un lado, existe cierta cantidad de calor que se transmite desde el lubricante al cojinete, el cual es conducido por el cuerpo de éste hasta alguna interfase en la que otro fluido lo recibe y transporta (aire del ambiente o fluido de refrigeración). En general, el valor de este flujo de calor suele ser pequeño si se lo compara con el que es transportado por convección por el mismo lubricante. Por ello, en este trabajo se considera que el cojinete es adiabático. Es decir, se usa la CB:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \tag{97}$$

Del otro lado de la capa lubricante se encuentra la superficie del muñón. Dado que éste se mueve a alta velocidad tangencial y que la conductividad del eje suele ser elevada comparada con la del lubricante, puede asumirse que el muñón es isotérmico. Esto se basa también en considerar que un mismo punto de la superficie atraviesa zonas de distinta temperatura en un breve lapso de tiempo, por lo que es de esperar que toda la superficie esté a la misma temperatura. Esta temperatura sería una temperatura “media” de la vuelta, T_M . Es decir, la CB sería:

$$t|_{y=\tilde{h}} = t_M \tag{98}$$

donde t_M es la temperatura adimensional media alcanzada por el fluido sobre la superficie del eje. Este tratamiento es similar al propuesto en el Capítulo 4 y, a fin de mantener el mismo concepto, se calcula la temperatura sobre el rotor como la temperatura media sobre la superficie del cojinete, análogo a la Ec. (138) del Capítulo 4.

Para hacer más realista el análisis se decidió contemplar la posibilidad de cavitación.

Para ello se emplea el modelo de Reynolds que establece que en una posición $\Theta = \Theta_{cav}$ (a determinar) se cumple que

$$P = P_{cav} \rightarrow p = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial \Theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (99)$$

donde se estaría tomando que la presión de cavitación es similar a la ambiente. El ángulo Θ_{cav} es una variable más a determinar en el problema, que se resuelve con la Ec. (99).

Dado que el algoritmo resuelve entre límites definidos, debe buscarse cuál es el valor de $\Theta = \Theta_{cav}$ que cumple con la Ec.(99). Analizando los resultados del programa, se ha observado que, dependiendo del valor límite en la coordenada Θ en que se resuelva el sistema, las soluciones obtenidas muestran un comportamiento como el ilustrado en la Figura 5.14.

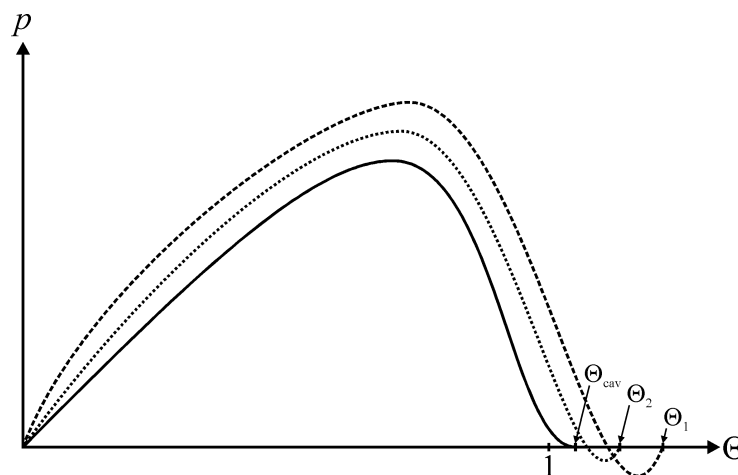


Figura 5.14: Comportamiento del perfil de presión obtenido a medida que disminuye el valor límite de la coordenada Θ , de $\Theta_1 \rightarrow \Theta_2 \rightarrow \Theta_{cav}$.

El esquema de cálculo requiere entonces la evaluación de la presión sobre la superficie del cojinete en el punto de la malla $[(N_x), (N_z+1)/2]$, que representa el anteúltimo punto del dominio sobre la línea axial media del cojinete. Si dicha presión es negativa, entonces debe acortarse el dominio en la coordenada Θ y volver a calcular. Claro está, este método requiere comenzar con un valor límite de Θ por encima del $\Theta = \Theta_{cav}$ al que se llegue.

Al igual que para el caso isotérmico, se conocen los valores iniciales de las tres componentes de la velocidad tanto sobre la superficie del cojinete, como sobre la del rotor. Asimismo, por considerarse adiabática la superficie del cojinete, se conoce el valor de $\frac{\partial t}{\partial \gamma}$

sobre la misma. Los valores iniciales de las otras cuatro variables $\left(\frac{\partial u}{\partial \gamma}, \frac{\partial w}{\partial \gamma}, t \text{ y } p \right)$ son

estimaciones y se ajustan en cada iteración hasta cumplir con las condiciones en el otro borde (u, v, w y t en $\gamma=1$). Cabe aclarar, no obstante, que $t|_{\gamma=1} = t_M = \frac{1}{\Theta_{cav}} \int_0^{\Theta_{cav}} t|_{\gamma=0} d\Theta$ por lo que debe ajustarse el objetivo luego de cada iteración. En el Anexo IV se detalla el algoritmo desarrollado para el estudio THD. En este caso se presenta un desarrollo del método de Newton propio en lugar del provisto por IMSL.

5.4.3 Resultados

A continuación se presentan los perfiles de presión y temperatura obtenidos para diversas condiciones geométricas y operativas. En principio, se muestran los resultados obtenidos empleando la condición de Gumbel para considerar la cavitación en la zona divergente. Luego se muestran los resultados con la condición de Reynolds. Como ya se mencionara, la condición de borde empleada para la temperatura del muñón es la correspondiente al valor medio de la temperatura del cojinete en el dominio analizado. Dado que el algoritmo desarrollado no incluye aún los fenómenos de transferencia en la región cavitada, el dominio computacional no abarca toda la película fluida, sino sólo la película líquida ($0 \leq \Theta \leq \Theta_{cav} < 2$). En general, la temperatura máxima sobre el cojinete se obtiene más allá del punto de espesor mínimo de película (Mitsui, 1987), por lo que las temperaturas máximas de cojinete y temperatura de muñón calculadas aquí deben ser menores que las que se obtendrían de considerar toda la zona convergente y la divergente del fluido, como se mostrará luego.

Los cálculos se realizan usando un fluido lubricante con las propiedades que se listan en la Tabla 5.1, que coinciden con las usadas en el Capítulo 4 y las del fluido utilizado por Mitsui, con cuyos resultados se hará más adelante una comparación.

Tabla 5.1: Características del fluido lubricante usado en los cálculos numéricos.

μ_0	0,0192 Pa.s
ρ	859 kg/m ³
β_0	0,029 K ⁻¹
k	0,131 W/m.K
\hat{C}_v	1970 J/kg.K

Las Figuras 5.15 y 5.16 presentan los perfiles de temperatura y presión adimensionales en dirección tangencial, $t(\Theta)$ y $p(\Theta)$, respectivamente, calculados en el centro y en la superficie del cojinete ($z=0$ y $\gamma=0$). Ellos fueron calculados con la metodología antes

propuesta para tres relaciones de aspecto considerando una excentricidad relativa $\eta=0,5$, una relación $c/R=0,001$ y la condición de borde de Gumbel. Para los cálculos se usó una malla de 11×11 y una tolerancia global para la convergencia de 10^{-8} . Como era de esperar, la temperatura aumenta con la posición circunferencial en la zona convergente, más cuanto mayor es la relación L/D . Además, la temperatura, al aumentar, produce una disminución de la viscosidad del fluido que se traduce en una disminución de la presión respecto de la que se predice para el caso isotérmico y, por ende, en la capacidad portante lograda por el cojinete. Por ejemplo, si se comparan los resultados isotérmicos de la Figura 5.9 con los presentados en la Figura 5.16, se observa que la presión máxima correspondiente a $L/D = 0.5$ y 1 para el cojinete THD son un $\sim 35\%$ menor que las predichas para el caso isotérmico (ver curva para $L/R = 1$ y 2 en Figura 5.9).

Las Figuras 5.17 y 5.18 muestran los perfiles de temperatura y presión obtenidos bajo las mismas condiciones que las Figuras 5.15 y 5.16 pero considerando la CB de Reynolds para la cavitación. En este caso los datos se extienden hasta un $\Theta > 1$, que es el Θ_{cav} calculado para cada condición. Cualitativamente los perfiles presentados en estas figuras presentan las mismas características que los de las Figuras 5.15 y 5.16 en cuanto al

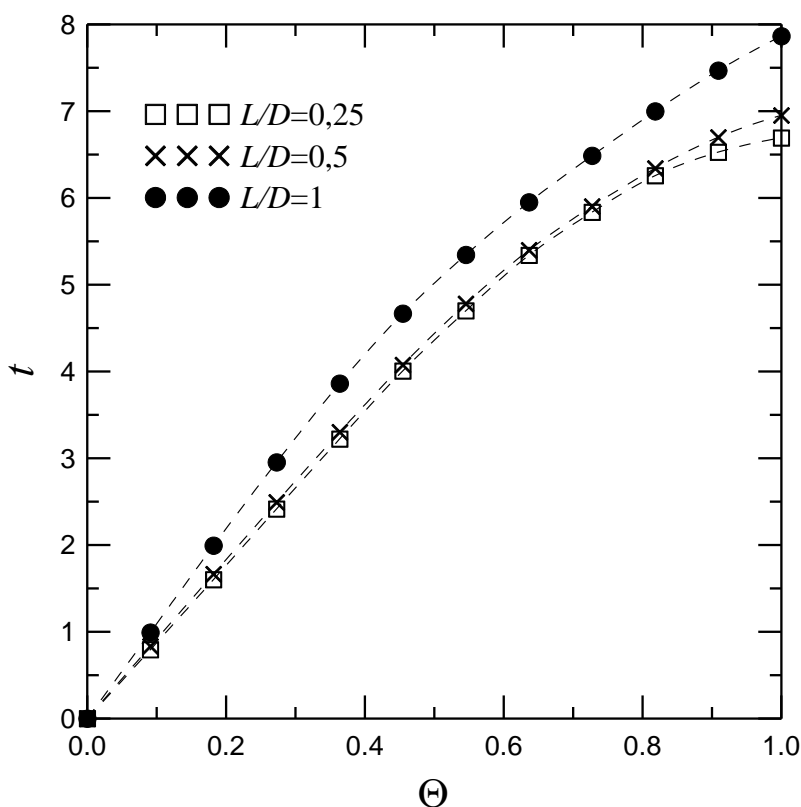


Figura 5.15: Perfiles de temperatura en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Gumbel para distintas relaciones de aspecto en $z=0$ y $\gamma=0$, para $\eta=0,5$.

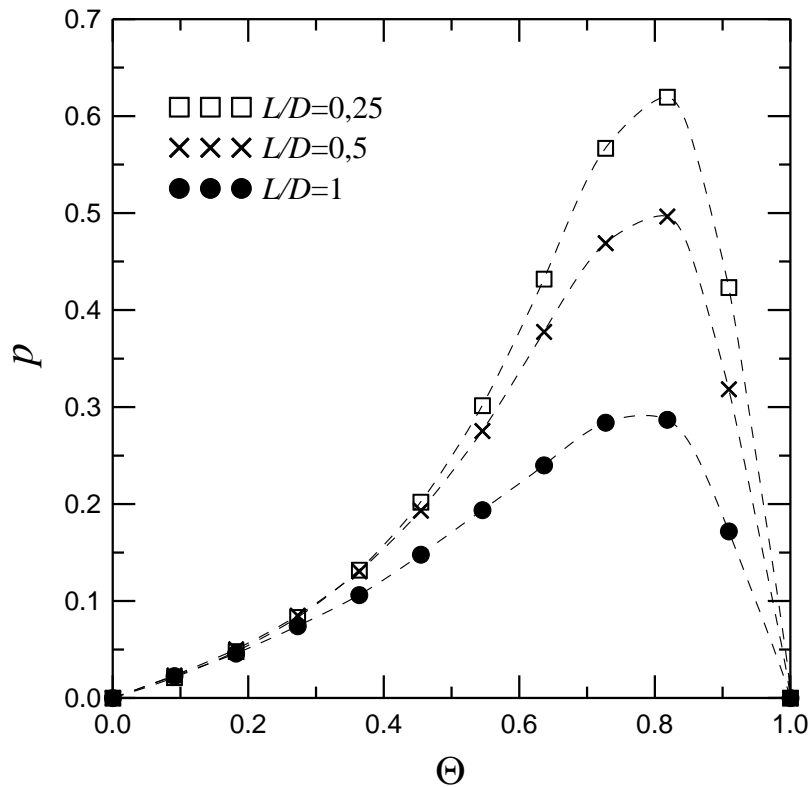


Figura 5.16: Perfis de pressão em função da posição longitudinal calculados com a condição de Gumbel para distintas relações de aspecto em $z=0$ e $\gamma=0$, para $\eta=0,5$.

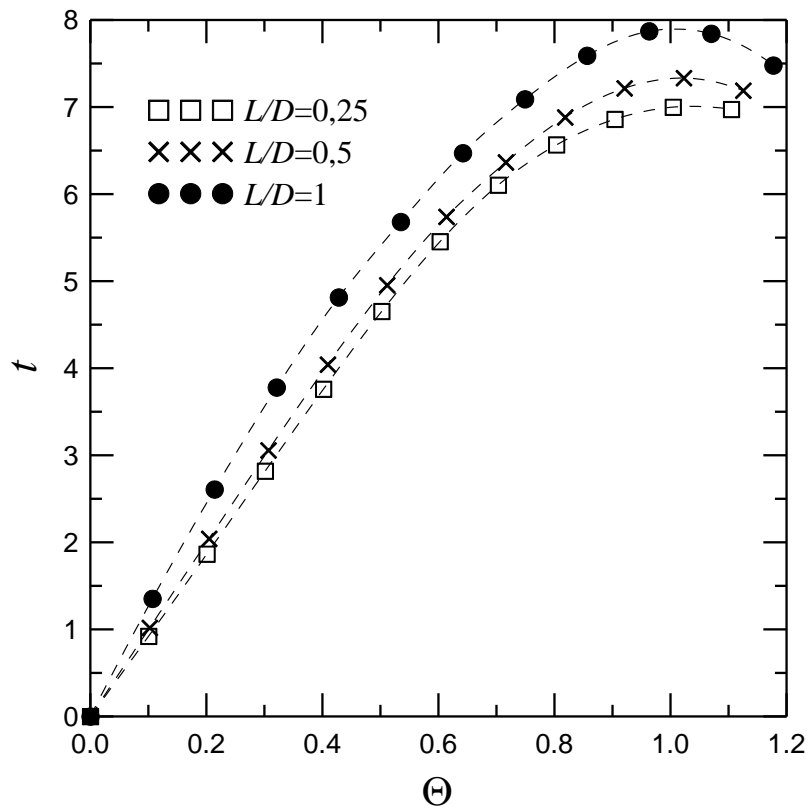


Figura 5.17: Perfis de temperatura em função da posição longitudinal calculados com a condição de Reynolds para distintas relações de aspecto em $z=0$ e $\gamma=0$, para $\eta=0,5$.

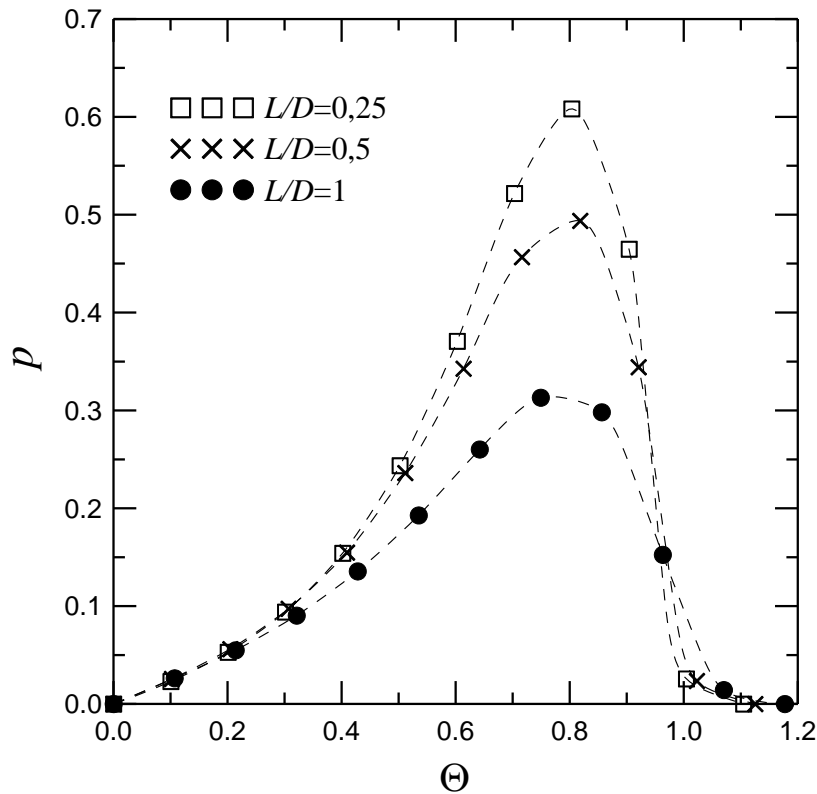


Figura 5.18: Perfiles de presión en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Reynolds para distintas relaciones de aspecto en $z=0$ y $\gamma=0$, para $\eta=0,5$.

aumento de la temperatura con la posición y el efecto de ese aumento en los perfiles de presión. Sin embargo, la CB de Reynolds, más realista, predice cambios notables en los perfiles, sobre todo en la vecindad del espesor mínimo.

Para analizar en más detalle este tema, la Figura 5.19 muestra el salto térmico sufrido por el fluido en la zona líquida de la película (desde $\Theta=0$ hasta Θ_{cav}) para las condiciones presentadas, es decir, $t|_{\Theta_{cav}} - t|_{\Theta=0}$. Para la comparación, se presentan también los saltos térmicos correspondientes al cálculo hecho con la condición de Gumbel (aunque en este caso se trata de $t|_{\Theta=\pi} - t|_{\Theta=0}$), y los valores calculados por Raimondi y Boyd (1958) para las tres relaciones L/D . Se incluye también el valor que se obtiene mediante el método de “viscosidad efectiva” propuesto por Boswall (1928) aplicado a un ISJB, de acuerdo con la Ec. (97) del Capítulo 4. Estos dos casos consideran que existe mezcla perfecta entre el flujo circunferencial proveniente de la porción divergente de la película y el flujo de suministro, de modo que se obtiene $t|_{\Theta=0} = 0$. Asimismo, asumen que no existe fuga lateral de fluido en la zona divergente. Además, Raimondi y Boyd contemplan la zona $0 \leq \Theta < 2\pi$ usando una

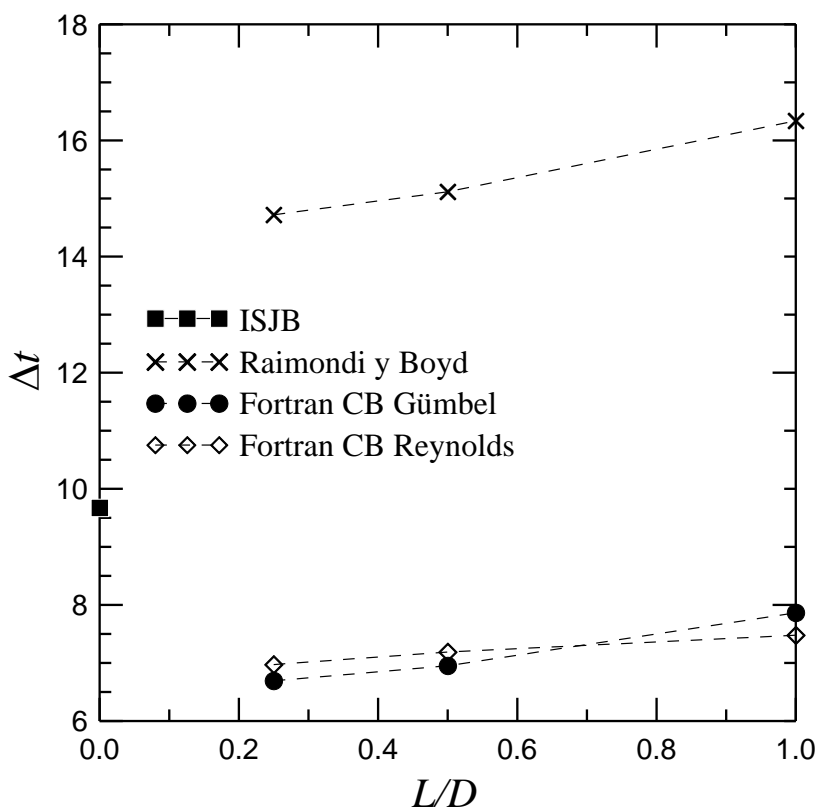


Figura 5.19: Aumento de la temperatura adimensional sufrido por la película fluida para $\gamma=0$ y $\eta=0,5$. Para Raimondi y Boyd e ISJB el Δt es el empleado para el cálculo de viscosidad efectiva.

condición de Reynolds en la interfase líquido-vapor, mientras que en la metodología de Boswell aplicada al ISJB, el Δt también corresponde a $0 \leq \Theta < 2\pi$ pero considerando una condición de Gumbel. Es decir, ambos tienen en cuenta la zona divergente considerando la disipación ocasionada por un perfil lineal en esa región, la cual produce que siga aumentando la temperatura entre Θ_{cav} (o $\Theta=1$) y $\Theta=2$ (un concepto similar al empleado en el Capítulo 4 con los modelos de temperatura media en el espesor y temperatura “bulk”). Los incrementos térmicos graficados no representan, por lo tanto, exactamente el mismo concepto, pero permiten apreciar claramente que la consideración de la película en la zona divergente tiene una influencia notoria en la temperatura alcanzada sobre el cojinete ($\gamma=0$), y por ende, sobre el muñón. Se observa también que la consideración ideal de flujo adiabático en el ISJB produce un incremento mayor de temperatura que incluso cuando se consideran cojinetes de $L/D=1$. En el caso de los cálculos hechos por Raimondi y Boyd, el salto térmico resulta aún mayor, de hecho es del orden el doble, que los aquí calculados. Esto se debe a que en los cálculos aquí presentados aún no se contempla la zona divergente del cojinete, más allá de Θ_{cav} , por lo que la temperatura estimada sobre el eje resulta, por lo tanto, menor a la real. Cabe recordar en este punto que la metodología THD propuesta en este

capítulo considera que la temperatura del muñón se corresponde con la temperatura media en el cojinete. Esta es una condición de borde que se ajusta de iteración en iteración. Como la temperatura sobre el fluido se calcula de modo que para $\gamma=1$ se tenga la temperatura del rotor y para $\gamma=0$ se logre derivada nula (cojinete adiabático), una disminución en la primera produce una caída en la temperatura también para $\gamma=0$. En otras palabras, la no consideración de prácticamente medio cojinete produce que la temperatura máxima en el mismo sea menor a la obtenida considerando todo el cojinete. De hecho, si se aproximase al perfil de temperatura como una recta desde $t|_{\Theta=0} = 0$ a $t|_{\Theta=2} = \Delta t$, debería resultar $t|_{\Theta_{cav}} - t|_{\Theta=0} > \frac{\Delta t}{2}$ dado que $\Theta_{cav} > 1$. La influencia de la baja temperatura sobre el rotor (además del efecto concreto del hecho que el perfil de temperatura no es lineal) produce un cambio de temperatura ligeramente menor, aproximadamente $t|_{\Theta_{cav}} - t|_{\Theta=0} \approx \frac{\Delta t}{2}$.

Similarmente, las Figuras 5.20 y 5.21 muestran los perfiles de temperatura y presión para una única relación de aspecto, $L/D=0,5$, y distintas excentricidades, considerando condición de Reynolds para la cavitación. Puede apreciarse que, para este largo de

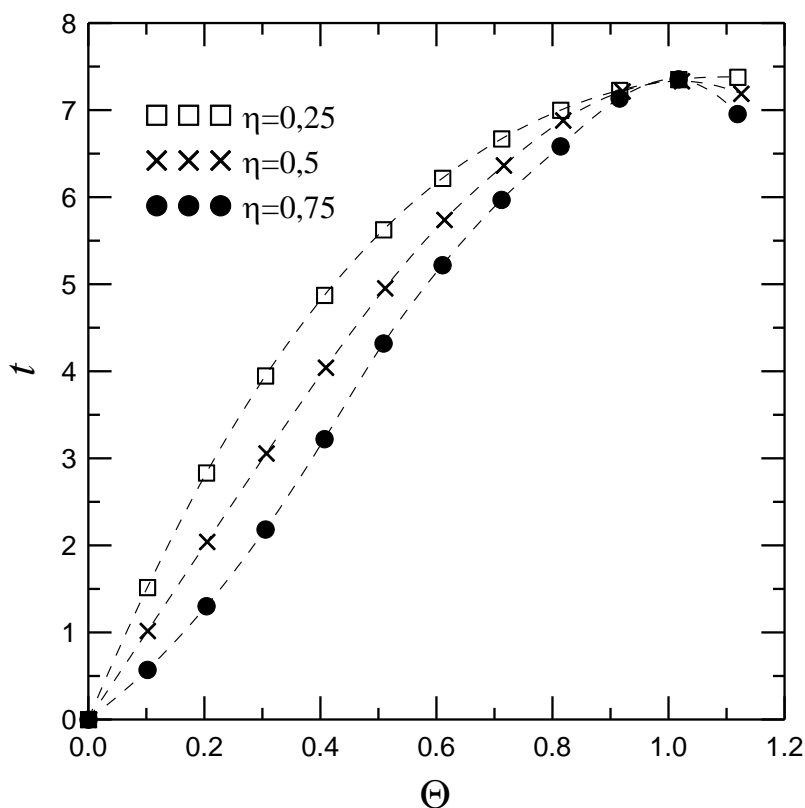


Figura 5.20: Perfiles de temperatura en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Reynolds para distintas excentricidades en $z=0$ y $\gamma=0$, para $L/D=0,5$.

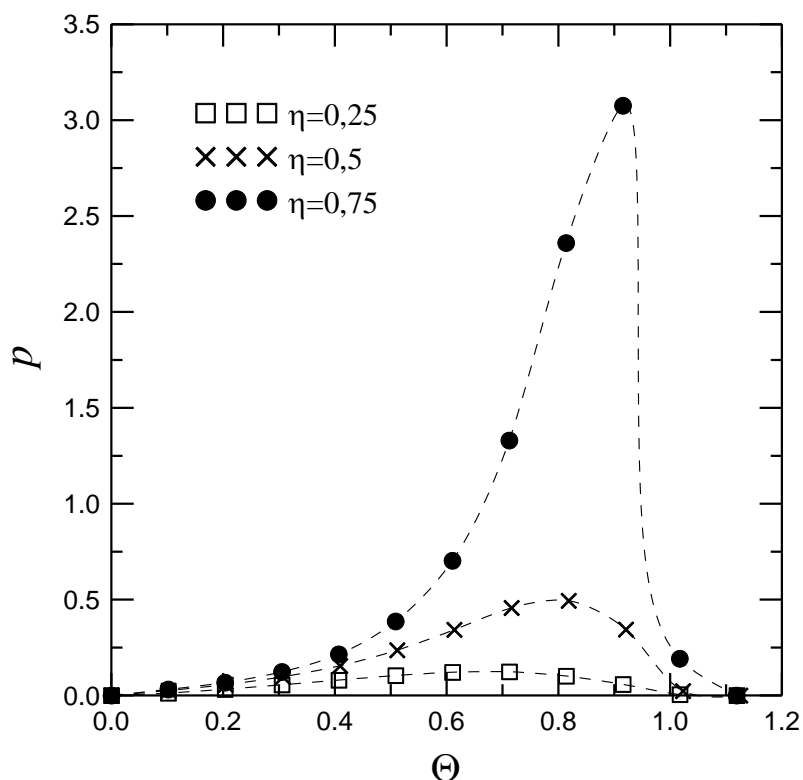


Figura 5.21: Perfiles de presión en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Reynolds para distintas excentricidades en $z=0$ y $\gamma=0$, para $L/D=0,5$.

cojinete, el aumento de la excentricidad produce un aumento importante de la presión sin afectar notablemente el valor de temperatura máxima (sólo levemente su velocidad e cambio). Este fenómeno se ve respaldado por las mediciones experimentales presentadas en el Capítulo 6 para cojinetes cilíndricos.

La Figura 5.22 muestra los perfiles axiales de presión y temperatura para tres valores de Θ , para un cojinete de $L/D=0,25$ y $\eta=0,5$. Puede apreciarse que la temperatura crece ligeramente hacia los bordes ($\sim 1\%$), lo que resulta característico de un cojinete adiabático (Elrod y Brewe, 1987), y que la presión tiene una forma tipo parabólica similar al ISJB.

Como se comentara en apartados previos, el comportamiento térmico del cojinete queda regido principalmente por su geometría y por la dependencia de la viscosidad con la temperatura, que en este caso la mide el parámetro $\kappa_1 = \beta_0 T_{ref}$. Las Figuras 5.23 y 5.24 muestran los perfiles de temperatura y presión obtenidos para un cojinete de geometría fija ($L/D=0,5$, $\eta=0,5$ y $R/c=1000$) variando el valor de κ_1 (que se ha expresado como factores de un valor de referencia, $\kappa_1=0.0775$). El valor de κ_1 resulta de considerar la geometría descrita, el lubricante que se describe en la Tabla 5.1 y la velocidad del eje (U) que se usará más adelante para la comparación con datos experimentales.

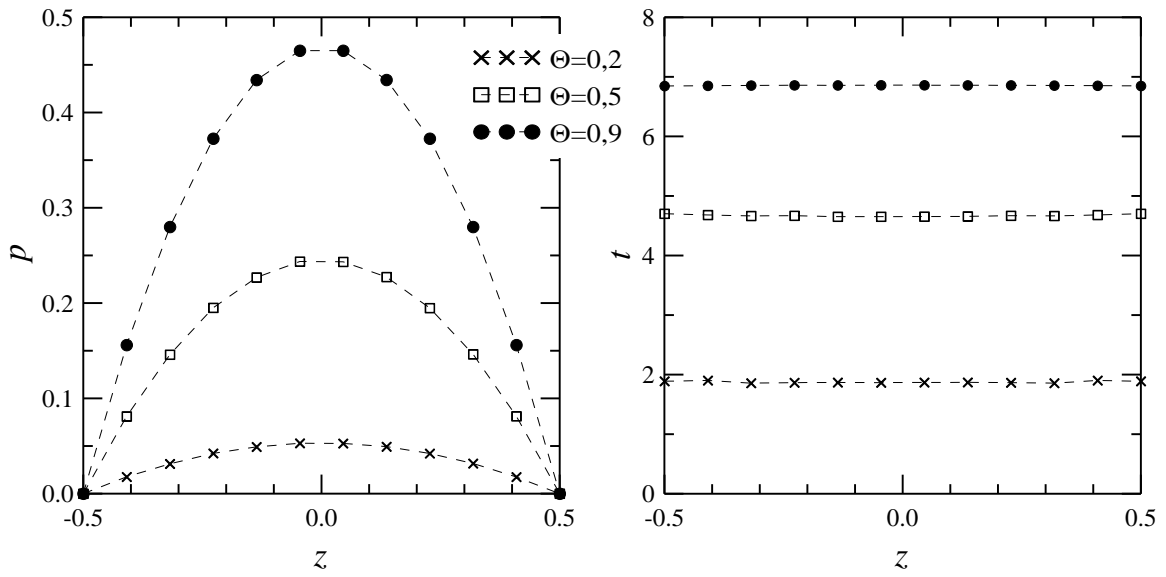


Figura 5.22: Perfiles de presión y temperatura en función de la posición axial calculados para distintos valores de Θ en $\gamma=0$, para $L/D=0,5$ y $\eta=0,5$.

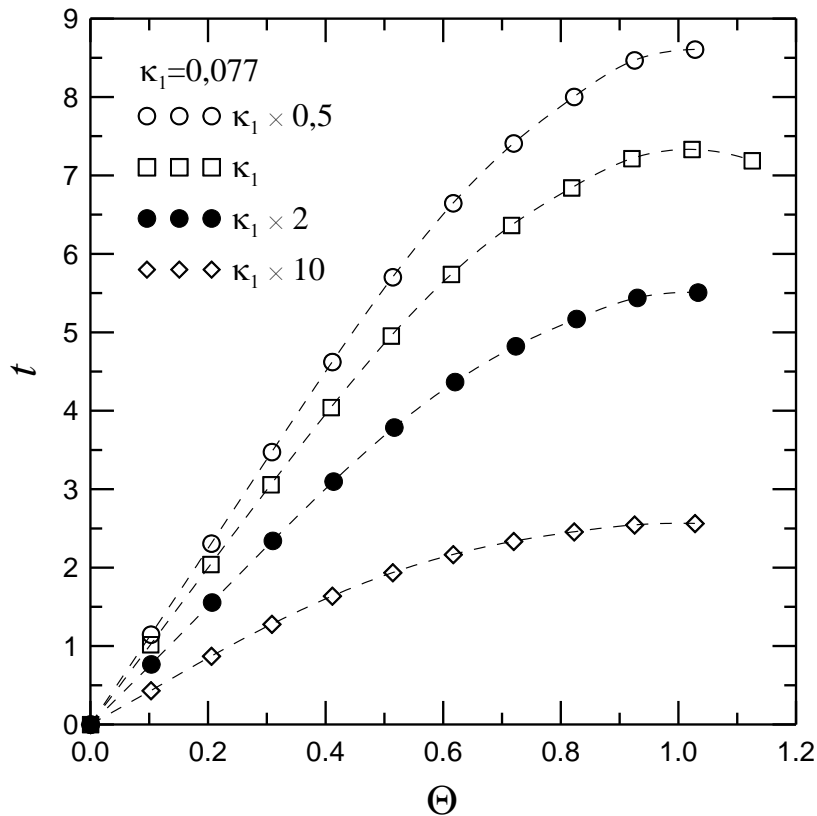


Figura 5.23: Perfiles de temperatura en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Reynolds para distintos valores de κ_1 en $z=0$ y $\gamma=0$, para $L/D=0,5$ y $\eta=0,5$.

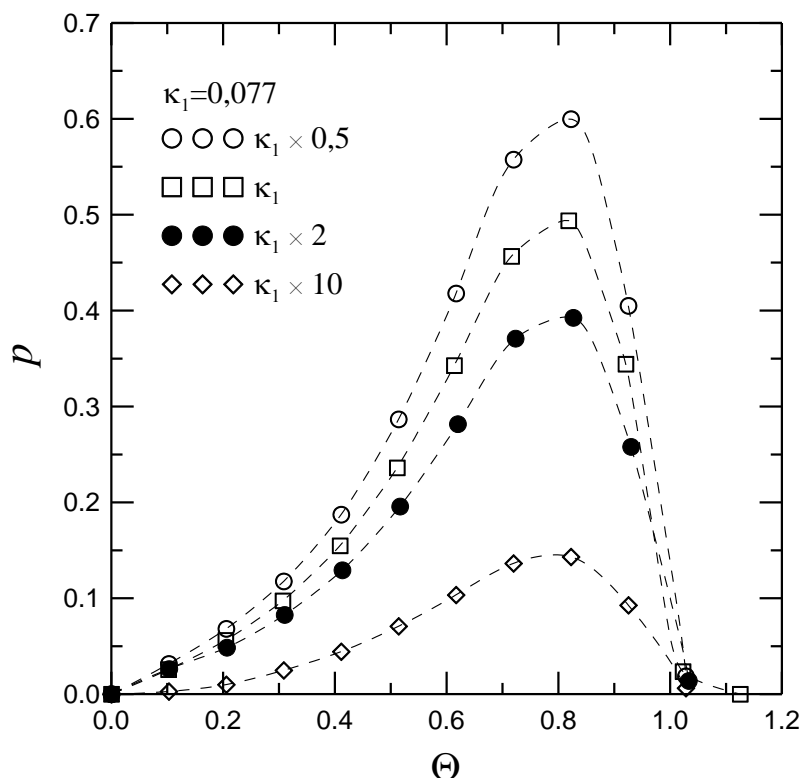


Figura 5.24: Perfiles de presión en función de la posición longitudinal calculados con la condición de Reynolds para distintos valores de κ_1 en $z=0$ y $\gamma=0$, para $L/D=0,5$ y $\eta=0,5$.

Puede apreciarse que el parámetro κ_1 es determinante en el comportamiento THD de los cojinetes. Es interesante observar que, a medida que este parámetro aumenta (lo que significa que la viscosidad es más sensible a la temperatura, y disminuye más bruscamente a medida que la temperatura aumenta), produce perfiles de temperatura y presión de valores más bajos. Se observa que, para las condiciones consideradas, un factor de 2 en el valor de κ_1 está produciendo un cambio de ~20% en la temperatura y presiones máximas alcanzadas.

Comparación con Resultados de la Bibliografía

En esta sección se presentan los perfiles de temperatura y presión adimensionales correspondientes a un cojinete como el estudiado por Mitsui (1987), quien efectuó mediciones experimentales de presión y temperatura en un banco de ensayos de cojinetes hidrodinámicos empleando tres aceites minerales diferentes como fluido lubricante. Asimismo, este autor desarrolló un algoritmo de diferencias finitas para modelar el desempeño THD de los cojinetes ensayados acoplado la ecuación de Reynolds Generalizada con el balance de energía. La Tabla 5.2 resumen las características del cojinete y las condiciones de trabajo que fueron empleadas por Mitsui y que se han seleccionado para la comparación. Las características del fluido son las ya presentadas en la Tabla 5.1.

Tabla 5.2: Características del cojinete estudiado por Mitsui (1987) usado en el estudio comparativo.

L	0,07 m
L/D	0,7
R/c	637
η	0,44
N	2250 rpm
T_0	44°C

A partir de los parámetros de las Tablas 5.1 y 5.2 se calcula:

$$\begin{aligned}
 U &= 2\pi RN = 11,8 \quad , \quad P_{ref} = \frac{\mu_0 U}{R} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2 = 3,6 \cdot 10^6 \quad , \quad T_{ref} = \frac{\mu_0 U}{\rho \hat{C}_v R} \left(\frac{R}{c}\right)^2 = 1,08 \quad , \\
 \kappa_1 &= \beta_0 T_{ref} = 0,031 \quad , \quad Re = \frac{\rho UR}{\mu} = 26400 \quad , \quad Re_c = 41,4 \quad , \quad \lambda = \frac{kR}{Uc^2 \rho \hat{C}_v} = 0,053 \quad , \quad (100) \\
 Pe &= \frac{UR\rho C_v}{k} = 7,6 \cdot 10^6 \quad , \quad Pe_c = 11900 \quad \text{y} \quad Pr = Pe / Re = 289
 \end{aligned}$$

donde U [m/s], P_{ref} [Pa], T_{ref} [K] y el resto de los parámetros son adimensionales.

La Figura 5.25 presenta la evolución de la temperatura adimensional sobre la superficie del cojinete, t_c , en función de la coordenada tangencial, calculada con el algoritmo desarrollado (identificada como “ t_c THD Fortran”). Los resultados son para $z=0$. Se incluyen también los datos experimentales de Mitsui (1987) y su predicción de t_c , así como las predicciones de t_c y de la temperatura de mezcla, t_b , obtenidas mediante los modelos de temperatura media en el espesor y de temperatura de mezcla presentados en el Capítulo 4.

Es interesante observar la buena concordancia entre los datos experimentales y todas las predicciones, sobre todo considerando los posibles errores experimentales involucrados en las mediciones y en los parámetros que caracterizan el flujo y el fluido, y las suposiciones contempladas en los modelos teóricos y en las predicciones numéricas. De hecho, la ubicación relativa de los valores experimentales de temperatura y los predichos con el algoritmo usado en esta tesis está en concordancia con las hipótesis empleadas en esta etapa. Puede verse que los valores calculados comienzan siendo muy similares a los reportados por Mitsui a Θ pequeños y luego se hacen mayores, lo cual es consistente con el hecho que no se ha considerado transferencia de calor entre el fluido y el cojinete. Así, las zonas de mayor temperatura no generan mayor flujo de calor hacia el cojinete que las de menor temperatura y la temperatura máxima alcanzada en el cojinete es mayor (y la distancia entre los datos aumenta gradualmente). En esta comparación también debe tenerse presente el importante efecto que tiene la dependencia de la viscosidad con la temperatura en el perfil de temperatura

predicho (dado por β_0). De hecho, de ser esta dependencia mayor a la considerada ($\beta_0 > 0,029 \text{ K}^{-1}$), los valores predichos de temperatura disminuirían, más cuanto mayor es Θ (ver Figura 5.23).

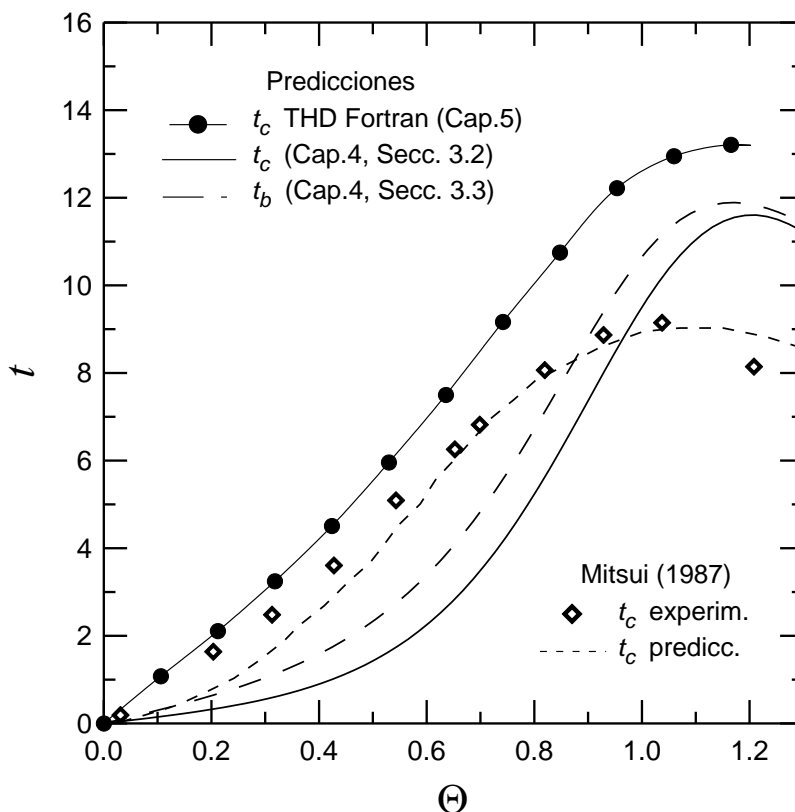


Figura 5.25: Perfiles de temperatura adimensional en función de la posición azimutal para $z=0$.
 t_c : temperatura sobre la superficie del cojinete, t_b : temperatura de mezcla (Capítulo 4).

Asimismo, la Figura 5.25 permite observar que las predicciones de temperatura obtenidas con modelos simplificados, basados en el uso de una temperatura única en el espesor (t_m o t_b) resultan cercanas a los resultados experimentales. Ambos perfiles muestran un punto de inflexión más marcado y un máximo que se ubica más cerca de Θ_{cav} que en los datos experimentales. Esto podría atribuirse a que ambos modelos fueron desarrollados para cojinetes cortos. No obstante, puede afirmarse que con estos modelos sumamente sencillos y de muy baja carga computacional, se logra captar razonablemente el comportamiento termo-hidrodinámico del cojinete estudiado.

Otro efecto relacionado con la transferencia de calor considerada entre el lubricante y el cojinete es el valor de temperatura alcanzada sobre el rotor. Mitsui propone una temperatura constante sobre el mismo calculada en función de la cantidad de calor que es capaz de evacuar el eje por sus extremos. En el algoritmo presentado, así como en los modelos simplificados

citados, se asume que la temperatura del rotor es igual a la temperatura media del fluido, en todo el dominio (Ionescu, 2005).

Adicionalmente, la Figura 5.26 presenta los perfiles radiales de temperatura y presión calculados para el cojinete de las características listadas en las Tablas 5.1 y 5.2 en distintos Θ y en $z=0$. Los perfiles de temperatura cumplen con la imposición de derivada nula de t en la pared del cojinete, y de t uniforme en la pared del eje. Puede observarse que, a pesar de lo expresado en las Ecs. (83) y (87), y de los valores significativos alcanzados por la derivada de la temperatura con γ , la presión se mantiene prácticamente constante en el espesor. Esto se debe a que κ_1 toma un valor muy pequeño, $\kappa_1 = 0,031$, en este caso en particular. Esto implica que, para esta geometría y propiedades de lubricante, el empleo de la Ecuación de Reynolds no-isotérmica resulta totalmente adecuado.

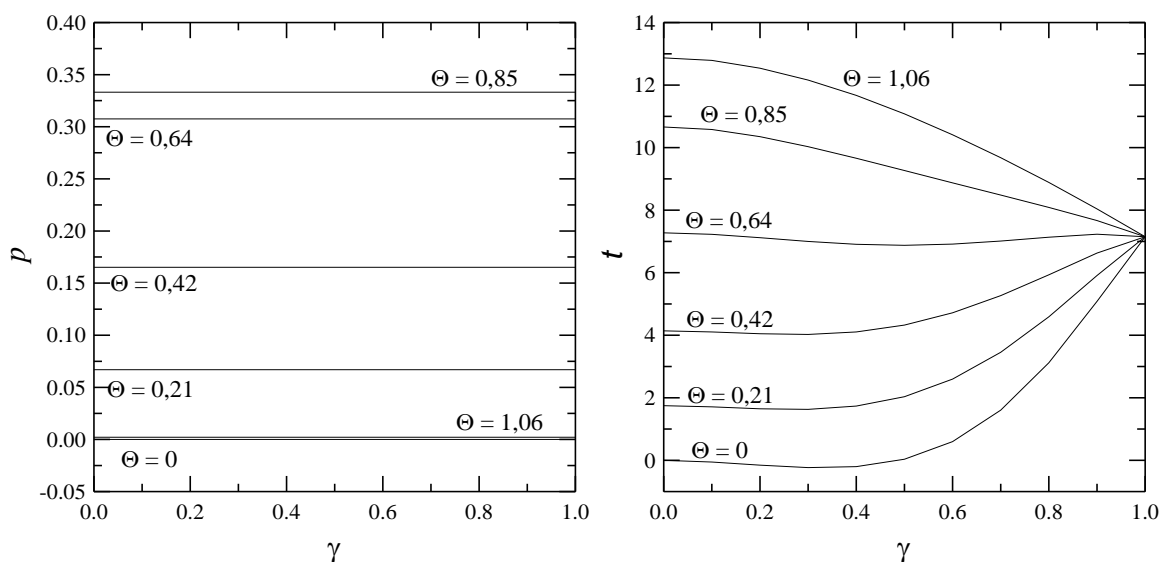


Figura 5.26: Perfiles de presión y temperatura adimensionales en función de la posición trasversal, para distintas coordenadas tangenciales.

5.5 DISCUSION RESPECTO DE LOS MÉTODOS EMPLEADOS

En este Capítulo se han presentado los lineamientos del programa desarrollado para resolver numéricamente las ecuaciones de conservación en cojinetes hidrodinámicos no-isotérmicos. Independientemente de los resultados obtenidos, el tiempo de cálculo ha sido un tema recurrente que llevó a la búsqueda de las variantes presentadas. De las mismas puede decirse que:

- el tiempo de cálculo del método propuesto es mucho mayor que el empleado por la resolución de la ecuación de Reynolds sola. Esto se debe a dos razones fundamentales: la primera es que mientras en la ecuación de Reynolds se resuelve

una única variable por nodo (p), el método propuesto resuelve seis (u ocho) variables por nodo; y la segunda es que, en el método propuesto, el número de nodos que se resuelven en la ecuación de Reynolds (plano Θ, z) debe multiplicarse por la cantidad de divisiones que se consideran en el eje y .

- En particular, para los casos de $L/R=0,01$ a 2 se utilizaron valores de $N_x=20$, $N_z=10$ y paso máximo de 10^{-6} para la integración en el eje γ . En todos los casos fueron necesarias varias iteraciones para lograr la convergencia con cálculo de Jacobiano numérico (método de Newton), con un tiempo de cálculo de entre 2 y 12 h. Bajo las mismas condiciones, la ecuación de Reynolds se resuelve en sólo unos pocos minutos.
- Para el caso de $L/R=100$, se utilizaron valores de $N_x=50$, $N_z=100$ y paso de 10^{-6} con el objetivo de captar la caída de presión en los bordes. En este caso, la convergencia se logró con un tiempo de cálculo superior a las 24 h empleando la misma computadora. En esta configuración, la ecuación de Reynolds se resolvió en decenas de minutos.
- En pruebas empleando el método de Broyden, el tiempo requerido de cálculo, a pesar de necesitar mayor cantidad de iteraciones que el método de Newton original, fue menor.
- Con la implementación del método de optimización por fuerza bruta, el tiempo de cálculo empleado fue de varios órdenes de magnitud mayor en comparación con, por ejemplo, el método de Newton.
- Empleando el algoritmo de Powell, el tiempo de cálculo fue sensiblemente mayor al empleado por los métodos indirectos mencionados.

En este punto, se deduce que el método de Broyden resulta ser el más rápido, aunque el de Newton mostró una mejor convergencia. Asimismo, independientemente de cuál de los dos resulta más beneficioso, el orden de magnitud del tiempo de cálculo ronda en la decena de horas (con una PC de escritorio estándar, pero acorde a las exigencias).

Cabe destacar, por otro lado, que debe trabajarse en un método para proveer al algoritmo de buenos valores iniciales para garantizar la convergencia. Aunque para el algoritmo de cojinete isotérmico descrito, se logra convergencia fácilmente, ninguno de los métodos descritos converge sin un buen conjunto de valores iniciales para la resolución del problema THD. Los resultados presentados en la sección anterior fueron obtenidos luego de buscar manualmente el grupo de valores iniciales adecuado para cada condición simulada.

Por último, cabe señalar que los algoritmos presentados, usados para obtener las propiedades en la película fluidodinámica de cojinetes de deslizamiento para las condiciones isotérmica y no-isotérmica, han sido desarrollados en Visual Fortran. No obstante, en el transcurso del trabajo se han evaluado otras opciones. Por ejemplo, se probó la resolución del sistema de ecuaciones mediante *Gproms* con un esquema de elementos finitos. Sin embargo, los resultados preliminares fueron poco prometedores y se abandonó rápidamente esta opción. Por otro lado, buscando flexibilidad en la evaluación de alternativas de cálculo y de procesamiento, presentación de los resultados y, por sobre todo, facilidad de implementar la ejecución en paralelo en futuros desarrollos, se realizaron intentos de migrar el algoritmo a MATLAB. En este sentido, mientras que el programa implementado en Fortran resuelve el sistema mediante los métodos de Gear y shooting, el desarrollado en MATLAB emplea diferencias finitas y colocación. No obstante, este esquema es fácilmente adaptable a un esquema de valor inicial ya que el sistema de ecuaciones fue escrito de esa forma. Los resultados obtenidos con ambos códigos resultan comparables. Sin embargo, si bien los tiempos empleados por ambas metodologías resultan similares, para la ejecución en una sola PC, el algoritmo desarrollado en Fortran consume sensiblemente menos recursos computacionales y permite la ejecución de problemas de gran tamaño, que con MATLAB no logran resolverse por falta de los mismos. Así, y en base a la limitada experiencia ganada en el tema, puede concluirse que mientras que no se trabaje en computadoras en paralelo, el algoritmo desarrollado en Fortran supera ampliamente en eficiencia al desarrollado en MATLAB.

REFERENCIAS

- Alyaqout, S.F. y Elsharkawy, A., Optimal film shape for two-dimensional slider bearings lubricated with couple stress fluids, *Trib. Int.*, Vol. 44, pp. 336–342, 2011.
- Arghir, M., Alsayed, A. y Nicolas, D., The finite volume solution of the Reynolds equation of lubrication with film discontinuities, *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol. 44, pp. 2119–2132, 2002.
- Barrero Ripoll, A., y Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, M., *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos*. Mc Graw Hill, 2005.
- Biegler, L.T., Class Notes: Systems of Nonlinear Equations, Part II, Chemical Engineering Department, Carnegie Mellon University, <http://dynopt.cheme.cmu.edu>, 2000.
- Booker, J.F. y Huebner, K.H., Application of Finite Element Methods to Lubrication: An Engineering Approach, *J. of Lubrication Tech.*, Vol. 94(4), pp. 313-323, 1972.
- Burden, R.L., y Faires, J.D., *Análisis Numérico*, Thomson Learning, 2002.
- Chapra, S.C., y Canale, R.P., *Numerical Methods for Engineers*. McGraw Hill, 2006.
- Dahlquist, G. y Björck, A., *Numerical Methods*, Prentice-Hall, 1974.
- Dowson, D., A Generalized Reynold's Equation for Film Lubrication, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 4, pp. 159-170, 1962.

- Durany, J., Pereira, J., Varas, F., Análisis Termohidrodinámico de un par Eje-Cojinete Combinando Métodos de Volúmenes Finitos y Elementos de Contorno, *Mecánica Experimental*, Vol. 13, pp. 13-25, 2006.
- Elrod, H.G. y Brewe, D.E., Thermohydrodynamic Analysis for Laminar Lubricating Films, *Tribol. Series*, Vol. 11, pp. 443-450, 1987.
- Failla, M., Sarmoria, C., Villar, M., Brandolin, A., y Quinzani, L., Extrusion of Polymeric Films from a Planar Die., *Actas del 5° Simposio Latinoamericano de Polímeros (SLAP'96) y 3° Simp. Iberoamericano de Polímeros (SIAP)*, pp. 381-382, 1996.
- Gear C.W., *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, 1971.
- Gertzos, K.P., Nikolakopoulos, P.G. y Papadopoulos, C.A., CFD analysis of journal bearing hydrodynamic lubrication by Bingham lubricant, *Trib. Int.*, Vol. 41, pp. 1190–1204, 2008.
- Ionescu, M. G. & Ionescu, V-C. M., An Approximate Analytical Model of Thermohydrodynamic Estimation of Finite Length Journal Bearings, *Proceedings of WTC2005*, 2005.
- Kaw, A., Textbook notes on the shooting method for ODE, Chap. 08.06: Shooting Method for Ordinary Differential Equations, <http://numericalmethods.eng.usf.edu>, 2009.
- Liu, W.K., Xiong, S., Guo, Y., Wang, Q.J., Wang, Y., Yang, Q. y Vaidyanathan, K., Finite Element Method for Mixed Elastohydrodynamic Lubrication of Journal-Bearing Systems, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 60, pp. 1759–1790, 2004.
- Manshoor, B., Jaat, M., Izzuddin, Z. y Amir, F., CFD Analysis of Thin Film Lubricated Journal Bearing, *Procedia Engineering*, Vol. 68, pp. 56-62, 2013.
- Mitsui, J., A Study of Thermohydrodynamic Lubrication in a Circular Journal Bearing, *Tribology International*, Vol. 20, pp. 331-341, 1987.
- Powell, M., *Developments of NEWUOA for unconstrained minimization without derivatives*, Cambridge University, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Numerical Analysis Group, Report NA2007/05, 2007.
- Powell, M., UOBYQA: unconstrained optimization by quadratic approximation”, *Math. Programming*, Vol. 92, pp. 555–582, 2002.
- Pozrikidis, C., *Numerical Computation in Science and Engineering*, Oxford University Press, 1998.
- Press, W., Flannery, B., Teukolsky, W. y Vetterling, W., *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992.
- Raimondi, A.A., y Boyd, J., A Solution for the Finite Journal Bearing and Its Application to Analysis and Design-III, *Trans. ASLE*, Vol. 1, No. 1, 1958.
- Tucker, C.L., *Computer Modeling for Polymer Processing*, Fundamentals. Hanser Publishers, 1989.
- Visual Numerics, *IMSL® Fortran Numerical Math Library*, 1997.
- Wolfinger, P., *Analysis of Various Parameters Associated with Oil Lubricated Journal Bearings*, MSc. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Hartford, Ct, 2011.
- Zhang, Q., Guo, G. y Winoto, S.H., Analysis of Hydrodynamic Journal Bearing with GDQ Method, *Magnetic Recording Conference*, T.U.P.06.01-02, 2002.

CAPÍTULO 6

MEDICIONES EXPERIMENTALES EN COJINETES HIDRODINÁMICOS

Los modelos y métodos propuestos en los Capítulos precedentes exige la confección de un esquema de mediciones experimentales para su validación. Por ello, se planificaron dos fases de obtención de datos experimentales. Por un lado se realizó el diseño, construcción y puesta en funcionamiento de un banco de ensayo de cojinetes hidrodinámicos, el primero en Argentina, y por otro, se realizó una pasantía en un centro de reconocida trayectoria en el estudio numérico y experimental de cojinetes, el Turbomachinery Laboratory de Texas A&M University (TurboLab), en College Station - Texas. En este último, al momento de la realización de la pasantía, el sistema disponible era un banco de ensayo de cojinetes de zapatas pivotantes (TPJB por su nombre en inglés: “tilting-pad journal bearing”) de alta velocidad, como los descritos en el Capítulo 3. Si bien este sistema no es parte del eje central de esta tesis, su utilización permitió adquirir experiencia valiosa, de gran utilidad para el diseño y montaje del banco de ensayo propio. Cabe mencionar que el TurboLab, donde se estudian todo tipo de máquinas rotantes que intercambian energía con fluidos, desarrolla varias líneas de trabajos asociadas con cojinetes y sellos, la mayoría de ellas bajo la dirección de los Drs. Dara Childs y Luis San Andrés.

A continuación se describe en primer lugar el trabajo realizado en el TurboLab, y luego el banco de ensayo armado en nuestros laboratorios y se presentan los primeros datos que se han obtenido con el mismo.

6.1. MEDICIONES EN COJINETE DE ZAPATAS PIVOTANTES

Como se comentara, el estudio experimental de TPJB se realizó durante una estadía en el TurboLab, la cual fue financiada mediante una beca Fulbright – Bunge&Born. Los ensayos experimentales fueron supervisados por el Dr. Dara Childs y realizados en conjunto con el Dr. Jason Wilkes y el MsC Chris Kulhanek (Texas A&M University). Los resultados aquí reportados han sido también empleados por ellos en sus respectivos trabajos de investigación y no se pretende quitar mérito de los mismos, sino por el contrario, mostrar el fruto de un arduo trabajo mancomunado.

Los objetivos particulares del grupo al momento de mi estadía eran básicamente dos: estudiar la influencia de la temperatura en el huelgo real del TPJB, y considerar el cambio del centro instantáneo de rotación y de la flexibilidad de las zapatas en la respuesta del mismo. Estos objetivos provenían principalmente del hecho de que los trabajos del grupo hasta el momento venían mostrando significativa discordancia entre el comportamiento experimental de los TPJB ensayados y las predicciones que se obtenían usando modelos y métodos desarrollados por el mismo grupo. Necesitaban por lo tanto, asegurarse por un lado la calidad de las mediciones realizadas, y por otro obtener mayor detalle de información para alimentarla al método predictivo. Cabe señalar que no se mostrarán aquí las predicciones teóricas ya que están fuera del alcance de esta tesis.

A continuación se presenta en primer lugar, la descripción del equipo utilizado, seguido de la descripción del procedimiento y condiciones usadas en los ensayos realizados. A esto le sigue la descripción y análisis de los resultados obtenidos, para terminar comentando los aportes particulares realizados al trabajo.

6.1.1. Descripción del Banco de Ensayo

La Figura 6.1 muestra un esquema del banco de ensayo del TurboLab, que consiste en una bancada de fundición que soporta el instrumental con el cojinete y la turbina de aire que da movimiento al sistema. El rotor de acero AISI 4140 tiene un diámetro de 101.59 mm (3,9995 pulgadas) en la sección de ensayo y es soportado por pedestales con rodamientos de bolas de contacto angular híbridos-cerámicos espaciados aproximadamente 457 mm (18 pulgadas). La lubricación de los rodamientos es proporcionada por un sistema de niebla de aceite y se mantienen aislados del lubricante del cojinete de ensayo mediante sellos de aire a presión. La vinculación del eje con la turbina de aire de 65 kW y 17000 rpm, se logra mediante un acoplamiento flexible de láminas de acero.

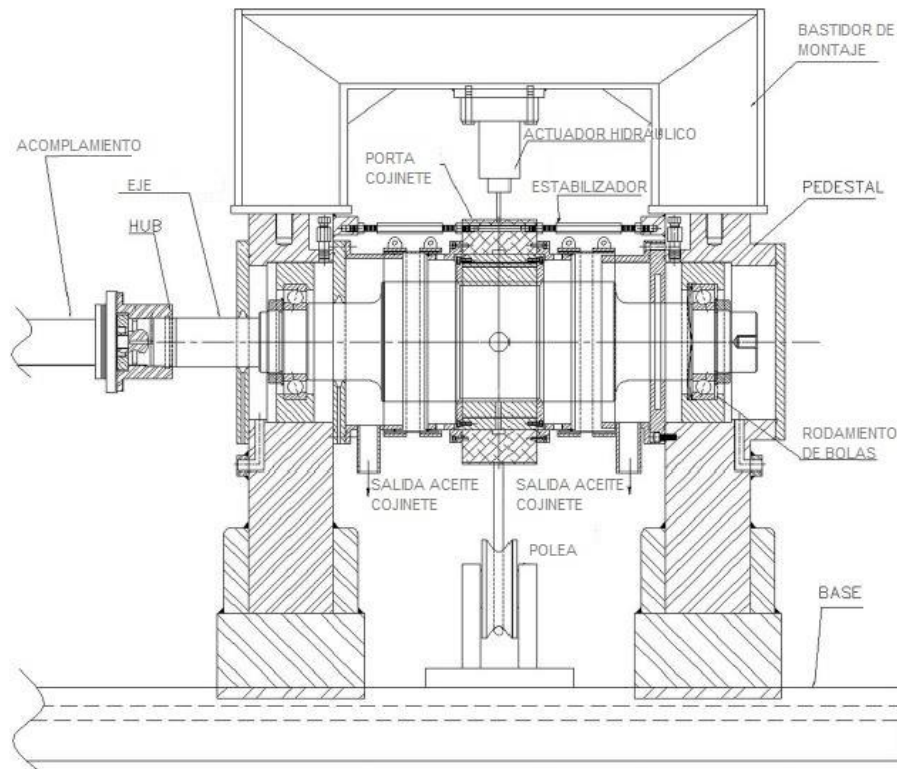


Figura 6.1: Corte general del banco de ensayo del TurboLab.

El estator sostiene el cojinete de prueba y todo el instrumental asociado: sensores de proximidad de corrientes parásitas (o corrientes de eddy), acelerómetros, sensores de presión y termocuplas. El alineamiento angular entre el cojinete y el eje es a través de un arreglo de seis estabilizadores que también controlan la posición axial y mantienen alineado al eje con el cojinete. Para el cojinete en estudio se utiliza aceite de turbina ISO VG32 a una presión máxima de 6 bar y caudal volumétrico de 75 l/min. También, se cuenta con un intercambiador de calor para controlar su temperatura. El aceite se suministra al cojinete a través de un puerto situado en la parte inferior de la carcasa del estator y sale a través de las tapas laterales y cámaras de drenaje. Las propiedades físicas del aceite están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \rho &= -0,6616 T + 1056 \quad [kg / m^3] \\
 \mu &= -0,04534 e^{-0,03007 T} \quad [Pa.s] \\
 C_p &= 3,6273 T + 811,75 \quad [J / kgK]
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

donde T [K].

Sistema de carga

Al cojinete se le puede aplicar carga a través de dos fuerzas dinámicas ortogonales y una

estática. Las dinámicas son ejercidas por actuadores hidráulicos en direcciones perpendiculares x e y , como se muestra en la Figura 6.2, mientras que la estática (que se aplica mediante un actuador neumático) opera sólo en la dirección y . La Figura 6.2 muestra un esquema de la disposición de los actuadores sobre el estator, observado desde el extremo no accionado de la instalación de prueba (NDE, por “Non-Drive-End”). Los actuadores hidráulicos se encuentran unidos al estator en la sección media a través de barras esbeltas llamadas “stingers”. La carga máxima que se puede colocar en dirección x es de 4450 N, tanto en compresión como en tensión, mientras que en la dirección y se puede llegar a 4450 N en tensión y a 11.125 N en compresión. Ambos actuadores pueden trabajar con frecuencias de hasta 1000 Hz. La carga estática, F_s , proviene de un actuador neumático y se aplica sobre el estator mediante un cable de acero. Una polea cambia la dirección del cable hasta alinearla con el eje y , mientras que un resorte helicoidal colocado en serie entre el cable y el actuador asegura que la fuerza es invariante ante pequeños desplazamientos del cojinete. Las fuerzas sobre el estator son medidas por celdas de carga conectadas entre los stingers y los actuadores hidráulicos.

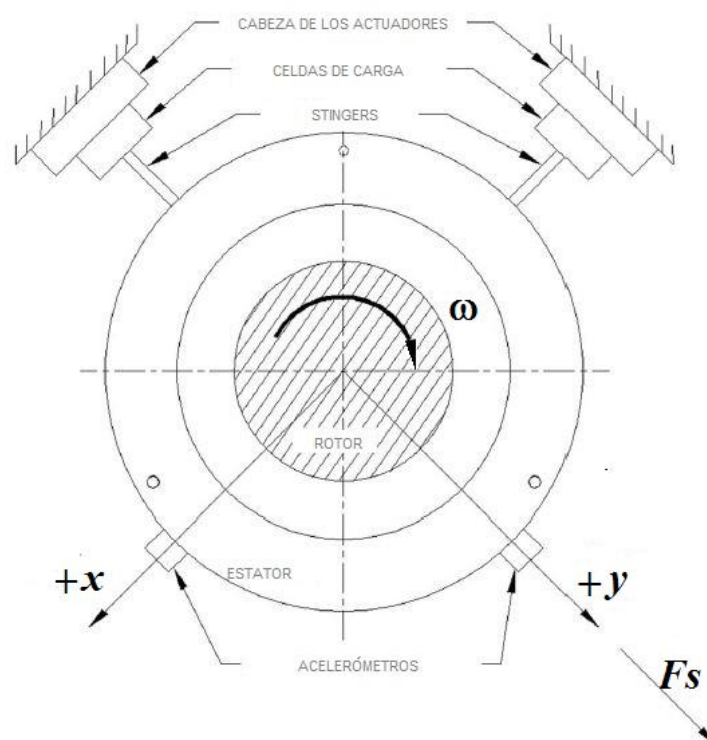


Figura 6.2: Esquema de cargas del banco de ensayo.

La Figura 6.3 muestra el conjunto de estator y sensores, usado en el ensayo de cojinetes. El aceite de lubricación es suministrado a través de un conducto perpendicular a la imagen, de donde fluye hacia una ranura circunferencial ubicada entre el retén y el diámetro exterior del

estator. De allí, orificios radiales dirigen el aceite hacia el espacio entre las zapatas del cojinete (en la imagen se ven como pequeñas entradas centradas en cada borde anterior a cada zapata). Los sellos ubicados a cada lado permiten que el aceite se mueva libremente en la dirección axial. De esta manera el cojinete está operando en la configuración comúnmente llamada “cojinete inundado”.

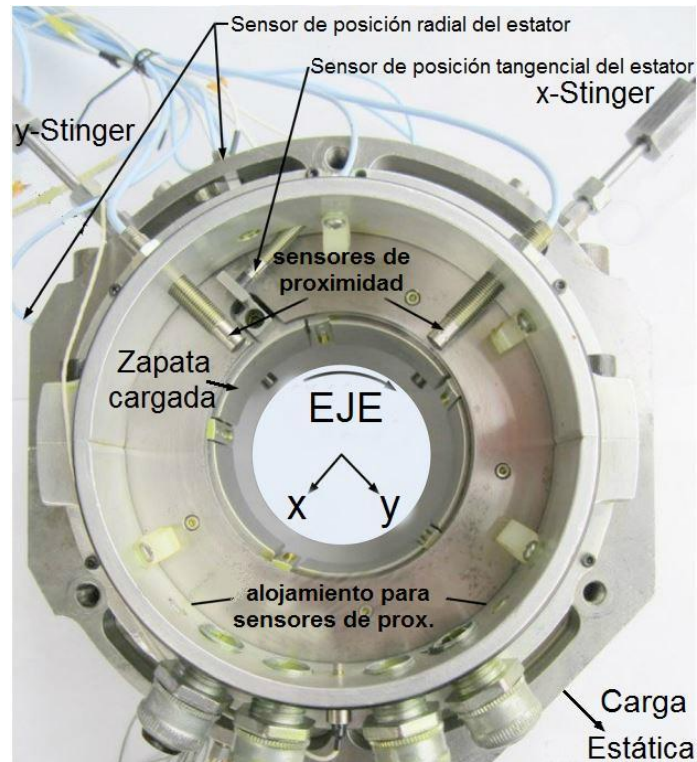


Figura 6.3: Estator con el cojinete instalado.

Instrumentación

La Figura 6.4 esquematiza el estator, que se compone del cojinete de prueba, la carcasa, tapas laterales, y el instrumental. La figura también detalla la ubicación de todas las sondas de medición en las tapas de los extremos y la carcasa, así como la ubicación de los planos de medición. El lado de la turbina y el opuesto se indican como “Drive-End”, DE, “Non-Drive-End”, NDE, respectivamente.

Cuatro sensores de proximidad localizados en las tapas del estator miden su movimiento relativo con el rotor en cada dirección de excitación. Dos son usados en el lado del extremo no accionado y los restantes en el accionado. La medición del estator en estos dos planos paralelos permite verificar el alineamiento del eje.

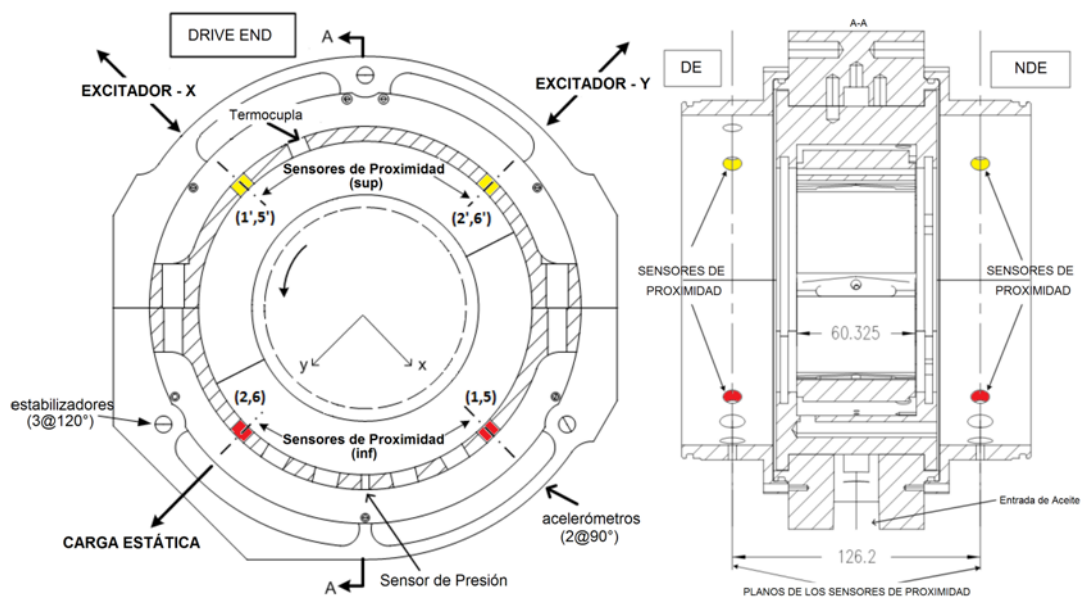


Figura 6.4: Ubicación de los sensores en el estator.

La Figura 6.4 también esquematiza la ubicación de acelerómetros piezoeléctricos que permiten medir las aceleraciones absolutas del estator en las direcciones x e y , sensores de temperatura ubicados en la entrada y salida del aceite, y sensores piezo-resistivos que permiten medir la presión de aceite a la entrada y a la salida del cojinete. El caudal de aceite se mide con un caudalímetro de turbina aguas arriba del cojinete de prueba. El sistema también consta de termocuplas que miden la temperatura sobre las superficies de las zapatas. La Tabla 6.1 resume los parámetros medidos y la instrumentación asociada.

Tabla 6.1: Parámetros medidos en el cojinete de zapatas pivotantes e instrumentos asociados.

Categoría	Parámetro	Instrumento
Dinámica	Fuerzas dinámicas	Celdas de carga
	Movimiento relativo entre estator y rotor	Sensores de movimiento por corrientes de Foucault
	Aceleración del estator	Acelerómetros
Estática	Velocidad del rotor	Tacómetro
	Carga estática	Celdas de carga
	Caudal de aceite	Caudalímetro
	Presión de aceite (entrada y salida)	Sensores piezo-resistivos de presión
	Temperatura (entrada y salida de aceite, y zapatas)	Termocuplas

Cojinete de Prueba

El cojinete de prueba, que se esquematiza en la Figura 6.5, es un cojinete de 5 zapatas pivotantes fabricado por *Orion Corporation*, ahora *John Crane Orion*. Su configuración es de tipo “Load Between Pads” (LBP). Este cojinete fue usado dentro de un programa de ensayos patrocinado por dicha empresa, lo que produjo que los resultados de los ensayos fuesen confidenciales hasta que se decidiera su desclasificación para publicar, luego de comenzar su fabricación en serie a fines del año 2010.

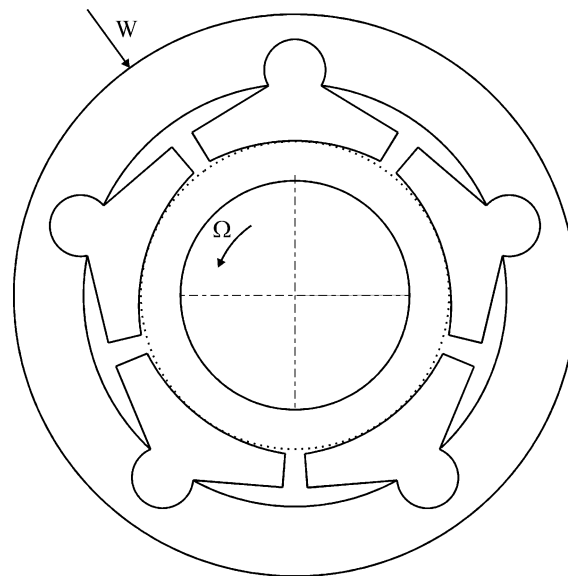


Figura 6.5: Esquema de TPJB de cinco zapatas con configuración LBP.

La Tabla 6.2 lista las características geométricas nominales y operativas del cojinete ensayado. La relación L/D para este cojinete resulta de 0,594. Cada zapata tiene un offset de

Tabla 6.2: Características del cojinete ensayado.

Número de zapatas	5
Configuración	LBP
Longitud del arco de la zapata, θ	$57,87^\circ$
Diámetro del rotor	101,587 mm
Longitud axial de la zapata	60,325 mm
Huelgo de la zapata	0,112 mm
Masa de la zapata	0,44 kg
Lubricante empleado	ISO VG 32
Huelgo del cojinete	0,081 mm
Precarga medida	0,27

50% y está provista de tecnología “Leading Edge Groove” (LEG), como se muestra en la Figura 6.6. La tecnología LEG fue desarrollada por Ball y Byrne (1998) para *Orion Corporation*. Esta consiste en una ranura en forma de cuña diseñada para proporcionar lubricante fresco a la zapata y evitar que el aceite caliente proveniente de la zapata previa sea arrastrado a la película lubricante siguiente.



Figura 6.6: Vistas lateral y frontal de una de las zapatas del cojinete ensayado.

6.1.2. Procedimiento y Condiciones de Ensayo

Una serie de ensayos, realizados con un dado cojinete, se inicia midiendo en frío el huelgo. Esta medida se utiliza para estimar la holgura media del cojinete y proporcionar un límite de posición a la hora de centrar el cojinete para la condición de carga cero.

Cada ensayo requiere fijar la velocidad del rotor, la carga estática, y la temperatura de entrada de aceite que se usarán. Una vez alcanzados esos valores deseados, el estator es excitado mediante una onda pseudo-aleatoria, pre-especificada en las dos direcciones ortogonales x e y , generada por los actuadores hidráulicos. Los datos estáticos, tales como temperaturas y presiones, son registrados automáticamente antes y después de los “batidos”, lo que permite calcular los valores correspondientes al ensayo como los promedios de esas dos condiciones medidas. La onda dinámica pseudo-aleatoria usa frecuencias de 20 a 320 Hz en incrementos de aproximadamente 20 Hz. Las frecuencias de excitación reales están ligeramente desplazadas de los valores nominales con el fin de evitar el ruido de 60 Hz y sus múltiplos.

La amplitud máxima de la fuerza dinámica es de aproximadamente 120 kg_f. Los datos dinámicos tomados durante la prueba incluyen el movimiento relativo en el DE y NDE, la carga dinámica, y la aceleración absoluta del estator. Estos datos son capturados en función del tiempo y luego se transforman al dominio de frecuencia mediante la

Transformada Rápida de Fourier (FFT). A partir de esta información se calculan los parámetros del modelo mediante el procedimiento que se describirá posteriormente.

Condiciones de los ensayos realizados

Las condiciones de ensayo se refieren a los valores contemplados de las variables controladas: velocidad del rotor, carga estática, y temperatura de entrada de aceite y su caudal. Se consideraron cuatro velocidades:

$$\omega \rightarrow 7000 - 10000 - 13000 - 16000 \text{ rpm} \quad (2)$$

y seis unidades de carga unitaria estática a cada velocidad:

$$\text{carga} \rightarrow 0 - 345 - 1034 - 1723 - 2413 - 3101 \text{ kPa} \quad (3)$$

lo que determina un conjunto de 24 condiciones de ensayo. Respecto del caudal de aceite, éste se mantiene constante en todos los ensayos en 75 L/min. La temperatura de entrada de aceite también se mantuvo constante, en 43,3°C.

Los valores antes listados son los nominales, es decir, los deseados. Los resultados y los cálculos se refieren a ellos, ya que los valores de las variables medidos en los ensayos quedaron dentro de márgenes de error estrechos de los nominales. Por ejemplo, la Tabla 6.3 muestra la temperatura de entrada nominal de aceite y su valor medio medido en los ensayos. La incertidumbre se determina mediante el procedimiento propio del TurboLab descrito por Kulhanek (Kulhanek, 2010).

Tabla 6.3: Temperatura nominal de entrada de aceite y temperatura media de entrada medida.

Temperatura de entrada, °C		
Nominal	Medida	Incertidumbre
43.3	43.7	0.4

A partir de las condiciones anteriores, las dimensiones del cojinete y las propiedades del aceite se calculan los parámetros representativos de cada ensayo, tal como:

$$U = 2\pi RN \quad , \quad Re = \frac{\rho UR}{\mu} \quad , \quad P_p = \frac{F}{2RL} \quad , \quad S = \frac{\mu U}{P_p R} \left(\frac{R}{c} \right)^2 \quad (4)$$

6.1.3. Caracterización Estática

Las características buscadas en un ensayo estático de TPJB incluyen el huelgo del cojinete, la excentricidad, los ángulos de posición, las temperaturas en las superficies de las zapatas y el coeficiente de rigidez estática, entre otras. Cabe señalar que en el caso del banco de ensayo utilizado, no se cuenta con un sistema de medición de torque, por lo que no se puede reportar la fuerza de fricción.

A continuación se presenta el cálculo del huelgo, que es el primer paso en el estudio del TPJB en condiciones estáticas. Hecho este cálculo, se procede fijando la velocidad del rotor, la carga estática y la temperatura y caudal de entrada de aceite de acuerdo a las condiciones de operación presentadas en la Sección 1.2, y midiendo la posición relativa de los centros de rotor y cojinete (con lo que se calculan las excentricidades del cojinete respecto del rotor en ambas direcciones generales x e y , y el ángulo de posición) y las temperaturas en las superficies de las zapatas. Cálculos que se presentan en los apartados subsiguientes. La Sección termina mostrando el cálculo del coeficiente de rigidez estática.

Huelgo

El huelgo se determina en un ensayo de precesión, lento y a una temperatura dada. Este ensayo se denomina “en frío” cuando se usa temperatura ambiente. En él, el cojinete se desplaza hasta hacer contacto con el rotor (mediante los excitadores hidráulicos utilizados para la prueba dinámica) con una fuerza que gira a aproximadamente 0,2 Hz, registrando durante el proceso la posición mediante los sensores de proximidad. Dado el diseño del TPJB, los desplazamientos registrados corresponden a un huelgo con forma de pentágono. La holgura de un cojinete radial equivalente se calcula trazando un círculo cuyo radio es el valor promedio de los desplazamientos hasta los centros de los cinco lados del pentágono. La Figura 6.7 muestra una medición de la holgura del cojinete y el círculo correspondiente de huelgo equivalente.

Para la determinación del huelgo en frío, se realizaron seis ensayos como el descrito. El cálculo del valor para el huelgo equivalente, c , del cojinete se hizo promediando los resultados de todos ellos. El motivo por el cual se hacen varios ensayos es porque esta medición se ve afectada por la calidad de la alineación del sistema cojinete-rotor. La Figura 6.8 muestra el promedio de las mediciones efectuadas y el ajuste correspondiente, que resulta en el huelgo equivalente de 0,081 mm que se lista en la Tabla 6.2.

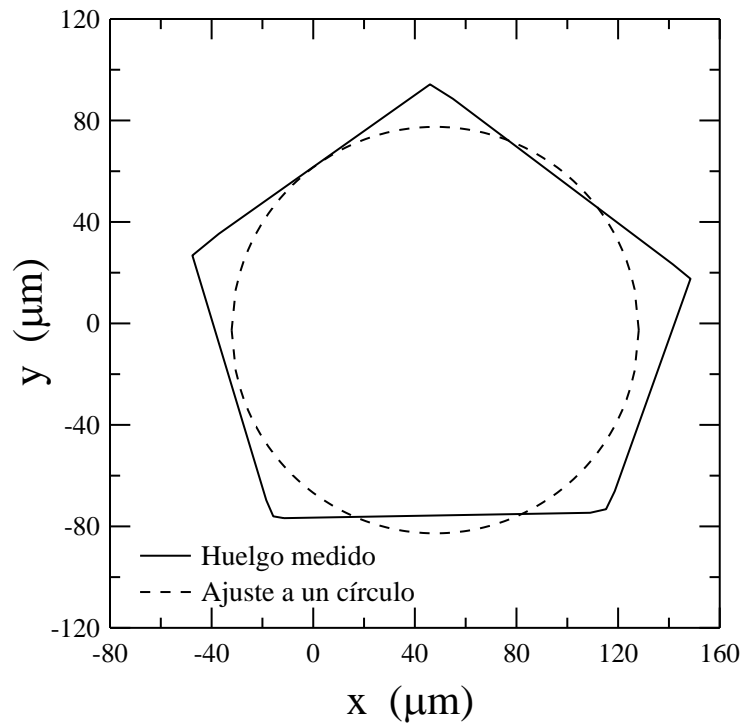


Figura 6.7: Resultado de un ensayo de medición de huelgo y ajuste a un cojinete radial equivalente.

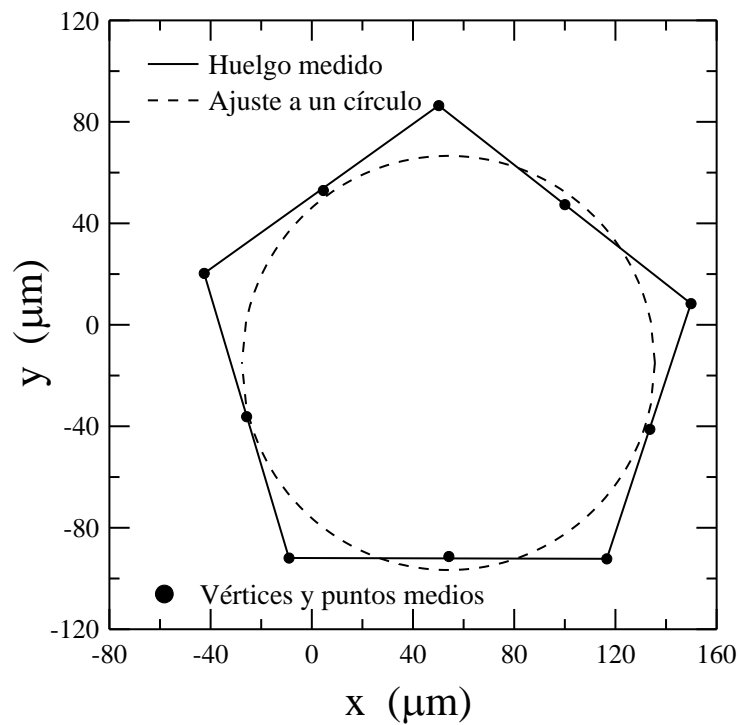


Figura 6.8: Huelgo medido en el cojinete y curva de ajuste.

Excentricidad y Ángulo

La Figura 6.9 muestra las excentricidades relativas ($\eta=e/c$) calculadas a partir de las posiciones medidas del rotor, organizadas por velocidad del rotor en cada ensayo. A cada velocidad se ensayaron seis condiciones de carga estática (listadas en la Ec. (3)) que

dieron lugar a las seis mediciones que se muestran en la Figura 6.9 para cada velocidad. Cerca del origen se tiene carga nula, mientras que el punto más lejano en cada caso corresponde a la medición a 3101 kPa.

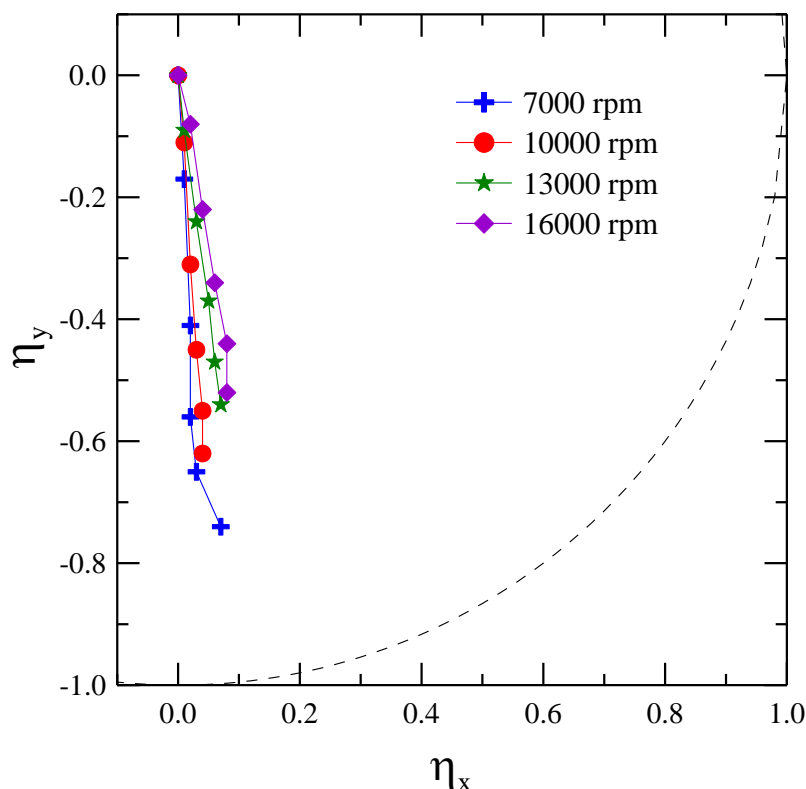


Figura 6.9: Excentricidades relativas medidas para distintas condiciones de ensayo.

Puede apreciarse que el ángulo de desplazamiento del rotor (e_x/e_y) es pequeño, indicando que las reacciones cruzadas del cojinete también lo son. Asimismo, se aprecia que a mayor carga estática, mayor es el desplazamiento global, y que a mayor velocidad de rotación, mayor es el ángulo. El ángulo máximo es de $\sim 10^\circ$ para 16000 rpm.

La Figura 6.10, por su parte, muestra la excentricidad relativa medida, con $e=(e_x^2+e_y^2)^{1/2}$, en función del Número de Sommerfeld (ver Ec. (4)). Cada punto indica una condición de ensayo distinta (carga estática - velocidad). Puede apreciarse que a medida que el número de Sommerfeld disminuye (ya sea por mantener la velocidad aumentando la carga, o por disminuir la velocidad de rotación manteniendo la carga, dado que $S \sim U/F_s$) aumenta la excentricidad. La relación es prácticamente hiperbólica. De hecho, la curva de ajuste de los valores calculados a partir de las mediciones es $S \approx 0,224 \eta^{-1,275}$.

Por otra parte, iguales valores de S producen iguales excentricidades, independientemente del estado de carga y velocidad. Esto concuerda con las bases de la Ecuación de Reynolds, según la cual la presión característica queda determinada por una variante de

S . Asimismo, como se viera en el Capítulo 3, tanto para el cojinete infinitamente corto como para el infinitamente largo, la excentricidad depende sólo de este parámetro, así que es de esperar sea igual para otras relaciones L/D .

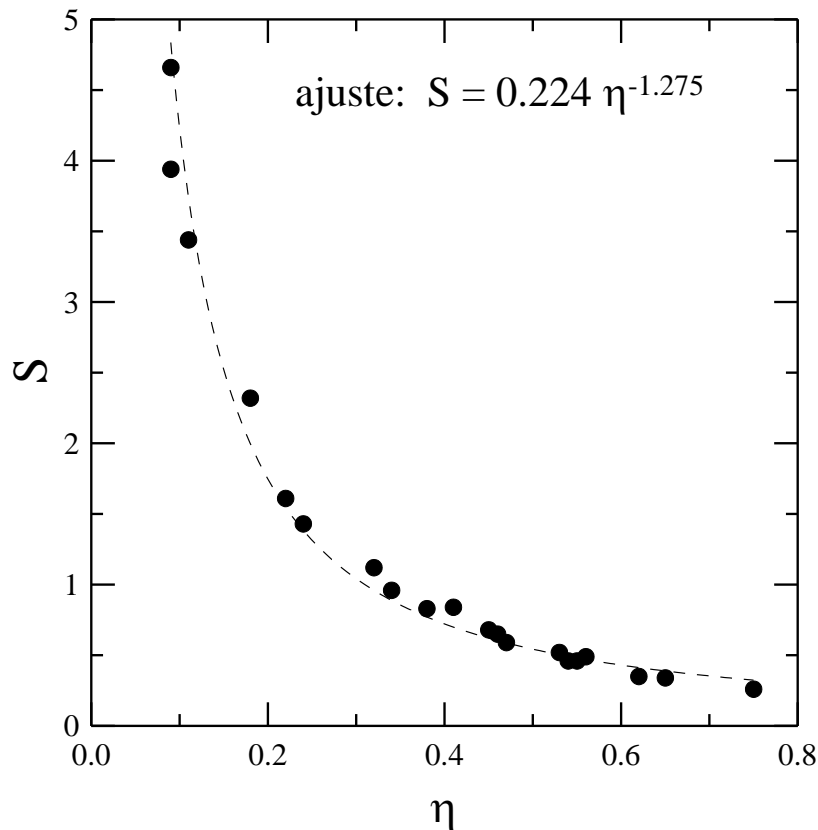


Figura 6.10: Excentricidad en función del número de Sommerfeld para todos los ensayos realizados.

Temperatura en las Zapatas

Las temperaturas de las zapatas se miden con termocuplas incrustadas justo debajo de la superficie de metal blando. Estas mediciones proporcionan una idea de las temperaturas en la interfase cojinete-lubricante. La Figura 6.11 muestra las posiciones circunferenciales en que se ubican las veinte termocuplas, todas centradas axialmente en el ancho del cojinete. Las termocuplas posicionadas en 56, 128 y 200° se encuentran en un radio un poco mayor que las otras (más lejos de las superficies). Las zapatas cargadas son las identificadas con los números 1 y 2.

La Figura 6.12 muestra las temperaturas medidas con las termocuplas en los ensayos a 16000 rpm usando los diversos estados de carga. Como se puede ver, a cargas bajas, la temperatura de la superficie de las zapatas aumenta en la dirección de rotación, registrándose el valor máximo cerca del borde de salida de cada zapata. Esto sigue siendo así a cargas altas, excepto en la número 2, donde la temperatura máxima se produce

aproximadamente al 75% del largo de la misma.

Además, se ve que la temperatura de las zapatas cargadas, 1 y 2, aumenta con el aumento de la carga, mientras que la de la zapata descargada 4 disminuye. En el caso de las zapatas descargadas 3 y 5, que proporcionan apoyo principalmente en la dirección sin carga, éstas tienen temperaturas que muestran un cambio insignificante con el aumento de la carga. El aumento máximo de temperatura lo sufre la zapata cargada 2, siendo casi del 100% entre la temperatura de entrada y la máxima (aprox. al 75% de su longitud) para las mayores cargas. Esta figura también muestra que las tres termocuplas que se colocaron más lejos de la superficie, en las zapatas 1, 2 y 3, miden valores menores a los superficiales.

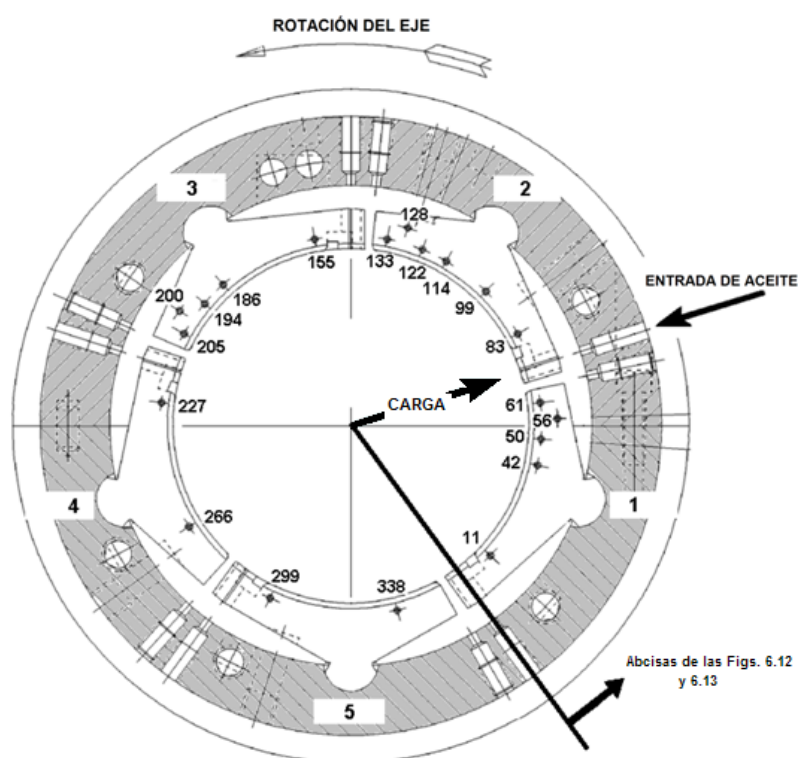


Figura 6.11: Esquema mostrando la posición angular de las termocuplas de las zapatas.

Las tendencias observadas en la Figura 6.12 para la máxima velocidad de rotación son representativas de todas las demás velocidades de ensayo. Similarmente, la Figura 6.13 presenta las temperaturas medidas para la condición de carga estática máxima, 3.101 kPa, a las diferentes velocidades de rotación. Como es de esperar, en una dada posición, la temperatura aumenta a medida que aumenta la velocidad de rotación. Esto es consistente con el hecho de que aumentan las derivadas del perfil de velocidad de la película lubricante, aumentando también la disipación. Además, nuevamente las zapatas cargadas

son las que experimentan las temperaturas más altas, y la zapata 2 experimenta su máxima temperatura antes del final, a ~75% de su longitud. Este conjunto de datos parece mostrar que lo mismo estaría ocurriendo con la zapata 1, que presentaría su máxima temperatura antes del borde de salida. Estas tendencias se observan también para las otras cargas ensayadas.

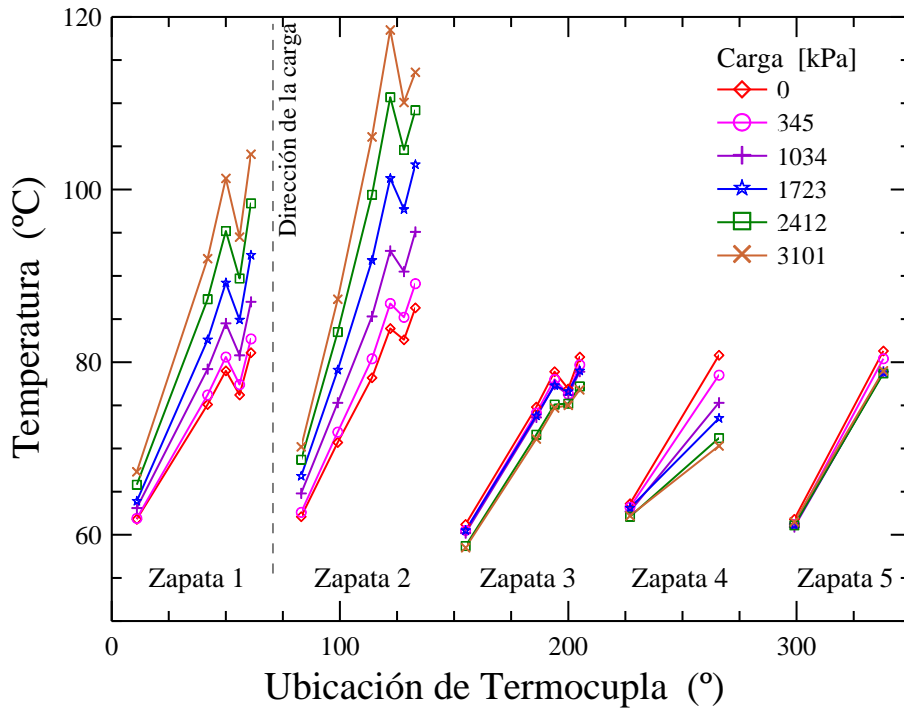


Figura 6.12: Temperatura medidas en las zapatas en los ensayos a 16000 rpm.

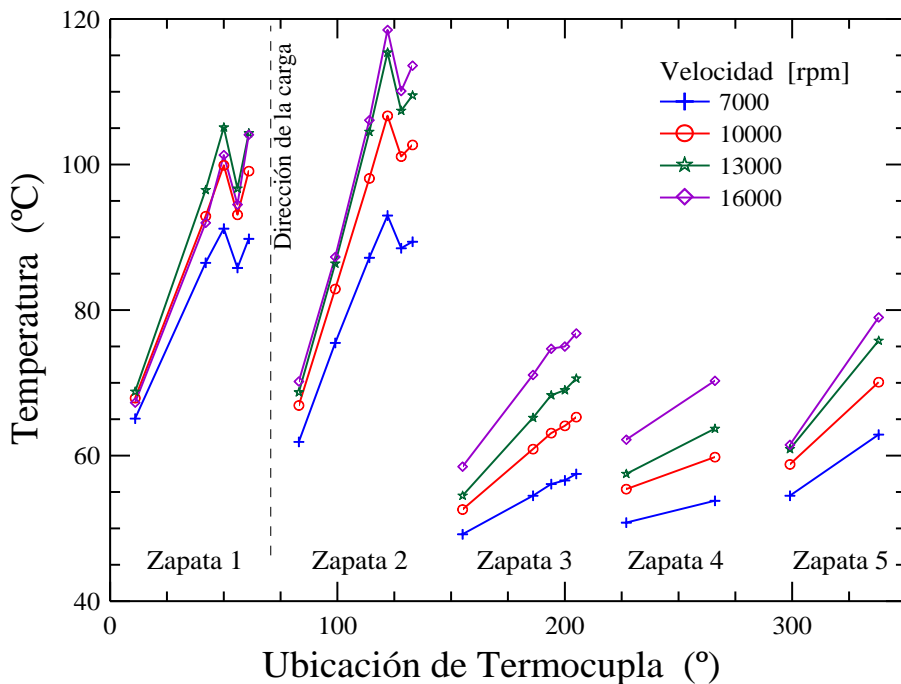


Figura 6.13: Temperaturas medidas en las zapatas en los ensayos con carga estática de 3.101 kPa.

Coefficiente de Rigidez Estática

El coeficiente de rigidez estática corresponde a la variación de la carga respecto de la excentricidad para una condición estable dada. Se lo puede aproximar como el cambio de la fuerza estática, ΔF_s , para un cambio en la excentricidad, Δe_y , evaluada en una condición de estado estacionario. Esto es:

$$k_s = \left(\frac{\partial F_s}{\partial e_y} \right) \approx \left(\frac{\Delta F_s}{\Delta e_y} \right) \quad (5)$$

Este parámetro sirve de base para comparar con el coeficiente de rigidez dinámica medido en la dirección de la carga, k_{yy} .

La Figura 6.14 muestra los valores de k_s calculados a partir de las fuerzas estáticas aplicadas y las excentricidades medidas en cada una de las condiciones ensayadas.

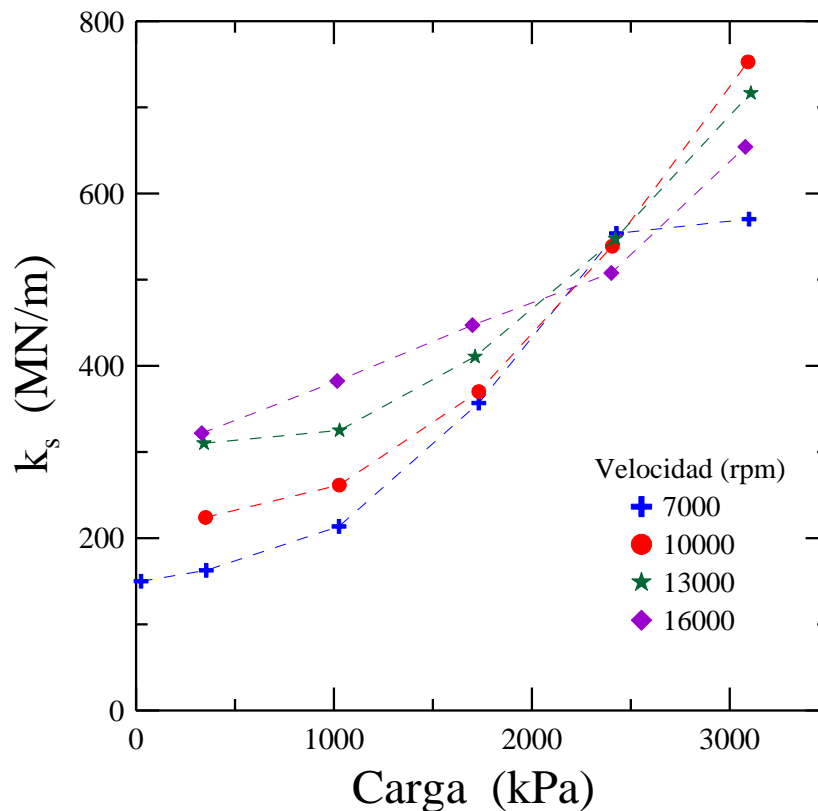


Figura 6.14: Coeficiente de rigidez estático en función de la carga aplicada.

Como se puede observar, cuando la carga estática es pequeña, el coeficiente de rigidez aumenta a medida que aumenta la velocidad de giro del rotor. Dado que k_s mide la velocidad de cambio de la carga con la excentricidad e_y , este comportamiento señala que, para cargas pequeñas, un cambio en su valor produce un menor desplazamiento del rotor

cuanto mayor es la velocidad de giro. Por otro lado, a velocidades altas la situación es la inversa, es decir, el coeficiente de rigidez disminuye a medida que aumenta la velocidad de giro del rotor. Esto significa que un cambio en el valor de la carga cuando ésta es grande produce un desplazamiento mayor del rotor cuanto mayor es la velocidad de giro.

La misma conclusión puede obtenerse de analizar la Figura 6.10 considerando, por ejemplo que a menor carga (mayor S) se tiene menor excentricidad y viceversa.

6.1.4. Caracterización Dinámica de Cojinetes. Fundamentos

El comportamiento dinámico de cojinetes se caracteriza mediante coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento. El cálculo de estos coeficientes resulta esencial en la predicción de la estabilidad o la respuesta de un sistema complejo, como turbomáquinas, grandes ejes motrices, etc. (Childs, 1993).

Para empezar, la ecuación de movimiento de la masa del estator, M_s , se puede escribir mediante la aplicación de la segunda ley de Newton en las direcciones x e y , como:

$$M_s \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{y}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{bx} \\ f_{by} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

donde \ddot{x}_s e \ddot{y}_s son las aceleraciones absolutas del estator, f_x y f_y son las fuerzas de excitación, y f_{bx} y f_{by} las fuerzas de reacción del cojinete. Para movimientos alrededor de un punto de equilibrio, estas fuerzas de reacción son usualmente presentadas mediante una de las siguientes formas:

a) modelo de rigidez y amortiguamiento (KC, por sus siglas en inglés)

$$-\begin{Bmatrix} f_{bx} \\ f_{by} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

donde los elementos k_{ij} y c_{ij} son los coeficientes de rigidez y amortiguamiento, respectivamente, que pueden depender o no de la frecuencia de excitación de la carga.

b) modelo de rigidez, amortiguamiento y masa virtual (KCM, por sus siglas en inglés)

$$-\begin{Bmatrix} f_{bx} \\ f_{by} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

donde se agregan los coeficientes m_{ij} de masas virtuales que se calculan al ajustar los resultados al modelo y que pueden depender de la frecuencia de excitación. Su presencia se justifica dado que, dependiendo de las condiciones, el sistema puede comportarse como si

tuviera una masa distinta de la que en realidad tiene, por la acción de efectos dinámicos no lineales.

Los coeficientes de las diagonales de las matrices, k_{xx} , k_{yy} , c_{xx} y c_{yy} , en las dos ecuaciones anteriores son comúnmente referidos como “coeficientes directos de elasticidad y amortiguamiento”, y dan lugar a fuerzas que se oponen directamente a los desplazamientos o a sus velocidades. En cambio, los coeficientes k_{xy} , k_{yx} , c_{xy} y c_{yx} , comúnmente denominados “coeficientes de acoplamiento cruzado”, se relacionan con los desplazamientos y velocidades perpendiculares a la aplicación de la carga. Cuando k_{xy} y k_{yx} son de signos opuestos el acoplamiento cruzado se vuelve desestabilizante, produciendo fuerzas que agregan energía a la órbita del eje, y puede resultar en amplitudes muy grandes de desplazamiento. En ese caso, puede suceder que el cojinete no produzca suficiente disipación directa para contrarrestar este comportamiento.

En el caso particular de los TPJBs, estos son inherentemente estables porque están compuestos por múltiples zapatas que están libres de pivotar de tal manera que cada una tiene un momento neto igual a cero; esto reduce o elimina las reacciones que desestabilizan el eje. Si el pivote permite que la zapata gire libremente, entonces la reacción debe ser colineal respecto del desplazamiento del eje y de este manera se elimina el acoplamiento cruzado.

El análisis dinámico del TPJB ensayado se realiza empleando el modelo KCM. Para ello, se reúnen las Ecs. (6) y (8), que se reordenan en:

$$\begin{Bmatrix} f_x - M_s \ddot{x}_s \\ f_y - M_s \ddot{y}_s \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Los valores de fuerza, masa, aceleración y desplazamiento se miden directamente a través de la instrumentación, quedando como incógnitas las matrices de coeficientes. Sin embargo, el cálculo de sus valores no se hace en el dominio temporal, sino en el de frecuencia, lo que requiere la aplicación de la transformada de Fourier (FFT) a la Ec. (9). Ese proceso da lugar a la expresión (Childs, 1993):

$$\begin{Bmatrix} F_x - M_s A_x \\ F_y - M_s A_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} \quad (10)$$

donde las funciones F_i , A_i , y D_i son las transformadas de Fourier de la fuerza de excitación, la aceleración absoluta del estator y el movimiento de este respecto del rotor para las direcciones x e y . H_{ij} es la rigidez dinámica compleja que relaciona la fuerza en la dirección “ i ” en respuesta a un movimiento en la dirección “ j ”. Estas funciones de rigidez dinámica quedan relacionadas con los coeficientes rotodinámicos mediante la ecuación:

$$H_{ij} = k_{ij} - \Omega^2 m_{ij} + j(\Omega c_{ij}) \quad (11)$$

donde Ω es la frecuencia y m_{ij} son los coeficientes de masa virtual. Las componentes real e imaginaria de la rigidez dinámica son:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(H_{ij}) &= k_{ij} - \Omega^2 m_{ij} \\ \operatorname{Im}(H_{ij}) &= \Omega c_{ij} \end{aligned} \quad (12)$$

Esta ecuación muestra que los coeficientes de rigidez y de masa virtual pueden estimarse mediante el ajuste de $\operatorname{Re}(H_{ij})$ con una función cuadrática de Ω . Los coeficientes de amortiguamiento, por otro lado, se estiman a partir de la pendiente de los valores de $\operatorname{Im}(H_{ij})$ en función de Ω .

La Eq. (10) proporciona dos ecuaciones para las cuatro incógnitas H_{xx} , H_{xy} , H_{yx} y H_{yy} . Sin embargo, se obtienen cuatro ecuaciones si se excita el estator en la direcciones x e y mientras se mide la respuesta en ambas direcciones, esto es:

$$\begin{bmatrix} F_{xx} - M_s A_{xx} & F_{xy} - M_s A_{xy} \\ F_{yx} - M_s A_{yx} & F_{yy} - M_s A_{yy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Línea de Base de la Rigidez Dinámica

Como es de esperar, las funciones de rigidez dinámica medidas durante los ensayos no sólo contemplan la rigidez y el amortiguamiento de la película de fluido del cojinete, sino también la rigidez y amortiguamiento de los estabilizadores del estator, la instrumentación, mangueras, etc. Para calcular las que corresponden a todos los accesorios del estator, se realiza una prueba dinámica de línea de base o en seco. Esta se efectúa a velocidad cero sin aceite lubricante en el cojinete. De esta manera, se busca medir la rigidez dinámica de los accesorios del estator solos, sin el efecto del fluido lubricante. La prueba de línea de base implica aplicar las mismas excitaciones usadas en las pruebas de cojinete pero con menores amplitudes de las fuerzas. La rigidez dinámica de la película de fluido se obtiene, entonces, restando los resultados de las pruebas de línea de base a los calculados en los ensayos de cojinete lubricado. Típicamente las mediciones en seco son un orden de magnitud menor que las que consideran al fluido.

6.1.5. Resultados Dinámicos

El estudio del comportamiento dinámico del TPJB implica determinar los cuatro

coeficientes de rigidez dinámica, k_{ij} , los cuatro de amortiguamiento, c_{ij} , y las cuatro masas virtuales, m_{ij} , por ajuste de la Ec. (12) a los valores de los coeficientes H_{ij} . Estos coeficientes se obtienen de resolver la Ec. (13) luego de haber calculado las transformadas de Fourier de la fuerza de excitación, la aceleración absoluta del estator y el movimiento de éste respecto del rotor para las direcciones x e y , medidas en función del tiempo. Como se comentara en el apartado anterior, estos cálculos deben ser precedidos por una prueba dinámica de línea de base que se realiza sin lubricante y permite calcular las funciones de rigidez dinámica que corresponden a los accesorios del estator.

Experimentalmente, los cuatro coeficientes H_{ij} correspondientes a una excitación, se obtienen de 32 excitaciones repetidas que se promedian en el dominio de la frecuencia. Por otra parte, para cada condición experimental se realizan 10 batidos consecutivos en las direcciones x e y . Esto proporciona un total de 320 excitaciones aplicadas en cada dirección en cada condición de prueba de estado estacionario. Los coeficientes se calculan por ajuste de las ecuaciones antes listadas a los datos medidos usando el software XLTFPBrg descrito por Childs y colaboradores (Rouvas y Childs, 1993; Childs y Hale, 1994). Este software es un módulo del paquete XLRTC², desarrollado en el TurboLab. Asimismo, las incertidumbres asociadas a las mediciones se calculan de acuerdo con el procedimiento implementado en el sistema de adquisición de datos del banco de ensayo que detalla Kulhanek (2010).

A continuación se presentan los resultados de la caracterización dinámica del TPJB, obtenidos usando las condiciones de operación presentadas en la Sección 1.2. En primer lugar se presenta la línea de base de rigidez, luego las funciones de rigidez dinámica compleja, y por último los coeficientes de amortiguamiento, rigidez y de masa virtual calculados. Se termina la Sección comparando la rigidez estática con la dinámica, y con un apartado sobre contribuciones específicas realizadas, más allá del trabajo experimental y de análisis en sí mismo.

Línea de Base de Rigidez Dinámica

La Figura 6.15 muestra los resultados de las pruebas de referencia para determinar la línea de base del cojinete ensayado. Se presentan las partes real e imaginaria de los coeficientes H_{ij} obtenidos a velocidad cero sin aceite lubricante en el cojinete. Estos resultados se restan a las pruebas de rigidez dinámica para poder aislar la respuesta dinámica de los accesorios del estator de la película de fluido. El rango de frecuencias

cubierto va de 20 a 320 Hz, es decir, las mismas excitaciones que se producen en los test con fluido, con la salvedad de que se usan valores de fuerza menores para este test a fin de evitar el contacto metal-metal y un posible daño en el cojinete.

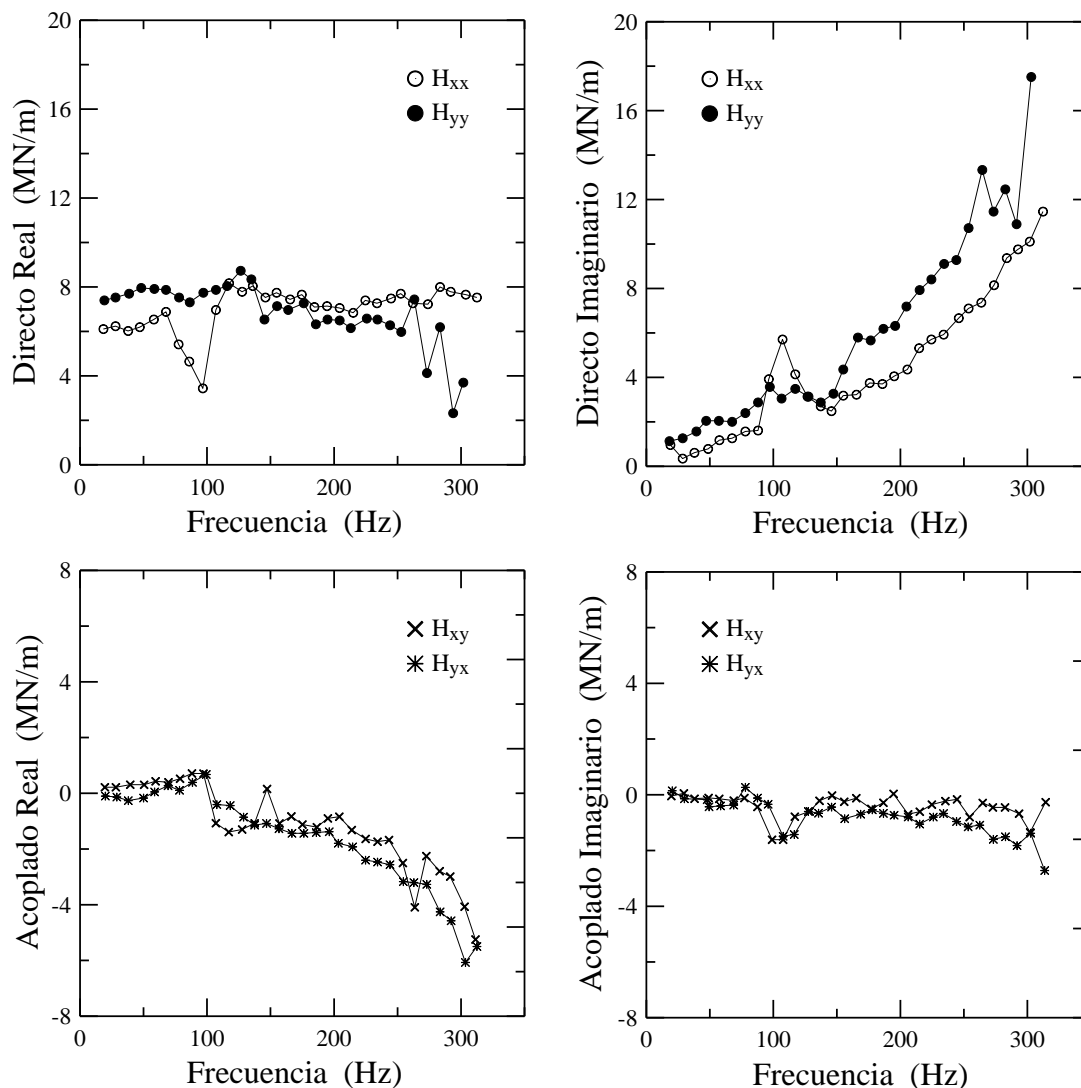


Figura 6.15: Línea de base de rigidez dinámica. Partes real (a y c) e imaginaria (b y d) de los cuatro coeficientes H_{ij} (dos directos y dos cruzados) en función de la frecuencia.

Rigidez Dinámica

Como ya se comentara, los coeficientes rotodinámicos se calculan a partir de las funciones de rigidez dinámica compleja H_{ij} obtenidas en el dominio de frecuencia. A modo de ejemplo, en esta Sección se presentan los valores medidos de rigidez dinámica compleja para el cojinete ensayado en las dos condiciones extremas, es decir, a velocidad del rotor y carga estática mínimas (7000 rpm y sin carga) y máximas (16000 rpm y 3.101 kPa).

En primera instancia, la Figura 6.16 presenta las partes real e imaginaria de los coeficientes H_{ij} obtenidos sin carga estática a 7000 rpm. En particular, la Figura 6.16(a) muestra las componentes reales de las funciones de rigidez dinámica directas, $\text{Re}(H_{xx})$ y $\text{Re}(H_{yy})$. Ambas son relativamente constantes con la frecuencia de excitación, Ω , siendo $\text{Re}(H_{yy})$ levemente mayor que $\text{Re}(H_{xx})$. Las componentes reales de las funciones de acoplamiento cruzado, $\text{Re}(H_{xy})$ y $\text{Re}(H_{yx})$, también presentan escasa dependencia con la frecuencia aunque en este caso se observa una leve disminución gradual con Ω (ver Figura 6.16(c)). Además, se observa que $\text{Re}(H_{xy})$ es prácticamente nula, y que $\text{Re}(H_{yx})$ es más grande.

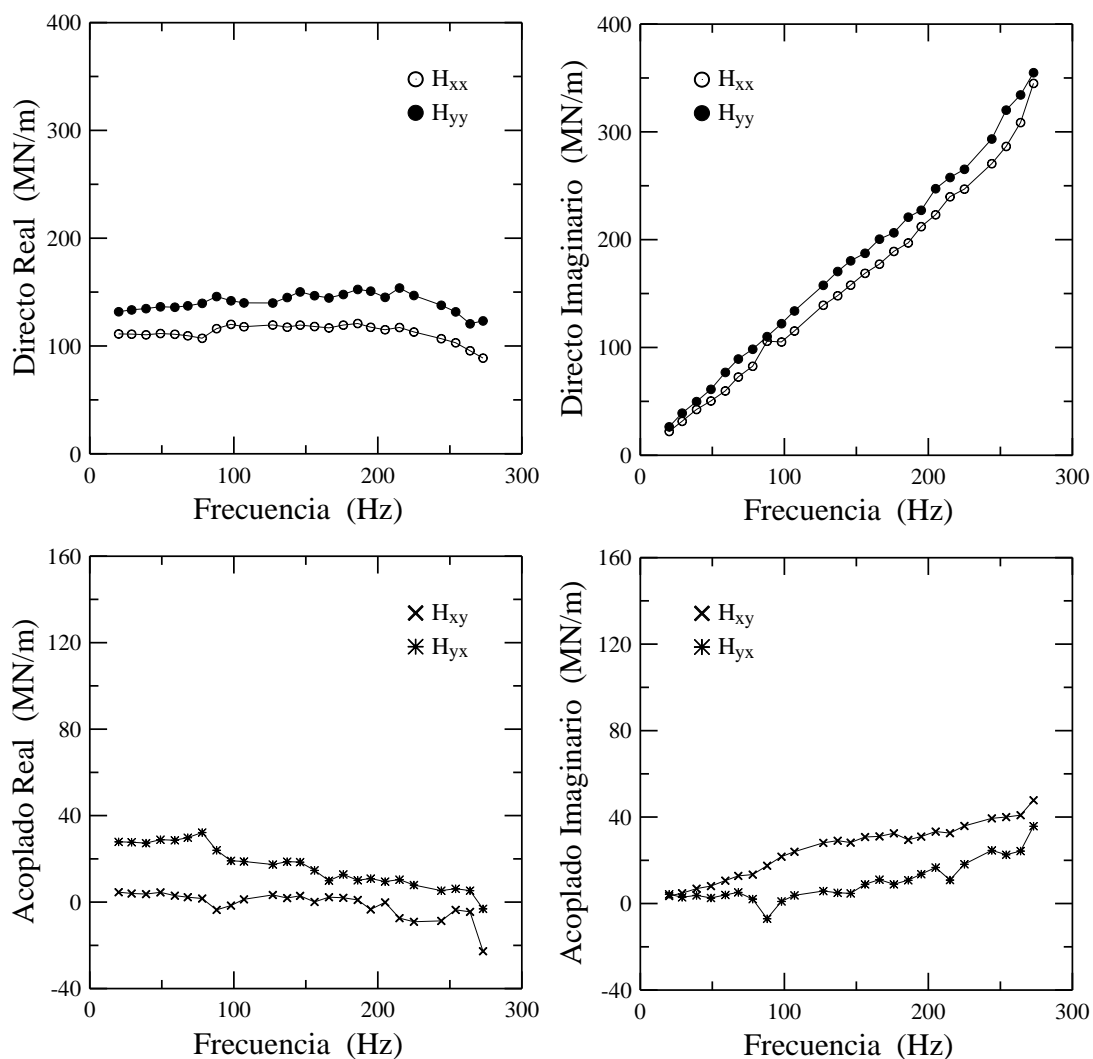


Figura 6.16: Rigidez dinámica en función de la frecuencia medidos usando 7000 rpm y sin carga estática. Partes real e imaginaria de los cuatro coeficientes H_{ij} .

En cuanto a las componentes imaginarias (ver Figuras 6.16(b) y (d)), ambas, las funciones de rigidez dinámica directas y las de acoplamiento cruzado aumentan

linealmente con el aumento de la frecuencia, siendo mayor la dependencia con Ω de $\text{Im}(H_{xx})$ e $\text{Im}(H_{yy})$. Esto señala que los cuatro coeficientes de amortiguamiento son positivos e independientes de la frecuencia (ver Ec. (12)). Además, se observa que no hay diferencia considerable entre c_{xx} y c_{yy} ya que $\text{Im}(H_{xx})$ e $\text{Im}(H_{yy})$ son casi iguales, y que los coeficientes de amortiguamiento cruzados son considerablemente menores que los directos (siendo c_{xy} más grande que c_{yx} , ya que $\text{Im}(H_{xy})$ es mayor que $\text{Im}(H_{yx})$).

De forma equivalente, la Figura 6.17 presenta las partes real e imaginaria de los coeficientes H_{ij} obtenidos a la velocidad de rotación y carga estática máximas (16000 rpm y 3101 kPa). Los resultados presentados en la Figura 6.17(a) muestran que la parte real de la rigidez dinámica directa, tanto $\text{Re}(H_{xx})$ como $\text{Re}(H_{yy})$, presentan un leve aumento con Ω , siendo mayor la componente en la dirección de la carga, $\text{Re}(H_{yy})$. El ajuste de estos

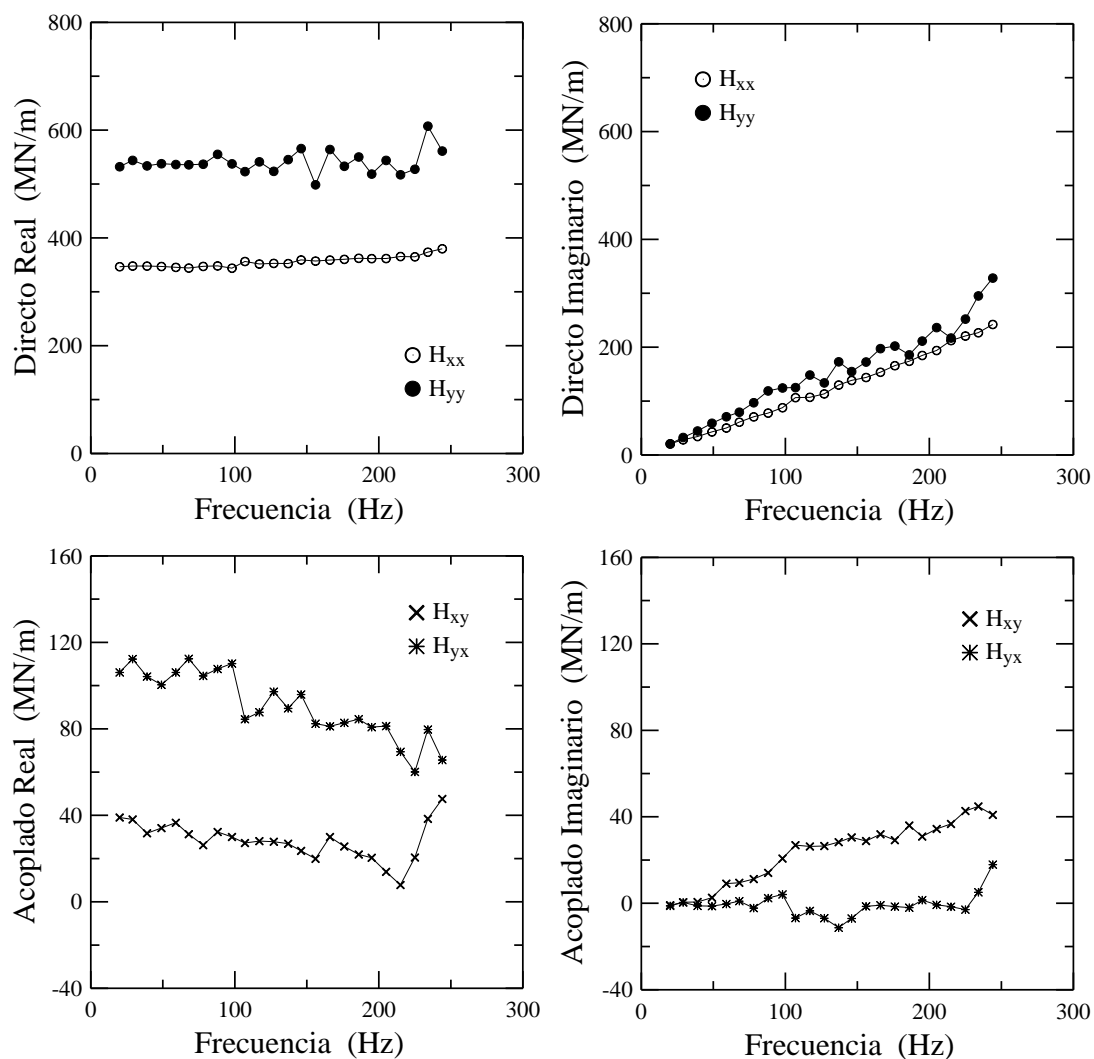


Figura 6.17: Rigidez dinámica en función de la frecuencia medidos usando 16000 rpm y 3101 kPa de carga estática. Partes real e imaginaria de los cuatro coeficientes H_{ij} .

datos a la Ec. (12), $\text{Re}(H_{ij}) = k_{ij} - \Omega^2 m_{ij}$, daría coeficientes de rigidez directos positivos y coeficientes de masa virtual directos pequeños y probablemente negativos. Por su parte, $\text{Re}(H_{yx})$ y $\text{Re}(H_{xy})$ son más chicos que los directos y decrecen levemente con la frecuencia (ver Figura 6.17(c)). Los coeficientes de rigidez cruzados serían, entonces, positivos (con k_{yx} mayor que k_{xy}) y las masas virtuales pequeñas y positivas.

La Figura 6.17(b) proporciona el componente imaginario de la rigidez dinámica compleja directa. Ambas, $\text{Im}(H_{xx})$ e $\text{Im}(H_{yy})$ aumentan linealmente con Ω . Los coeficientes de amortiguamiento serían entonces independientes de la frecuencia, con c_{yy} ligeramente mayor que c_{xx} . En cuanto a los componentes cruzados, los datos de la Figura 6.17(d) muestran que $\text{Im}(H_{xy})$ es pequeño y crece linealmente con Ω mientras que $\text{Im}(H_{yx})$ es prácticamente nulo. El coeficiente c_{xy} sería, por lo tanto, positivo e independiente de la frecuencia mientras que c_{yx} sería nulo.

Los resultados presentados en las Figuras 6.16 y 6.17 anteriores son cualitativamente similares tanto para la componente real como la imaginaria de las cuatro funciones H_{ij} . Lo mismo ocurre con los datos obtenidos con las cargas y velocidades intermedias. Esto quedará reflejado en los apartados siguientes, al analizar los coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento calculados a partir de las funciones complejas.

Coefficientes de Rigidez

Los coeficientes experimentales de rigidez se estiman a partir del ajuste por mínimos cuadrados de la parte real de la rigidez dinámica a una expresión parabólica, esto es:

$$\text{Re}(H_{ij}) = k_{ij} - \Omega^2 M_{ij} \quad (14)$$

La Figura 6.18 presenta los coeficientes de rigidez directos, k_{xx} y k_{yy} , en función de la carga estática para las cuatro velocidades ensayadas. Como se puede observar, los dos coeficientes aumentan con la carga estática, siendo k_{yy} siempre mayor que k_{xx} . Además, para una dada carga, k_{xx} aumenta con el aumento de la velocidad del rotor, mientras que k_{yy} se hace mayor a medida que aumenta la velocidad de giro para cargas ligeras, pero disminuye a cargas elevadas. Se observa también que, dentro de las condiciones ensayadas, k_{yy} muestra mayor dependencia con respecto a la carga estática que respecto de la velocidad del rotor. Este efecto puede deberse a que la carga actúa entre dos zapatas en la dirección y . Para una carga ligera, las zapatas son capaces de moverse libremente, mostrando el aumento lógico de rigidez a medida que aumentan su capacidad portante. No

obstante, para cargas altas, el rotor tiende a “encastrarse” entre ambas zapatas, limitando su capacidad de girar libremente. Las zapatas deben lograr capacidad portante más a costa de excentricidad del rotor que del giro propio, tendiendo a conformar un único arco de cojinete conformado por ambas, resultando en un sistema más elástico. Este fenómeno se acentúa a mayores velocidades.

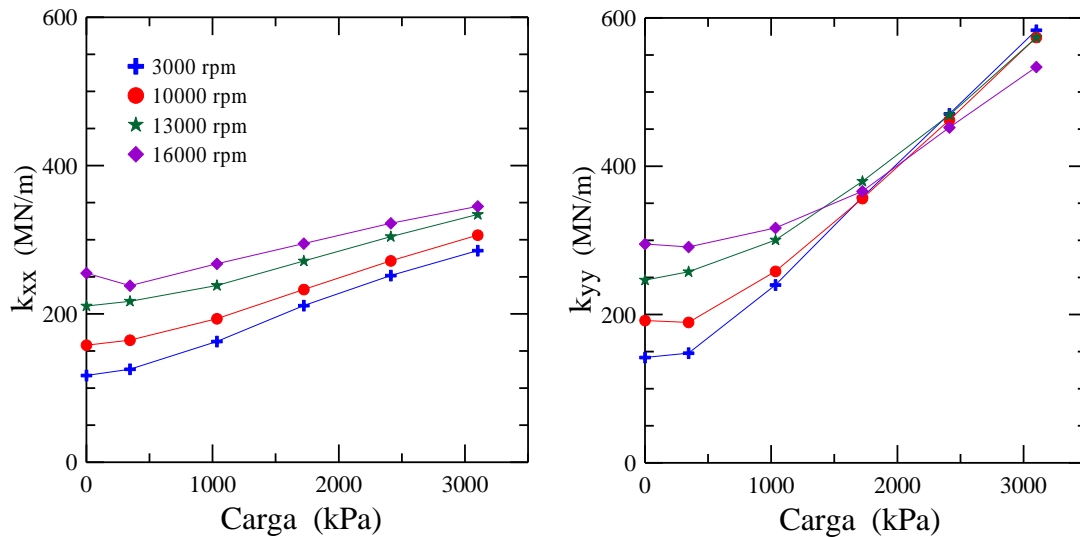


Figura 6.18: Coeficientes de rigidez directos k_{xx} y k_{yy} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.

Similarmente, la Figura 6.19 muestra los coeficientes de acoplamiento cruzado k_{xy} y k_{yx} en función de la carga estática para las cuatro velocidades ensayadas. Puede verse que k_{yx} es siempre mayor que k_{xy} . Además, k_{yx} aumenta tanto con la carga estática como con la

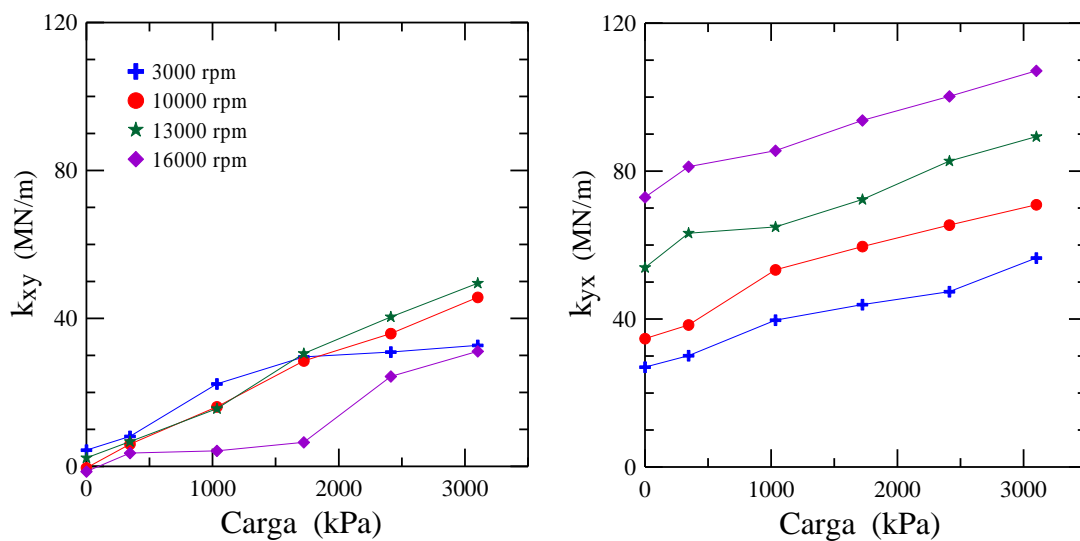


Figura 6.19: Coeficientes de rigidez cruzados k_{xy} y k_{yx} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.

velocidad del rotor, mientras que k_{xy} aumenta prácticamente sólo con la primera. Ambos coeficientes son siempre positivos (con k_{xy} prácticamente nulo para carga nula) y, por lo tanto, no promueven inestabilidad (cosa que ocurre cuando son de signos opuestos). El acoplamiento cruzado más significativo se produce a 16000 rpm. Este hecho sostiene la explicación previa respecto del “encastre” del rotor a altas velocidades y cargas. Asimismo, el acoplamiento cruzado medido está de acuerdo con las tendencias medidas de posición del rotor. Para todas las condiciones de prueba, estos coeficientes son significativamente más pequeños que los directos presentados en la Figura 6.18

Coeficientes de Amortiguamiento

Los coeficientes de amortiguamiento experimentales se estiman por ajuste por mínimos cuadrados de los datos de la parte imaginaria de la rigidez dinámica a una expresión lineal con ordenada nula, esto es:

$$\text{Im}(H_{ij}) = \Omega c_{ij} \tag{15}$$

La Figura 6.20 presenta los coeficientes de amortiguamiento directos, c_{xx} y c_{yy} , en función de la carga estática para las cuatro velocidades ensayadas. Como se comentara cuando se presentaron los datos de H_{ij} , ambos coeficientes directos de amortiguamiento son prácticamente independientes de la carga estática. Además, c_{xx} también es constante con respecto a la velocidad del rotor, mientras que c_{yy} muestra una pequeña disminución con el aumento de velocidad, lo que podría atribuirse al efecto de “encaje” descrito.

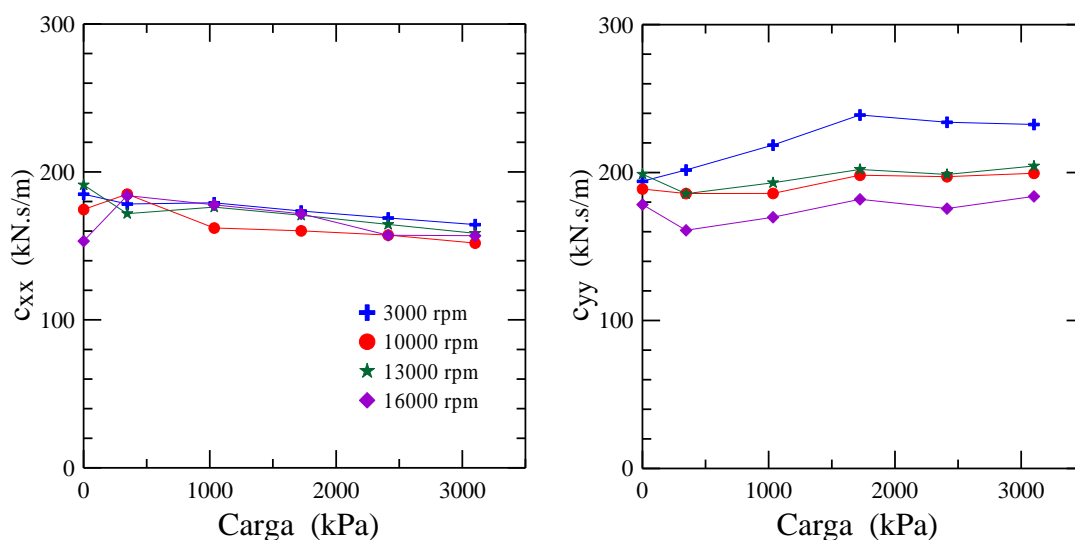


Figura 6.20: Coeficientes de amortiguamiento directos c_{xx} y c_{yy} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.

Finalmente, los coeficientes de amortiguamiento cruzados calculados, c_{yx} y c_{xy} , se presentan en la Figura 6.21. Ambos coeficientes son mucho más pequeños que los coeficientes directos presentados anteriormente, para todas las condiciones de ensayo. Se observa que c_{yx} es cercano a cero para la mayoría de las condiciones de prueba, excepto para dos de las cargas a 16000 rpm, c_{xy} también es pequeño a velocidades bajas pero luego crece notablemente a velocidades del rotor mayores, probablemente motivado por la limitación al desplazamiento lateral motivada por el fenómeno teorizado.

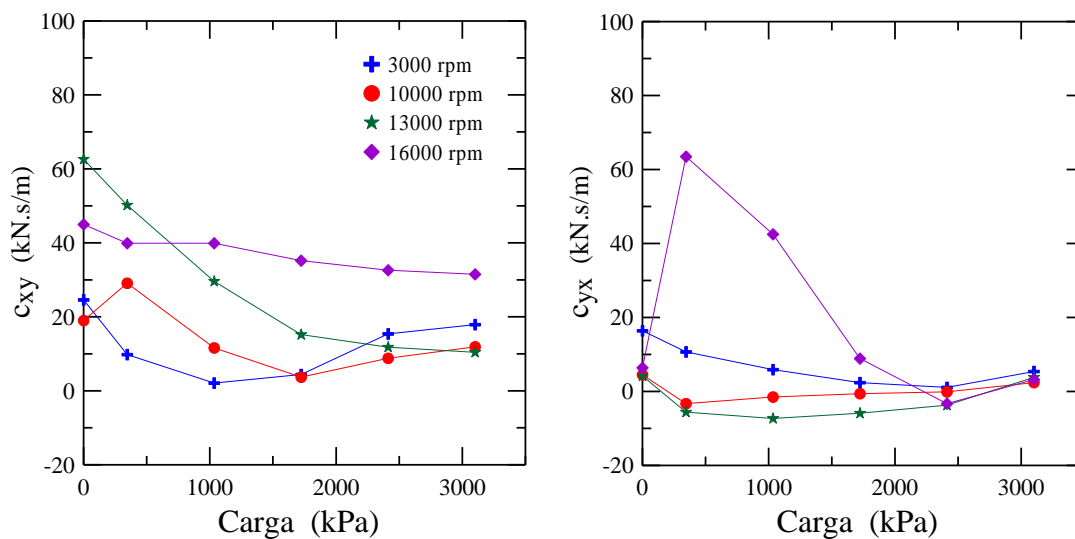


Figura 6.21: Coeficientes de amortiguamiento cruzados c_{xy} y c_{yx} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.

Coeficientes de Masa Virtual

Como se comentara anteriormente, el ajuste de los por mínimos cuadrados de la parte real de la rigidez dinámica a una expresión parabólica (ver Ec. (14)) permite calcular no sólo los coeficientes de rigidez k_{ij} sino también los de masa virtual m_{ij} . La Figura 6.22 presenta los valores de m_{xx} y m_{yy} . El primero de estos, que corresponde a la dirección sin carga, es negativo con una magnitud cercana a 15 kg. m_{yy} , por otro lado, es generalmente positivo a cargas pequeñas y luego se hace negativo. Este coeficiente está prácticamente siempre por encima de m_{xx} , alcanzando un valor máximo cercano a 25 kg.

De manera similar, la Figura 6.23 proporciona los coeficientes de masa virtual cruzados. Ambos coeficientes son positivos para la mayoría de los casos de prueba, por lo que no tendrían efecto sobre la estabilidad (los k_{ij} cruzados que son positivos serían aún mayores), con valores que no superan los 25 kg excepto a 16000 rpm, donde se calculan m_{yx} más grandes.

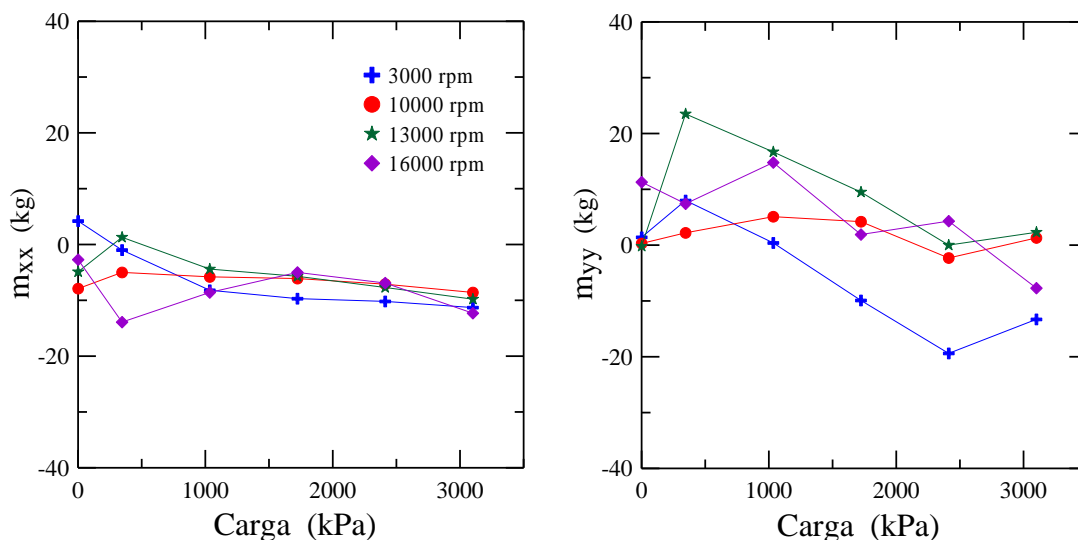


Figura 6.22: Coeficientes directos de masa virtual m_{xx} y m_{yy} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.

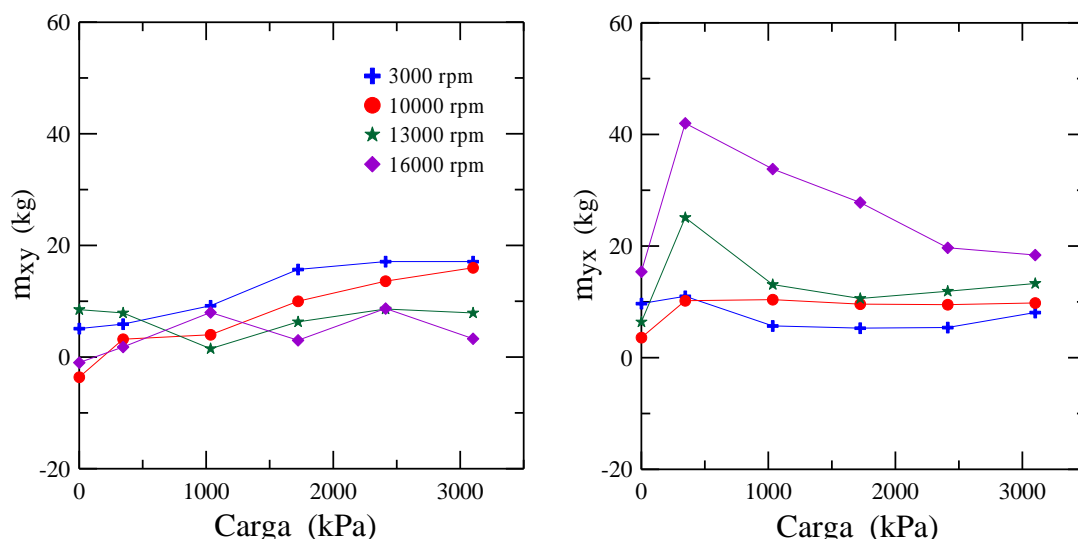


Figura 6.23: Coeficientes cruzados de masa virtual m_{xy} y m_{yx} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.

Rigidez Estática versus Dinámica

La rigidez estática, k_s , ya presentada en la Sección 1.6, es un coeficiente asociado a la dirección de carga que se deriva de la fuerza estática y la excentricidad. Por lo tanto, ofrece un punto de referencia para comparar k_{yy} , el coeficiente de rigidez que se obtiene a partir de una prueba dinámica. Idealmente, estos coeficientes deben ser iguales. La Figura 6.24 compara los coeficientes dinámico y estático de rigidez para el cojinete ensayado. Como se puede ver, k_{yy} y k_s concuerdan muy bien a 7000 rpm a cargas chicas y a velocidades más altas del rotor. Sin embargo, a cargas más grandes divergen, siendo k_s más grande que k_{yy} .

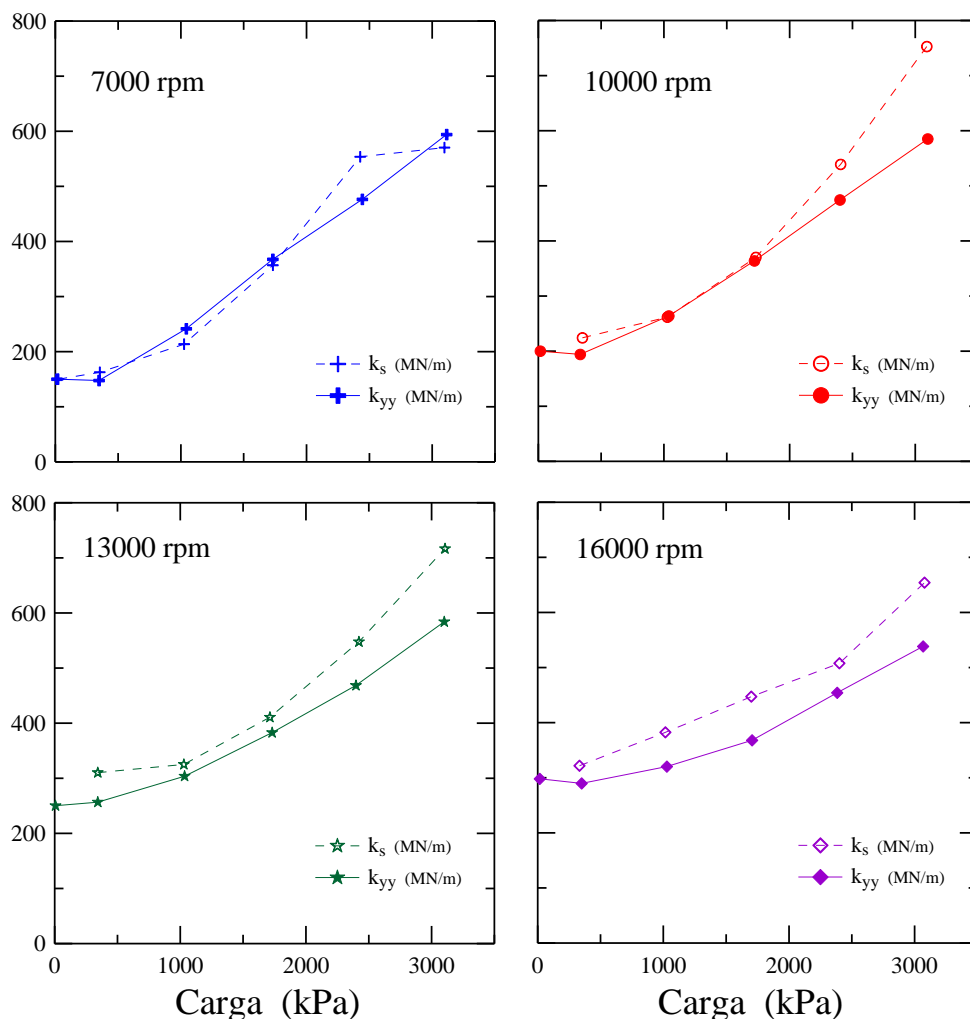


Figura 6. 24: Coeficientes estático k_s y coeficiente dinámicos de rigidez k_{yy} en función de la carga para las distintas velocidades del rotor ensayadas.

Como se comentará en apartados posteriores, hay múltiples factores que pueden contribuir a las discrepancias entre los coeficientes estático y dinámico de rigidez. Una de los más probables es la expansión térmica o distorsión del estator, el rotor y el cojinete. Cabe recordar que los sensores de proximidad están unidos al estator que contiene el cojinete y durante las pruebas, el sistema puede experimentar cambios dimensionales debidos a las elevadas temperaturas. Esto es un factor capaz de afectar las mediciones de excentricidad estática, y por lo tanto afectar las mediciones de rigidez.

6.1.6. Contribuciones

Como se comentara al inicio de este Capítulo, durante la estadía realizada en el TurboLab, me uní al grupo del Dr. Dara Childs que estaba realizando un estudio experimental del TPJB, participando tanto de las mediciones como en el armado del sistema. Ese trabajo, así como el análisis de los datos obtenidos, muestran que la estabilidad de los cojinetes de zapatas

pivotantes es indiscutible.

En esta Sección deseo particularizar y comentar dos contribuciones realizadas para el mejoramiento del banco de ensayo: a- el diseño de dos dispositivos accesorios para la puesta a punto del banco, y b- el reposicionamiento de los sensores de proximidad.

a- Como se ha mencionado, el banco de ensayo cuenta con dos rodamientos de contacto angular para mantener el rotor en posición. Para garantizar el mínimo desplazamiento radial del eje, estos rodamientos deben precargarse. Previo a la realización de los ensayos se observó que los sellos de aire a presión de estos rodamientos (los que retienen la niebla de aceite) habían tenido contacto metal-metal con el rotor en ensayos anteriores. El análisis de esta falla derivó en una de las contribuciones: el diseño y fabricación de dos dispositivos: uno para lograr la precarga correcta en los rodamientos, y otro para mantenerla luego de alinear el estator.

Como se muestra en la Figura 6.25, los rodamientos se vinculan a los pedestales mediante anillos porta rodamientos que se montan con interferencia sobre la pista externa de cada uno. El porta rodamiento del DE se fija axialmente sobre su pedestal mientras que el del NDE puede deslizarse hasta su posición de trabajo. El mecanismo preexistente para lograr la precarga consta de una pieza (identificada como “copa” en la Figura 6.25a) que se fija al

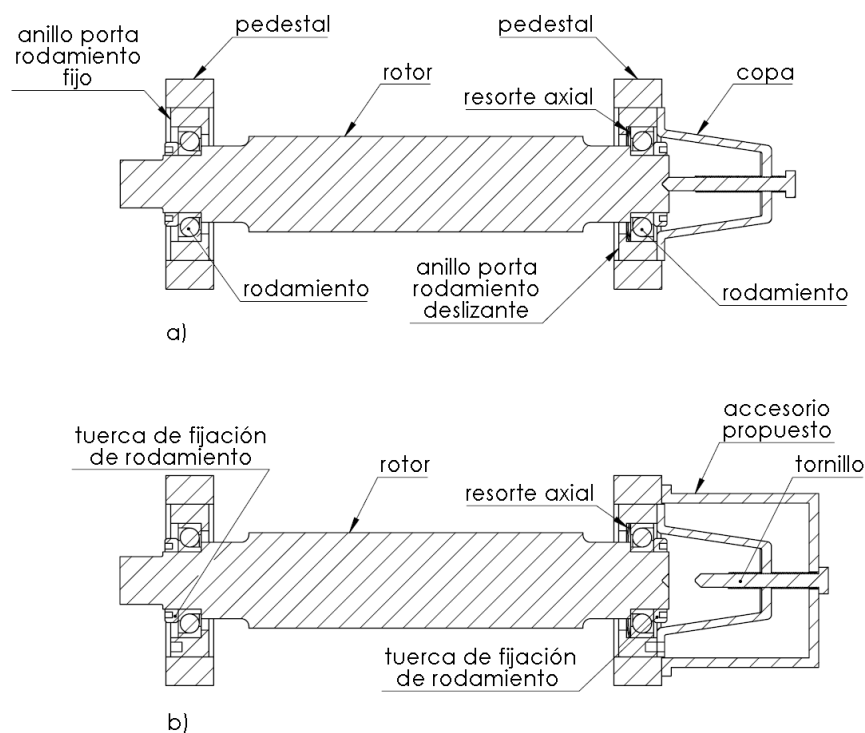


Figura 6.25: Sistema de precarga de los rodamientos. a) esquema preexistente; b) esquema propuesto.

anillo del NDE y permite generar movimiento relativo entre el rotor y la pista externa del rodamiento, precargando el resorte espaciador. El procedimiento indicaba que, una vez lograda determinada precarga (medida mediante desplazamiento relativo), se fijara axialmente el anillo deslizante. El análisis del sistema me permitió concluir que en dicha condición no puede garantizarse la precarga del conjunto ya que no se restringe el corrimiento del eje hacia la turbina en el DE. Para subsanar el inconveniente propuse cambiar el apoyo del sistema para tensionar el rotor, vinculándolo directamente sobre el pedestal den NDE en lugar de hacerlo sobre la pista externa, como se muestra en la Figura 6.25b. Con el uso del accesorio propuesto (el cual fue construido e implementado), se tracciona de la copa mediante el tornillo, comprimiendo el resorte y cargando ambos rodamientos simultáneamente.

Por otra parte, para la correcta alineación del estator, se emplean los estabilizadores. Sin embargo, su acción provoca también una fuerza de tensión que es contrarrestada por un pedestal, a un lado, y por el estator al otro. La acción neta sobre los pedestales es un par de fuerzas que intenta acercarlos. Este acortamiento produce una disminución en la precarga de los rodamientos (se descomprime el resorte) quitando la restricción de desplazamiento radial del rotor y promoviendo su contacto con los sellos ante la acción de los excitadores. A fin de minimizar este efecto, propuse y se añadió al diseño del banco, un puntal que vincula los pedestales, de manera de mantener su separación y paralelismo. Esto se muestra en la imagen de la Figura 6.26.

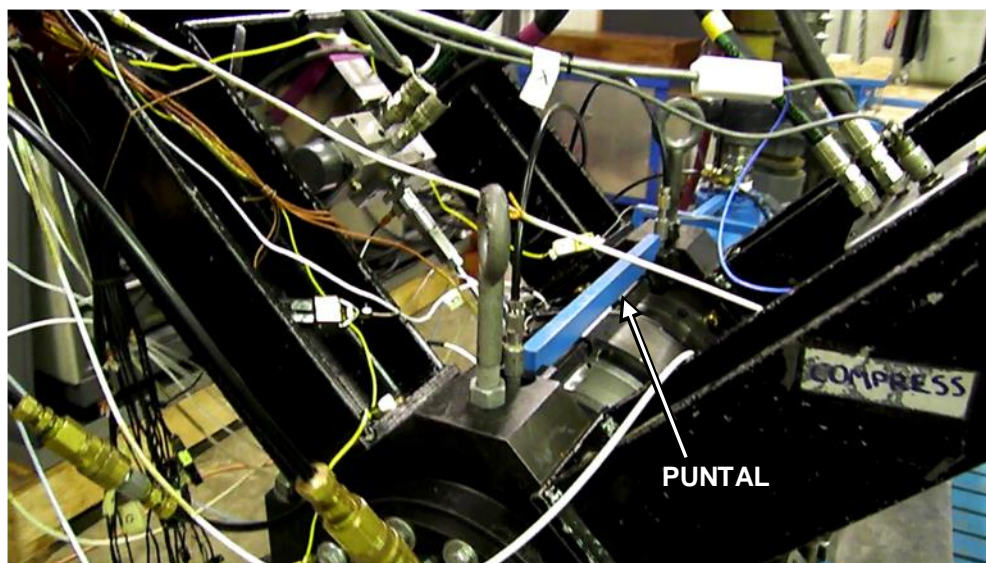


Figura 6.26: Banco de ensayo en funcionamiento con el puntal de vinculación colocado.

b- Como se muestra en la Figura 6.4, el estator está dotado de cuatro sensores de posición que pueden colocarse en la parte superior o inferior del mismo. Al momento de comenzar con el armado y puesta a punto del banco los sensores se encontraron del lado inferior del estator, opuestos a la posición de los actuadores hidráulicos. De hecho, trabajos previos (Carter y Childs, 2008) se realizaron con los sensores en dicha posición. Una verificación rápida de la deformación sufrida por el estator como consecuencia de la acción de las fuerzas actuantes en los ensayos, considerando que éste se comporta como un anillo (Karabay, 2007), me permitió ver que la diferencia de deformación entre los puntos superiores e inferiores de posicionamiento de los sensores se encontraba en el orden del huelgo del cojinete.

El estiramiento diametral (ΔD) de un anillo de espesor e , ancho b y radio R puede estimarse como (Karabay, 2007):

$$\Delta D = \frac{2 \times 0,895 F R^3}{E b e^3}, \quad (16)$$

donde F es la fuerza actuante y E el módulo de elasticidad del material ($E=6,5 \times 10^{10}$ Pa, si se considera aluminio). Para las dimensiones del estator usado, se tiene $\Delta D = 5.647 \cdot 10^{-3} F$, donde ΔD [μm] y F [N]. Es decir, para una fuerza de 10000N se tiene una deformación estimada de nada menos que $56 \mu\text{m}$.

Las estimaciones dadas por esta expresión fueron corroboradas con mediciones de rigidez del estator mediante la aplicación de una carga estática al cojinete de prueba a velocidad cero y midiendo el desplazamiento con sensores de proximidad ubicados del lado del excitador-y (2',6') y del opuesto (2,6) (ver Figura 6.4). El resultado de esta medición arrojó que mientras la carga es producida por el excitador-y, ambos sensores de proximidad muestran valores similares. Sin embargo, al emplear el cargador estático, los sensores del lado del excitador-y miden menos desplazamiento que sus opuestos. Así deduje que la causa la discrepancia era la flexibilidad en el estator. Esto me llevó a proponer que la posición de montaje fuera hecha del lado superior, designada por (2',6') y (1',5') en la Figura 6.4, por ser la ubicación de las sondas más apropiada. Esta orientación es mejor porque coloca a los sensores de proximidad cerca de los puntos de fijación del excitador, y esto acorta el camino de carga entre las sondas y los puntos de aplicación de los actuadores. Además, esta configuración sitúa los sensores de movimiento cerca de las zapatas cargadas, minimizando la influencia del tramo de estator en el desplazamiento medido durante la carga estática.

Este cambio de sonda de proximidad tuvo un efecto mensurable sobre los datos de excentricidad estática y las funciones de rigidez dinámica. Todos los datos estáticos y dinámicos presentados en este Capítulo se obtuvieron con las sondas de proximidad situados en el lugar descrito.

6.2. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN BANCO DE ENSAYO PARA ESTUDIO EXPERIMENTAL DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

En esta Sección se detallan los fundamentos de diseño y cálculo dinámico de un banco de ensayo de cojinetes propio, así como las etapas constructivas. Como ya se comentara, uno de los objetivos fundamentales de esta parte del trabajo es contar con información experimental para comparar con las predicciones de ecuaciones y modelos en cálculos analíticos y numéricos y aportar información experimental de referencia. El equipo está pensado para la realización de ensayos tanto estáticos como dinámicos.

Como se muestra simplificada en la Figura 6.27, en líneas generales, el banco de ensayo construido cuenta con un rotor con un extremo montado sobre un rodamiento oscilante y el otro sobre el cojinete instrumentado. El accionamiento se produce mediante un motor eléctrico asíncrono dotado de variador vectorial de frecuencia, el cual se une al rotor mediante un acoplamiento elástico. Con el objetivo de ensayar distintas configuraciones, se han seleccionado tres diámetros diferentes de cojinete y para cada uno de ellos, tres relaciones longitud a diámetro, $L/D = 1/4, 1/2$ y 1 . El equipo cuenta con doce sensores piezo-resistivos que permiten conocer la presión en la película fluida, doce termocuplas que miden la temperatura sobre la superficie del cojinete, cuatro sensores de proximidad que miden la posición y alineación del eje y tres celdas de carga para determinar capacidad portante y par de fricción.

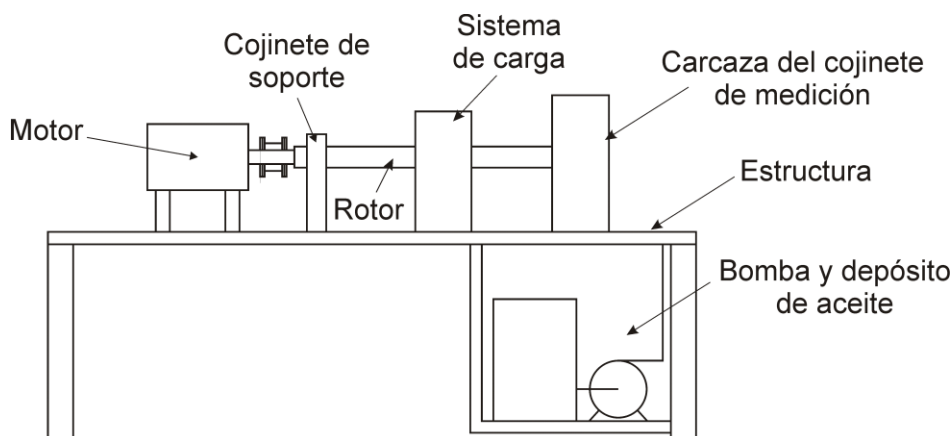


Figura 6.27: Esquema general básico del banco de ensayo diseñado.

Existen básicamente dos esquemas de diseño diferentes de este tipo de bancos de ensayo: de eje soportado rígidamente y cojinete instrumentado flotante, y de eje flotante y cojinete instrumentado fijo (Swanson, 1998). En el primer caso, el cojinete a ensayar se encuentra flotante sobre un rotor soportado rígidamente (*pin-to-pin*) sobre rodamientos rígidos. La carga de ensayo se aplica sobre el cojinete y todos los instrumentos de medición se encuentran en el mismo. Esta geometría, también denominada “shake-the-bearing” fue exitosamente llevada a la práctica por Glienicke (Glienicke, 1966) e implementada por diversos laboratorios (Childs y Hale, 1994; Kaul, 1999), como el citado en el apartado previo. Sin embargo, el hecho de aplicar la carga sobre un cojinete flotante no refleja la realidad de la mayoría de las máquinas, en las que los cojinetes se encuentran fijos y el rotor (carga) es el flotante. Esta particularidad puede ser una de las causas de las discrepancias entre los parámetros medidos y las predicciones (fundamentalmente el amortiguamiento del sistema) mencionadas al comienzo del Capítulo.

El segundo esquema de banco de ensayo se basa en un rotor que tiene un extremo fijo mientras que el otro reposa sobre el cojinete instrumentado. Las cargas se aplican directamente sobre el eje (por eso el diseño también se denomina “shake-the-rotor”) y los registros se toman en sensores situados en el cojinete. Esta configuración representa fielmente la disposición de la mayoría de las máquinas. Sin embargo, el hecho de aplicar cargas sobre el rotor genera ciertas dificultades, sobre todo al efectuar ensayos dinámicos, tales como: necesidad de aplicar la carga sobre un elemento que rota, mayores tiempos de respuesta, inconvenientes en la estabilidad del rotor, etc. (Swanson, 1998). El banco de ensayo diseñado responde a una configuración “shake-the-rotor”.

Otro punto crítico respecto del diseño de un banco de ensayo surge al momento de dotar al equipo de flexibilidad para ensayar diversos tamaños y formas de cojinetes. En este sentido, existen varias alternativas posibles, como el uso de distintos pares eje-cojinete para cada ensayo o el empleo de camisas intercambiables montadas sobre un único eje.

6.2.1. Generalidades

El banco de ensayo que se ha diseñado y construido, al igual que el del TurboLab y la mayoría de estos sistemas, consta de los siguientes elementos básicos: un rotor impulsado por un motor (generalmente eléctrico o turbina de aire), un sistema de almacenamiento y suministro de lubricante, un sistema para aplicar carga y un cojinete instrumentado. Aún así, dependiendo de las configuraciones y particularidades adoptadas por el diseñador, pueden

encontrarse muy diferentes variantes.

El proyecto incluye la determinación de parámetros dinámicos como objetivo fundamental, pero también se ha dotado al banco con capacidad de ensayar los siguientes parámetros estáticos: capacidad portante, par resistente en el sistema, perfiles axiales y tangenciales de presión en el fluido lubricante, y perfiles axiales y tangenciales de temperatura en la superficie del cojinete. Además, con el fin de conferir al equipo de mayor flexibilidad, se lo ha diseñado con un sistema de camisas intercambiables para simular las tres relaciones L/D ya mencionadas para cada diámetro ensayado (dejando 9 combinaciones). El diseño empleado ha sido optimizado para garantizar la intercambiabilidad de las partes y garantizar el centrado después de cada modificación, salvando de esta manera los inconvenientes relacionados con este tipo de disposición citados por Swanson (1998).

Dado que el presente trabajo forma parte de un programa integral tendiente a generar una línea local de investigación sobre lubricación hidrodinámica, se ha considerado prioritaria la capacidad del equipo de brindar información específica para validar los modelos analíticos y numéricos desarrollados dentro de la misma. Otro aspecto fundamental considerado fue la adecuación del costo al presupuesto disponible, lo que de alguna manera aún limita sus capacidades actuales.

Como ya se comentara, el banco ha sido diseñado de manera de medir simultáneamente en cada ensayo: presión en doce puntos de la película fluida, ocho sobre la línea de simetría axial y cuatro fuera de esta línea, en una posición angular determinada; temperatura de suministro de lubricante; temperatura en doce puntos de la superficie del cojinete; posición y alineación del eje, mediante cuatro sensores de proximidad, dos horizontales y dos verticales; velocidad de rotación del eje; y capacidad portante y par de fricción del cojinete, mediante tres celdas de carga, dos verticales y una horizontal. La suma de las cargas de las dos primeras determina la componente vertical de la capacidad portante, mientras que su resta determina la fuerza debida a la fricción. La tercer celda determina la componente horizontal de la capacidad portante. Las variables de control del sistema son la velocidad de rotación, carga aplicada sobre el rotor, y presión y caudal de suministro de aceite.

6.2.2. Lineamientos de Diseño

La Figura 6.28 presenta un diagrama más completo del banco de ensayo construido, cuyos detalles se irán describiendo a lo largo de la Sección, mientras que la Tabla 6.4 muestra las características principales del equipo.

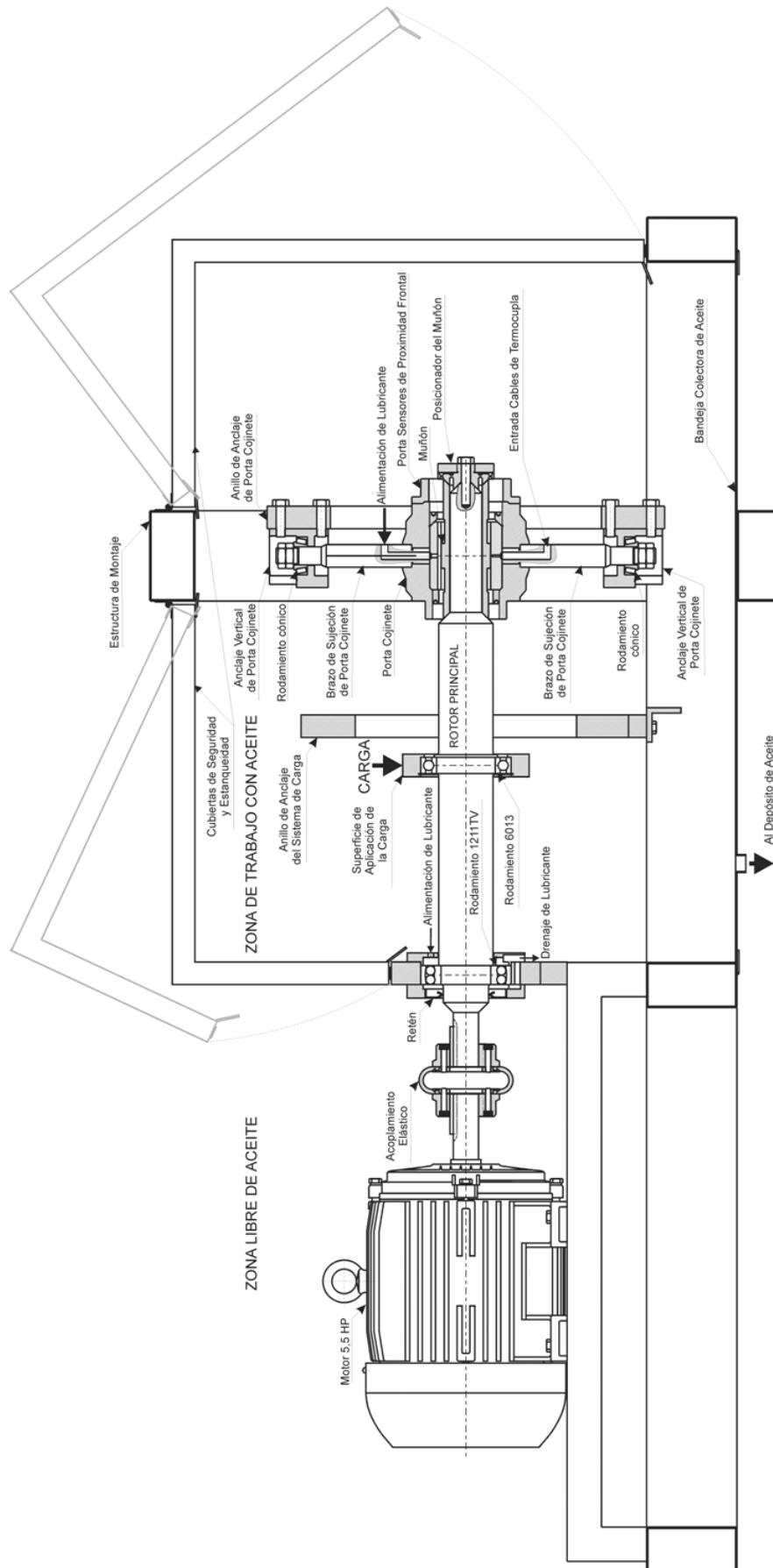


Figura 6.28: Representación esquemática del banco de ensayo diseñado.

Tabla 6.4: Características generales del banco de ensayo.

Carga máxima sobre el cojinete [N]	10000
Diámetros nominales de cojinete [mm]	50
	55
	60
Relaciones L/D	0.25
	0.5
	1
Velocidad mínima [rpm]	300
Velocidad máxima [rpm]	6000

Bastidor

El sistema fue montado sobre un bastidor de tubos estructurales soldados de 100×50×2,5 mm, el cual se esquematiza en la Figura 6.29. El bastidor, que se apoya sobre cuatro patas plásticas con rótula y registro de longitud para nivelar el equipo, consta de una bandeja inferior que contiene todos los soportes para la bomba y el líquido lubricante, y de una bandeja superior con los soportes para el motor principal, tablero eléctrico y rodamiento articulado. Cuenta, además, con un marco superior tipo “jaula” con compuertas abatibles abisagradas a la misma (ver Figura 6.28), que tiene la doble función de dar soporte a la celda de carga horizontal y permitir el aislamiento de la zona de trabajo con aceite. Las celdas verticales se vinculan al bastidor en un larguero transversal que cierra la jaula, formando un marco completo. Los puntos de anclaje de las celdas cuentan con una placa de refuerzo de 10mm de espesor. Así, toda la descarga de fuerzas del cojinete al bastidor se efectúa en una

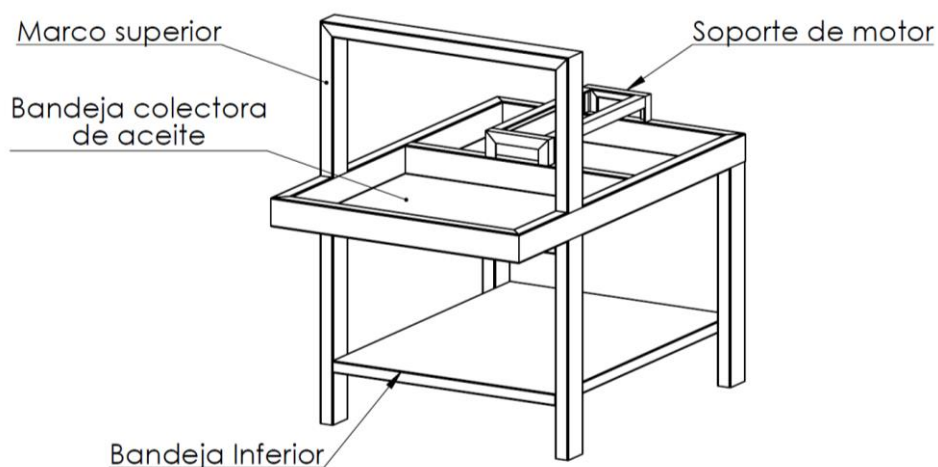


Figura 6.29: Esquema del bastidor.

estructura rígida. La Figura 6.30 indica las dimensiones principales del bastidor, incluyendo el soporte del motor principal, que es de una estructura postiza de hierro ángulo de 38x38x6,3mm, soldada al bastidor. La misma cuenta con guías para la alineación del motor en el plano horizontal. Para alineaciones en otro plano debe recurrirse a láminas de espesor calibrado para separar el motor de la base.

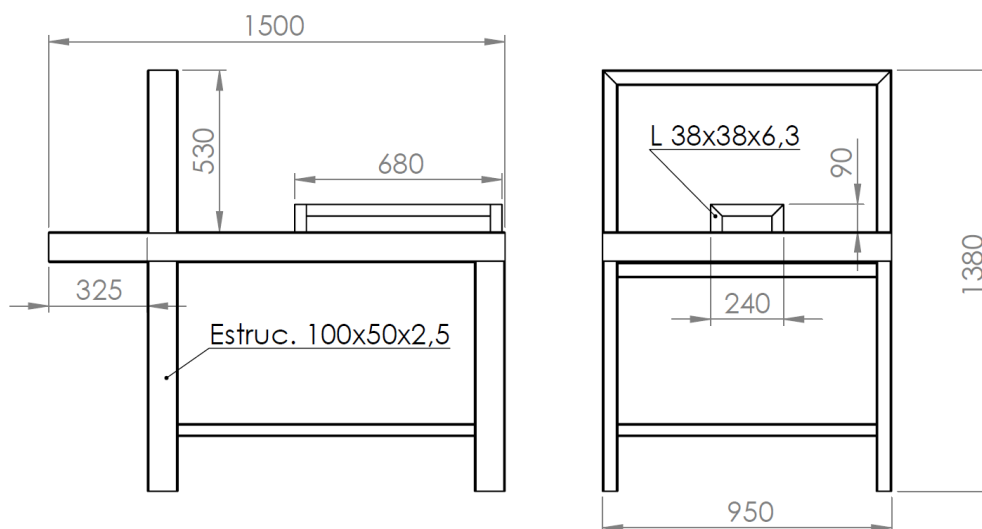


Figura 6.30: Dimensiones principales del bastidor (mm).

Sistema Motriz

El motor seleccionado es un asíncrono trifásico de eficiencia estándar WEG W21. Las características del mismo se detallan en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5: Características principales del motor empleado.

Potencia	Carcasa IEC	rpm	Corriente nominal a 380V [A]	Momento Nominal [Nm]	rendimiento			cos φ			Peso Aprox. [kg]	
					% de la potencia nominal							
kW	HP				50	75	100	50	75	100		
4	5,5	112M	1440	8,61	26,83	83,5	84,6	85	0,65	0,77	0,83	42

La potencia requerida por el equipo se estimó considerando la situación más desfavorable: velocidad y tamaño del cojinete máximos y excentricidad →0 (ver Capítulo 4). En esa condición (perfil lineal de velocidad), para un cojinete de $L/D = 1$ y $R/c = 600$ se tiene:

$$Pot = \frac{8}{3} \mu \pi^3 N^2 R^3 \quad (17)$$

Así, al considerar $R = 0,030$ m, $N = 6000$ rpm y $\mu = 0,05$ Pa.s (correspondiente a un aceite

SAE 30 a 40°C), se tiene: $Pot = 4$ kW. Para alcanzar la velocidad máxima de ensayo indicada, $N = 6000$ rpm, se dota al motor de un variador vectorial de frecuencia WEG CFM-08 que permite un rango de velocidades de 300 a 6000 rpm. En la Figura 6.31 se muestra el diagrama de bloques del variador.

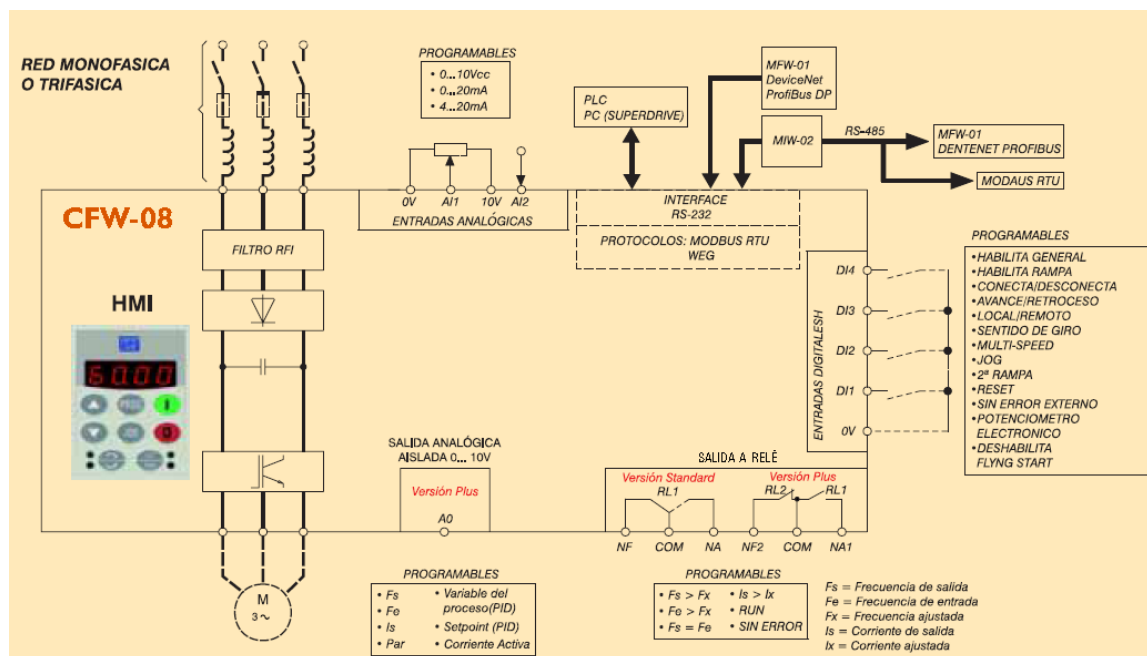


Figura 6.31: Diagrama de bloques del variador de frecuencia WEG CFW 08.

Este tipo de variador proporciona, idealmente, prestaciones sobre el motor de acuerdo al siguiente esquema: por debajo de la velocidad nominal el motor mantiene el torque nominal a potencia reducida; por encima de la velocidad nominal el motor mantiene la potencia nominal a torque reducido (en la práctica este desempeño teórico se ve ligeramente modificado por la eficiencia del sistema).

Con este esquema de prestaciones pueden determinarse las condiciones de ensayo límite que pueden obtenerse dependiendo de la combinación entre las variables N , μ , η , R , L/D y R/c , según la Ec. (17). En la Figura 6.32 se exponen las curvas de potencia y par máximos que el motor es capaz de desarrollar en función de la velocidad de operación. Asimismo se muestra a modo de ejemplo el umbral máximo de viscosidad que puede emplearse en el equipo, con un cojinete de $R = 30$ mm, $L/D = 1$, $R/c = 600$ y $\eta = 0$, empleando todo el potencial disponible.

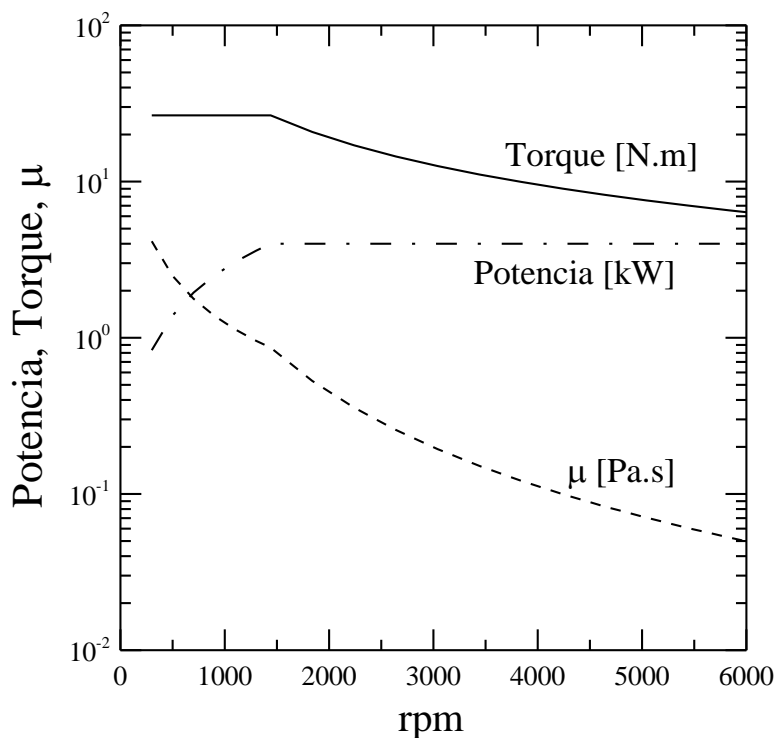
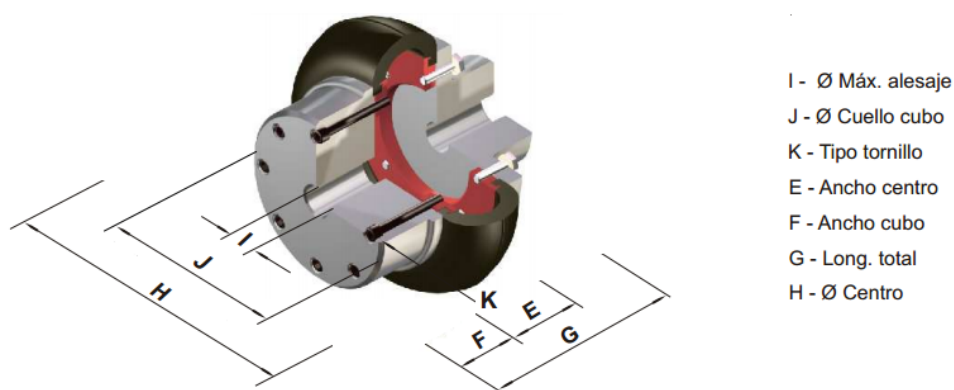


Figura 6.32: Desempeño del motor y viscosidad máxima en función de la velocidad de giro.

El motor se encuentra unido al eje a través de un acoplamiento elástico Gummy A-20. Este acoplamiento está conformado por una unidad compacta de goma y tela, vulcanizada sobre bridas de acero. Permite amortiguar oscilaciones y absorber desalineaciones sin perder su capacidad de transmitir torque. La Figura 6.33 muestra las características principales del acople seleccionado. Puede apreciarse que el torque máximo resistente supera ampliamente al homónimo que es capaz de entregar el motor.



ACOPLE CON CUBO INTEGRAL											BULONES	
MODELO	Torq. Nom. Nm	Angulo Torsión (°)	(1) Peso (Kg.)	Gd2 (Kg m2)	I Máx	J	E	F	G	H	Nr. (1)	K - Allen
A-20	38	2°	1.05	0.0017	30	66	30	25	80	95	6	1/4 x 1 1/4

Figura 6.33: Características del acoplamiento elástico seleccionado.

Eje

El eje fabricado a partir de acero SAE 1045 posee un extremo montado sobre un rodamiento oscilante de bolas y el otro sobre el cojinete instrumentado. La vinculación entre el eje y el acoplamiento elástico se logra mediante un chavetero. De acuerdo a las cargas previstas, el diámetro del eje se fijó en 60 mm, para una distancia entre apoyos de 464 mm. La Figura 6.34 muestra las medidas principales del eje construido.

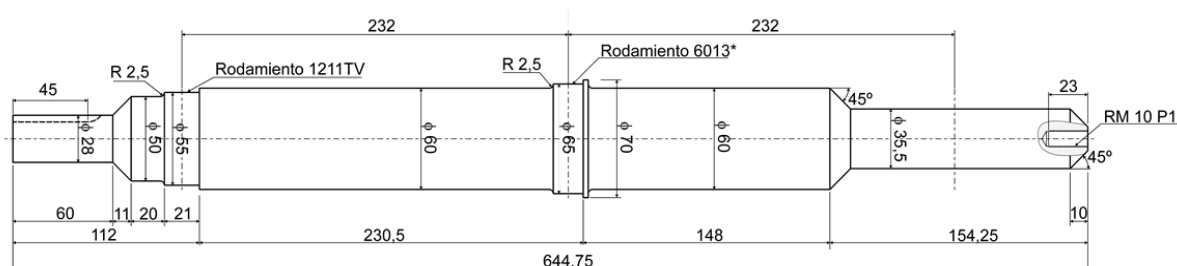


Figura 6.34: Dimensiones principales del eje construido.

Dado que en la configuración escogida para el banco (shake the rotor) la carga debe aplicarse sobre el eje, se dispone de un punto de aplicación fijo: la pista externa de un rodamiento rígido de bolas ubicado equidistante del cojinete instrumentado y de la vinculación al bastidor (rodamiento oscilante), como se aprecia en las Figuras 6.28 y 6.34. Ello implica que la reacción del cojinete será de la mitad del valor de la carga aplicada. Es decir, la carga aplicada debe ser del doble de la carga prevista para el cojinete. Asimismo, el rodamiento del extremo opuesto al cojinete soporta la misma carga que éste, esto es, la mitad de la correspondiente al rodamiento central. Por tal motivo, este último debe tener mayor capacidad de carga.

La Tabla 6.6 muestra las principales características de los rodamientos seleccionados. Para la selección de los rodamientos se recurrió a la estimación de su vida nominal en horas de funcionamiento, L_{10h} , como (ISO 281, 2007):

$$L_{10h} = \left(\frac{10^6}{60N} \right) \left(\frac{C}{P} \right)^3, \tag{18}$$

donde C es la capacidad de carga dinámica radial básica para una vida de 10^6 revoluciones y P es la carga dinámica radial aplicada. En la peor condición, con una carga de 10000 N sobre el cojinete (10000 N sobre el rodamiento oscilante y 20000 N sobre el rodamiento de carga), y una velocidad $N = 6000$ rpm, se tiene: $L_{10h} = 10h$ para el rodamiento de carga, y $L_{10h} = 55h$

Tabla 6.6: Características principales de los rodamientos del eje.

	6013*	1211TV
Características técnicas		
d [mm]	65	55
D [mm]	100	100
B [mm]	18	21
Peso [kg]	0.42	0.69
Marca	SKF	FAG
Prestaciones		
Capacidad de carga dinámica C [N]	30500	27000
Capacidad de carga estática, C ₀ [N]	25200	10000
N máximo (aceite) [rpm]	7700	7500

para el rodamiento oscilante. A mitad de carga y mitas de velocidad, se tiene: $L_{10h} = 157$ y 874 h, respectivamente. En virtud de que los ensayos a alta carga y velocidad duran segundos, y que representan una pequeña fracción del espectro de ensayos a realizarse en el banco, se estima que los rodamientos seleccionados tendrán vidas útiles muy por encima de las 300 horas mínimas recomendadas para equipamientos de precisión (ISO 281, 2007).

Como ya se comentara, mientras que el rodamiento de carga es de tipo “rígido de bolas”, el opuesto al cojinete instrumentado es de tipo “oscilante de bolas”. Esta selección se debe principalmente a dos razones: el eje debe alinearse con el motor para quedar dentro de la tolerancia angular que impone el acoplamiento elástico, y el eje debe ser capaz de pivotar libremente sobre su vinculación al bastidor cuando se apliquen cargas ya que el cojinete aumentará su excentricidad y las celdas de carga se deformarán, produciendo un desplazamiento neto sobre el extremo del eje. Una reacción en este apoyo produciría restricción a la aplicación de la carga deseada sobre el cojinete.

A fin de que el rodamiento oscilante quede alineado con el motor, pueda lubricarse correctamente durante su uso, y quede protegido de suciedad, se diseñó y construyó el portarodamiento que se muestra en la Figura 6.35. En el mismo se contempla la lubricación del rodamiento con el mismo aceite que el empleado para el cojinete instrumentado. El drenaje del aceite excedente se produce sobre la bandeja colectora y su aislamiento del exterior se realiza con un retén.

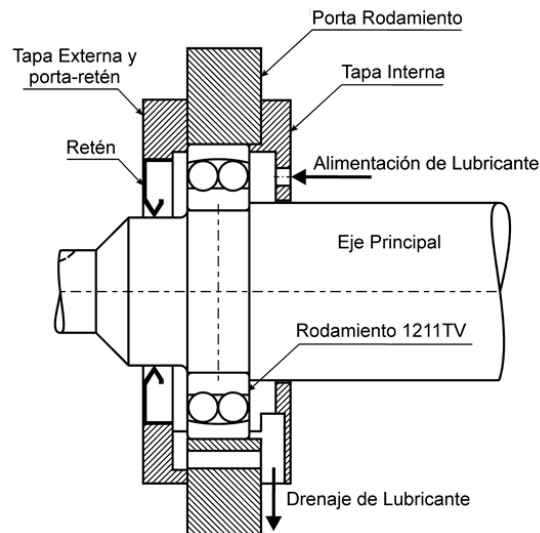


Figura 6.35: Esquema del vínculo entre el eje y el bastidor mediante el rodamiento oscilante.

La Figura 6.36 muestra una imagen del motor con el eje vinculado mediante el acoplamiento elástico (cubierto por una protección de seguridad). Puede apreciarse el porta-rodamiento descrito en la Figura 6.35 con la entrada de lubricante por encima del eje.



Figura 6.36: Lado motriz del eje: motor, acoplamiento (bajo el cobertor) y porta-rodamiento.

En el extremo opuesto del eje se apoya el cojinete hidrodinámico instrumentado. El diseño del mismo obedece a la premisa de poder ensayar la mayor cantidad de configuraciones posibles al menor costo. Es decir, probar diversos diámetros y diversas relaciones de aspecto sin la necesidad de cambiar el eje principal. Para lograrlo, se decidió construir manguitos intercambiables que se posicionen sobre el eje de manera simple, garantizando concentricidad entre las partes y, por ende, resguardando el balanceo del rotor. Esta configuración permite,

además, prevenir la presencia del denominado “Efecto Morton”, el cual es un fenómeno indeseado que produce deflexión en el rotor por acción de gradientes térmicos en sobre la superficie del rotor (Saha, 2010).

Manguitos

Como se comentara, para lograr distintas relaciones L/D para un dado D , se decidió confeccionar manguitos intercambiables, cada uno de ellos con un diámetro de eje y longitud activa determinados. De hecho, para cada diámetro de cojinete se confeccionaron tres manguitos o muñones. La Figura 6.37 muestra, a modo de ejemplo, los tres manguitos diseñados para el cojinete de diámetro nominal 60mm. Puede apreciarse que cada muñón consta de tres zonas: dos laterales, una en cada extremo, donde interactúan los sensores de proximidad, y una “zona activa” central, es decir, la zona donde se desarrolla película hidrodinámica. Mientras las dos primeras son invariantes de manguito a manguito, la zona activa cambia de longitud dependiendo de la relación L/D deseada.

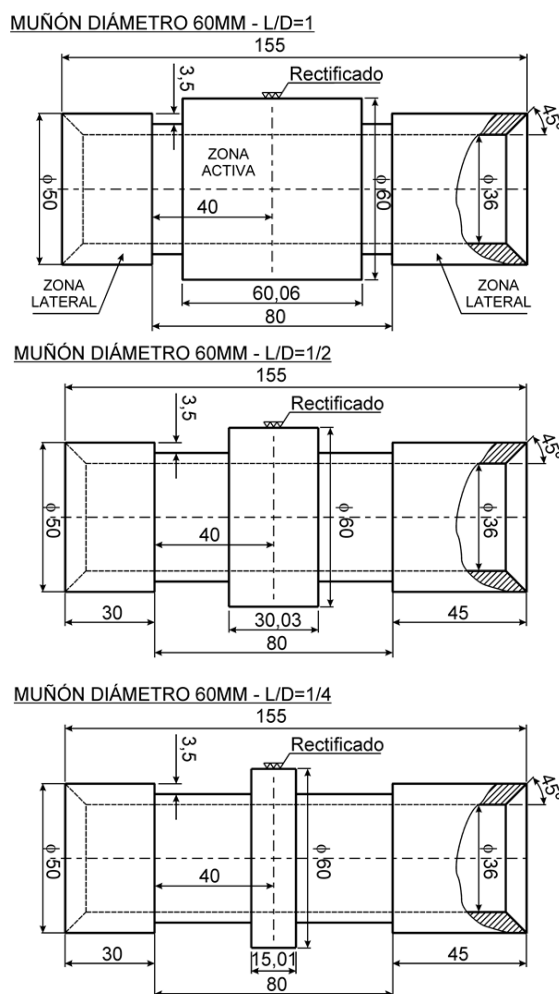


Figura 6.37: Dimensiones principales de los manguitos para el cojinete de 60mm. Los manguitos se montan concéntricamente al eje principal que les transmite la rotación.

Esta configuración permite, una vez construido un cojinete, cambiar las relaciones geométricas cambiando únicamente el muñón por aquél que tenga las dimensiones deseadas. De esta manera sólo fue necesario fabricar tres cojinetes (que son las piezas más costosas dado la complejidad inherente al montaje de todos los sensores), y nueve manguitos con las combinaciones de diámetros y L/D antes descritas. Una discusión sobre el método de montaje y centrado de los mencionados manguitos se detalla posteriormente. Si bien para esta instancia se pretendió mantener la relación huelgo a diámetro constante, el diseño permite construir sistemas con distintos valores de c/R . La Tabla 6.7 detalla las dimensiones geométricas de los conjuntos muñón-cojinete construidas¹. Las discrepancias de las medidas relevadas con las de diseño se corresponden con tolerancias normales de mecanizado ($20\mu\text{m}$).

Tabla 6.7: Dimensiones relevadas de los conjuntos muñón-cojinete construidos.

Diámetro de cojinete [mm]	Diámetro de manguito [mm]	Long. efectiva del manguito [mm]	L/D	R/c
50,13	50,00	12,44	0,249	385,62
	50,01	25,34	0,507	417,75
	50,01	50,10	1,002	417,75
55,14	55,01	13,80	0,251	424,15
	55,01	27,50	0,500	424,15
	55,00	55,13	1,002	393,86
59,92	59,82	15,40	0,257	599,20
	59,82	30,06	0,503	599,20
	59,82	60,08	1,004	599,20

El aspecto más relevante del diseño realizado radica en que la tolerancia del centrado del manguito en el eje debe ser, cuando menos, igual a la tolerancia de fabricación del eje. Con el objetivo de evitar posibles excentricidades en el rotor debidas a un montaje pobre de los manguitos, se ha optado por centrar los mismos sobre el eje mediante ajustes cónicos. Esta disposición produce que, además de la tolerancia diametral, la tolerancia axial de cada manguito sea rigurosa. De la etapa de pre-diseño han surgido dos opciones posibles para garantizar contacto adecuado entre las superficies cónicas: el empleo de un elemento que llegue a su límite de fluencia al fijar el manguito al eje; y el empleo de un elemento elástico que se deforme lo suficiente axialmente al ajustar, sin generar excentricidad.

En el primer caso, cada modificación en la geometría de ensayo requeriría el cambio del elemento deformado. En el segundo, el elemento elástico se fabricaría una única vez y se

¹ Medidas determinadas por el Laboratorio de Metrología de la UNPSJB.

reutilizaría para todas las configuraciones. En la Figura 6.38 puede apreciarse el dispositivo diseñado para dicho ajuste, indicado como “posicionador del muñón”. El cono de menor diámetro hace centro con el eje, mientras que el mayor lo hace con el manguito. Las entallas permiten que el cono mayor se desplace axialmente sin modificar su ángulo. Las pruebas dimensionales demostraron que la excentricidad de los manguitos fabricados no excede de los 4 μm al montarse sobre el eje, siendo en todos los casos menor a la tolerancia de fabricación. El material escogido para su fabricación fue acero SAE 1045.

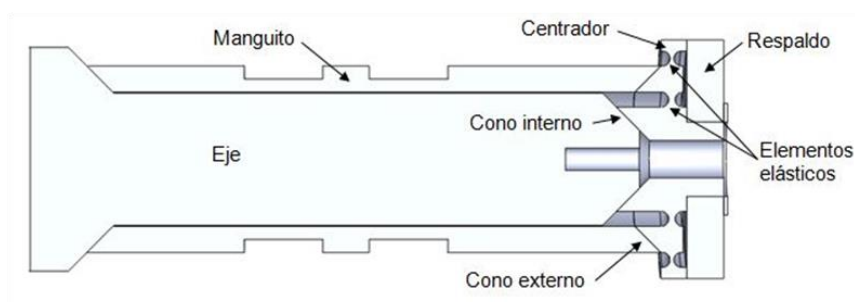


Figura 6.38: Detalle del sistema de centrado del rotor.

La Figura 6.39 muestra uno de los manguitos construido, colocado en el eje principal.



Figura 6.39: Manguito construido de 60mm y $L/D=1$.

Cojinetes y Porta-cojinete

Dado que los cojinetes y el porta-cojinetes constituyen los componentes con mayor grado de dificultad de mecanizado, se buscó fabricar la menor cantidad posible de los mismos. Cada cojinete es, básicamente, un aro de bronce con la composición detallada en la Tabla 6.8, que cuenta con un orificio radial de 4mm por donde ingresa el lubricante, seguido de una ranura axial para su correcta distribución. También tiene perforaciones de 1mm de diámetro que comunican la película fluida con sensores de presión y orificios realizados desde el diámetro exterior hacia el interior, hasta una distancia de 1mm de la pared interna. En estos orificios se alojan termocuplas para medir la temperatura de la superficie del cojinete. La Figura 6.40 presenta las principales dimensiones del cojinete de 60mm, mientras que la

Figura 6.41 muestra dos de los cojinetes construidos.

Tabla 6.8: Composición química del bronce de los cojinetes²

Elemento	Cu	Sn	Pb	Zn
%	57.4	N D	3.61	resto

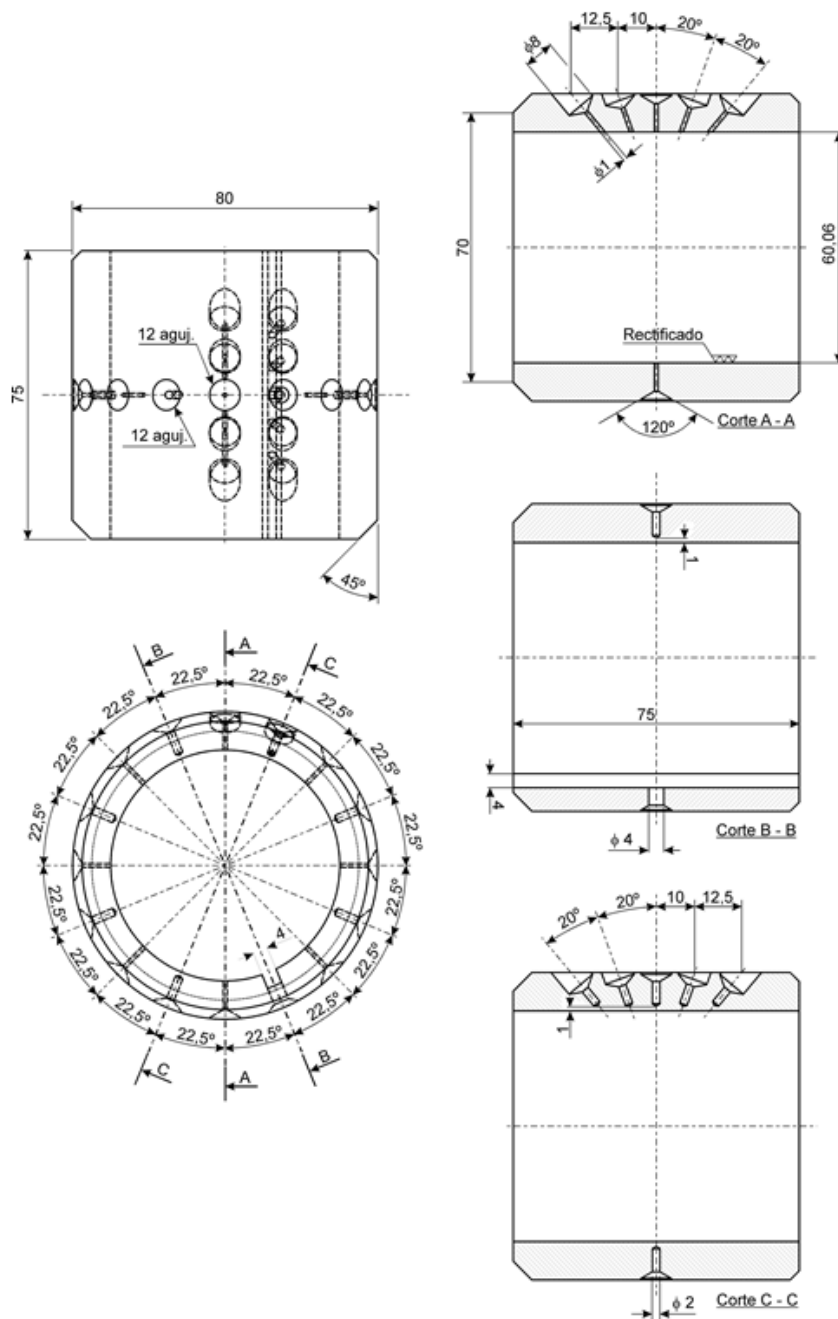


Figura 6.40: Cojinete de 60mm.

² Resultados brindados por el Laboratorio de Análisis Físico-Químicos de la firma ByC (16/10/09).



Figura 6.41: Cojinetes de 50 y 60 mm contruidos.

Los cojinetes se montan en una carcasa denominada “porta-cojinete”, la cual lo sujeta y permite el anclaje de los diversos instrumentos de medición. La Figura 6.42 muestra una ampliación de un cojinete instrumentado con sus accesorios. Puede apreciarse que el porta-cojinete consta de las mismas perforaciones que los cojinetes, de manera de permitir la correcta fijación de los diversos sensores. Es decir, posee agujeros radiales cada $22,5^\circ$ y agujeros sobre dos planos radiales para determinar perfiles axiales de presión y temperatura en los cojinetes. Estos planos se corresponden con los indicados como A-A y C-C en la Figura 6.40, y A-A y m-m en la Figura 6.43.

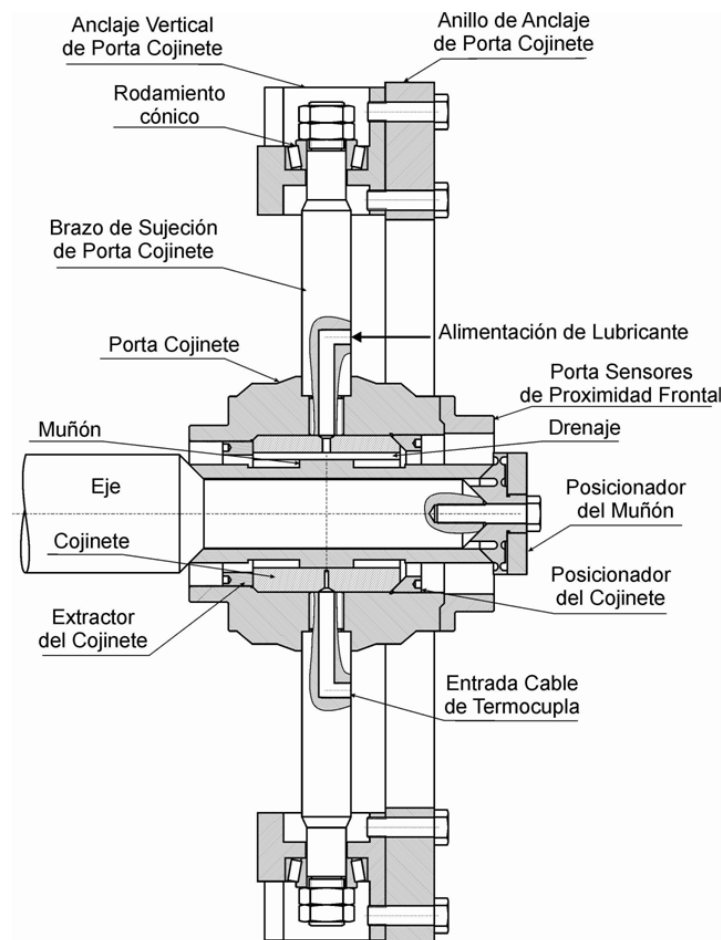


Figura 6.42: Esquema en corte del cojinete posicionado en el porta-cojinete.

Asimismo, el porta-cojinete cuenta en sus extremos con alojamientos para los sensores de proximidad. Estos miden la distancia relativa entre el porta-cojinete y los manguitos. La Figura 6.43 muestra las dimensiones principales del porta-cojinete construido.

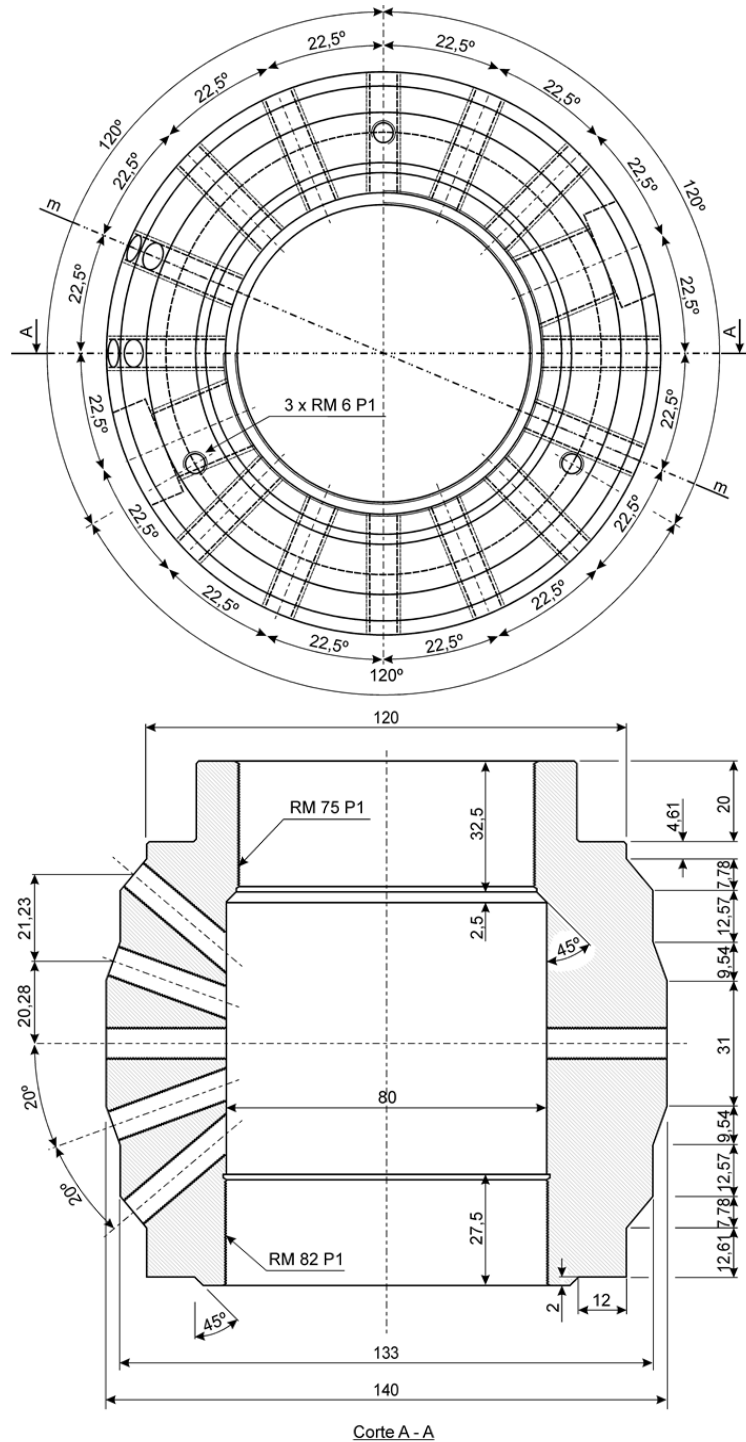


Figura 6.43: Dimensiones principales del porta-cojinete.

En cuanto a la transferencia de carga del cojinete al bastidor, ésta se produce de manera que el cojinete transfiere las cargas al porta-cojinete (al que está rígidamente vinculado) y este

las transfiere al anillo de anclaje por medio de los brazos de sujeción. El anillo, a través de las tres celdas de carga, transfiere la carga al bastidor.

Dado que entre las posibilidades previstas se contemplaron ensayos con rotor y cojinete desalineados, se dotó al sistema de un sistema de articulaciones en dos ejes perpendiculares que se cruzan en el centro geométrico del cojinete. Así, el cojinete puede pivotar sobre un eje vertical y sobre uno horizontal. El primer grado de libertad se logra gracias a los brazos de sujeción del porta-cojinete, los cuales se vinculan al anillo de sujeción por medio de rodamientos cónicos, como se aprecia en la Figura 6.42. El porta-cojinete (y por ende el cojinete) sólo puede rotar en un eje vertical respecto del anillo. El resto de los giros y desplazamientos relativos quedan completamente restringidos. Asimismo, el anillo completo (con porta-cojinete incluido) puede pivotar respecto de un eje horizontal. De esta manera, el cojinete adquiere los dos grados de libertad descritos respecto del bastidor. Para ensayos alineados, simplemente se deja flotante el sistema y la acción de las presiones hidrodinámicas actuará para alinear el eje y el cojinete. Para ensayos desalineados, se deben rotar los elementos hasta la posición deseada y fijarlos mediante anclajes.

La Figura 6.44 muestra imágenes del proceso de fabricación del anillo de anclaje y el porta-cojinete. El primero fue construido con acero SAE 1020 mientras que el segundo se hizo con SAE 1045. La Figura 6.45 muestra el anillo, el porta-cojinete con los brazos de sujeción y los alojamientos de los sensores. El conjunto armado se aprecia en la Figura 6.46.

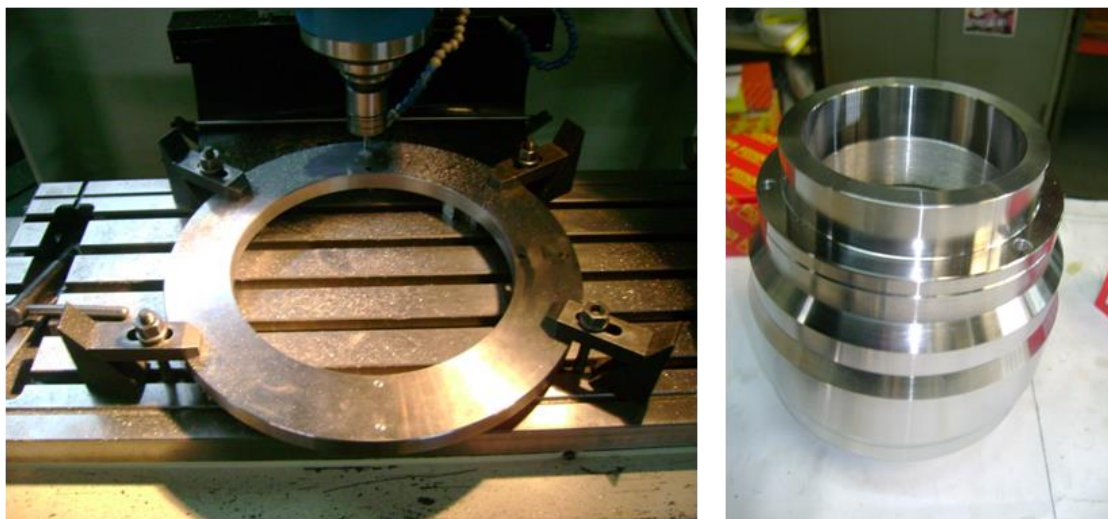


Figura 6.44: Mecanizado del anillo de anclaje del porta-cojinete (izq.) y porta-cojinete (der).

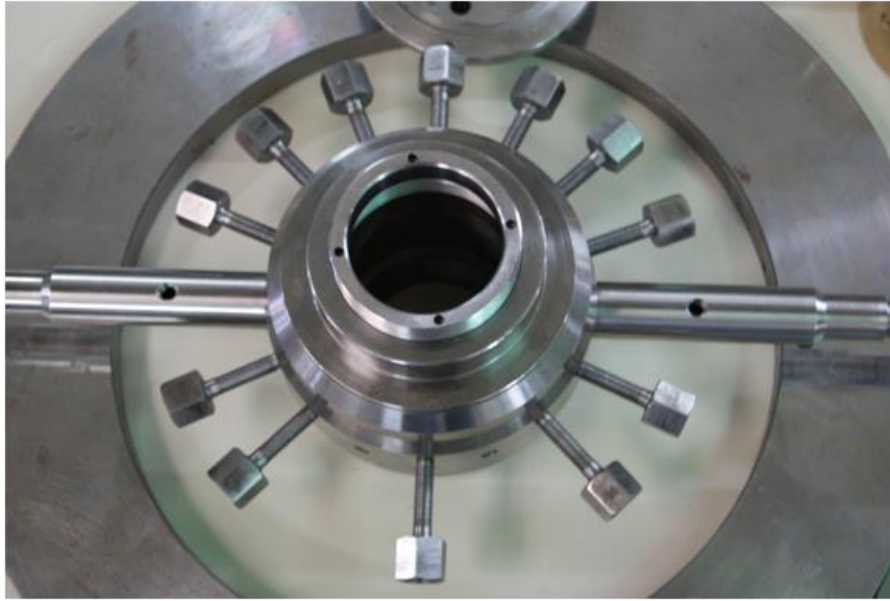


Figura 6.45: Porta-cojinetes con anillo de anclaje y alojamientos de los sensores.

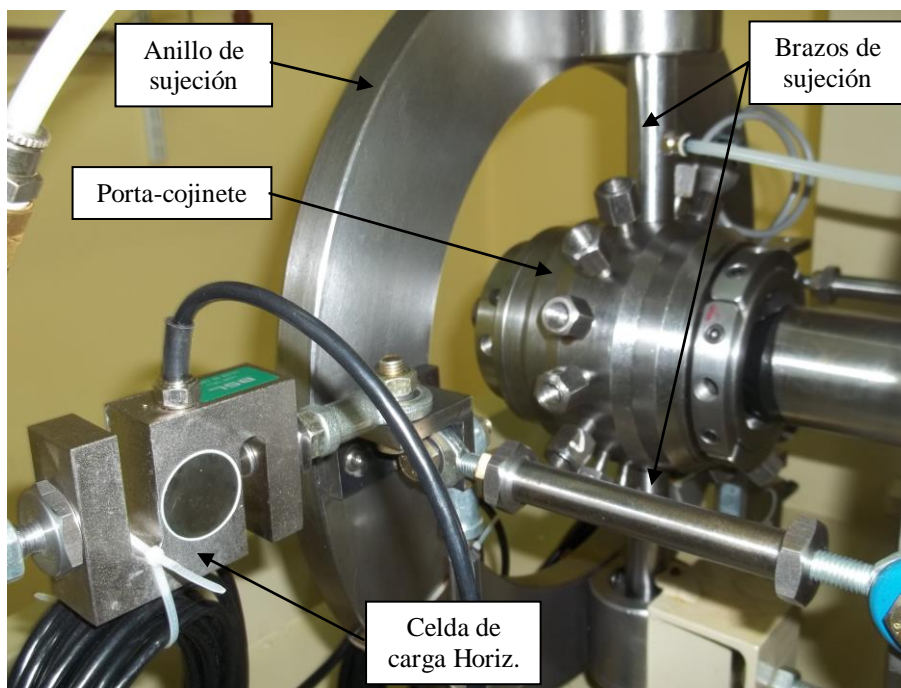


Figura 6.46: Conjunto armado: porta-cojinete, brazos de sujeción y anillo.

Suministro de lubricante

Para el suministro de lubricante, se diseñó un circuito como el esquematizado en la Figura 6.47. Éste consta de un depósito de lubricante de 40 L, una bomba de engranajes de 10 L/min impulsada por un motor de $\frac{1}{2}$ HP, una válvula limitadora de presión tarada en 4 bar y cuatro válvulas. Estas válvulas permiten controlar el caudal de lubricante requerido en el cojinete

instrumentado, el rodamiento oscilante, el sistema de carga y el retorno, respectivamente, como se muestra en la Figura 6.47.

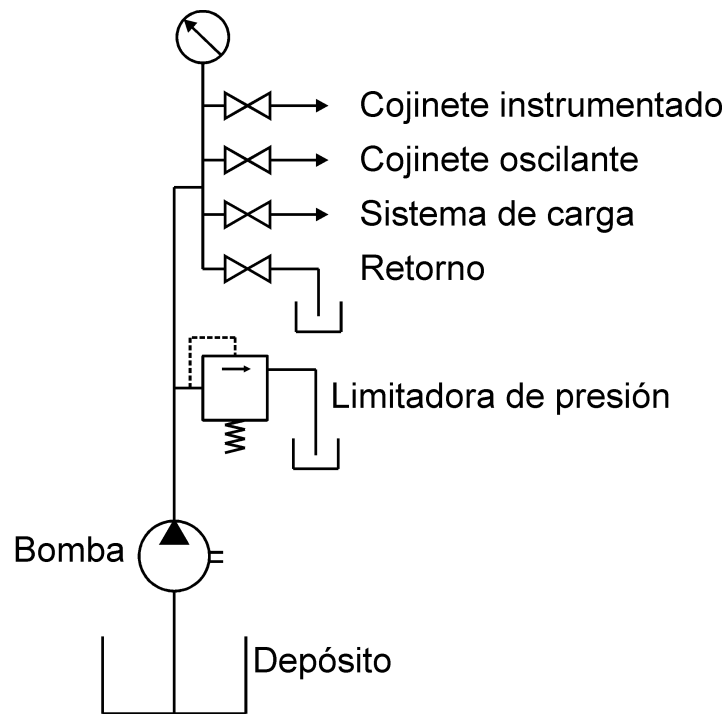


Figura 6.47: Esquema del circuito de suministro de lubricante.

Circuito eléctrico

Para la puesta en funcionamiento, control y parada del equipo, se diseñó y construyó un circuito eléctrico como el descrito en la Figura 6.48. En el mismo puede apreciarse que se cuenta con un disyuntor y una llave termo-magnética general, un contactor general que brinda la posibilidad de inhabilitar todos los sistemas ante una eventualidad, y dos contactores adicionales: uno para la bomba de lubricante y otro para el motor principal. Puede apreciarse que el segundo sólo se activa si el primero está accionado. De esta manera se busca evitar que se haga rotar el eje sin lubricación en el cojinete.

La Figura 6.49 muestra los tableros para comando del circuito eléctrico y de suministro de aceite construidos en el banco de ensayo de acuerdo a los esquemas de las Figuras 6.47 y 6.48.

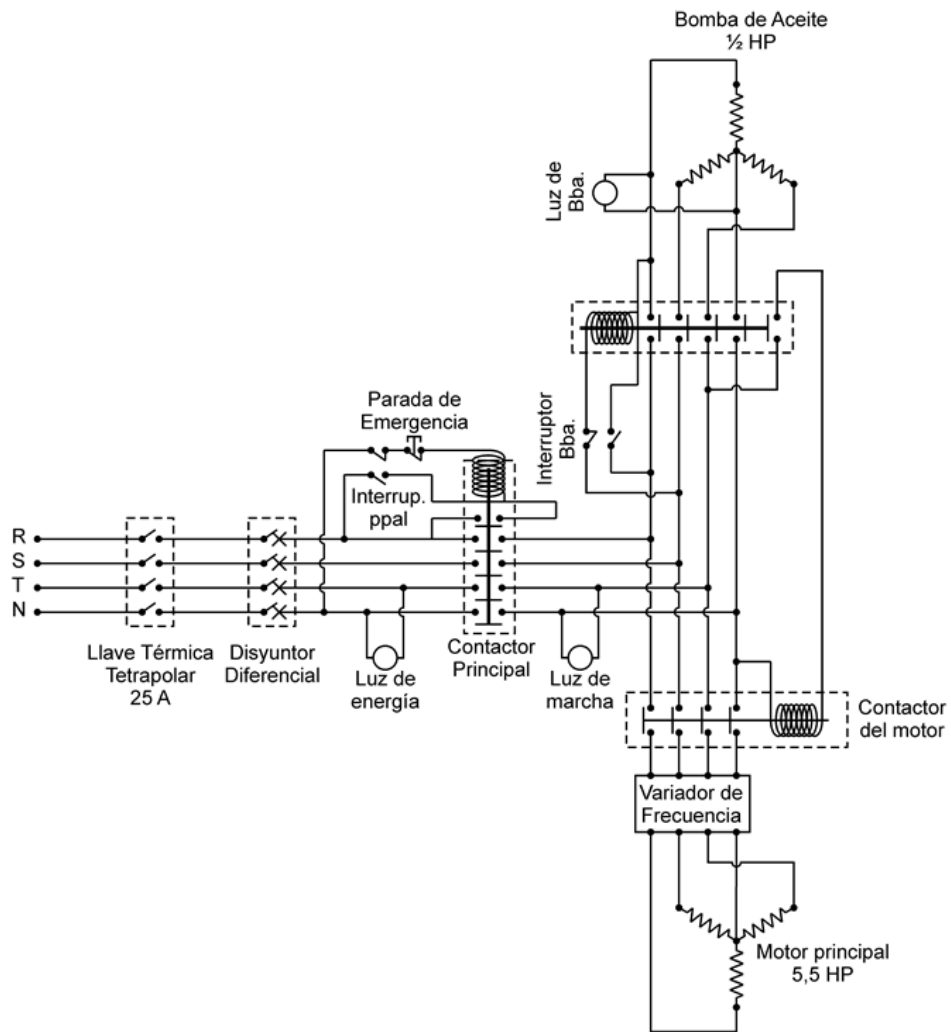


Figura 6.48: Esquema del circuito eléctrico.



Figura 6.49: Tableros del banco de ensayo: izq. de suministro de aceite; der. eléctrico.

Como fruto de la etapa de diseño se obtuvieron varias decenas de planos 2D, empleados para la fabricación del equipo. Muchos de ellos se presentan en el Anexo V. Posteriormente, con la incorporación de software 3D en el grupo de trabajo, se realizó una digitalización tridimensional del equipo con el objetivo de simplificar el diseño y adaptación de nuevos sistemas el banco. La Figura 6.50 muestra, a modo de ejemplo, las digitalizaciones de la geometría general del banco (izq.) y del porta-cojinetes (der.).

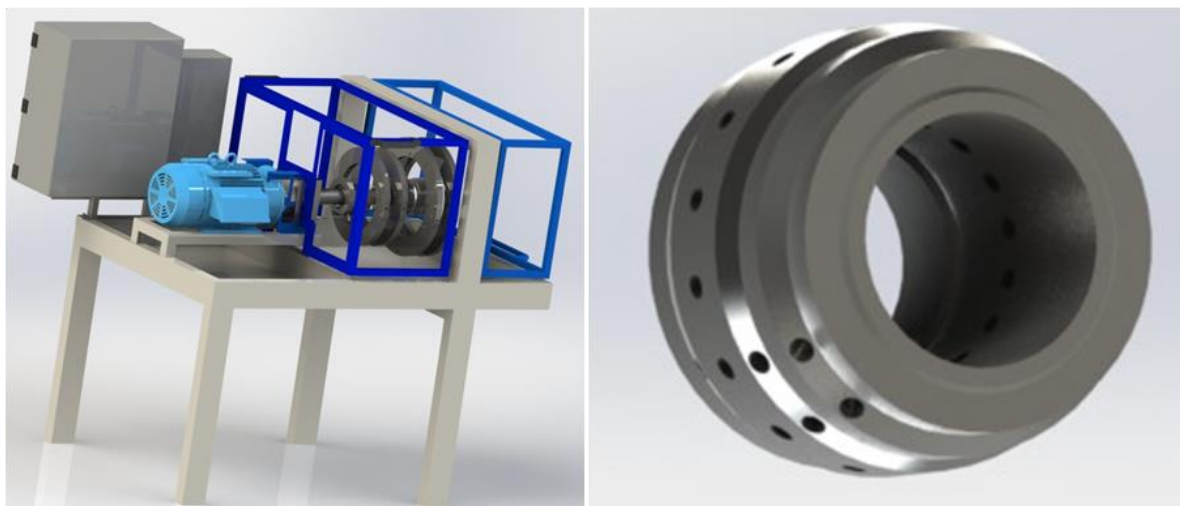


Figura 6.50: Digitalización del banco construido para el diseño de futuras mejoras.

6.2.3. Selección de Instrumental

La elección de los sensores se basó en su precisión, costo, experiencia de uso en el grupo de trabajo y estudio de equipos similares. La Tabla 6.9 muestra los instrumentos seleccionados con sus principales características. Para mayores detalles debe recurrirse a las hojas de datos correspondientes.

Tabla 6.9: Instrumentos seleccionados para las mediciones

<i>Variable</i>	Fuerza	Aceleración	Presión	Temperatura	Posición
<i>Tipo</i>	celda de carga tipo S	acelerómetro piezoeléctrico	sensor piezo-resistivo	termocupla tipo J	sensor de corrientes de Eddy
<i>Marca</i>	<i>BSL</i>	<i>Brüel&Kjaer</i>	<i>MSI</i>	<i>Mediterm</i>	<i>Selet</i>
<i>Modelo</i>	MTS-01	4384	MSP300		B50G122A010
<i>Rango</i>	±1000 daN	6000 g	0-60 bar	0-700 °C	0,2-2 mm

Al existir diversidad de alternativas para la medición de los parámetros de interés, el compromiso entre las ventajas y desventajas de cada técnica fue lo que permitió decidir en cada caso. Probablemente la decisión más difícil haya sido la relativa a los sensores de

posición, por lo que se detalla a continuación los criterios utilizados.

La Tabla 6.10 lista las variantes tecnológicas existentes para determinar la posición relativa entre el eje y el cojinete. El problema principal que se encuentra en este sentido es que si se requiere que el sensor esté alejado de la superficie del eje, entonces el error reportado por los fabricantes es del orden de 0.01 mm. Como el huelgo entre eje y cojinete es del orden de 0.05 mm, no parecen ser suficientemente precisos. Para ganar en precisión, hay que recaer en sensores cuyo rango sea pequeño (del orden de 0.5mm), pero en ellos la distancia inicial entre el sensor y el eje es del mismo orden. Este hecho sitúa en competencia directa a los sensores de tipo de corrientes de eddy y los capacitivos. Por otro lado, los sensores de triangulación láser permiten el montaje a unos 25 mm del eje, pero son sumamente voluminosos, y los ópticos son pequeños y se pueden montar a aproximadamente a 5 mm del eje, pero llevan una fibra óptica asociada al generador del haz que elevan sustancialmente su costo.

Tabla 6.10 Guía de selección de sensores de desplazamiento (MTI Instruments, 2007).

MEASUREMENT TECHNOLOGY	ADVANTAGES	DISADVANTAGES	RELATIVE COST
Fiber Optic	<ul style="list-style-type: none"> - High Accuracy and Resolution - High Frequency Response - Small Sensor Size 	<ul style="list-style-type: none"> - Small Sensor-to-Target Stand-off - Small Measurement Range - Affected by Target Reflectivity 	High
Laser Triangulation	<ul style="list-style-type: none"> - Large Measurement Range - Large Sensor-to-Target Stand-off - Not Affected by Temperature Changes 	<ul style="list-style-type: none"> - Large Sensor Head - Operates in Clean Environment - Affected By Changes in Target Surface 	Moderate
Capacitance	<ul style="list-style-type: none"> - High Accuracy and Resolution - High Frequency Response - Probe Geometry Easily Customized 	<ul style="list-style-type: none"> - Small Sensor-to-Target Stand-off - Operates in Clean Environment - For Conductive or Semi-Conductive Targets 	Moderate
Eddy Current	<ul style="list-style-type: none"> - Operates in Any Environment - Large Measurement Range - High Frequency Response 	<ul style="list-style-type: none"> - Conductive Target Only - Lower Relative Accuracy and Resolution - Affected by Temperature Changes 	Low

En la Tabla 6.10 puede apreciarse que, si bien los sensores escogidos (los de corrientes de Eddy) resultan ser los más económicos, son los menos precisos. De hecho, en experimentos realizadas en el banco de ensayo del TurboLab, usando un rotor de 101 mm de diámetro, se ha demostrado que la diferencia en las propiedades magnéticas del rotor pueden afectar la señal del sensor en una amplitud apreciable (del orden del 10% del huelgo) (Childs y Hale, 1994). El criterio que dicta su empleo, provisto en la misma Tabla 6.10, es su flexibilidad para ser usados en ambientes sucios (baño de aceite, en este caso).

Por otro lado, las señales de los diversos sensores son recogidas con un sistema de adquisición de datos, DAQ Omega OMB-3001, con un módulo de expansión OMB-PDQ30, que permite medir 64 canales simples o 32 canales diferenciales, lo que admite todos los sensores seleccionados. Este equipo tiene una resolución de 16 bits y una frecuencia máxima de muestreo de 1 MHz. La Figura 6.51 muestra el diagrama de bloques de la placa de

adquisición. Para mayores especificaciones debe recurrirse a su hoja de datos.

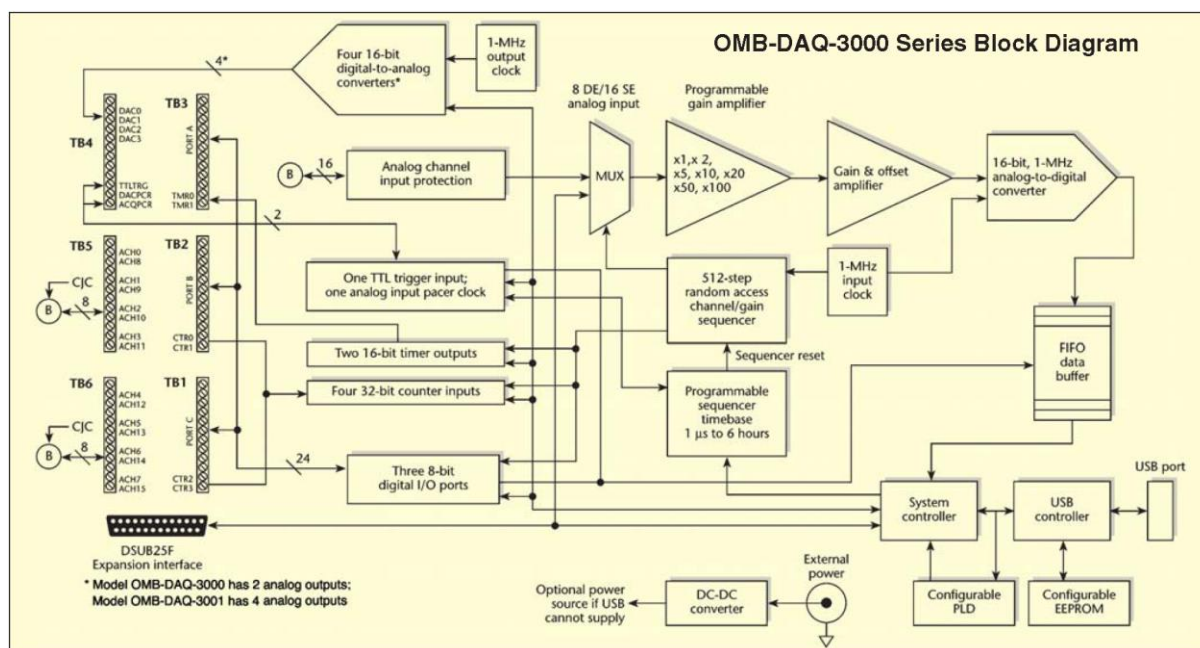


Figura 6.51: Diagrama de bloques de la placa de adquisición.

6.2.4. Estudio Rotodinámico

De acuerdo con lo reportado por Swanson (1998), las características rotodinámicas en bancos de ensayo pueden restringir marcadamente su empleo en la determinación de las características dinámicas de los cojinetes. Por este motivo, se ha analizado el sistema siguiendo pasos con grado creciente de complejidad. En primera instancia se efectuó una estimación de la primer frecuencia natural del sistema considerándolo como rígido. En segunda instancia, se realizó el cálculo de los autovalores (Childs, 2008). Para ello, se ha resuelto el sistema sin amortiguamiento para obtener las frecuencias naturales libres. Del mismo se obtuvo el orden de magnitud esperado para las citadas frecuencias y por último, se recurrió al empleo de un software específico para un análisis completo.

La Figura 6.52(a) muestra un esquema simplificado de la estructura del banco de ensayo, y la Figura 6.52(b) presenta el diagrama y nomenclatura empleados para el análisis dinámico del sistema. Cada componente del sistema se considera como un elemento elástico, con su rigidez y amortiguamiento correspondientes. Así, los correspondientes al rodamiento oscilante son k_r y C_r , respectivamente. Para el cojinete instrumentado, k_c y C_c , para las patas de plástico, k_s y C_s . Las celdas de carga se consideran con una rigidez k_{sc} , y el porta rodamiento con k_{sr} . El conjunto del bastidor se contempla con masa m_b y momento de inercia en dirección normal al dibujo I_b , mientras que para el eje y el sistema porta-cojinete se toman m_e , I_e , m_a e I_a .

respectivamente. Los valores empleados para los cálculos se muestran en la Tabla 6.11.

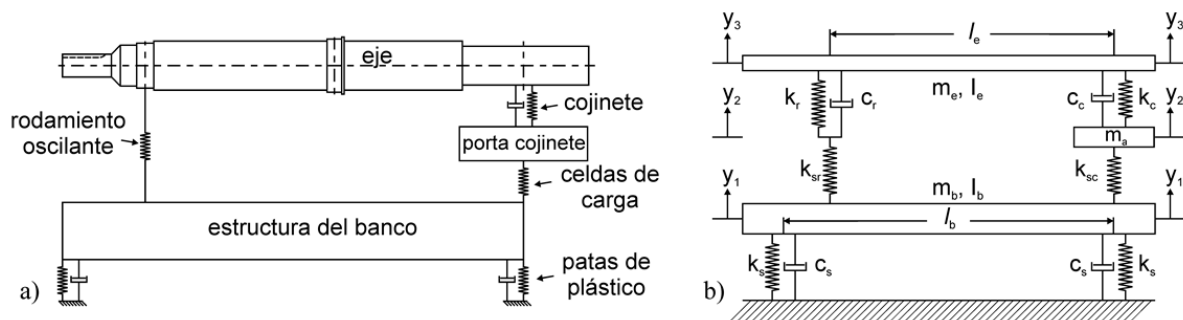


Figura 6.52: Esquema del banco de ensayo en relación con el análisis dinámico: a) diagrama simplificado; b) modelo y nomenclatura.

Tabla 6.11. Datos asociados al modelo del banco de ensayo.

l_e [m]	0,6	k_{sc} [N/m]	5,0E8
l_b [m]	1	k_{sr} [N/m]	1,0E9
m_a [kg]	18	k_r [N/m]	1,0E9
m_b [kg]	190	C_r, C_s [Ns/m]	0
m_e [kg]	13	I_e [kg m ²]	0,18
k_s [N/m]	5,0E5	I_b [kg m ²]	50
k_c [N/m]	0,35E8	I_c, I_a [kg m ²]	0

Para obtener una estimación de la frecuencia natural más baja, puede considerarse que todo el sistema es un rígido soportado por los resortes k_s , entonces:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k_s}{m_e + m_a + m_b}}, \quad (19)$$

Esta estimación indica que la primer frecuencia natural del sistema ronda los 642 cpm. Para contar con una idea más acabada del comportamiento del sistema, se recurre a efectuar un análisis de autovalores, en el que se determinan las “frecuencias libres”. Las ecuaciones de conservación asociadas a la Figura 6.52b resultan:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} m_b (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_1') + k_s (y_1 + y_1') - k_{sr} (y_2 - y_1) + k_{sc} (y_2' - y_1') \\ 0 &= \frac{I_b}{l_b} (\ddot{y}_1' - \ddot{y}_1) + k_s y_1 l_b - k_{sr} (y_2 - y_1) (l_b - l_e) - k_{sc} (y_2' - y_1') l_b, \\ 0 &= -k_{sr} (y_2 - y_1) + k_r (y_3 - y_2) \\ 0 &= m_a \ddot{y}_2' + k_{sc} (y_2' - y_1') - k_c (y_3' - y_2') \end{aligned} \quad (20)$$

$$0 = \frac{1}{2} m_e (\ddot{y}_3 + \ddot{y}_{3'}) + k_r (y_3 - y_2) + k_c (y_{3'} - y_2)$$

$$0 = \frac{I_e}{l_e} (\ddot{y}_{3'} - \ddot{y}_3) + k_c (y_{3'} - y_2) l_e$$

Si para las ecuaciones anteriores se asume una solución del tipo $y_i = a_i \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{y}_i = -\omega^2 a_i \cos(\omega t)$, reemplazando y reordenando, se tiene:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} m_b \omega^2 + k_s + k_{sr} & -\frac{1}{2} m_b \omega^2 + k_s - k_{sc} & -k_{sr} & k_{sc} & 0 & 0 \\ -\frac{I_b}{l_b} \omega^2 + k_{sr} (l_b - l_e) & -\frac{I_b}{l_b} \omega^2 + (k_s + k_{sc}) l_b & -k_{sr} (l_b - l_e) & -k_{sc} l_b & 0 & 0 \\ k_{sr} & 0 & k_{sr} - k_r & 0 & k_r & 0 \\ 0 & -k_{sc} & 0 & -m_a \omega^2 + k_{sc} + k_c & -k_c & 0 \\ 0 & 0 & -k_r & -k_c & -\frac{1}{2} m_e \omega^2 + k_r & -\frac{1}{2} m_e \omega^2 + k_c \\ 0 & 0 & 0 & -k_c l_e & \frac{I_e}{l_e} \omega^2 & -\frac{I_e}{l_e} \omega^2 + k_c l_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (21)$$

La solución no trivial del sistema de ecuaciones requiere que el determinante de la matriz de coeficientes sea igual a cero. De la ecuación cúbica resultante surgen los tres valores positivos de las frecuencias naturales asociadas a cada masa del modelo, que resultan 811, 5720, y 52800 cpm respectivamente.

Con el objetivo de obtener un estudio más detallado, en el que se contemple la dependencia de la rigidez y del amortiguamiento del cojinete de ensayo con la frecuencia, se efectuó el análisis de vibraciones laterales del sistema rotor-cojinetes-anclajes mediante el software XLRTC² ya citado en la Sección 6.1.5, propiedad de la Universidad A&M de Texas. En la Figura 6.53 se aprecia el modelo empleado.

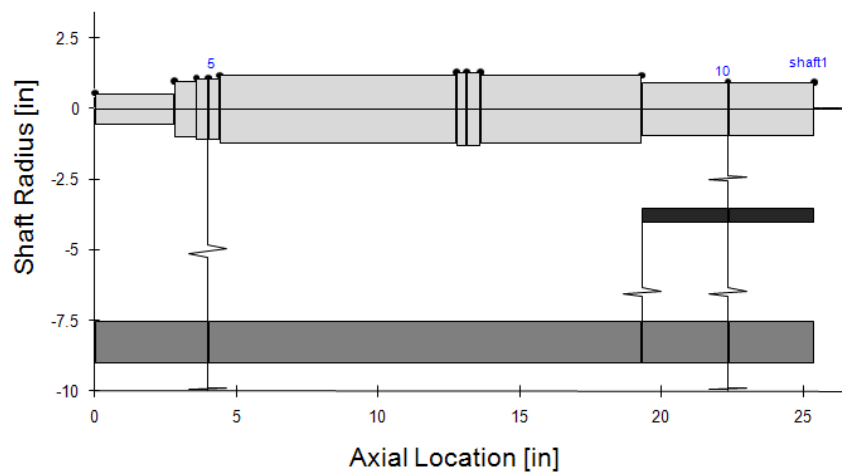


Figura 6.53: Modelo de elementos finitos empleado en XLRTC².

El comportamiento dinámico deseado para el sistema es la obtención de modos de vibración “rígidos” de manera tal que no produzcan desfases en las señales de los sensores de desplazamiento por la existencia de “modos de flexión”. A fin de representar el eje de la manera más precisa posible para evitar inconvenientes derivados de una pobre estimación de su rigidez (Swanson, 1998), se ha generado un modelo 3D de la zona de ajuste con el manguito. Al conjunto eje-manguito ajustado se le aplicaron cargas laterales con el objetivo de determinar su rigidez. Una vez determinada, se calculó el diámetro equivalente de sólido igualmente rígido para emplearlo en el modelo de XLRTC². En la Figura 6.54 se muestra el modelo 3D empleado para determinar la rigidez de ese segmento. Puede apreciarse que se ha considerado la precarga aplicada al dispositivo de centrado del manguito. La carga externa se aplica en el centro del cojinete.

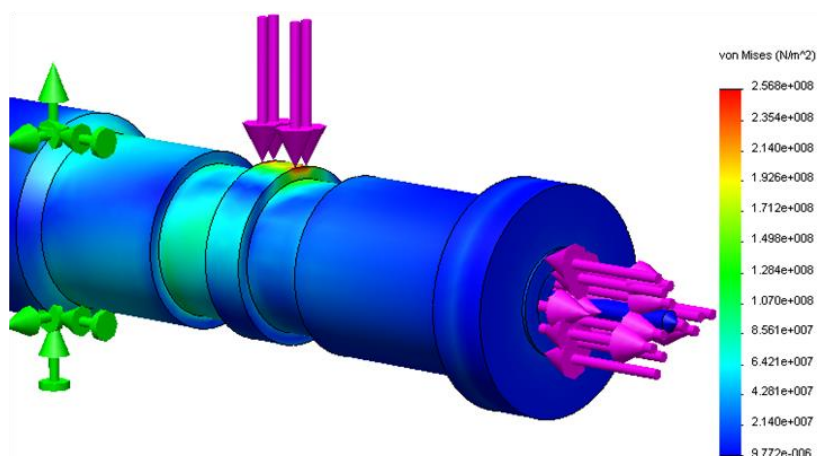


Figura 6.54: Modelo 3D para estimar el diámetro equivalente del extremo del eje.

La Figura 6.55 muestra el diagrama de Campbell para el sistema mostrado en la Figura 6.53 teniendo en cuenta las rigideces de los apoyos, mientras que en la Figura 6.56 se aprecia el único modo de vibración presente en el rango de operación del equipo, obtenido mediante análisis con amortiguamiento.

Análisis similares contemplando asimetría de los apoyos arrojan resultados análogos: un único modo rígido a muy baja frecuencia. Estos resultados indican que el equipo es apto para ensayos dinámicos de cojinetes hidrodinámicos.

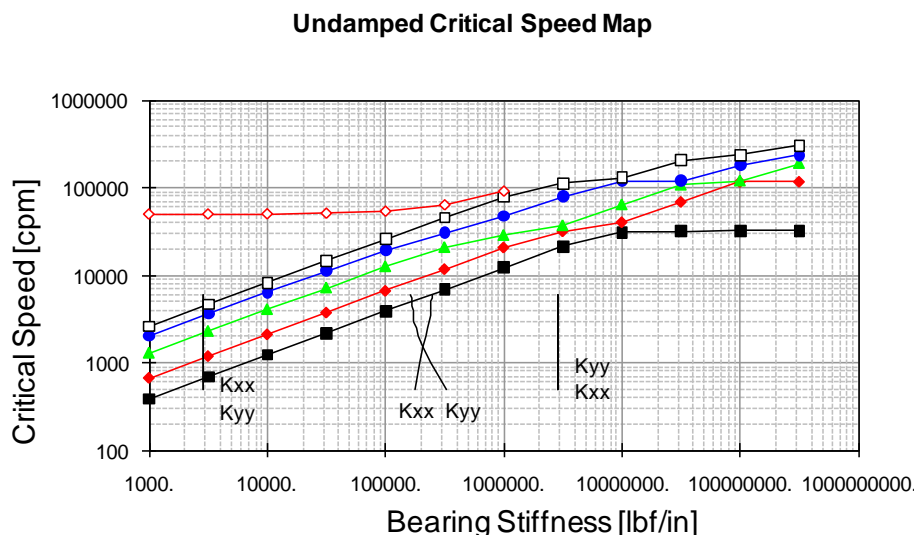


Figura 6.55: Diagrama de Campbell obtenido mediante XLRTC² para las primeras seis críticas del sistema.

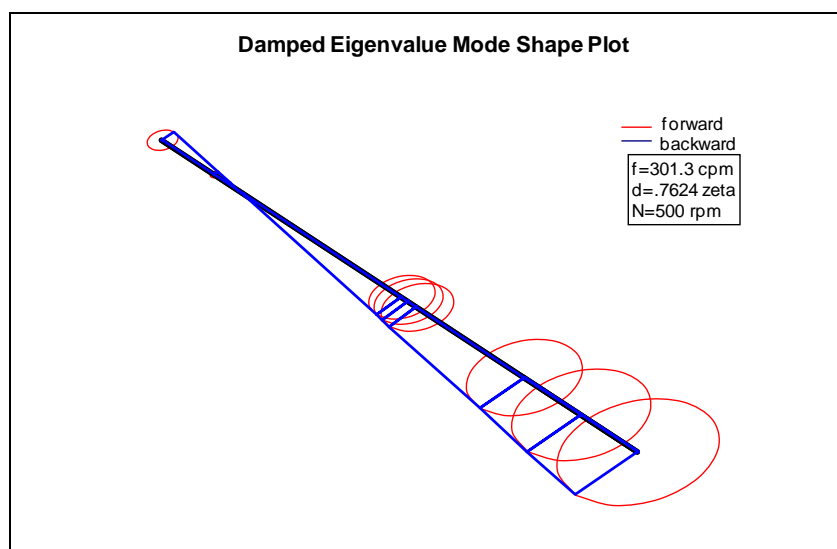


Figura 6.56: Único modo vibratorio del sistema presente en el análisis con amortiguamiento.

6.2.5. Sistema de Carga

Como última etapa en el desarrollo del banco de ensayo se encuentra el diseño y construcción de un sistema que sea capaz de simular las condiciones a las que está expuesto en la práctica un cojinete hidrodinámico. Esta parte, sin embargo, no se contempla dentro de este trabajo de tesis, sino que será realizada como parte del trabajo que le continúa. En esa etapa, y de forma comparable a lo expuesto respecto de los estudios realizados en el TurboLab, se analizarán los estados de inestabilidad, los coeficientes de rigidez y amortiguamiento, y también la respuesta del sistema ante cargas de distintas naturaleza.

Para ello, es de interés que el banco sea capaz de generar las cargas que se describen a continuación.

- Carga rotante con frecuencia de giro independiente a la del eje del cojinete, y que pueda variar entre 1000 y 6000 rpm.
- Carga constante sobre el cojinete
- Carga *impacto*
- Carga *escalón*
- Carga con funcionalidad especificada

La Figura 6.57 muestra un esquema del diseño que se pretende materializar.

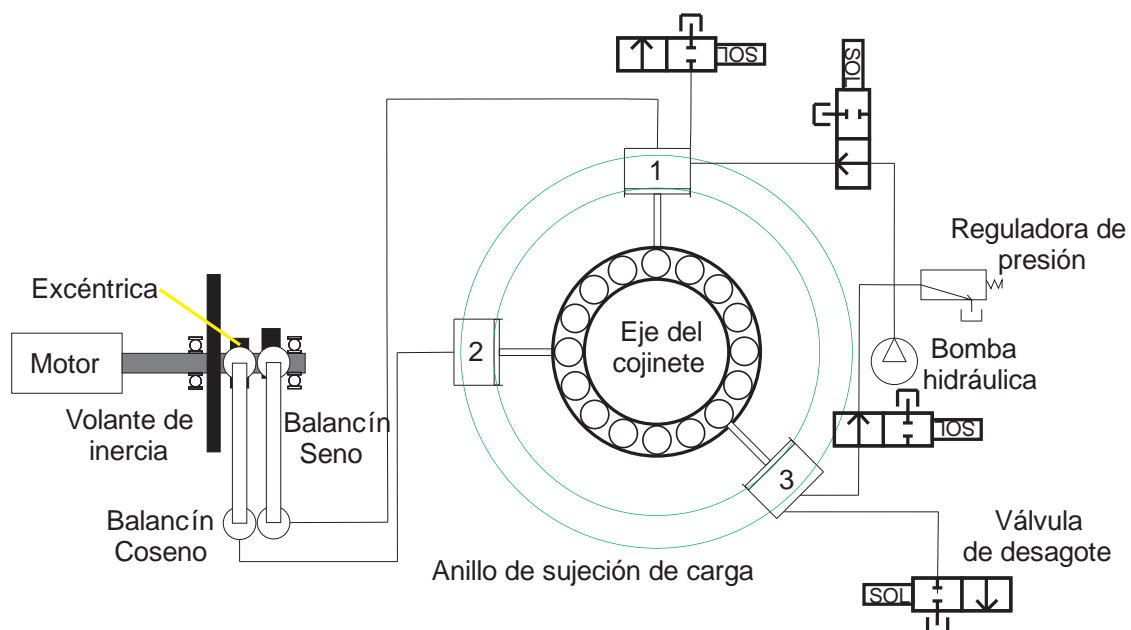


Figura 6.57: Esquema del sistema de carga.

Para la carga rotante, el cilindro 1 recibe pulsos de presión en forma sinusoidal, mientras que el cilindro 2 lo hace mediante una función coseno. El cilindro 3 genera la fuerza compensadora que permite centrar las funciones de fuerza de los cilindros 1 y 2 para propiciar la carga rotante. En el caso de carga escalón, los cilindros 1 y 3 se sitúan de manera que queden enfrentados. La bomba hidráulica los presuriza al valor deseado y luego se evacúa uno o el otro, según se requiera. Para la carga impacto, se presurizan los cilindros 1 y 3, tal cual la carga escalón, y seguidamente se desagotan en forma intercalada, de acuerdo al orden que se necesite.

6.2.6. Construcción del Banco

Las Figuras 6.58 a 6.63 muestran, a modo de ejemplo, algunas imágenes de la evolución

del banco de ensayo durante su construcción en instalaciones de PLAPIQUI (Bahía Blanca) y finalmente instalado en el Laboratorio de Mecánica de Fluidos de la UNPSJB.

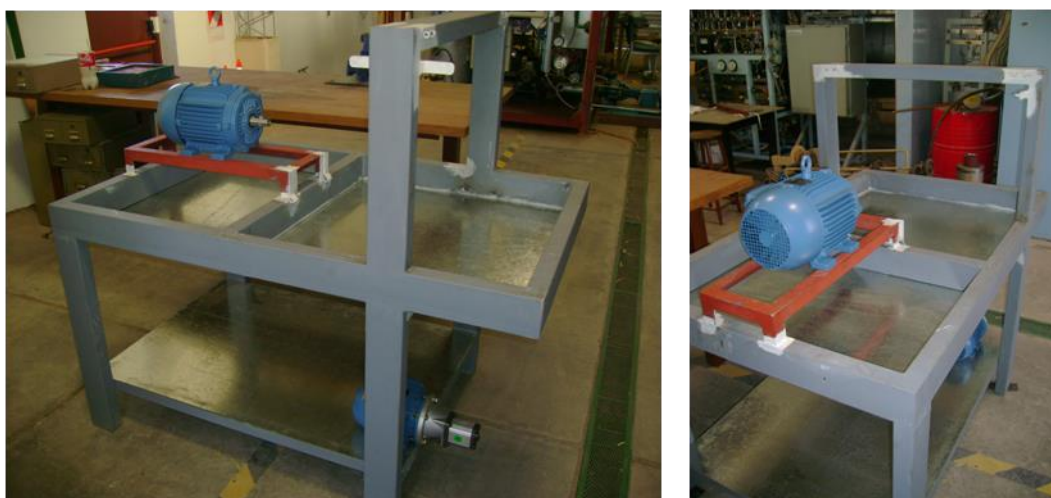


Figura 6.58: Bastidor del banco de ensayo.

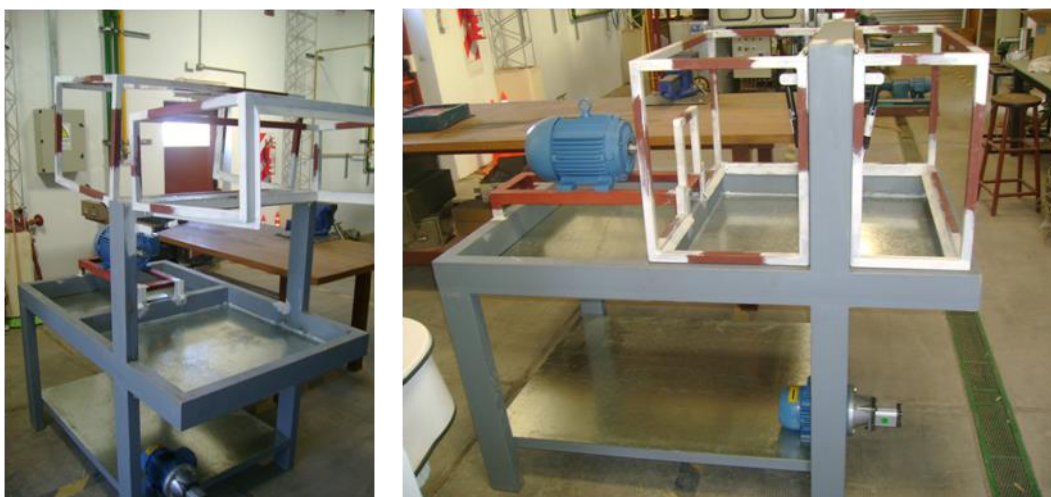


Figura 6.59: Bastidor del banco de ensayo con la incorporación de las compuertas de protección.



Figura 6.60: Estructura del banco pintada y lista para el montaje de los elementos mecanizados.



Figura 6.61: Imagen lateral del equipo construido con el compartimento del cojinete cerrado.



Figura 6.62: Imagen lateral del equipo construido con el compartimento del cojinete abierto.

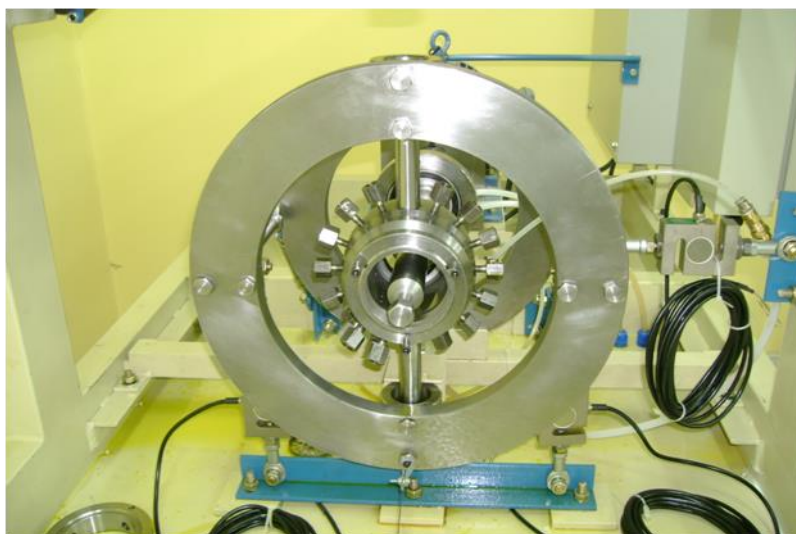


Figura 6.63: Imagen del cojinete instrumentado.

6.2.7. Estado Actual del Banco

El banco de ensayo se encuentra íntegramente construido y en funcionamiento, restando sólo el ensamble del sistema que sea capaz de reproducir las condiciones de trabajo a las que están expuestos comúnmente los cojinetes. Por el momento solamente es posible la determinación de los parámetros termohidrodinámicos (presión y temperatura), carga y posición del eje, para fuerza aplicada de dirección y magnitud constante.

La Figura 6.64 muestra el equipo en el estado actual, con todos los sistemas operativos, mientras que las Figuras 6.65 y 6.66 muestran el banco en funcionamiento.



Figura 6.64: Banco de ensayo operativo.



Figura 6.65: Tablero del banco en funcionamiento. Se aprecia el manómetro indicando la presión de suministro (en 65 Psi) y la frecuencia de giro del motor (en 50Hz).

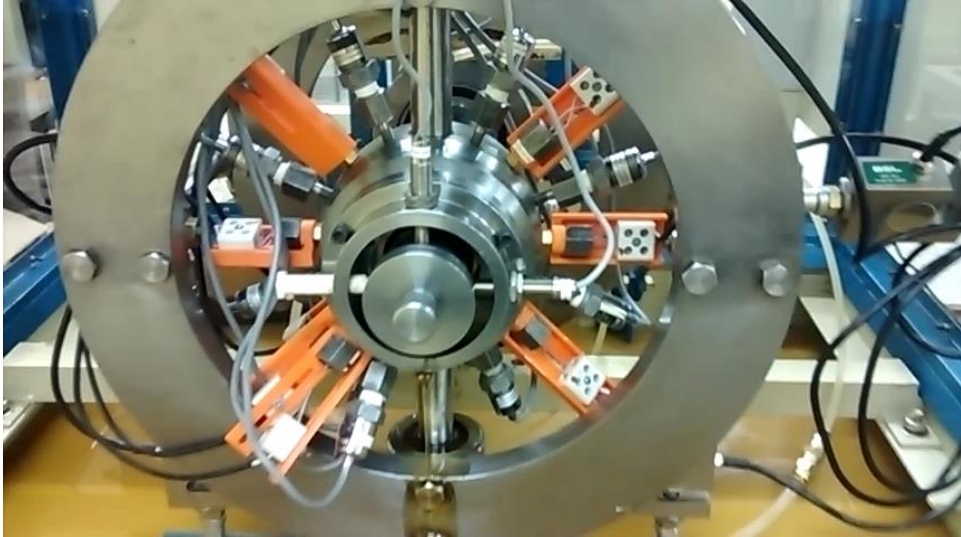


Figura 6.66: Equipo en funcionamiento. Se aprecia cómo el excedente de aceite escurre por los extremos del cojinete.

La Figura 6.67 presenta una imagen del proceso de verificación del huelgo mediante un comparador. En este procedimiento se carga el rotor con una fuerza de 25 kg (para no producir daño en el cojinete de bronce) sobre el cojinete en cuatro posiciones diferentes:

- 1- rotor centrado horizontalmente y apoyado en la superficie inferior del cojinete,
- 2- rotor centrado horizontalmente y apoyado en la superficie superior del cojinete,
- 3- rotor centrado verticalmente y apoyado en la superficie lateral derecha del cojinete, y
- 4- rotor centrado verticalmente y apoyado en la superficie lateral izquierda del cojinete.

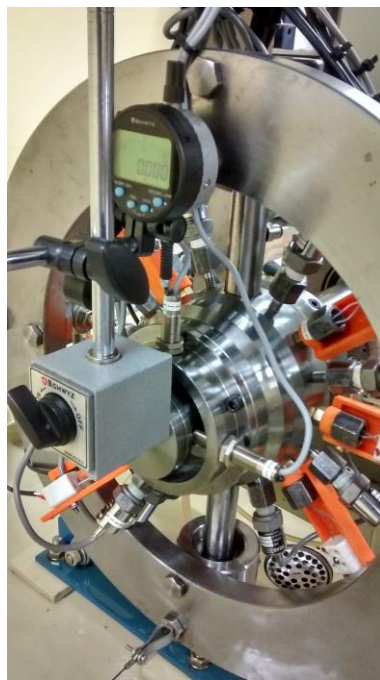


Figura 6.67: Proceso de determinación del centro del cojinete.

En cada posición se determinan simultáneamente las señales de los sensores de posición, de las celdas de carga y la medida indicada por el comparador. De estas cuatro operaciones se determina el huelgo vertical y horizontal entre muñón y cojinete y la posición del muñón en la que se encuentra centrado.

6.2.8. Resultados de los Ensayos Realizados

En esta Sección se muestran los resultados obtenidos de la primer tanda de ensayos realizados sobre el banco. Los mismos fueron efectuados a velocidad y carga limitadas ya que el objetivo primordial fue evaluar el desempeño de los sistemas del equipo.

Para ello se utilizó el cojinete de 55mm de diámetro nominal y $L/D=1$, que tiene una relación $R/c = 393,86$ como se listara en la Tabla 6.7, y un aceite lubricante SAE 15W40, cuyas características se listan en la Tabla 6.12. La temperatura de entrada del aceite fue siempre de 40°C.

Tabla 6.12: Propiedades del lubricante usado en los ensayos³

μ_0	0,057 Pa.s
ρ	865 kg/m ³
β_0	0,03 K ⁻¹
k	0,130 W/m K
\hat{C}_v	2000 J/kg K

Los ensayos se realizaron considerando tres velocidades de giro:

$$\omega \rightarrow 1150 - 1440 - 1730 \text{ rpm} \tag{22}$$

y tres unidades de carga unitaria estática a cada velocidad:

$$\text{carga} \rightarrow 0 - 100 - 180 - 255 \text{ kg} . \tag{23}$$

Ello define las velocidades lineales, $U = 2\pi RN$, números de Reynolds, $Re = \frac{\rho UR}{\mu}$,

presiones de referencia, $P_{ref} = \frac{\mu_0 U}{R} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2$, temperaturas de referencia,

$T_{ref} = \frac{\mu_0 U}{\rho \hat{C}_v R} \left(\frac{R}{c}\right)^2$, presiones proyectadas, $P_p = \frac{F}{2RL}$, y números de Sommerfeld,

³ Resultados brindados por el Laboratorio de Análisis de la firma Mero (29/02/16).

$S = \frac{\mu U}{P_p R} \left(\frac{R}{c} \right)^2$, que se listan en la Tabla 6.13. F_{teo} son las cargas teóricas y F_{med} son las medidas en los ensayos, empleadas en los cálculos subsiguientes.

Tabla 6.13: Condiciones experimentales cubiertas en los ensayos

ω [rpm]	U [m/s]	Re	P_{ref} [MPa]	T_{ref} [K]	F_{teo} [kg]	F_{med} [kg]	P_p [MPa]	S
1150	3,31	1380	4,26	0,616	100	101	0,326	3,26
					180	177	0,575	1,85
					255	255	0,826	1,29
1440	4,15	1730	5,33	0,771	100	102	0,329	4,05
					180	191	0,620	2,15
					255	251	0,814	1,64
1730	4,98	2080	6,41	0,926	100	101	0,326	4,91
					180	181	0,587	2,73
					255	262	0,850	1,88

En cada ensayo se procede fijando la velocidad del rotor y la presión de suministro de aceite (establecida en 4bar para todos los ensayos) y se aplica carga gradualmente hasta que la medición de las celdas de carga indica el valor buscado. Luego se mide la posición relativa entre rotor y cojinete (con lo que se calculan las excentricidades del cojinete respecto del rotor en ambas direcciones generales x e y , y el ángulo de posición), las temperaturas en la superficie del cojinete y las presiones en la película fluida.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de las mediciones.

Excentricidad y Ángulo

La Figura 6.68 muestra las excentricidades relativas ($\eta=e/c$), vertical y horizontal, calculadas en los nueve ensayos a partir de las posiciones medidas del rotor. Los valores se presentan organizados por velocidad del rotor, siendo mayores cuanto mayor es la carga estática utilizada.

La Tabla 6.14 lista los valores de excentricidad relativa, $\eta = (\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2}$, así como los de los ángulos de desplazamiento del rotor (η_x/η_y), calculados a partir de los datos de la Figura 6.68. Puede apreciarse que el ángulo de desplazamiento es significativo en todos los casos, indicando que las reacciones cruzadas del cojinete también lo son. Asimismo, se aprecia que a mayor carga estática, mayor es el desplazamiento global, y que a mayor velocidad de rotación, mayor es el ángulo. El ángulo máximo es de $\sim 55^\circ$ para 1730 rpm.

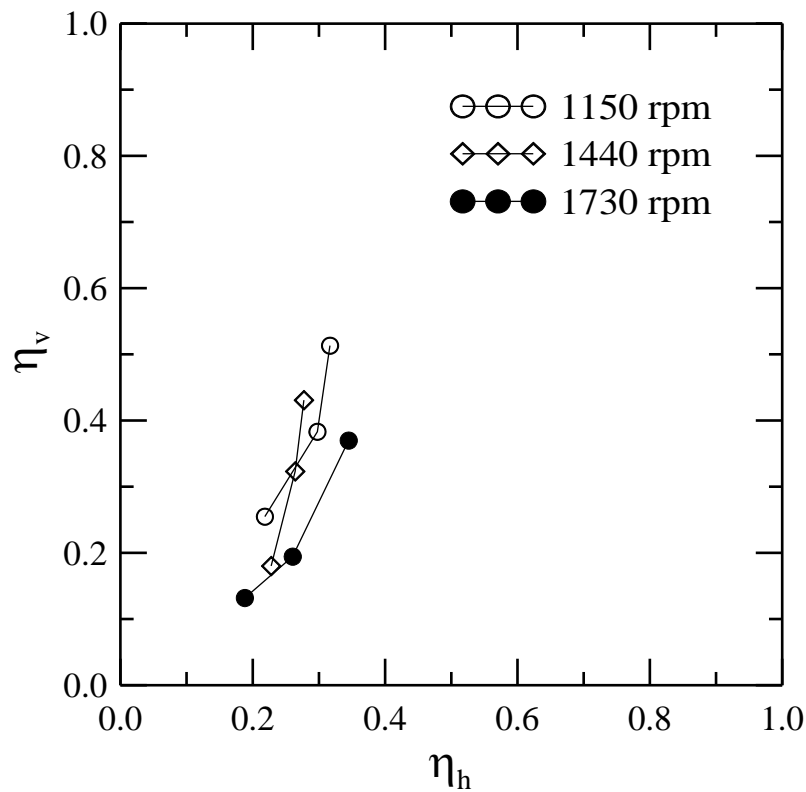


Figura 6.68: Excentricidades relativas medidas en las distintas condiciones de ensayo.

Tabla 6.14: Excentricidades y ángulos de desplazamiento medidos.

ω [rpm]	F [kg]	η	ϕ [°]
1150	100	0,34	40,6
	180	0,49	37,8
	255	0,60	31,7
1440	100	0,29	51,7
	180	0,42	39,3
	255	0,51	32,8
1730	100	0,23	54,9
	180	0,32	53,3
	255	0,51	43,0

La Figura 6.69 muestra ahora la excentricidad relativa en función del número de Sommerfeld (ver Tabla 6.13). Cada punto indica una condición de ensayo distinta (carga estática - velocidad). Puede apreciarse que, al igual que en los ensayos realizados en el Turbolab con el TPJB, a medida que el número de Sommerfeld disminuye (ya sea por mantener la velocidad aumentando la carga, o por disminuir la velocidad de rotación manteniendo la carga) aumenta la excentricidad. El ajuste de los datos a una relación potencial resulta en $S \approx 10,2 \eta^{-3,50}$. Además, al igual que ocurriera con los resultados obtenidos en el Turbolab, se observa que iguales valores de S producen iguales

excentricidades, independientemente del estado de carga y velocidad. En el gráfico también se incluye la relación entre S y η obtenida numéricamente por Raimondi y Boyd (1958). Se observa que la correlación con los resultados de Raimondi y Boyd es muy buena. El leve desplazamiento puede atribuirse al modelo térmico simplificado empleado por estos autores.

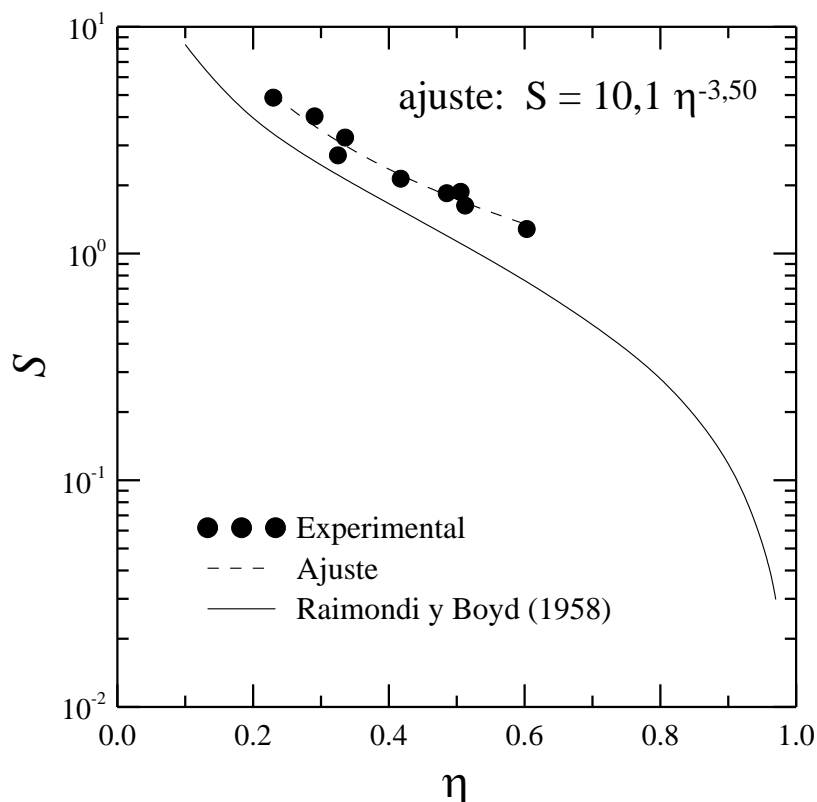


Figura 6.69: Número de Sommerfeld en función de la excentricidad relativa determinados experimentalmente. Comparación con resultados de Raimondi y Boyd.

Por otro lado, la Figura 6.70 vuelve a mostrar los datos de la Figura 6.69 pero esta vez en forma de número de Ocvirk, $O = S \left(\frac{L}{R} \right)^2$, superponiéndolos con los valores calculados con los modelos del ISJB, de P+O-pert y la solución numérica de la Ecuación de Reynolds para el cojinete de $L/D=1$ que ya se presentaron en la Figura 4.3. Cabe recordar que la solución numérica de Raimondi y Boyd emplea una CB de Reynolds para considerar la cavitación mientras que la solución numérica calculada usa la CB de Gumbel. Por otro lado, como ya se viera en el Capítulo 5, la solución numérica del cojinete no-isotérmico predice valores de presión menores que para el caso isotérmico (ver Figuras 5.9 y 5.16) por lo que es de esperar que los datos experimentales de S (u O), que son proporcionales a $1/P_p$, sean mayores a las predicciones isotérmicas.

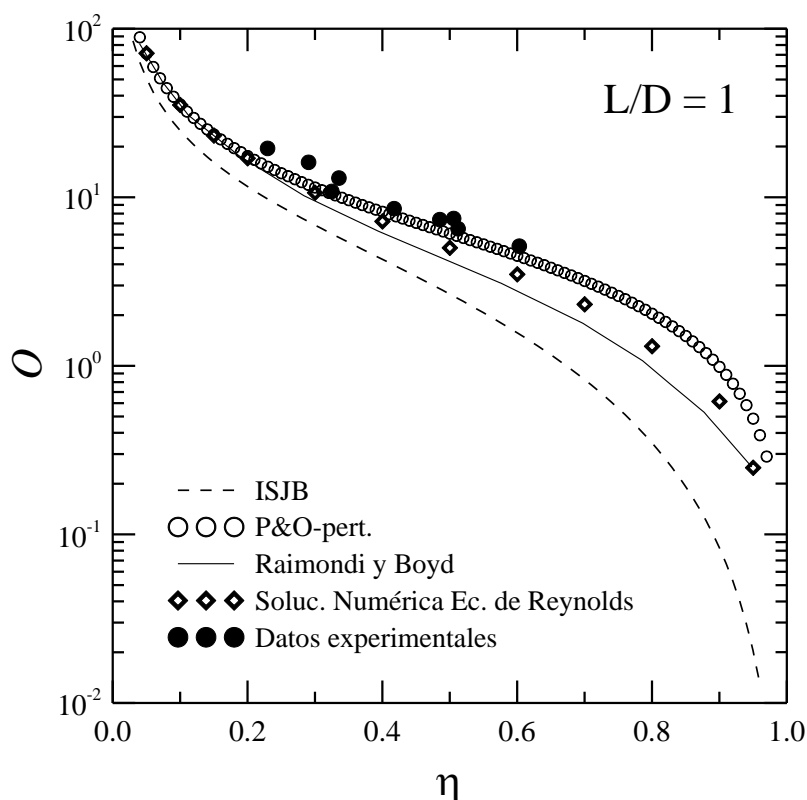


Figura 6.70: Número de Ocvirk en función de la excentricidad relativa. Comparación con predicciones de modelos presentados en la Figura 4.3.

Presión

La Figura 6.71 muestra las presiones manométricas alcanzadas en la película fluida sobre el plano axial medio del cojinete a carga constante y para distintas velocidades de giro. Puede apreciarse que los perfiles de cada gráfico, que corresponden a una misma carga, no difieren sensiblemente entre sí. Esto se explica por el hecho de que la capacidad portante del cojinete resulta de la integración de la presión. Por ende, al aumentar la carga para una misma velocidad de giro, la presión aumenta para lograr mayor capacidad portante. Además, se observa que el perfil de presión pierde simetría a medida que se aumenta la carga, desplazándose la posición del valor máximo hacia ángulos mayores (se desplaza hacia la derecha). Cabe señalar que para todos los gráficos, el valor del ángulo está medido respecto de la ranura de suministro de aceite (posición de aplicación de la carga) en el sentido de giro del rotor, lo que produce que los perfiles se desarrollen hasta pasados los 270° . No obstante, al observar el desplazamiento angular de la línea de centros respecto de la vertical (ϕ) mostrada en la Tabla 6.14, y considerando que la presión de suministro empleada para todos los ensayos fue de 4bar, se aprecia que en el inicio de la zona divergente, $(\theta + \phi) > \phi$, la presión en la película se corresponde con la de

suministro.

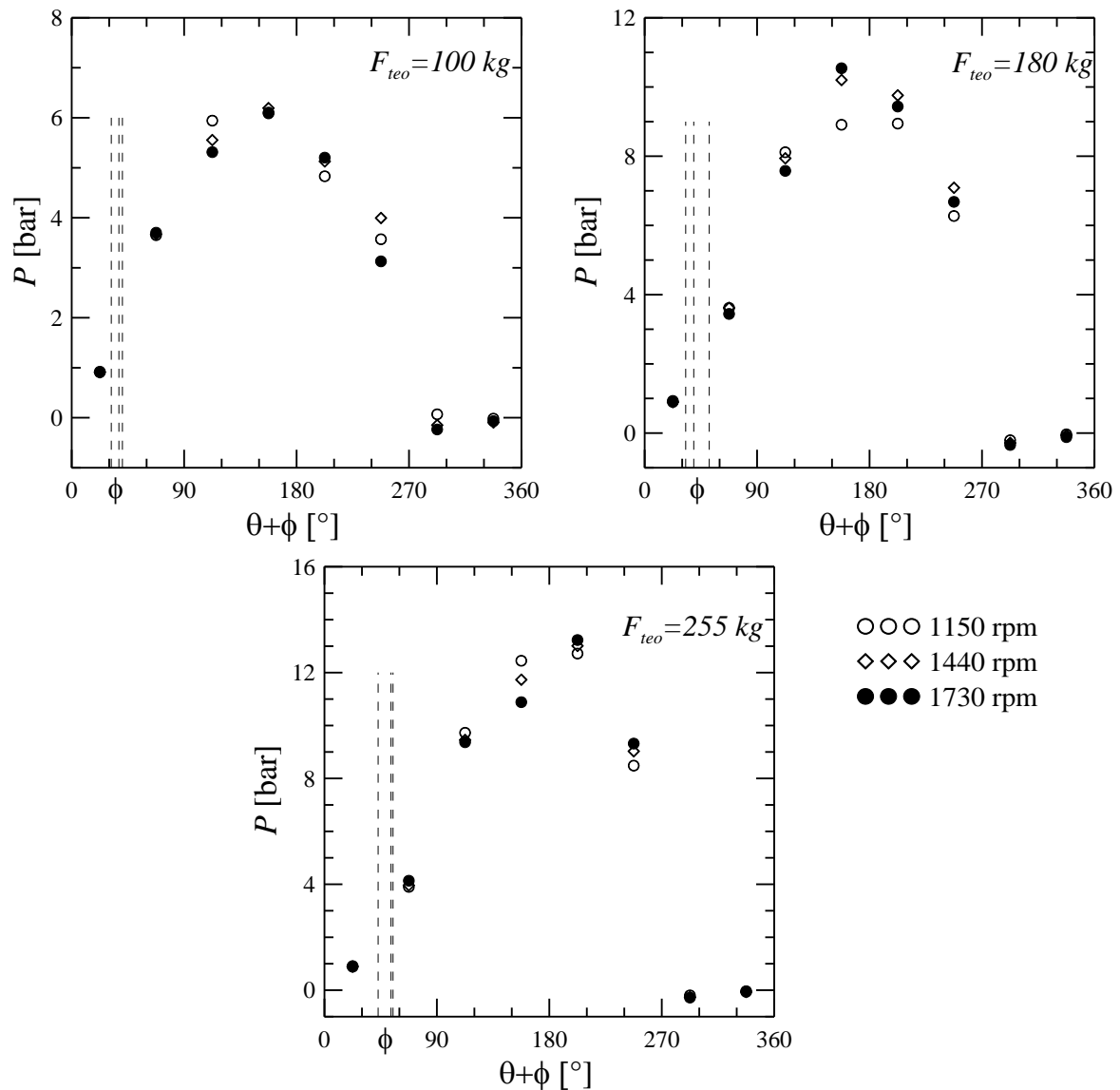


Figura 6.71: Perfiles de presión circunferenciales obtenidos en $z=0$ a carga constante usando distintas velocidades de giro.

Los datos de la Figura 6.71 se vuelven a presentar en la Figura 6.72, esta vez adimensionalizando cada perfil con el valor de P_{ref} correspondiente (ver Tabla 6.13) y en función del ángulo adimensional Θ . En esta presentación las curvas ya no se superponen para una dada carga sino más bien para una dada excentricidad relativa. Puede observarse que, al igual que sucediese con los resultados numéricos mostrados en la Fig. 5.21, al aumentar la excentricidad se produce el doble efecto de un incremento en el valor máximo de presión adimensional y su corrimiento hacia la derecha. Ello produce que la pendiente con la que el perfil entra en la zona de cavitación sea mayor según lo sea la excentricidad.

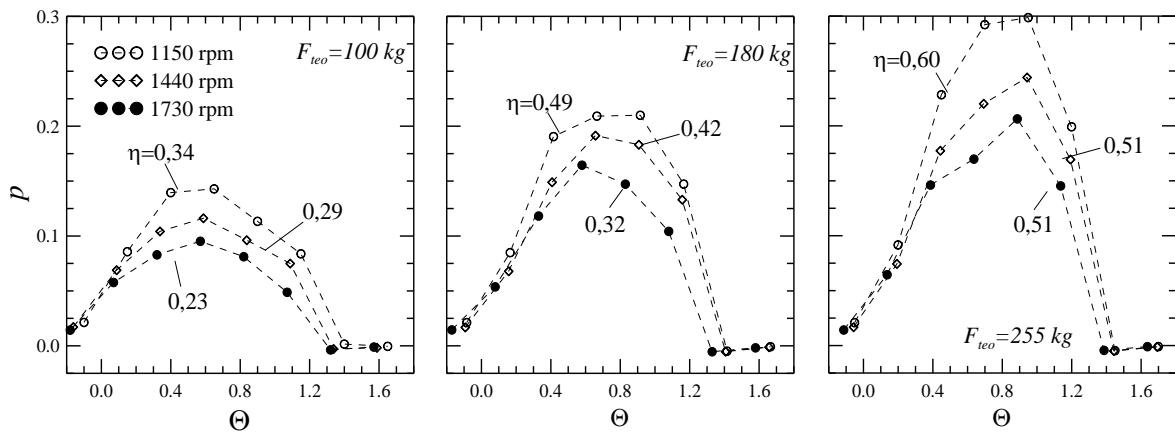


Figura 6.72: Perfiles de presión adimensional equivalentes a los de la Figura 6.71. Se señala junto a cada curva el valor de excentricidad medido en cada caso.

Por otro lado, la Figura 6.73 presenta los valores de presión medidos en distintas posiciones axiales, a $202,5^\circ$ de la ranura de suministro de aceite (en el sentido de giro del rotor), para una carga de 255 kg y distintas velocidades de rotación. Para otras condiciones operativas los resultados son similares. Se observa la existencia de un valor máximo de presión en el centro y un descenso suave y gradual hacia los bordes. La figura de la derecha presenta los tres mismos perfiles de presión pero adimensionalizados con sus P_{ref} respectivos y en función de la posición axial adimensional z . Al comparar cualitativamente las curvas con las correspondientes a la solución numérica de la

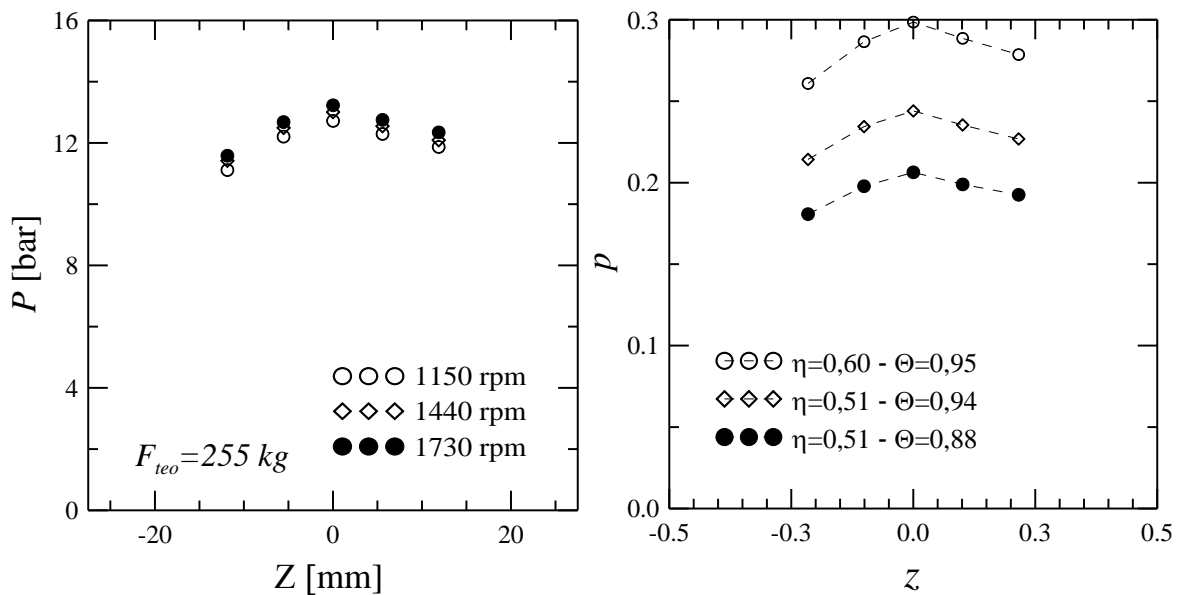


Figura 6.73: Perfiles de presión axiales obtenidos usando distintas velocidades de giro y 255 kg de carga. A la derecha se presentan los perfiles adimensionales.

Ecuación de Reynolds para $L/D=1$ y $\eta=0,5$ presentadas en las Figuras 5.8 y 5.11 (para una posición adimensional $\Theta=0,5$), se observa que los datos experimentales señalan una variación más lineal y suave con la posición axial. Esto puede atribuirse a que la posición en la que se toman los perfiles axiales experimentales ($\Theta \approx 0,9$) se encuentra cercana al inicio de la cavitación y tal vez se presente alguna influencia no contemplada en las simulaciones.

Temperatura

La Figura 6.74 muestra las temperaturas medidas sobre la superficie del cojinete, en su plano axial medio, a carga constante y para distintas velocidades de giro. Se observa que la temperatura aumenta con ω aunque prácticamente no cambia con la magnitud de la carga (existe un incremento pero muy leve) El aumento de la velocidad de giro afecta sensiblemente la temperatura debido al incremento en las tensiones de corte (la disipación viscosa es proporcional al cuadrado de éstas). Los datos de la Figura 6.74 se vuelven a presentar en la Figura 6.75 pero en forma adimensional, usando las correspondientes T_{ref} (ver Tabla 6.13) y en función del ángulo adimensional Θ . De esta manera se hace más notable el incremento de temperatura que sufre el lubricante. Puede apreciarse que, a pesar de que todos los experimentos se realizaron en iguales condiciones de suministro (40°C), los perfiles de temperatura sobre el cojinete muestran un valor inicial distinto en función de las características de cada ensayo. Ello se debe a que el conjunto cojinete-porta cojinete tiene una capacidad limitada para evacuar calor al medio, requiriendo de un incremento en su temperatura según sea la cantidad de energía que recibe del fluido. Además, se observa que la temperatura aumenta con la posición, rubricándose la hipótesis presentada en el Capítulo 4 de que la mayor parte del calor generado por el fluido es llevado por el mismo según va fluyendo.

Cabe recordar que la disipación producida en el flujo depende de la viscosidad y de la pendiente de los perfiles transversales de velocidad. Esta última se ve afectada tanto por la velocidad del muñón como por la excentricidad. No obstante, la influencia de la excentricidad parece compensarse con el efecto producido por el cambio en la viscosidad, mientras que la velocidad del rotor se muestra como la variable dominante sobre los perfiles de temperatura.

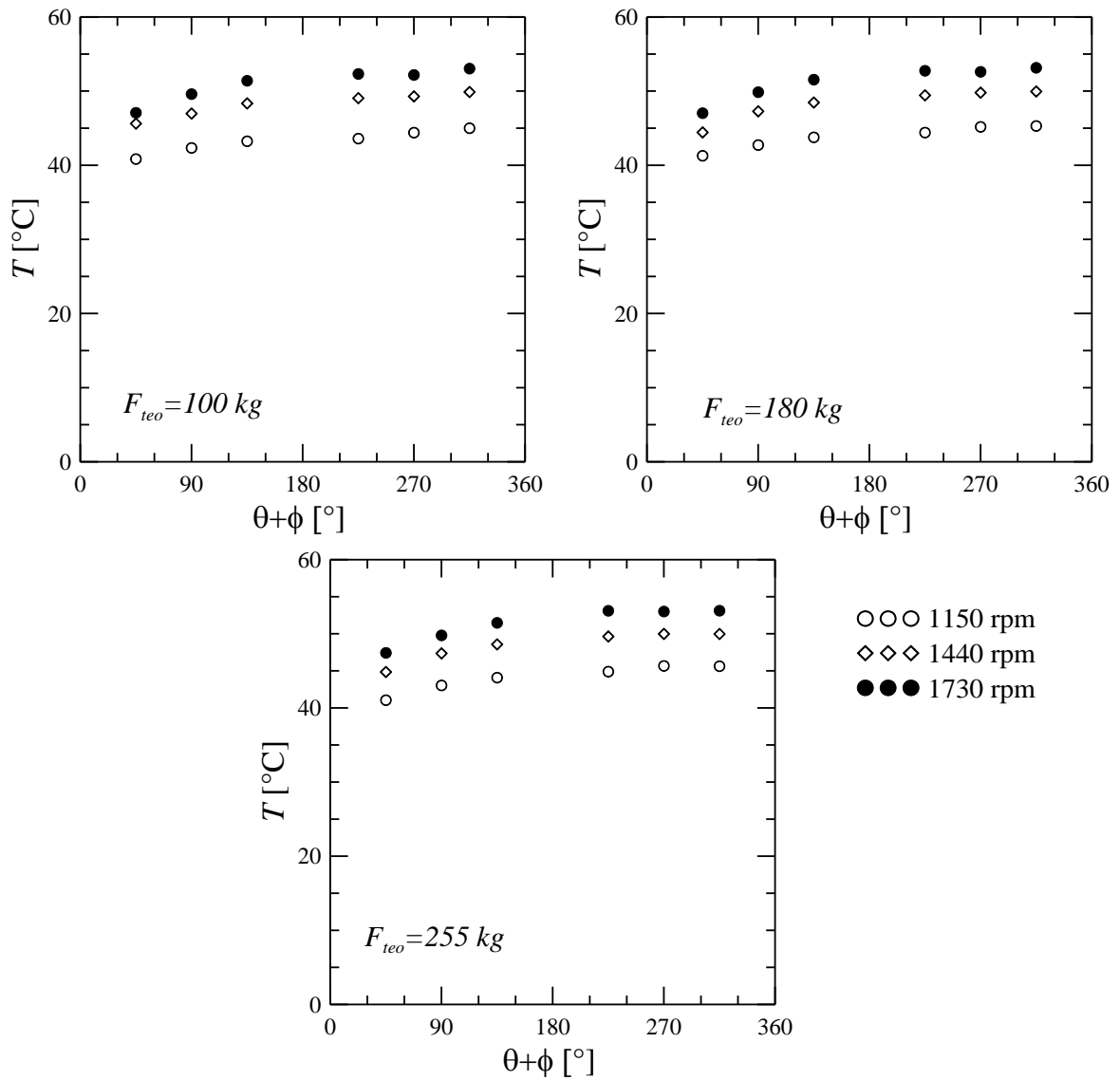


Figura 6.74: Perfiles de temperatura circunferenciales obtenidos en $z=0$ a carga constante usando distintas velocidades de giro.

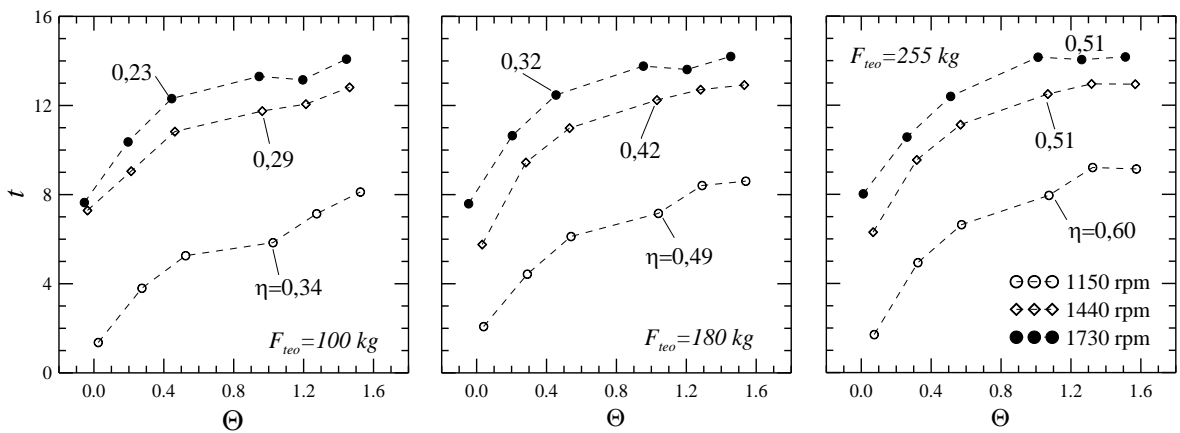


Figura 6.75: Perfiles de temperatura adimensionales equivalentes a los de la Figura 6.74. Se señala junto a cada curva el valor de excentricidad correspondiente a cada ensayo.

La Figura 6.76 ilustra la variación de temperatura axial, medida a 225° de la ranura de suministro de aceite, en el sentido de giro del rotor para una carga de 255 kg y distintas velocidades de rotación. Para todas las condiciones ensayadas se observa un perfil axial de temperatura prácticamente constante.

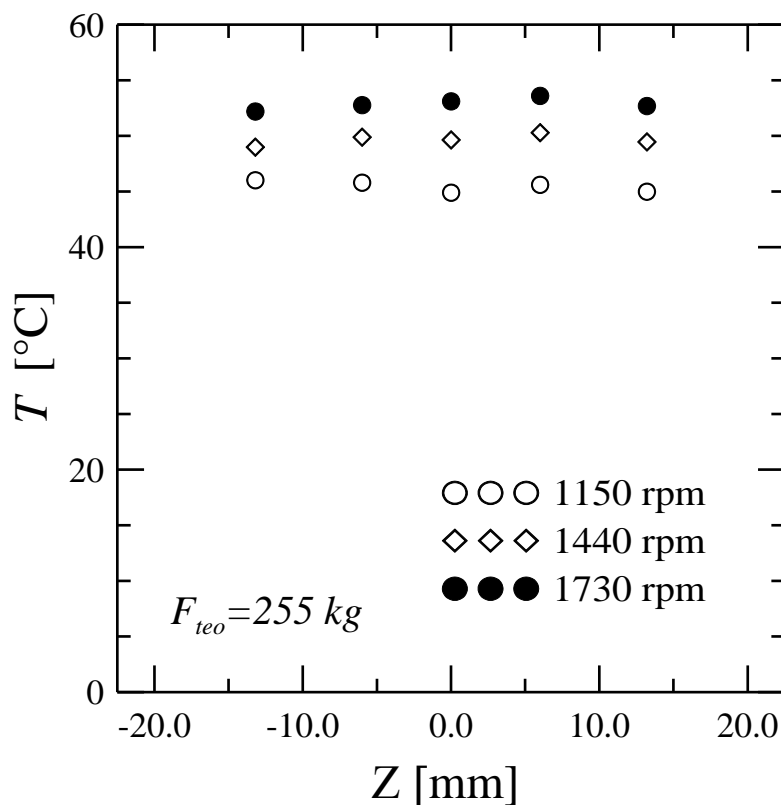


Figura 6.76: Perfiles de temperatura axiales a velocidad de giro constante y distintas cargas aplicadas.

6.2.9. Comparación con resultados numéricos

A continuación se comparan los resultados obtenidos en el ensayo a 1730 rpm y 180 kg de carga y su correspondiente simulación numérica con el programa THD presentado en el Capítulo 5 usando las propiedades del lubricante listadas en la Tabla 6.12 y las condiciones de trabajo enunciadas en la Tabla 6.13. Las condiciones iniciales de presión y temperatura para la simulación se corresponden con las empleadas en el ensayo (4bar y 40°C).

La Figura 6.77 muestra los perfiles, medido y calculado, de presión en el plano axial medio del cojinete en función del ángulo adimensional Θ . Cabe recordar que el algoritmo desarrollado no contempla aún la región divergente del flujo, por lo que la temperatura del muñón se ha fijado como la media de los resultados experimentales obtenidos. Asimismo, la excentricidad empleada se corresponde con la reportada en la Tabla 6.14 para las condiciones escogidas ($\eta = 0,32$ y $\phi = 53,3^\circ$). En forma equivalente, la Figura 6.78 muestra los perfiles,

medido y calculado, de temperatura en el plano axial medio del cojinete.

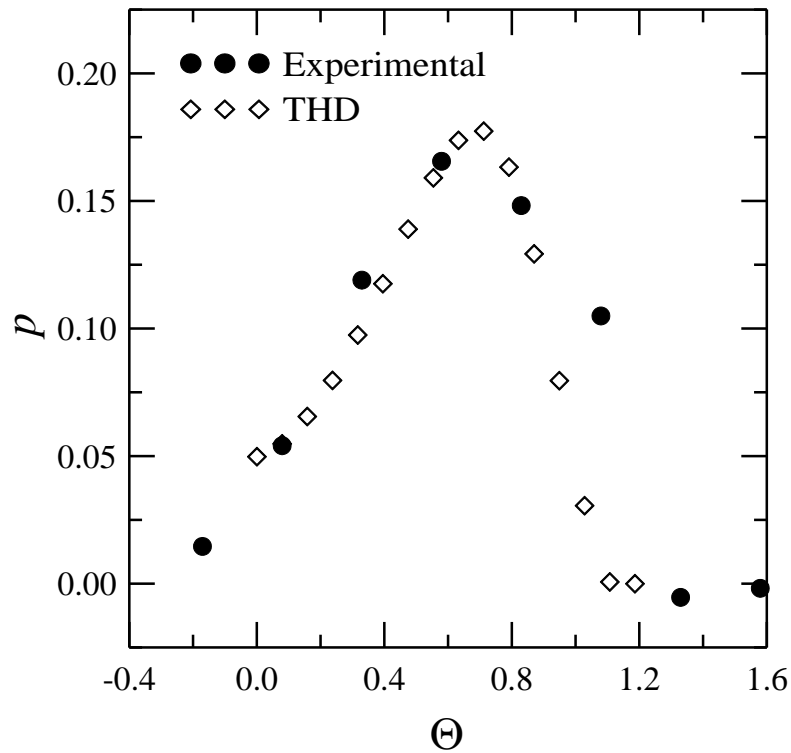


Figura 6.77: Presión adimensional sobre el plano axial medio. Comparación con la predicción del modelo THD.

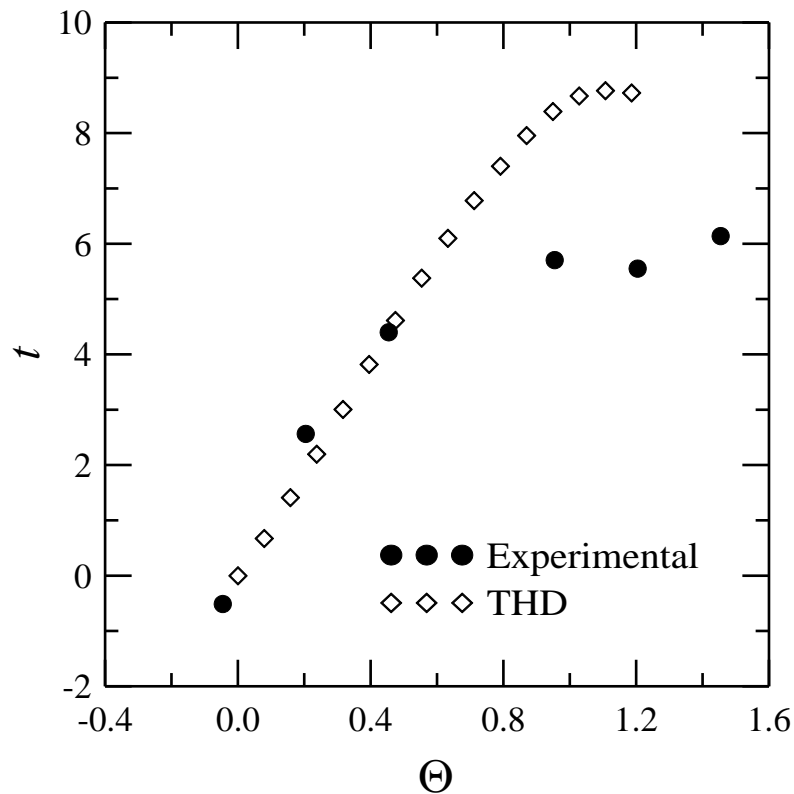


Figura 6.78: Temperatura adimensional sobre el plano axial medio. Comparación con la predicción del modelo THD.

Puede apreciarse que los valores tanto de presión como de temperatura son razonablemente bien descritos por el modelo teórico, sobre todo considerando las actuales limitaciones del programa. Se observa que la temperatura estimada con el modelo es ligeramente mayor a la medida, producto de la omisión de la transferencia de calor al medio en la superficie del cojinete. La correlación en el perfil de presión muestra buena correspondencia en todo el rango, indicando que la excentricidad considerada está en concordancia con la carga aplicada.

6.2.10. Conclusiones

Por lo expuesto en los apartados previos, puede concluirse que el diseño y fabricación del banco de ensayo de cojinetes ha resultado en un sistema que en la actualidad se encuentra plenamente operativo. Del mismo se han obtenido resultados experimentales de acuerdo a lo esperado y, lo más importante, pueden aún obtenerse un sinnúmero de datos tanto para validar y profundizar los modelos matemáticos propios, como para aportar a la limitada base de datos experimentales que pueden hallarse en la bibliografía. Claro está que puede y debe seguirse trabajando en pos de mejorar las aptitudes del banco, pero se entiende que se cuenta al momento con una base sólida para futuros desarrollos en el tema.

REFERENCIAS

- Ball, J. H. y Byrne, T.R., *Tilting Pad Hydrodynamic Bearing for Rotating Machinery*, Patent Number 5,795,076, Orion Corporation, Grafton, Wisconsin, 1998.
- Carter, C., y Childs, D., Measurements versus Predictions for the Rotordynamic Characteristics of a 5-Pad, Rocker-Pivot, Tilting-Pad Bearing in Load Between Pad Configuration, *Proceedings of ASME Turbo Expo 2008*, Paper GT2008-50069, June 9-13, Berlin, Germany, 2008.
- Childs, D., *Dynamics in Engineering Practice*, eighth edition, McGraw Hill, 2008.
- Childs, D., *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis*, Wiley-Interscience, 1993.
- Childs, D., y Hale, K., A Test Apparatus and Facility to Identify the Rotordynamic Coefficients of High-Speed Hydrostatic Bearings, *ASME J. of Trib.*, 116, pp. 337-344, 1994
- Gliencke, J., Experimental Investigation of Stiffness and Damping Coefficients of Turbine Bearings and Their Application to Instability Predictions, *Proceedings of the International Mech. E.*, 181 (3B), pp. 116-129, 1966.
- ISO 281. Rolling bearings - *Dynamic load ratings and rating life*, 2007.
- Karabay, S., Design Criteria for Electro-Mechanical Transducers and Arrangement for Measurement of Strains Due to Metal Cutting Forces Acting on Dynamometers, *Materials and Design*, Vol XXVIII, pp. 496–506, 2007.
- Kaul, A., *Design and Development of a Test Setup for the Experimental Determination of the Rotordynamic and Leakage Characteristics of Annular Bushing Oil Seals*, M.S. Thesis, Texas A&M University, College Station, TX, 1999.
- Kulhanek, C., *Dynamic and Static Characteristics of a Rocker-Pivot, Tilting-Pad Bearing With 50% and 60% Offsets*, M.S. thesis, Mechanical Engineering, Texas A&M University, College Station,

TX, 2010.

MTI-Instruments Tech Notes, *Non-Contact Displacement Measurement Using Inductive (Eddy Current) Sensors*, MTI Instruments Inc., 2007, www.mtiinstruments.com

Parsell, J. K., Allaire, P. E. y Barrett, L. E., Frequency Effects in Tilting-Pad Journal Bearing Dynamic Coefficients, *ASLE Trans.*, 26(2), pp. 222–227, 1982.

Raimondi, A.A., y Boyd, J., A Solution for the Finite Journal Bearing and Its Application to Analysis and Design-III, *Trans. ASLE*, Vol. 1, No. 1, 1958.

Rouvas, C., y Childs, D., A parameter Identification Method for the Rotordynamic Coefficients of a High Reynolds Number Hydrostatic Bearing, *ASME J. of Vibration and Acoustics*, 115, pp. 264-270, 1993.

Swanson, E.E., *Design and Evaluation of an Automated Experimental Test Rig for Determination of the Dynamic Characteristics of Fluid-Film Bearings*, PhD Thesis Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

La presente tesis ha abarcado tres aspectos fundamentales del estudio de cojinetes hidrodinámicos:

- el estudio analítico del fenómeno físico-matemático,
- el tratamiento numérico de las ecuaciones que describen su funcionamiento, y
- el análisis experimental de su desempeño.

En cada aspecto tratado se ha profundizado hasta la obtención de al menos una propuesta que permita lograr resultados propios, y en muchos casos mediante métodos inéditos. En todos ellos se ha buscado el contraste con datos y métodos propuestos por otros investigadores. En este capítulo se resumen los hitos más relevantes del trabajo desarrollado y se plantean aquéllos que quedaron pendientes.

7.1 CONCLUSIONES

7.1.1 Estudio Analítico

El estudio de los cojinetes hidrodinámicos se ha abordado comenzando por la comprensión del fenómeno físico que produce presión en la película fluida y genera su capacidad portante. En este sentido, se plantearon las ecuaciones de conservación y se las trató mediante análisis dimensional para determinar sus términos dominantes y los valores característicos para la presión y la temperatura. La primera conclusión que se obtiene, al igual que lo dedujera Reynolds en 1886, es que las variaciones de presión en el espesor de la película fluida son despreciables en la mayoría de los casos. Asimismo, se observa que, dependiendo de la relación

L/D del cojinete, cambia la presión característica, pero no la temperatura característica. De este análisis se desprende también que el número de Sommerfeld es el cociente entre la presión característica y la presión proyectada para cojinetes largos y que con el mismo cociente para cojinetes cortos se obtiene el número de Ocvirk.

La integración en el espesor de película de los balances dominantes permite la obtención de la ecuación de Reynolds cuya solución analítica, incluso para el caso de flujo isotérmico y en estado estacionario, es aún desconocida. Sólo tienen solución exacta las aproximaciones para cojinetes infinitamente largos (ILJB) e infinitamente cortos (ISJB), las que fueron propuestas por Sommerfeld (1904) y por Ocvirk (1953) y llevan sus respectivos nombres. Los cojinetes de longitud finita ($L/D \approx 1$) deben tratarse numéricamente o mediante métodos analíticos aproximados.

Uno de los principales aportes del presente trabajo es la propuesta de una aproximación analítica para resolver la ecuación de Reynolds mediante el método de perturbación regular. Lo novedoso de la propuesta es que no sólo se realiza la expansión de la presión sino también se realiza la del número de Ocvirk. En este tratamiento ambas variables se expanden en serie usando el parámetro de perturbación $(L/D)^2$. La solución de orden cero (la que retiene sólo el primer término de cada serie) se corresponde con la solución de Ocvirk. La solución de orden uno, que contempla términos proporcionales a $(L/D)^2$, permite obtener una muy buena aproximación a la solución de la ecuación de Reynolds hasta valores de L/D cercanos a uno y excentricidades medias a altas. Esto resulta del hecho que los valores de capacidad portante, par de fricción y caudal obtenidos con este método son muy similares a los de la solución numérica de la ecuación de Reynolds isotérmica en ese intervalo. Parte de estos resultados han sido publicados en "Approximate Analytical Solution to Reynolds Equation for Finite Length Journal Bearings" de G. Vignolo, D. Barilá y L. Quinzani, Tribol. Int., 44, 1089-1099 (2011).

Asimismo, se realizaron desarrollos buscando cuantificar el impacto de la variación térmica en el fluido sobre el comportamiento del cojinete. Con el fin de simplificar el acoplamiento entre los balances de masa, cantidad de movimiento y energía, y bajo la premisa de que la presión se considera constante en el espesor, se propusieron dos alternativas para determinar una temperatura representativa del fluido para cada valor de presión. La primera de ellas se logra integrando el balance de energía en el espesor, expresándolo en función de la temperatura media. La otra propuesta se basa en el mecanismo dominante de transferencia de energía dentro del fluido, la convección. Se considera entonces que la temperatura relevante para el flujo es la resultante de la integral en el espesor del producto de la temperatura por la

velocidad, denominada temperatura media isentálpica o, más comúnmente, temperatura “bulk”. Ambas propuestas producen balances de energía compactos y simplificados, que pueden tratarse independientemente de la ecuación de Reynolds, aunque no han podido resolverse analíticamente. Sin embargo, la aplicación de ambas metodologías al caso de ISJB produjo resultados comparables entre sí, y con resultados de otros autores. Es interesante resaltar que su resolución numérica es sumamente sencilla y los tiempos de cálculo resultan ínfimos.

7.1.2 Estudio Numérico

El tratamiento numérico se inició con el estudio de la ecuación de Reynolds. La misma es una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales de la presión que, para situaciones fuera del ISJB y del ILJB, debe resolverse numéricamente. El esquema de cálculo empleado fue el clásico de diferencias finitas y los resultados obtenidos han servido como parámetro de comparación tanto de los métodos analíticos ya expuestos, como de los desarrollos más complejos que se describen a continuación.

La inclusión del fenómeno termo-hidrodinámico (THD) se llevó a cabo resolviendo de manera acoplada el balance de masa, los tres balances de cantidad de movimiento y el balance de energía. Ello requirió el desarrollo de un programa para tal fin, el cual fue escrito en dos etapas de grado creciente en complejidad: un sistema isotérmico para validar los métodos de integración y luego el sistema THD. El lenguaje escogido fue Fortran, por disponibilidad y experiencia en el grupo de trabajo, aunque se probaron otras variantes antes de definirse por éste. En ambas etapas el sistema de ecuaciones fue escrito con la estructura típica de un problema de valor inicial multivariable, es decir, cada variable expresada como su derivada primera respecto de la coordenada radial (espesor). Ello arroja seis coordenadas por nodo del dominio para el sistema isotérmico y ocho para el sistema THD. Se integran en simultáneo las ecuaciones en la dirección radial (en esta tesis se ha empleado el método de Gear para ese trabajo), desde la superficie del cojinete a la del rotor, y luego se aplica la técnica de “Shooting” para cumplir con las condiciones de contorno sobre el eje. Este proceso requiere que luego de la primer integración y no habiéndose cumplido las condiciones en el borde de “destino”, se recalculen las derivadas desconocidas sobre la superficie del cojinete de modo de mejorar la aproximación en el próximo disparo. Esto se repite hasta que las variables que deben cumplir con una condición de borde sobre el rotor den resultados dentro de la tolerancia estipulada. El procedimiento descrito, si bien es intuitivamente sencillo, consume una gran

cantidad de tiempo en la etapa de recalcular el nuevo disparo. Esto se debe, principalmente a que el método más usual para ello es el de Newton, que requiere del cálculo de la matriz Jacobiana, compuesta por la derivada de cada variable respecto de todas las demás. A fin de mejorar el tiempo de cálculo, se probaron varias alternativas, desde un algoritmo de “fuerza bruta” (prueba valor por valor hasta llegar a la convergencia) a sistemas de optimización sin cálculo de Jacobiano, como el método de Powell. Los resultados más prometedores fueron los obtenidos por el propio método de Newton y el de Broyden, una generalización del método de la secante (aproximación al método de Newton).

El programa así ensamblado ha permitido el cálculo de cojinetes cilíndricos de todas las configuraciones con resultados acordes a su complejidad. Permite determinar no sólo presión, temperatura y velocidades en el fluido, sino también sus derivadas radiales. Como era de esperar, los perfiles de presión cambian con valores que aumentan según lo hace la excentricidad. No obstante, las temperaturas alcanzadas no difieren sensiblemente con este cambio, aunque sí lo hacen al variar la relación L/D . A mayor L/D , mayor temperatura de cojinete para igual excentricidad, y consecuentemente, menor presión. Asimismo, un aumento del parámetro de variación de la viscosidad con la temperatura (κ_1) produce una notable disminución tanto de la temperatura del cojinete como de su presión, y viceversa. Un valor bajo de este parámetro produce un comportamiento que tiende al de un cojinete de viscosidad constante, donde predominan grandes presiones y gradientes térmicos.

Las limitantes aún presentes en el algoritmo desarrollado son: la consideración de cojinete adiabático (que resulta en una temperatura de lubricante mayor que para otros métodos), la exclusión de la región divergente o cavitada del fluido, y el ya mencionado tiempo de cálculo.

7.1.3 Estudio Experimental

El trabajo experimental se realizó en dos etapas diferenciadas: por un lado el ensayo de un cojinete de zapatas pivotantes (TPJB) en el Turbomachinery Laboratory (Turbolab) de Texas A&M University (College Station, Tx), y por otro, el diseño, construcción y puesta en marcha de un banco de ensayo de cojinetes hidrodinámicos propio.

La primer etapa pudo realizarse gracias al apoyo de la Fundación Bunge&Born y la Comisión Fulbright, quienes sostuvieron el proyecto con una beca de investigación. El banco de ensayo del Turbolab es del tipo “shake the bearing”, es decir, el rotor se encuentra rígidamente vinculado a dos pedestales fijos, y las cargas y mediciones se realizan sobre un

cojinete que flota sobre éste. El cojinete ensayado consta de cinco zapatas y la carga se aplicó entre dos de las mismas (configuración Load Between Pads, LBP). Al momento de comenzar a trabajar en el Turbolab, el banco se encontraba completamente desarmado. Ello representó una oportunidad única dado que hubo que acondicionar y ensamblar todo el equipo antes de realizar los ensayos. Este proceso permitió el contacto con todos los sistemas del banco y hasta surgieron aportes propios para mejorar su desempeño. Por un lado, la modificación del procedimiento de precarga de los rodamientos híbridos cerámicos del rotor, y por otro, la relocalización de los sensores de proximidad. Asimismo, se obtuvo un gran aprendizaje respecto de los procedimientos de puesta a punto y de ensayo. Los resultados obtenidos fueron muchos y muy buenos y seguramente ya forman parte de la escueta base de datos experimentales de cojinetes hidrodinámicos. Ellos demostraron que el desplazamiento entre el rotor y el cojinete es prácticamente colineal con la carga aplicada, virtud de los TPJB, produciendo respuestas cruzadas prácticamente despreciables. Los coeficientes dinámicos cruzados obtenidos, en todos los casos, fueron de un orden de magnitud menor que los directos. En condiciones estáticas, a igual velocidad de rotación, la excentricidad aumenta con la carga. Por otro lado, a igualdad de carga, la excentricidad decrece con el aumento de la velocidad de giro. Asimismo, se obtuvo que las zapatas cargadas son las que mayor gradiente térmico presentan, que crece según lo hace la velocidad del rotor.

La segunda etapa abarcó una parte importante de la tesis. El diseño del banco de ensayo propio comenzó prácticamente con la revisión bibliográfica. Según se avanzaba con el entendimiento del fenómeno, se analizaba la información disponible de los pocos bancos operativos en otros grupos de trabajo (desafortunadamente, ninguno en el país) a fin de buscar un diseño que se ajustase a las necesidades y presupuesto disponible. De esta manera se fue avanzando con el diseño, en primera instancia, y luego en su construcción. Cabe mencionar que, salvo el complejo trabajo de mecanizado, el resto de los elementos “a medida” han sido fabricados y ensamblados de mano propia en instalaciones de PLAPIQUI o del Laboratorio de Mecánica de Fluidos de la UNPSJB. Luego de una ardua labor, no sin colaboración de otros miembros del grupo de trabajo y algunos externos, ni tampoco en ausencia de contratiempos, se puso en funcionamiento el banco. Se realizaron los ensayos de prueba, se calibraron los sensores y se trabajó en el tratamiento de las señales adquiridas hasta lograr los primeros ensayos con resultados consistentes, los cuales han sido volcados en este trabajo. Para los mismos se aplicaron sobre el rotor tres valores distintos de carga vertical para tres velocidades de giro distintas, demostrando la operatividad del equipo. Se obtuvo que para cargas bajas el

ángulo de desplazamiento (ϕ) es alto y decrece según se aumenta la carga (o se disminuye la velocidad del rotor). A una dada velocidad de giro, la excentricidad aumenta al hacerlo la carga. Por otro lado, para una dada carga, la excentricidad disminuye según aumenta la velocidad del rotor. Por su parte, la presión aumenta casi únicamente con la carga, y la temperatura hace lo propio con la velocidad de giro. Según se vaya cumpliendo el programa experimental trazado por el grupo de trabajo, se podrán ensayar otras condiciones operativas y variantes geométricas.

7.2 TRABAJO FUTURO

Los temas y métodos abordados en la presente tesis han dejado, en la mayoría de los casos, un número importante de posibilidades abiertas para seguir profundizándolas. Se listan a continuación las consideradas más relevantes y de incidencia directa en los resultados de este trabajo, siguiendo el mismo orden de presentación: primero los trabajos analíticos, luego los numéricos y, por último, los experimentales.

- La solución aproximada de la ecuación de Reynolds mediante el método de perturbación regular ha considerado los resultados hasta el orden uno del desarrollo de las series. El cálculo con al menos un orden superior podría permitir la obtención de resultados con un campo de validez aún mayor.
- Dado que la solución aproximada de la ecuación de Reynolds mediante el método de perturbación regular corrige a la solución para ISJB, el cálculo de los coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento con dicha propuesta podría arrojar resultados con la misma tendencia.
- Las propuestas de aproximación THD mediante la consideración de la temperatura media y mediante la temperatura “bulk” fueron resueltas únicamente para el caso de ISJB. Su aplicación a cojinetes de longitud finita no fue aún evaluada.
- El algoritmo desarrollado para la solución completa THD fue implementado en una versión de Fortran de 32bits. Su migración a 64bits, además de permitir el empleo de compiladores más modernos, reduciría sensiblemente los tiempos de cálculo.
- El algoritmo desarrollado para la solución completa THD resuelve por el momento las ecuaciones de conservación en la región líquida del lubricante. La zona cavitada es ignorada aunque influye en la temperatura del muñón. Su incorporación al algoritmo actual produciría un gran avance.

- El algoritmo desarrollado para la solución completa THD considera que la superficie del cojinete es adiabática y, por ende, elimina el intercambio de calor entre el lubricante y el cojinete. La inclusión de este flujo de calor podría generar un impacto sensible en los resultados del programa.
- Los desarrollos de este trabajo, tanto analíticos como numéricos y experimentales, han contemplado el flujo de un lubricante Newtoniano incompresible. Dado que muchos de los fluidos que se emplean actualmente en lubricación hidrodinámica presentan algún grado de complejidad reológica, la consideración de fluidos no-Newtonianos permitiría ampliar el campo de aplicaciones.
- Los ensayos experimentales presentados en esta tesis corresponden a un cojinete de 55mm de diámetro, $L/D=1$ a velocidades de hasta 1730rpm. Considerando que el equipo cuenta con tres diámetros de cojinete (50, 55 y 60mm), tres relaciones L/D para cada uno ($1/4$, $1/2$ y 1), capacidad para cargas de hasta 1000 kg y velocidad máxima de hasta 6000rpm, restan realizar aún un número importante de ensayos con las instalaciones y capacidades actuales.
- El banco de ensayo construido cuenta, al momento, con la posibilidad de generar carga de dirección y magnitud constantes sobre el rotor. Ello limita sus capacidades a la realización de ensayos estáticos únicamente. El diseño y construcción de un sistema de carga más completo impactará directamente en el abanico de datos que puedan obtenerse del mismo.

Cabe señalar que algunas de las líneas de trabajo propuestas, tales como el cálculo de los coeficientes dinámicos empleando el método de perturbación regular y la generación de información experimental en un amplio rango de condiciones, ya están siendo llevadas a cabo por el Ing. Claudio Merelli como parte de su trabajo de tesis doctoral.

7.3 CIERRE

La lubricación hidrodinámica como tal, que ya lleva miles de años de aplicaciones y casi un siglo y medio desde su formulación oficial, sigue despertando interés, manteniendo su vigencia y encontrando nuevas aplicaciones en la actualidad. Los trabajos desarrollados en la presente tesis han sido, sin duda alguna, un constante y apasionante desafío y los resultados obtenidos, aunque muchos de ellos con un largo desarrollo aún por delante, pretenden sentar una pequeña plataforma para el desarrollo de futuros trabajos locales en esta disciplina.

ANEXO I

PROGRAMA PARA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE REYNOLDS

Este programa fue escrito en Maple y permite encontrar la solución de la Ecuación de Reynolds

```

> restart;
>
eq:=1/2/Pi*diff((1+eta*cos(Pi*Theta)),Theta)=epsilon/(12*Pi^2)*diff((1+eta*cos(Pi*Theta))^3*diff(p(Theta,z),Theta),Theta)+1/12*(1+eta*cos(Pi*Theta))^3*diff(diff(p(Theta,z),z),z):
> eq1:=-1/2*eta*sin(Pi*Theta[i]) = 1/12*epsilon/Pi^2*(-
3*(1+eta*cos(Pi*Theta[i]))^2*d1T*eta*sin(Pi*Theta[i])*Pi+(1+eta*cos(Pi*Theta[i]))^3*d2T)+1/12*(1+eta*
cos(Pi*Theta[i]))^3*d2z:
> d1T:=1/(2*Delta[Theta])*(p[i+1,j]-p[i-1,j]):
> d2T:=1/(Delta[Theta]^2*(p[i+1,j]-2*p[i,j]+p[i-1,j])):
> d2z:=1/(Delta[z]^2*(p[i,j+1]-2*p[i,j]+p[i,j-1])):
> eqq:=p[i,j]=solve(eq1,p[i,j]):
> Verif:=1:
> n:=21:
> m:=21:
> fin:=1000:
> eta:=.75:
> epsilon es (L/R)^2, epsilonD es (L/D)^2
> epsilon:=(2*.5)^2:
> epsilonD:=4*epsilon:
> Delta[Theta]:=1/(n-1):
> Delta[z]:=1/(m-1):
> h:=0:
> Theta[1]:=0:
> for i from 2 to n-1 do
> Theta[i]:=Theta[i-1]+Delta[Theta]:
> for j from 2 to m-1 do
> h:=h+1:
> ecu[h]:=eqq:
> od:
> od:
> for i from 1 to n do
> h:=h+1:
> ecu[h]:=p[i,1]=0:
> h:=h+1:
> ecu[h]:=p[i,m]=0:
> od:
> for j from 2 to m-1 do

```

```

> h:=h+1:
> ecu[h]:=p[1,j]=0:
> h:=h+1:
> ecu[h]:=p[n,j]=0:
> od:
> k:=0:
> for j from 1 to m do
>   for i from 1 to n do
>     k:=k+1:
>     p[i,j]:=P[k]:
>   od:
> od:
> fsol:=fsolve({seq(ecu[i],i=1..h)},{seq(P[i],i=0..k)}):
> for i from 1 to h+1 do
>   namepres1:=cat("P[",i,"]"):
>   for j from 1 to h+1 do
>     namepres2:=convert(lhs(fsol[j]),string):
>     if namepres2=namepres1 then
>       pres[j]:=rhs(fsol[j]):
>       break
>     fi:
>   od:
> od:
> u:=0:
> for j from 1 to m do
>   for i from 1 to n do
>     u:=u+1:
>     r[i,j]:=pres[u]:
>   od:
> od:
> x[0]:=-Delta[Theta]:z[0]:=-Delta[z]:
> for i from 1 to n do
>   diome[i]:=r[i,trunc(m/2)+1]:
>   x[i]:=x[i-1]+Delta[Theta]:
> od:
> for j from 1 to m do
>   noventa[j]:=r[trunc(n/2)+1,j]:
>   z[j]:=z[j-1]+Delta[z]:
> od:
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined

> pointplot({seq([x[i],diome[i]],i=1..n)},color=magenta):
> po := 3*eta*sin(Pi*Theta)/(1+eta*cos(Pi*Theta))^3*(1/4-(1/2*Delta[z])^2):
> evalf((1/2*Delta[z])):
> plot(po,Theta=0..1):
> pointplot({seq([z[j],noventa[j]],j=1..m)},color=magenta);

> poz := 3*eta*sin(Pi*(trunc(n/2)-1)*Delta[Theta])/(1+eta*cos(Pi*(trunc(n/2)-1)*Delta[Theta]))^3*(1/4-
z^2):
> evalf((trunc(n/2)-1)*Delta[Theta]):
> plot(poz,z=-1/2..1/2):
> for i from 1 to n do
>   print(evalf(x[i]),diome[i]):
> od:
> for j from 1 to m do
>   print(evalf(z[j]),noventa[j]):
> od:

```


ANEXO II

PROGRAMA PARA
EL CÁLCULO DE LA SOLUCIÓN
COMPLETA ISOTÉRMICA

CÁAA
PROGRAM COJIN3D ISOTERMICO

c

c Este programa resuelve el flujo tridimensional en un cojinete cilíndrico isotérmico.

c

c Las condiciones de borde son:

c entrada : presión(0,y,z) = 0

c salida : presión(XLARGO,y,z) = 0

c superf. sólida : $v_x(x,GAP,z) = U$

c $v_y(x,GAP,z) = 1/Pi*dh/dx$

c $v_z(x,GAP,z) = 0$

c $v_x(x,0,z) = 0$

c $v_y(x,0,z) = 0$

c $v_z(x,0,z) = 0$

c $dv_x/dy(x,0,z) = ?$

c $dv_z/dy(x,0,z) = ?$

c

c Variables:

c

c ALARGO : largo del cojinete

c ASPECTO : relación de aspecto (L/R)

c DELX : $1/nint =$ incremento en x para las diferencias

c DELZ : $1/ninz =$ incremento en z para las diferencias

c DIAMETRO : Diámetro del cojinete

c EPS (en MAIN) : Criterio de convergencia para decidir si
el vector GUESS es la solución

c EPS (en SHOOT): Criterio de convergencia usado por DRIVE

c ETA : Excentricidad relativa C/E

c F : Vector con las N2 condiciones de borde
conocidas en $y=1$

c $F(1,2,...,NZ/6-1) = v_x(i=2,3,4,...,(nint+1))$

c $F(NZ/6.....N2) = v_y(i=1,2,3,...,(nint+1))$

c G : Aceleración de la gravedad (m/s^2)

c GAP : Equivalente a c (diferencia de radios entre eje y cojinete)

c GUESS : Vector con las variables supuestas en $y=0$.

c H0 : Paso de integración usado por DRIVE

c HUEL : Relación c/R

```

c INDEX : Indicador usado por DRIVE (=1 en el primer llamado)
c MF : Método de integración (22=GEAR con diferencias
c N : finitas en el JAC)
c N : Número total de ecuaciones a resolver
c N2 : por DRIVE, equivalente a NZ y NVAR
c NF : Número de variables desconocidas en y=0, = NZ/2-1
c NGUESS : Equivalente a N2
c NINT : Número de intervalos en x
c NINZ : Número de intervalos en z
c NMED : Variable que permite ubicar aproximadamente el
c NP : centro del cojinete, con el propósito de imprimir
c : los resultados en ese punto
c : Número máximo de ecuaciones que se pueden
c : resolver (NP tiene que ser un parámetro)
c NVAR, NZ : Número total de variables = 8 * (nint+1)
c SAV : Variable dummy que guarda el valor de un
c : elemento de V (GUESS)
c T : Variable independiente. Equivalente a y.
c UU : velocidad tangencial en la pared y=1
c XLARGO : Coordenada tangencial adimensional. Igual que Theta
c V(N2) : Equivalente al GUESS
c X1 : equivalente a Y1 (y=0)
c X2 : equivalente a Y2 (y=1)
c XEND : y en la que finaliza la integración
c XIN : y en la que comienza la integración
c Y1 : altura adimens. inicial (y=0)
c Y2 : altura adimens. final (y=1)
c YFIN : equivalente a Y2 (y=1)
c YIN : equivalente a Y1 (y=0)
c Y(NP) : Variables a resolver por DRIVE, equivale a Z(NVAR)
c Z : Variables a resolver por DRIVE
c ZP(N) : Derivadas de las variables Z respecto
c : de la variable independiente (y=T)
c .....
c PARA CAMBIAR EL NÚMERO DE ECUACIONES HAY QUE CONSIDERAR QUE
c NP>NVAR; QUE GUESS,
c DELGUESS,F Y DQUESS TENGAN TAMAÑO MAYOR QUE NVAR, Y HAY QUE
c MODIFICAR EN 3 LUGARES DEL DRIVE nndm(=NP) Y nnsq(=nndm**2)
c
c USE NUMERICAL_LIBRARIES
c IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
c EXTERNAL FCN
c DIMENSION GUESS(5000),X(5000)
c
c COMMON/DATOS/NZ,DELX,DELZ,GAP,EPSILON,ASPECTO,HUEL,NINZ,NINT,N2,
c @ Y1, Y2, NVAR, EPS
c PARAMETER (PI=3.1415926)

```

```

HUEL=.001
EPSILON=0.5
ALARGO=100      !largo del cojinete
DIAMETRO=2      !diámetro del cojinete
ASPECTO=2*ALARGO/DIAMETRO
ASPECTO=2*1.

GAP= HUEL/2*DIAMETRO
C=GAP
XLARGO=1.0      !Máx.coord. X adimensional
ZLARGO=1.0      !Máx.coord. Z adimensional

NINT=16
NINZ=8

Y1 = 0.
Y2 = 1.

DELX = XLARGO / NINT
DELZ = ZLARGO / NINZ
NZ = (NINT + 1) * 6
NVAR = NZ*(NINZ + 1)
N2 = NVAR/2 - 2*(NINZ+1) - 2*(NINT-1)
write(6,*) nvar, n2, 6*(NINZ+1)*(NINT+1)
EPS = 5.e-8
TOL= 5.E-8
G=9.81

DO I=1,NZ
  GUESS(I)=0.5
  XSCALE(I)=1.0
  FSCALE(I)=1.0
END DO

ITMAX=5000

IPARAM(1)=0

Y1 = 0.
Y2 = 1.

CALL DNEQNF(FCN,TOL,N2,ITMAX,GUESS,X,FNORM)

WRITE(6,*) ',convirgio'
WRITE(6,*) ',L/D',5*ASPECTO
WRITE(6,*) ',L/R',ASPECTO
WRITE(6,*) ',c/R',huel
WRITE(23,*) ',L/D',2*ASPECTO,',L/R',aspecto,',
@ ',c/R',huel,',NINT',NINT,',NINZ',NINZ,',
END

```



```

HH(1)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(1))
DH(1)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(1))
DO I=2,NINT+1
  THETA(I)=THETA(I-1)+DELX
  HH(I)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(I))
  DH(I)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(I))
END DO
c
DO I=1,NINT+1
  DO K=1,NINZ+1
    I3 = I3+1
    F(I3) = Z(6*1-5+(k-1)*6*(NINT+1))-1.
  END DO
  END DO
c
DO I=1,NINT+1
  DO K=1,NINZ+1
    I3 = I3+1
    F(I3) = Z(6*1-3+(k-1)*6*(NINT+1))
  END DO
  END DO
c
DO K=2,NINZ
  DO I=2,NINT
    I3 = I3+1
    F(I3) = Z(6*1-4+(k-1)*6*(NINT+1))-1/PI*DH(I)
  END DO
  END DO
  RETURN
  END
c
C ÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁÁ
SUBROUTINE DIFFUN(N,T,Z,ZP)
c
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION Z(N), ZP(N), THETA(NINT+1), HH(NINT+1), DH(NINT+1)
PARAMETER (PI=3.1415926)
COMMON/DATOS/NZ,DELX,DELZ,GAP,EPSILON,ASPECTO,HUEL,NINZ,NINT,N2,
@ Y1, Y2, NVAR, EPS
T = T
THETA(1)=0.
HH(1)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(1))
DH(1)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(1))
DO I=2,NINT+1
  THETA(I)=THETA(I-1)+DELX
  HH(I)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(I))
  DH(I)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(I))
END DO
c
DH(I)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(I))
END DO
c
C llamada a la subrutina de calculo de ecuaciones diferenciales de
C la linea I=1 (entrada de la boquilla)
c
CALL DIFENT (N,T,Z,ZP,THETA,HH,DH)
c
CALL DIFSAL (N,T,Z,ZP,THETA,HH,DH)
c
DO K=1, NINZ+1
  DO I=1,NINT+1
    ZP(6*1-5+6*(k-1)*(NINT+1)) = Z(6*1-2+6*(k-1)*(NINT+1))
  END DO
  END DO
c derivadas de la velocidad en x respecto de y
DO K=2, NINZ
  DO I=2,NINT
    ZP(6*1-4+6*(k-1)*(NINT+1)) = -1/(2.*DELX) *
@ (Z(6*1+1+6*(k-1)*(NINT+1)) - Z(6*1-1+6*(k-1)*(NINT+1))) *
@ HH(I)/PI + T*DH(I)/PI * Z(6*1-2+6*(k-1)*(NINT+1)) - 1/(2.*DELZ) *
@ HH(I) * Z(6*1-3+6*(k-1)*(NINT+1)) - Z(6*1-3+6*(k-2)*(NINT+1))
  END DO
  END DO
c
DO K=1, NINZ+1
  DO I=1,NINT+1
    ZP(6*1-3+6*(k-1)*(NINT+1)) = Z(6*1-1+6*(k-1)*(NINT+1))
  END DO
  END DO
c derivadas de la velocidad en z respecto de y
c
C derivada segunda de velocidad en x respecto de y dos veces
DO K=2, NINZ
  DO I=2,NINT
    ZP(6*1-2+6*(k-1)*(NINT+1)) = 1/(PI**2.+(HUEL*T*DH(I))**2.) *
@ (HH(I)**2. * Z(6*1+6+6*(k-1)*(NINT+1)) - Z(6*1-6+6*(k-1)
@ (NINT+1)))/(2.* DELX) * PI * ASPECTO**2. + HUEL**2. * T *
@ DH(I) * HH(I) * Z(6*1+4+6*(k-1)*(NINT+1)) - Z(6*1-8+6*(k-1)*(NINT+1)))/
@ (2.*DELX) - HUEL**2. * T * DH(I)**2. * Z(6*1-2+6*(k-1)*(NINT+1)) + HUEL**2. *
@ T * DH(I) * HH(I) * PI * Z(6*1-1+6*(k)*(NINT+1)) - Z(6*1-1+6*(k-2)
@ (NINT+1)))/(2.*DELZ)
  END DO
  END DO

```

```

PARAMETER (PI=3.1415926)
COMMON/DATOS/NZ,DELX,DELZ,GAP,EPSILON,ASPECTO,HUEL,NINZ,NINT,N2,
@ Y1, Y2, NVAR

      T = T
      DO K=1, NINZ+1
C
C derivada de la velocidad en x respecto de y      en x =0 (i=1)
      ZP(1+6*(k-1)*(NINT+1)) = Z(4+6*(k-1)*(NINT+1))
      ZP(1) = -3.* T
C
      END DO
C derivada de la velocidad en y respecto de y en x=0 (i=1)
      ZP(2+6*(k-1)*(NINT+1)) = 0.
      DO K=1, NINZ
          ZP(6*1-4+6*(k-1)*(NINT+1)) = -1/(2.*DELX) *
          @ (4*Z(6*1+1+6*(k-1)*(NINT+1)) - 3*Z(6*1-5+6*(k-1)*(NINT+1)) -
          @ Z(6*1+7+6*(k-1)*(NINT+1))) *
          @ HH(1)/PI + T*DH(1)/PI * Z(6*1-2+6*(k-1)*(NINT+1)) - 1/(DELZ) *
          @ HH(1) * Z(6*1-3+6*(k-1)*(NINT+1)) - Z(6*1-3+6*(k-1)*(NINT+1)))
          END DO
C derivada de la velocidad en y respecto de y en z=0 (k=1)
      DO I=2, NINT+1 ! =NZ/6
          ZP(6*1-4+6*(1-1)*(NINT+1)) = -1/(DELX) *
          @ (Z(6*1-5+6*(1-1)*(NINT+1)) - Z(6*1-1+6*(1-1)*(NINT+1))) *
          @ HH(1)/PI + T*DH(1)/PI * Z(6*1-2+6*(1-1)*(NINT+1)) - 1/(2.*DELZ) *
          @ HH(1) * Z(6*1-3+6*(2-1)*(NINT+1)) - 3*Z(6*1-3+6*(1-1)*(NINT+1)) -
          @ Z(6*1-3+6*(3-1)*(NINT+1)))
          END DO
C
      DO K=1, NINZ+1
C derivadas de la velocidad en z respecto de y en x=0 (i=1)
      ZP(3+6*(k-1)*(NINT+1)) = Z(5+6*(k-1)*(NINT+1))
C
      END DO
      DO K=1, NINZ
C derivada segunda de velocidad en x respecto de y dos veces en x=0 (i=1)
          ZP(4+6*(k-1)*(NINT+1)) = 1/(PI**2 + HUEL*T*DH(1))**2 *
          @ (HH(1)**2 * Z(12+6*(k-1)*(NINT+1)) - 3*Z(6+6*(k-1)*(NINT+1)) -
          @ Z(18+6*(k-1)*(NINT+1)))/(2.*DELX) * PI * ASPECTO**2 + HUEL**2 * T
          @ DH(1)*HH(1)*(4*Z(10+6*(k-1)*(NINT+1)) - 3*Z(4+6*(k-1)*(NINT+1)) -

```

```

      END DO
      END DO
      DO K=2, NINZ
C derivada segunda de la velocidad en z respecto de y dos veces
      DO I=1, NINT+1
          ZP(6*1-1+6*(k-1)*(NINT+1)) = 1/(2.*DELZ) * HH(I)**2 *
          @ (Z(6*1+6*(k-1)*(NINT+1)) - Z(6*1+6*(k-2)*(NINT+1)))
          END DO
          END DO
      DO K=2, NINZ
C derivada de la Presion respecto de y
      DO I=2, NINT
          ZP(6*1+6*(k-1)*(NINT+1)) = -(HUEL/ASPECTO)**2 / ((PI**2 + HUEL*T*
          @ DH(I))**2 * HH(I)) * HH(I) * Z(6*1+4+6*(k-1)*
          @ (NINT+1) - Z(6*1-8+6*(k-1)*
          @ (NINT+1)))/(2.*DELX) * PI * DH(I) * Z(6*1-2+6*(k-1)*(NINT+1)) *
          @ PI * DH(I) * T * HH(I)**2 * ASPECTO**2 * Z(6*1+6+6*(k-1)*(NINT+1)) - Z(6*
          @ I-6+6*(k-1)*(NINT+1)))/(2.*DELX) + PI**2 * HH(I) * Z(6*1-1+6*(k)
          @ (NINT+1)) - Z(6*1-1+6*(k-2)*(NINT+1)))/(2.*DELZ)
          END DO
C
      END DO
      RETURN
      END
C
C
SUBROUTINE PEDERV(N,T,A,PD,N0)
C
C implicit real*8 (a-h,o-z)
C dimension a(n),pd(n0,n0)
C t=t
C a(1)=a(1)
C pd(1,1)=pd(1,1)
C n0=n0
C RETURN
C END
C
C
C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE DIFENT(N,T,Z,ZP,THETA,HH,DH)
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C DIMENSION Z(N), ZP(N), THETA(NINT+1), HH(NINT+1), DH(NINT+1)

```



```

@ (NINT+1)+Z(6*1-3+6*(NINZ-2)*(NINT+1)))
END DO
c DO K=1, NINZ+1
c derivadas de la velocidad en z respecto de y en x=1 (i=nint+1)
c ZP(6*(NINT+1)-3+6*(K-1)*(NINT+1))=Z(6*(NINT+1)-1+6*(K-1)*(NINT+1))
c END DO
c DO K=2, NINZ+1
c derivada segunda de velocidad en x respecto de y dos veces en x=1 (i=nint+1)
ZP(6*(NINT+1)-2+6*(K-1)*(NINT+1))=1/(PI**2.+(HUEL*T*
@ DH(NINT+1)**2.)*(HH(NINT+1)**2.*(3*Z(6*k)*(NINT+1))-4*Z(6*k)
@ (NINT+1)-6)+Z((6*k)*(NINT+1)-12))/(2.*DELX)* PI*ASPECTO**2.+
@ HUEL**2.*T*DH(NINT+1)*HH(NINT+1)*(3*Z(6*k)*(NINT+1)-2)+4
@ Z(6*k)*(NINT+1)-8)+Z((6*k)*(NINT+1)-14)/
@ (2.*DELX)-HUEL**2.*T*DH(NINT+1)**2.*Z(6*k)*(NINT+1)-2)+HUEL**2
@ T*DH(NINT+1)*HH(NINT+1)*PI*Z(6*(NINT+1)-1+6*(K-1)*(NINT+1))-Z(6*
@ (NINT+1)-1+6*(K-2)*(NINT+1))/(DELZ)
c pause
c END DO
c derivada segunda de velocidad en x respecto de y dos veces en z=1 (K=NINZ+1)
DO I=1,NINT
ZP(6*1-2+6*(NINZ)*(NINT+1)) = 1/(PI**2.+(HUEL*T*DH(I))**2.)
@ (HH(I)**2.*Z(6*1+6*(NINZ)*(NINT+1)) - Z(6*1+6*(NINZ)
@ (NINT+1)))/(DELX)* PI*ASPECTO**2.+HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*
@ Z(6*1+4+6*(NINZ)*(NINT+1))-Z(6*1-2+6*(NINZ)*(NINT+1))/
@ (DELX)-HUEL**2.*T*DH(I)**2.*Z(6*1-2+6*(NINZ)*(NINT+1))+HUEL**2
@ T*DH(I)*HH(I)*PI*(3*Z(6*1-1+6*(NINZ)*(NINT+1))-4*Z(6*1-1+6*
@ (NINZ-1)*(NINT+1))+Z(6*1-1+6*(NINZ-2)*(NINT+1)))/(2.*DELZ)
END DO
c derivadas de la velocidad en z respecto de y dos veces en Z=1 (K=NINZ+1)
DO I=1,NINT+1 I=NZ/6
ZP(6*1-1+6*(NINZ)*(NINT+1)) = 1/(2.*DELZ)* HH(I)**2.
@ (3*Z(6*1+6*(NINZ)*(NINT+1))-4*Z(6*1+6*(NINZ-1)*
@ (NINT+1))+Z(6*1+6*(NINZ-2)*(NINT+1)))
c END DO
c derivada de la Presion respecto de y en x=1 (i=nint+1)
c DO K=2, NINZ+1

```

```

c ZP(6*(NINT+1)+6*(K-1)*(NINT+1))=0.
ZP(6*(NINT+1)+6*(K-1)*(NINT+1))=-(HUEL/ASPECTO)**2/((PI**2.+(HUEL*
@ T*DH(NINT+1))**2.)*HH(NINT+1))*(HH(NINT+1)*Z(6*k)
@ (NINT+1)-2)-Z((6*k)*(NINT+1)-8))/(DELX)*PI-DH(NINT+1)*
@ Z(6*k)*(NINT+1)-2)*PI-DH(NINT+1)*T*HH(NINT+1)**2.*ASPECTO**2.
@ Z(6*k)*(NINT+1))-Z(6*k)*(NINT+1)-6))/(DELX)+PI**2*HH(NINT+1)*
@ Z(6*(NINT+1)-1+6*(K-1)*(NINT+1))-Z(6*(NINT+1)-1+6*
@ (K-2)*(NINT+1))/(DELZ)
c END DO
c derivada de la Presion respecto de y en z=1 (K=NINZ+1)
DO I=1,NINT
ZP(6*1+6*(NINZ)*(NINT+1)) = 0.
ZP(6*1+6*(NINZ)*(NINT+1)) = -(HUEL/ASPECTO)**2/((PI**2.+(HUEL*T*
@ DH(I))**2.)*HH(I))*(HH(I)*Z(6*1+4+6*(NINZ)
@ (NINT+1))-Z(6*1-2+6*(NINZ)*(NINT+1)))/(DELX)*PI-DH(I)*
@ Z(6*1-2+6*(NINZ)*(NINT+1))*PI-DH(I)*T*HH(I)**2.*ASPECTO**2.
@ Z(6*1+6+6*(NINZ)*(NINT+1))-Z(6*1+6*(NINZ)*(NINT+1))/
@ (DELX)+PI**2*HH(I)*Z(6*1-1+6*(NINZ)*(NINT+1))-Z(6*1-1+6*(NINZ-1)*
@ (NINT+1)))/(DELZ)
c END DO
c RETURN
c END

```


ANEXO III

PROGRAMA DE INTEGRACIÓN POR EL MÉTODO DE GEAR Y RUTINAS ACCESORIAS

C-----
C SUBROUTINE DRIVE (N, T0, H0, Y0, TOUT, EPS, MF, INDEX)
 C-----
 C THIS IS THE JANUARY 13, 1975 VERSION OF
 C GEAR, A PACKAGE FOR THE SOLUTION OF THE INITIAL VALUE
 C PROBLEM FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS,
 C $DY/DT = F(Y,T)$, $Y = (Y(1),Y(2),...,Y(N))$.
 C SUBROUTINE DRIVE IS A DRIVER ROUTINE FOR THE GEAR PACKAGE.
 C
 C REFERENCES
 C 1. A. C. HINDMARSH, GEAR.. ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION
 C SYSTEM SOLVER, UCID-30001 REV. 3, LAWRENCE LIVERMORE
 C LABORATORY, P.O.BOX 808, LIVERMORE, CA 94550, DEC. 1974.
 C
 C 2. A. C. HINDMARSH, LINEAR MULTISTEP METHODS FOR ORDINARY
 C DIFFERENTIAL EQUATIONS.. METHOD FORMULATIONS,
 C STABILITY, AND THE METHODS OF NORDSIECK AND GEAR,
 C UCRL-51186 REV. 1, L.L.L., MARCH 1972.
 C
 C 3. A. C. HINDMARSH, CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL SOFTWARE,
 C PART III.. THE CONTROL OF ERROR IN THE GEAR PACKAGE
 C FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS, UCID-30050 PART 3,
 C L.L.L., AUGUST 1972.
 C
 C-----
 C THE ORIGINAL VERSION OF THIS PROGRAM WAS WRITTEN AT LLL BY
 C A. C. HINDMARSH FOR CDC COMPUTERS. THE CDC VERSION WAS MODIFIED
 C FOR USE ON IBM COMPUTERS IN DOUBLE PRECISION AT ARGONNE
 C NATIONAL LABORATORY IN JANUARY 1975.
 C-----
 C DRIVE IS TO BE CALLED ONCE FOR EACH OUTPUT VALUE OF T, AND
 C IN TURN MAKES REPEATED CALLS TO THE CORE INTEGRATOR, STIFF.
 C
 C THE INPUT PARAMETERS ARE..
 C N = THE NUMBER OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS.
 C N CAN BE REDUCED, BUT NEVER INCREASED, DURING A PROBLEM.
 C T0 = THE INITIAL VALUE OF T, THE INDEPENDENT VARIABLE

```

C (USED ONLY ON FIRST CALL).
C H0 = THE NEXT STEP SIZE IN T (USED FOR INPUT ONLY ON THE
C FIRST CALL)
C Y0 = A VECTOR OF LENGTH N CONTAINING THE INITIAL VALUES OF
C Y (USED FOR INPUT ONLY ON FIRST CALL).
C TOUT = THE VALUE OF T AT WHICH OUTPUT IS DESIRED NEXT.
C INTEGRATION WILL NORMALLY GO SLIGHTLY BEYOND TOUT
C AND THE PACKAGE WILL INTERPOLATE TO T = TOUT.
C EPS = THE RELATIVE ERROR BOUND (USED ONLY ON THE
C FIRST CALL. UNLESS INDEX = -1). SINGLE STEP ERROR
C ESTIMATES DIVIDED BY YMAX(I) WILL BE KEPT LESS THAN
C EPS IN ROOT-MEAN-SQUARE NORM (I.E. EUCLIDEAN NORM
C DIVIDED BY DSQRT(N)). THE VECTOR YMAX OF
C WEIGHTS IS COMPUTED IN DRIVE. INITIALLY YMAX(I) IS
C DABS(Y(I)), WITH A DEFAULT VALUE OF 1 IF Y(I) = 0
C INITIALLY. THEREAFTER, YMAX(I) IS THE LARGEST VALUE
C OF DABS(Y(I)) SEEN SO FAR, OR THE INITIAL YMAX(I) IF
C THAT IS LARGER. TO ALTER EITHER OF THESE, CHANGE THE
C APPROPRIATE STATEMENTS IN THE DO-LOOPS ENDING AT
C STATEMENTS 10 AND 70 BELOW.
C MF = THE METHOD FLAG (USED ONLY ON FIRST CALL, UNLESS
C INDEX = -1). ALLOWED VALUES ARE 10, 11, 12, 13,
C 20, 21, 22, 23. MF HAS TWO DECIMAL DIGITS, METH
C AND MITER (MF = 10*METH + MITER).
C METH = 1 MEANS THE ADAMS METHODS..
C METH = 2 MEANS THE STIFF METHODS OF GEAR, OR THE
C BACKWARD DIFFERENTIATION FORMULAS.
C MITER IS THE ITERATION METHOD INDICATOR..
C MITER = 0 MEANS FUNCTIONAL ITERATION (NO PARTIAL
C DERIVATIVES NEEDED).
C MITER = 1 MEANS CHORD METHOD WITH ANALYTIC JACOBIAN.
C FOR THIS USER SUPPLIES SUBROUTINE
C PEDERV (SEE DESCRIPTION BELOW).
C MITER = 2 MEANS CHORD METHOD WITH JACOBIAN CALCULATED
C INTERNALLY BY FINITE DIFFERENCES.
C MITER = 3 MEANS CHORD METHOD WITH JACOBIAN REPLACED
C BY A DIAGONAL APPROXIMATION BASED ON A
C DIRECTIONAL DERIVATIVE.
C INDEX = INTEGER USED ON INPUT TO INDICATE TYPE OF CALL,
C WITH THE FOLLOWING VALUES AND MEANINGS.
C 1 THIS IS THE FIRST CALL FOR THIS PROBLEM.
C 0 THIS IS NOT THE FIRST CALL FOR THIS PROBLEM,
C AND INTEGRATION IS TO CONTINUE.
C -1 THIS IS NOT THE FIRST CALL FOR THE PROBLEM,
C AND THE USER HAS RESET N, EPS, AND/OR MF.
C 2 SAME AS 0 EXCEPT THAT TOUT IS TO BE HIT
C EXACTLY (NO INTERPOLATION IS DONE).
C ASSUMES TOUT .GE. THE CURRENT T.
C 3 SAME AS 0 EXCEPT CONTROL RETURNS TO CALLING
C PROGRAM AFTER ONE STEP. TOUT IS IGNORED.
C SINCE THE NORMAL OUTPUT VALUE OF INDEX IS 0,
C IT NEED NOT BE RESET FOR NORMAL CONTINUATION.
C AFTER THE INITIAL CALL, IF A NORMAL RETURN OCCURRED AND A NORMAL
C CONTINUATION IS DESIRED, SIMPLY RESET TOUT AND CALL AGAIN.
C ALL OTHER PARAMETERS WILL BE READY FOR THE NEXT CALL.
C A CHANGE OF PARAMETERS WITH INDEX = -1 CAN BE MADE AFTER
C EITHER A SUCCESSFUL OR AN UNSUCCESSFUL RETURN.
C THE OUTPUT PARAMETERS ARE..
C H0 = THE STEP SIZE H USED LAST, WHETHER SUCCESSFULLY OR NOT.
C Y0 = THE COMPUTED VALUES OF Y AT T = TOUT.
C TOUT = THE OUTPUT VALUE OF T. IF INTEGRATION WAS SUCCESSFUL,
C AND THE INPUT VALUE OF INDEX WAS NOT 3, TOUT IS
C UNCHANGED FROM ITS INPUT VALUE. OTHERWISE, TOUT
C IS THE CURRENT VALUE OF T TO WHICH INTEGRATION
C HAS BEEN COMPLETED.
C INDEX = INTEGER USED ON OUTPUT TO INDICATE RESULTS,
C WITH THE FOLLOWING VALUES AND MEANINGS..
C 0 INTEGRATION WAS COMPLETED TO TOUT OR BEYOND.
C -1 THE INTEGRATION WAS HALTED AFTER FAILING TO PASS THE
C ERROR TEST EVEN AFTER REDUCING H BY A FACTOR OF
C 1.E10 FROM ITS INITIAL VALUE.
C -2 AFTER SOME INITIAL SUCCESS, THE INTEGRATION WAS
C HALTED EITHER BY REPEATED ERROR TEST FAILURES OR BY
C A TEST ON EPS. TOO MUCH ACCURACY HAS BEEN REQUESTED.
C -3 THE INTEGRATION WAS HALTED AFTER FAILING TO ACHIEVE
C CORRECTOR CONVERGENCE EVEN AFTER REDUCING H BY A
C FACTOR OF 1.E10 FROM ITS INITIAL VALUE.
C -4 IMMEDIATE HALT BECAUSE OF ILLEGAL VALUES OF INPUT
C PARAMETERS. SEE PRINTED MESSAGE.
C -5 INDEX WAS -1 ON INPUT, BUT THE DESIRED CHANGES OF
C PARAMETERS WERE NOT IMPLEMENTED BECAUSE TOUT
C WAS NOT BEYOND T. INTERPOLATION TO T = TOUT WAS
C PERFORMED AS ON A NORMAL RETURN. TO TRY AGAIN,
C SIMPLY CALL AGAIN WITH INDEX = -1 AND A NEW TOUT.
C IN ADDITION TO DRIVE, THE FOLLOWING ROUTINES ARE PROVIDED IN
C THE PACKAGE..
C INTERP(TOUT,Y,N0,Y0) INTERPOLATES TO GET THE OUTPUT VALUES
C AT T = TOUT, FROM THE DATA IN THE Y ARRAY.
C STIFF(Y,N0) IS THE CORE INTEGRATOR ROUTINE. IT PERFORMS A
C SINGLE STEP AND ASSOCIATED ERROR CONTROL.
C COSET(METH,NQ,EL,TQ,MAXDER) SETS COEFFICIENTS FOR USE IN
C THE CORE INTEGRATOR.
C PSET(Y,N0,CON,MITER,IER) COMPUTES AND PROCESSES THE JACOBIAN
C MATRIX J = DF/DY.
C DEC(N,N0,A,IP,IER) PERFORMS AN LU DECOMPOSITION ON A MATRIX.
C SOL(N,N0,A,B,IP) SOLVES LINEAR SYSTEMS A*X = B AFTER DEC

```

```

C HAS BEEN CALLED FOR THE MATRIX A.
C NOTE.. PSET, DEC, AND SOL ARE CALLED ONLY IF MITER = 1 OR 2.
C THE FOLLOWING ROUTINES ARE TO BE SUPPLIED BY THE USER..
C DIFFUN(N,T,Y,YDOT) COMPUTES THE FUNCTION YDOT = F(Y,T), THE
C RIGHT-HAND SIDE OF THE O.D.E.
C HERE Y AND YDOT ARE VECTORS OF LENGTH N.
C PEDERV(N,T,Y,PD,N0) COMPUTES THE N BY N JACOBIAN MATRIX OF
C PARTIAL DERIVATIVES, AND STORES IT IN PD
C AS AN N0 BY N0 ARRAY. PD(I,J) IS TO BE
C SET TO THE PARTIAL DERIVATIVE OF YDOT(I)
C WITH RESPECT TO Y(J), PEDERV IS CALLED
C ONLY IF MITER = 1. OTHERWISE A DUMMY
C ROUTINE CAN BE SUBSTITUTED.
C
C THE DIMENSIONS IN THE FOLLOWING DECLARATIONS ARE SET FOR A
C MAXIMUM OF 20 EQUATIONS. IF THE PACKAGE IS TO USED FOR A LARGER
C VALUE OF N, THE DIMENSIONS SHOULD BE INCREASED ACCORDINGLY. THE
C DIMENSION OF PW BELOW MUST BE AT LEAST N**2 IF MITER = 1 OR 2,
C BUT CAN BE REDUCED TO N IF MITER = 3, OR TO 1 IF MITER = 0.
C THE DIMENSIONS OF YMAX, ERROR, SAVE1, SAVE2, IPIV, AND THE FIRST
C DIMENSION OF Y SHOULD ALL BE AT LEAST N. THE COLUMN LENGTH OF
C THE Y ARRAY AS USED ELSEWHERE IS N0, NOT 20. THE ROW LENGTH OF Y
C CAN BE REDUCED FROM 13 TO 6 IF METH = 2.
C THE IPIV ARRAY IS USED ONLY IF MITER IS 1 OR 2.
C
C THE COMMON BLOCK GEAR9 CAN BE ACCESSED EXTERNALLY BY THE USER
C IF DESIRED. IT CONTAINS THE STEP SIZE LAST USED (SUCCESSFULLY),
C THE ORDER LAST USED (SUCCESSFULLY), THE NUMBER OF STEPS TAKEN
C SO FAR, THE NUMBER OF F EVALUATIONS (DIFFUN CALLS) SO FAR,
C AND THE NUMBER OF JACOBIAN EVALUATIONS SO FAR.
C
C IN THE FOLLOWING DATA STATEMENT, SET..
C LOUT = THE LOGICAL UNIT NUMBER FOR THE OUTPUT OF MESSAGES
C DURING THE INTEGRATION.
C-----
C nndm = maximum value of n (# of differential equations)
C nnsq = nndm**2
C In order to change # of equations to be solved, just change
C the values in the PARAMETER statement below and in three other
C routines (SEARCH for the statement)
C CS, June 7, 1993
C
C parameter(nndm=3900,nnsq=15210000)
C
C INTEGER N,MF,INDEX
C INTEGER NC,MFC,KFLAG,JSTART,IPIV,NSQ,NQUSED,NSTEP,NFE,NJE
C INTEGER LOUT,I,N0,NHCUT,KGO
C DOUBLE PRECISION T0,H0,Y0,TOUT,EPS
DOUBLE PRECISION T,H,HMIN,HMAX,EPSC,UROUND,YMAX,ERROR,
1 SAVE1,SAVE2,PW,EPSJ,HUSED
DOUBLE PRECISION Y,TOUTP,AYI,D
COMMON /GEAR1/T,H,HMIN,HMAX,EPSC,UROUND,NC,MFC,KFLAG,JSTART
COMMON /GEAR2/ YMAX(nndm)
COMMON /GEAR3/ ERROR(nndm)
COMMON /GEAR4/ SAVE1(nndm)
COMMON /GEAR5/ SAVE2(nndm)
COMMON /GEAR6/ PW(nnsq)
COMMON /GEAR7/ IPIV(nndm)
COMMON /GEAR8/ EPSJ,NSQ
COMMON /GEAR9/ HUSED,NQUSED,NSTEP,NFE,NJE
DIMENSION Y0(N)
DIMENSION Y(nndm,29)
DATA LOUT/6/
IF (INDEX.EQ.0) GO TO 20
IF (INDEX.EQ.2) GO TO 25
IF (INDEX.EQ.-1) GO TO 30
IF (INDEX.EQ.3) GO TO 40
IF (INDEX.NE.1) GO TO 430
IF (EPS.LE.0.D0) GO TO 400
IF (N.LE.0) GO TO 410
IF ((T0-TOUT)*H0.GE.0.D0) GO TO 420
C-----
C IF INITIAL VALUES OF YMAX OTHER THAN THOSE SET BELOW ARE DESIRED,
C THEY SHOULD BE SET HERE. ALL YMAX(I) MUST BE POSITIVE.
C IF VALUES FOR HMIN OR HMAX, THE BOUNDS ON DABS(H), OTHER THAN
C THOSE BELOW ARE DESIRED, THEY SHOULD BE SET BELOW.
C IN THE FOLLOWING STATEMENT, SET..
C UROUND = THE UNIT ROUNDOFF OF THE MACHINE, I.E. THE SMALLEST
C POSITIVE U SUCH THAT 1. + U.NE. 1. ON THE MACHINE.
C-----
UROUND=1.00D-12
DO 10 I = 1,N
YMAX(I) = DABS(Y0(I))
IF (YMAX(I).EQ.0.D0) YMAX(I) = 1.D0
10 Y(I,1) = Y0(I)
NC = N
T = T0
H = H0
IF ((T+H).EQ.T) WRITE(LOUT,15)
15 FORMAT(35H WARNING.. T + H = T ON NEXT STEP.)
HMIN = DABS(H0)
HMAX = DABS((T0-TOUT)*10.D0)
EPSC = EPS
MFC = MF
JSTART = 0
N0 = N
NSQ = N0*N0
EPSJ = DSQRT(UROUND)

```

```

NHCUT = 0
GO TO 50
C
C TOUTP IS THE PREVIOUS VALUE OF TOUT FOR USE IN HMAX.-----
20 HMAX = DABS(TOUT-TOUTP)*10.
GO TO 80
C
25 HMAX = DABS(TOUT-TOUTP)*10.D0
IF (T-TOUT)*H .GE. 0.D0) GO TO 500
GO TO 85
C
30 IF (T-TOUT)*H .GE. 0.D0) GO TO 440
JSTART = -1
NC = N
EPSC = EPS
MFC = MF
C
40 continue
c IF ((T+H) .EQ. T) WRITE(LOUT,15)
C
50 CALL STIFF (Y, NO)
C
KGO = 1 - KFLAG
GO TO (60, 100, 200, 300), KGO
C KFLAG = 0, -1, -2, -3
C
60 CONTINUE
C-----
C NORMAL RETURN FROM INTEGRATOR.
C
C THE WEIGHTS YMAX(I) ARE UPDATED. IF DIFFERENT VALUES ARE DESIRED,
C THEY SHOULD BE SET HERE. A TEST IS MADE FOR EPS BEING TOO SMALL
C FOR THE MACHINE PRECISION.
C
C ANY OTHER TESTS OR CALCULATIONS THAT ARE REQUIRED AFTER EVERY
C STEP SHOULD BE INSERTED HERE.
C
C IF INDEX = 3, Y0 IS SET TO THE CURRENT Y VALUES ON RETURN.
C IF INDEX = 2, H IS CONTROLLED TO HIT TOUT (WITHIN ROUNDOFF
C ERROR), AND THEN THE CURRENT Y VALUES ARE PUT IN Y0 ON RETURN.
C FOR ANY OTHER VALUE OF INDEX, CONTROL RETURNS TO THE INTEGRATOR
C UNLESS TOUT HAS BEEN REACHED. THEN INTERPOLATED VALUES OF Y ARE
C COMPUTED AND STORED IN Y0 ON RETURN.
C IF INTERPOLATION IS NOT DESIRED, THE CALL TO INTERP SHOULD BE
C REMOVED AND CONTROL TRANSFERRED TO STATEMENT 500 INSTEAD OF 520.
C-----
D = 0.D0
DO 70 I = 1,N
  AYI = DABS(Y(I,1))
  YMAX(I) = DMAX(YMAX(I), AYI)
70 D = D + (AYI/YMAX(I))**2
D = D*(UROUND/EPS)**2
IF (D .GT. DFLOAT(N)) GO TO 250
IF (INDEX .EQ. 3) GO TO 500
IF (INDEX .EQ. 2) GO TO 85
80 IF ((T-TOUT)*H .LT. 0.D0) GO TO 40
CALL INTERP (TOUT, Y, NO, Y0)
GO TO 520
85 IF (((T+H)-TOUT)*H .LE. 0.D0) GO TO 40
IF (DABS(T-TOUT) .LE. 100.D0*UROUND*HMAX) GO TO 500
IF (T-TOUT)*H .GE. 0.D0) GO TO 500
H = (TOUT - T)*(1.D0 - 4.D0*UROUND)
JSTART = -1
GO TO 40
C-----
C ON AN ERROR RETURN FROM INTEGRATOR, AN IMMEDIATE RETURN OCCURS IF
C KFLAG = -2, AND RECOVERY ATTEMPTS ARE MADE OTHERWISE.
C TO RECOVER, H AND HMIN ARE REDUCED BY A FACTOR OF .1 UP TO 10
C TIMES BEFORE GIVING UP.
C-----
100 continue
c WRITE (LOUT,105) T
c 105 FORMAT(/35H KFLAG = -1 FROM INTEGRATOR AT T = ,E16.8/
c 1 39H ERROR TEST FAILED WITH DABS(H) = HMIN/)
110 IF (NHCUT .EQ. 10) GO TO 150
NHCUT = NHCUT + 1
HMIN = HMIN*.1D0
H = H*.1D0
c WRITE (LOUT,115) H
c 115 FORMAT(24H H HAS BEEN REDUCED TO ,E16.8,
c 1 26H AND STEP WILL BE RETRIED//)
JSTART = -1
GO TO 40
C
150 WRITE (LOUT,155)
155 FORMAT(/44H PROBLEM APPEARS UNSOLVABLE WITH GIVEN INPUT//)
GO TO 500
C
200 WRITE (LOUT,205) T,H
205 FORMAT(/35H KFLAG = -2 FROM INTEGRATOR AT T = ,E16.8,5H H = ,
1 E16.8/52H THE REQUESTED ERROR IS SMALLER THAN CAN BE HANDLED//)
GO TO 500
C
250 WRITE (LOUT,255) T
255 FORMAT(/37H INTEGRATION HALTED BY DRIVER AT T = ,E16.8/
1 56H EPS TOO SMALL TO BE ATTAINED FOR THE MACHINE PRECISION/)
KFLAG = -2
GO TO 500
C
300 WRITE (LOUT,305) T

```

```

305 FORMAT(//35H KFLAG = -3 FROM INTEGRATOR ATT = :E16.8/
1 45H CORRECTOR CONVERGENCE COULD NOT BE ACHIEVED/)
GO TO 110
C
400 WRITE (LOUT,405)
405 FORMAT(//28H ILLEGAL INPUT.. EPS :L.E. 0.//)
INDEX = -4
RETURN
C
410 WRITE (LOUT,415)
415 FORMAT(//25H ILLEGAL INPUT.. N :L.E. 0//)
INDEX = -4
RETURN
C
420 WRITE (LOUT,425)
425 FORMAT(//36H ILLEGAL INPUT.. (T0-TOUT)*H :GE. 0.//)
INDEX = -4
RETURN
C
430 WRITE (LOUT,435) INDEX
435 FORMAT(//24H ILLEGAL INPUT.. INDEX =:|5//)
INDEX = -4
RETURN
C
440 continue
c write(LOUT,445) T,TOUT,H
445 FORMAT(//44H INDEX = -1 ON INPUT WITH (T-TOUT)*H :GE. 0./
1 4H T=:E16.8,9H TOUT =:E16.8,6H H=:E16.8/
1 44H INTERPOLATION WAS DONE AS ON NORMAL RETURN./
2 41H DESIRED PARAMETER CHANGES WERE NOT MADE.)
CALL INTERP (TOUT, Y, NO, Y0)
INDEX = -5
RETURN
C
500 TOUT = T
DO 510 I = 1,N
510 Y0(I) = Y(I,1)
520 INDEX = KFLAG
TOUTP = TOUT
H0 = HUSED
IF (KFLAG .NE. 0) H0 = H
RETURN
C----- END OF SUBROUTINE DRIVE -----
END
C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE INTERP (TOUT, Y, NO, Y0)
C
INTEGER NO,N,JDUMMY,JSTART,I,L,J
DOUBLE PRECISION TOUT,Y,Y0,T,H,DUMMY,S,S1
COMMON /GEAR1/ T, H, DUMMY(4), N, IDUMMY(2), JSTART
DIMENSION Y0(N0), Y(N0,29)
C-----
C SUBROUTINE INTERP COMPUTES INTERPOLATED VALUES OF THE DEPENDENT
C VARIABLE Y AND STORES THEM IN Y0. THE INTERPOLATION IS TO THE
C POINT T = TOUT, AND USES THE NORDSIECK HISTORY ARRAY Y, AS FOLLOWS..
C
C Y0(I) = SUM Y(I,J+1)*S**J,
NQ
J=0
C WHERE S = -(T-TOUT)/H.
C-----
DO 10 I = 1,N
10 Y0(I) = Y(I,1)
L = JSTART + 1
S = (TOUT - T)/H
S1 = 1.D0
DO 30 J = 2,L
S1 = S1*S
DO 20 I = 1,N
20 Y0(I) = Y0(I) + S1*Y(I,J)
30 CONTINUE
RETURN
C----- END OF SUBROUTINE INTERP -----
END
C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE STIFF (Y, NO)
C
parameter(nndm=3900,nnsq=15210000)
INTEGER NO,N,MF,KFLAG,JSTART,IPIV,NQUSED,NSTEP,NFE,NJE
INTEGER IMETH,MITER,NQ,L,IDOUB,MFOLD,NOLD,IRET,MEO,MIO,
1 IWEVAL,MAXDER,LMAX,IREDO,J,NSTEP,J1,J2,M,IER,NEWQ
DOUBLE PRECISION Y,T,H,HMIN,HMAX,EPS, UROUND, YMAX,ERROR,
1 SAVE1,SAVE2,PW,HUSED
DOUBLE PRECISION EL,OLDL0,TOLD,RMAX,RC,CRATE,EPSOLD,
1 HOLD,FN, EDN,E,EUP,BND,RH,R1,CON,R,HL0,R0,D,PHL0,
1 PR3,D1,ENQ3,ENQ2,PR2,PR1,ENQ1
REAL TQ
COMMON /GEAR1/ T, H, HMIN, HMAX, EPS, UROUND, N, MF, KFLAG, JSTART
COMMON /GEAR2/ YMAX(nndm)
COMMON /GEAR3/ ERROR(nndm)
COMMON /GEAR4/ SAVE1(nndm)
COMMON /GEAR5/ SAVE2(nndm)
COMMON /GEAR6/ PW(nnsq)
COMMON /GEAR7/ IPIV(nndm)
COMMON /GEAR9/ HUSED, NQUSED, NSTEP, NFE, NJE
C-----
DIMENSION Y(N0,29)
C DIMENSION Y(N0,1)
C-----

```

```

C STIFF PERFORMS ONE STEP OF THE INTEGRATION OF AN INITIAL VALUE
C PROBLEM FOR A SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS.
C COMMUNICATION WITH STIFF IS DONE WITH THE FOLLOWING VARIABLES..
C
C Y AN N0 BY LMAX ARRAY CONTAINING THE DEPENDENT VARIABLES
C AND THEIR SCALED DERIVATIVES. LMAX IS 13 FOR THE ADAMS
C METHODS AND 6 FOR THE GEAR METHODS. LMAX - 1 = MAXDER
C IS THE MAXIMUM ORDER AVAILABLE. SEE SUBROUTINE COSET.
C Y(I,J+1) CONTAINS THE J-TH DERIVATIVE OF Y(I), SCALED BY
C H**J/FACTOIAL(J) (J = 0,1,...,NQ).
C N0 A CONSTANT INTEGER. GE, N, USED FOR DIMENSIONING PURPOSES.
C T THE INDEPENDENT VARIABLE. T IS UPDATED ON EACH STEP TAKEN.
C H THE STEP SIZE TO BE ATTEMPTED ON THE NEXT STEP.
C H IS ALTERED BY THE ERROR CONTROL ALGORITHM DURING THE
C PROBLEM. H CAN BE EITHER POSITIVE OR NEGATIVE, BUT ITS
C SIGN MUST REMAIN CONSTANT THROUGHOUT THE PROBLEM.
C HMIN, THE MINIMUM AND MAXIMUM ABSOLUTE VALUE OF THE STEP SIZE
C HMAX TO BE USED FOR THE STEP. THESE MAY BE CHANGED AT ANY
C TIME, BUT WILL NOT TAKE EFFECT UNTIL THE NEXT H CHANGE.
C EPS THE RELATIVE ERROR BOUND. SEE DESCRIPTION IN DRIVER.
C UROUND THE UNIT ROUNDOFF OF THE MACHINE.
C N THE NUMBER OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS.
C MF THE METHOD FLAG. SEE DESCRIPTION IN DRIVER.
C KFLAG A COMPLETION CODE WITH THE FOLLOWING MEANINGS..
C 0 THE STEP WAS SUCCESSFUL.
C -1 THE REQUESTED ERROR COULD NOT BE ACHIEVED
C WITH DABS(H) = HMIN.
C -2 THE REQUESTED ERROR IS SMALLER THAN CAN
C BE HANDLED FOR THIS PROBLEM.
C -3 CORRECTOR CONVERGENCE COULD NOT BE
C ACHIEVED FOR DABS(H) = HMIN.
C ON A RETURN WITH KFLAG NEGATIVE, THE VALUES OF T AND
C THE Y ARRAY ARE AS OF THE BEGINNING OF THE LAST
C STEP, AND H IS THE LAST STEP SIZE ATTEMPTED.
C JSTART AN INTEGER USED ON INPUT AND OUTPUT.
C ON INPUT, IT HAS THE FOLLOWING VALUES AND MEANINGS..
C 0 PERFORM THE FIRST STEP.
C .GT.0 TAKE A NEW STEP CONTINUING FROM THE LAST.
C .LT.0 TAKE THE NEXT STEP WITH A NEW VALUE OF
C H, EPS, N, AND/OR MF.
C ON EXIT, JSTART IS NQ, THE CURRENT ORDER OF THE METHOD.
C YMAX AN ARRAY OF N ELEMENTS WITH WHICH THE ESTIMATED LOCAL
C ERRORS IN Y ARE COMPARED.
C ERROR AN ARRAY OF N ELEMENTS. ERROR(I)/TQ(2) IS THE ESTIMATED
C ONE-STEP ERROR IN Y(I).
C SAVE1, TWO ARRAYS OF WORKING STORAGE.
C SAVE2 EACH OF LENGTH N.
C PW A BLOCK OF LOCATIONS USED FOR PARTIAL DERIVATIVES IF
C MITER IS NOT 0. SEE DESCRIPTION IN DRIVER.
C IPIV AN INTEGER ARRAY OF LENGTH N USED FOR PIVOT

```

```

C INFORMATION IF MITER = 1 OR 2.
C-----
C DIMENSION EL(13),TQ(4)
C DATA EL(2)/1.D0/, OLDL0/1.D0/
C KFLAG = 0
C TOLD = T
C IF (JSTART .GT. 0) GO TO 200
C IF (JSTART .NE. 0) GO TO 120
C-----
C ON THE FIRST CALL, THE ORDER IS SET TO 1 AND THE INITIAL YDOT IS
C CALCULATED. RMAX IS THE MAXIMUM RATIO BY WHICH H CAN BE INCREASED
C IN A SINGLE STEP. IT IS INITIALLY 1.E4 TO COMPENSATE FOR THE SMALL
C INITIAL H, BUT THEN IS NORMALLY EQUAL TO 10. IF A FAILURE
C OCCURS (IN CORRECTOR CONVERGENCE OR ERROR TEST), RMAX IS SET AT 2
C FOR THE NEXT INCREASE.
C-----
C CALL DIFFUN (N, T, Y, SAVE1)
C DO 110 I = 1,N
110 Y(I,2) = H*SAVE1(I)
C METH = MF/10
C MITER = MF - 10*METH
C NQ = 1
C L = 2
C IDOUB = 3
C RMAX = 1.D+04
C RC = 0.D0
C CRATE = 1.D0
C EPSOLD = EPS
C HOLD = H
C MFOLD = MF
C NOLD = N
C NSTEP = 0
C NSTEPJ = 0
C NFE = 1
C NJE = 0
C IRET = 1
C GO TO 130
C-----
C IF THE CALLER HAS CHANGED METH, COSET IS CALLED TO SET
C THE COEFFICIENTS OF THE METHOD. IF THE CALLER HAS CHANGED
C N, EPS, OR METH, THE CONSTANTS E, EDN, EUP, AND BND MUST BE RESET.
C E IS A COMPARISON FOR ERRORS OF THE CURRENT ORDER NQ. EUP IS
C TO TEST FOR INCREASING THE ORDER, EDN FOR DECREASING THE ORDER.
C BND IS USED TO TEST FOR CONVERGENCE OF THE CORRECTOR ITERATES.
C IF THE CALLER HAS CHANGED H, Y MUST BE RESCALED.
C IF H OR METH HAS BEEN CHANGED, IDOUB IS RESET TO L + 1 TO PREVENT
C FURTHER CHANGES IN H FOR THAT MANY STEPS.
C-----
120 IF (MF .EQ. MFOLD) GO TO 150
C MEO = METH

```

```

MIO = MITER
METH = MF/10
MITER = MF - 10*METH
MFOLD = MF
IF (MITER .NE. MIO) IWEVAL = MITER
IF (METH .EQ. MEO) GO TO 150
IDOUB = L + 1
IRET = 1
130 CALL COSET (METH, NQ, EL, TQ, MAXDER)
LMAX = MAXDER + 1
RC = RC*EL(1)/OLDL0
OLDL0 = EL(1)
140 FN = DFL0AT(N)
EDN = FN*(DBLE(TQ(1))*EPS)**2
E = FN*(DBLE(TQ(2))*EPS)**2
EUP = FN*(DBLE(TQ(3))*EPS)**2
BND = FN*(DBLE(TQ(4))*EPS)**2
GO TO (160, 170, 200), IRET
150 IF (EPS .EQ. EPSOLD) .AND. (N .EQ. NOLD)) GO TO 160
EPSOLD = EPS
NOLD = N
IRET = 1
GO TO 140
160 IF (H .EQ. HOLD) GO TO 200
RH = H/HOLD
H = HOLD
IREDO = 3
GO TO 175
170 RH = DMAX1(RH,HMIN/DABS(H))
175 RH = DMIN1(RH,HMAX/DABS(H),RMAX)
R1 = 1.D0
DO 180 J = 2,L
R1 = R1*RH
DO 180 I = 1,N
Y(I,J) = Y(I,J)*R1
H = H*RH
RC = RC*RH
IDOUB = L + 1
IF (IREDO .EQ. 0) GO TO 690
C-----
C THIS SECTION COMPUTES THE PREDICTED VALUES BY EFFECTIVELY
C MULTIPLYING THE Y ARRAY BY THE PASCAL TRIANGLE MATRIX.
C RC IS THE RATIO OF NEW TO OLD VALUES OF THE COEFFICIENT H*EL(1).
C WHEN RC DIFFERS FROM 1 BY MORE THAN 30 PERCENT, OR THE CALLER HAS
C CHANGED MITER, IWEVAL IS SET TO MITER TO FORCE THE PARTIALS TO BE
C UPDATED, IF PARTIALS ARE USED. IN ANY CASE, THE PARTIALS
C ARE UPDATED AT LEAST EVERY 20-TH STEP.
C-----
200 IF (DABS(RC-1.D0) .GT. 0.3D0) IWEVAL = MITER
IF (NSTEP .GE. NSTEPJ+20) IWEVAL = MITER
T = T + H
DO 210 J1 = 1,NQ
DO 210 J2 = J1,NQ
J = (NQ + J1) - J2
DO 210 I = 1,N
Y(I,J) = Y(I,J) + Y(I,J+1)
210
C-----
C UP TO 3 CORRECTOR ITERATIONS ARE TAKEN. A CONVERGENCE TEST IS
C MADE ON THE R.M.S. NORM OF EACH CORRECTION, USING BND, WHICH
C IS DEPENDENT ON EPS. THE SUM OF THE CORRECTIONS IS ACCUMULATED
C IN THE VECTOR ERROR(I). THE Y ARRAY IS NOT ALTERED IN THE CORRECTOR
C LOOP. THE UPDATED Y VECTOR IS STORED TEMPORARILY IN SAVE1.
C-----
220 DO 230 I = 1,N
230 ERROR(I) = 0.D0
M = 0
CALL DIFFUN (N, T, Y, SAVE2)
NFE = NFE + 1
IF (IWEVAL .LE. 0) GO TO 290
C-----
C IF INDICATED, THE MATRIX P = I - H*EL(1)*J IS REEVALUATED BEFORE
C STARTING THE CORRECTOR ITERATION. IWEVAL IS SET TO 0 AS AN
C INDICATOR THAT THIS HAS BEEN DONE. IF MITER = 1 OR 2, P IS
C COMPUTED AND PROCESSED IN PSET. IF MITER = 3, THE MATRIX USED
C IS P = I - H*EL(1)*D, WHERE D IS A DIAGONAL MATRIX.
C-----
IWEVAL = 0
RC = 1.D0
NJE = NJE + 1
NSTEPJ = NSTEP
GO TO (250, 240, 260), MITER
240 NFE = NFE + N
250 CON = -H*EL(1)
CALL PSET (Y, N0, CON, MITER, IER, nndm, nnsq)
IF (IER .NE. 0) GO TO 420
GO TO 350
260 R = EL(1)*1D0
DO 270 I = 1,N
270 PW(I) = Y(I,1) + R*(H*SAVE2(I) - Y(I,2))
CALL DIFFUN (N, T, PW, SAVE1)
NFE = NFE + 1
HL0 = H*EL(1)
DO 280 I = 1,N
R0 = H*SAVE2(I) - Y(I,2)
PW(I) = 1.D0
D = 1D0*R0 - H*(SAVE1(I) - SAVE2(I))
SAVE1(I) = 0.D0
IF (DABS(R0) .LT. UROUND*YMAX(I)) GO TO 280
IF (DABS(D) .EQ. 0.D0) GO TO 420
PW(I) = .1D0*R0/D

```

```

      SAVE1(I) = PW(I)*RO
280  CONTINUE
      GO TO 370
290  IF (MITER .NE. 0) GO TO (350, 350, 310), MITER
C-----
C IN THE CASE OF FUNCTIONAL ITERATION, UPDATE Y DIRECTLY FROM
C THE RESULT OF THE LAST DIFFUN CALL.
C-----
      D = 0.D0
      DO 300 I = 1,N
        R = H*SAVE2(I) - Y(I,2)
        D = D + ((R-ERROR(I))/YMAX(I))**2
        SAVE1(I) = Y(I,1) + EL(1)*R
300  ERROR(I) = R
      GO TO 400
C-----
C IN THE CASE OF THE CHORD METHOD, COMPUTE THE CORRECTOR ERROR,
C F SUB (M), AND SOLVE THE LINEAR SYSTEM WITH THAT AS RIGHT-HAND
C SIDE AND P AS COEFFICIENT MATRIX, USING THE LU DECOMPOSITION
C IF MITER = 1 OR 2. IF MITER = 3, THE COEFFICIENT H*EL(1)
C IN P IS UPDATED.
C-----
310  PHL0 = HLO
      HLO = H*EL(1)
      IF (HLO .EQ. PHL0) GO TO 330
      R = HLO/PHL0
      DO 320 I = 1,N
        D = 1.D0 - R*(1.D0 - 1.D0/PW(I))
        IF (DABS(D) .EQ. 0.D0) GO TO 440
320  PW(I) = 1.D0/D
330  DO 340 I = 1,N
340  SAVE1(I) = PW(I)*(H*SAVE2(I) - (Y(I,2) + ERROR(I)))
      GO TO 370
350  DO 360 I = 1,N
360  SAVE1(I) = H*SAVE2(I) - (Y(I,2) + ERROR(I))
      CALL SOL(N, NO, PW, SAVE1, IPIV)
370  D = 0.D0
      DO 380 I = 1,N
        ERROR(I) = ERROR(I) + SAVE1(I)
        D = D + (SAVE1(I)/YMAX(I))**2
380  SAVE1(I) = Y(I,1) + EL(1)*ERROR(I)
C-----
C TEST FOR CONVERGENCE. IF M.GT.0, AN ESTIMATE OF THE CONVERGENCE
C RATE CONSTANT IS STORED IN CRATE, AND THIS IS USED IN THE TEST.
C-----
400  IF (M .NE. 0) CRATE = DMAX1(.9D0*CRATE,D/D1)
      IF ((D*DMIN1(1.D0,2.D0*CRATE)) .LE. BND) GO TO 450
      D1 = D
      M = M + 1
      IF (M .EQ. 3) GO TO 410
      CALL DIFFUN(N, T, SAVE1, SAVE2)
      GO TO 290
C-----
C THE CORRECTOR ITERATION FAILED TO CONVERGE IN 3 TRIES. IF PARTIALS
C ARE INVOLVED BUT ARE NOT UP TO DATE, THEY ARE REEVALUATED FOR THE
C NEXT TRY. OTHERWISE THE Y ARRAY IS RETRACTED TO ITS VALUES
C BEFORE PREDICTION, AND H IS REDUCED, IF POSSIBLE. IF NOT, A
C NO-CONVERGENCE EXIT IS TAKEN.
C-----
410  NFE = NFE + 2
      IF (IWEVAL .EQ. -1) GO TO 440
420  T = TOLD
      RMAX = 2.D0
      DO 430 J1 = 1,NQ
        DO 430 J2 = J1,NQ
          J = (NQ + J1) - J2
          DO 430 I = 1,N
            Y(I,J) = Y(I,J) - Y(I,J+1)
430  Y(I,J) = Y(I,J) - Y(I,J+1)
      IF (DABS(H) .LE. HMIN*1.00001D0) GO TO 680
      RH = .25D0
      IREDO = 1
      GO TO 170
440  IWEVAL = MITER
      GO TO 220
C-----
C THE CORRECTOR HAS CONVERGED. IWEVAL IS SET TO -1 IF PARTIAL
C DERIVATIVES WERE USED, TO SIGNAL THAT THEY MAY NEED UPDATING ON
C SUBSEQUENT STEPS. THE ERROR TEST IS MADE AND CONTROL PASSES TO
C STATEMENT 500 IF IT FAILS.
C-----
450  IF (MITER .NE. 0) IWEVAL = -1
      NFE = NFE + M
      D = 0.D0
      DO 460 I = 1,N
        D = D + (ERROR(I)/YMAX(I))**2
460  D = D + (ERROR(I)/YMAX(I))**2
      IF (D .GT. E) GO TO 500
C-----
C AFTER A SUCCESSFUL STEP, UPDATE THE Y ARRAY.
C CONSIDER CHANGING H IF IDOUB = 1. OTHERWISE DECREASE IDOUB BY 1.
C IF IDOUB IS THEN 1 AND NQ.LT. MAXDER, THEN ERROR IS SAVED FOR
C USE IN A POSSIBLE ORDER INCREASE ON THE NEXT STEP.
C IF A CHANGE IN H IS CONSIDERED, AN INCREASE OR DECREASE IN ORDER
C BY ONE IS CONSIDERED ALSO. A CHANGE IN H IS MADE ONLY IF IT IS BY A
C FACTOR OF AT LEAST 1.1. IF NOT, IDOUB IS SET TO 10 TO PREVENT
C TESTING FOR THAT MANY STEPS.
C-----
      KFLAG = 0
      IREDO = 0
      NSTEP = NSTEP + 1
      HUSED = H

```



```

NQUSED = NQ
DO 470 J = 1,L
  DO 470 I = 1,N
    Y(I,J) = Y(I,J) + EL(J)*ERROR(I)
  IF (IDOUB .EQ. 1) GO TO 520
  IDOUB = IDOUB - 1
  IF (IDOUB .GT. 1) GO TO 700
  IF (L .EQ. LMAX) GO TO 700
DO 490 I = 1,N
  490  Y(I,LMAX) = ERROR(I)
  GO TO 700
C-----
C THE ERROR TEST FAILED. KFLAG KEEPS TRACK OF MULTIPLE FAILURES.
C RESTORE T AND THE Y ARRAY TO THEIR PREVIOUS VALUES, AND PREPARE
C TO TRY THE STEP AGAIN. COMPUTE THE OPTIMUM STEP SIZE FOR THIS OR
C ONE LOWER ORDER.
C-----
500 KFLAG = KFLAG - 1
  T = TOLD
  DO 510 J1 = 1,NQ
    DO 510 J2 = J1,NQ
      J = (NQ + J1) - J2
      DO 510 I = 1,N
        Y(I,J) = Y(I,J) - Y(I,J+1)
      RMAX = 2.D0
      IF (DABS(H) .LE. HMIN*1.00001D0) GO TO 660
      IF (KFLAG .LE. -3) GO TO 640
      IREDO = 2
      PR3 = 1.D20
      GO TO 540
C-----
C REGARDLESS OF THE SUCCESS OR FAILURE OF THE STEP, FACTORS
C PR1, PR2, AND PR3 ARE COMPUTED, BY WHICH H COULD BE DIVIDED
C AT ORDER NQ - 1, ORDER NQ, OR ORDER NQ + 1, RESPECTIVELY.
C IN THE CASE OF FAILURE, PR3 = 1.E20 TO AVOID AN ORDER INCREASE.
C THE SMALLEST OF THESE IS DETERMINED AND THE NEW ORDER CHOSEN
C ACCORDINGLY. IF THE ORDER IS TO BE INCREASED, WE COMPUTE ONE
C ADDITIONAL SCALED DERIVATIVE.
C-----
520 PR3 = 1.D20
  IF (L .EQ. LMAX) GO TO 540
  D1 = 0.D0
  DO 530 I = 1,N
    D1 = D1 + ((ERROR(I) - Y(I,LMAX))/YMAX(I))**2
    ENQ3 = .5D0/DFLOAT(L+1)
    PR3 = ((D1/EUP)**ENQ3)*1.4D0 + 1.4D-06
  540 ENQ2 = .5D0/DFLOAT(L)
    PR2 = ((D1/E)**ENQ2)*1.2D0 + 1.2D-06
    PR1 = 1.D20
  IF (NQ .EQ. 1) GO TO 560
D = 0.D0
DO 550 I = 1,N
  550  D = D + (Y(I,L)/YMAX(I))**2
  ENQ1 = .5D0/DFLOAT(NQ)
  PR1 = ((D/EDN)**ENQ1)*1.3D0 + 1.3D-06
  560  IF (PR2 .LE. PR3) GO TO 570
  IF (PR3 .LT. PR1) GO TO 590
  GO TO 580
  570  IF (PR2 .GT. PR1) GO TO 580
  NEWQ = NQ
  RH = 1.D0/PR2
  GO TO 620
  580  NEWQ = NQ - 1
  RH = 1.D0/PR1
  GO TO 620
  590  NEWQ = L
  RH = 1.D0/PR3
  IF (RH .LT. 1.1D0) GO TO 610
  DO 600 I = 1,N
    600  Y(I,NEWQ+1) = ERROR(I)*EL(L)/DFLOAT(L)
  GO TO 630
  610  IDOUB = 10
  GO TO 700
  620  IF ((KFLAG .EQ. 0) .AND. (RH .LT. 1.1D0)) GO TO 610
C-----
C IF THERE IS A CHANGE OF ORDER, RESET NQ, L, AND THE COEFFICIENTS.
C IN ANY CASE H IS RESET ACCORDING TO RH AND THE Y ARRAY IS RESCALED.
C THEN EXIT FROM 690 IF THE STEP WAS OK, OR REDO THE STEP OTHERWISE.
C-----
  IF (NEWQ .EQ. NQ) GO TO 170
  630  NQ = NEWQ
  L = NQ + 1
  IRET = 2
  GO TO 130
C-----
C CONTROL REACHES THIS SECTION IF 3 OR MORE FAILURES HAVE OCCURED.
C IT IS ASSUMED THAT THE DERIVATIVES THAT HAVE ACCUMULATED IN THE
C Y ARRAY HAVE ERRORS OF THE WRONG ORDER. HENCE THE FIRST
C DERIVATIVE IS RECOMPUTED, AND THE ORDER IS SET TO 1. THEN
C H IS REDUCED BY A FACTOR OF 10, AND THE STEP IS RETRIED.
C AFTER A TOTAL OF 7 FAILURES, AN EXIT IS TAKEN WITH KFLAG = -2.
C-----
  640  IF (KFLAG .EQ. -7) GO TO 670
  RH = .1D0
  RH = DMAX1(HMIN/DABS(H),RH)
  H = H*RH
  CALL DIFFUN (N, T, Y, SAVE1)
  NFE = NFE + 1
  DO 650 I = 1,N
    650  Y(I,2) = H*SAVE1(I)

```



```

M = K
DO 10 I = KP1,N
  IF (DABS(A(I,K)) .GT. DABS(A(M,K))) M = I
  IP(K) = M
  T = A(M,K)
  IF (M .EQ. K) GO TO 20
  IP(N) = -IP(N)
  A(M,K) = A(K,K)
  A(K,K) = T
20 IF (T .EQ. 0.D0) GO TO 80
  T = 1.D0/T
  DO 30 I = KP1,N
    A(I,K) = -A(I,K)*T
  DO 50 J = KP1,N
    T = A(M,J)
    A(M,J) = A(K,J)
    A(K,J) = T
  IF (T .EQ. 0.D0) GO TO 50
  DO 40 I = KP1,N
    A(I,J) = A(I,J) + A(I,K)*T
40 CONTINUE
60 CONTINUE
70 K = N
  IF (A(N,N) .EQ. 0.D0) GO TO 80
  RETURN
80 IER = K
  IP(N) = 0
  RETURN
C----- END OF SUBROUTINE DEC -----
END

C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE SOL (N, NDIM, A, B, IP)
C
C   INTEGER N,NDIM,IP,NM1,K,KP1,M,I,KB,KM1
C   DOUBLE PRECISION A,B,T
C   DIMENSION A(NDIM,N), B(N), IP(N)
C-----
C SOLUTION OF LINEAR SYSTEM, A*X = B .
C INPUT..
C N = ORDER OF MATRIX.
C NDIM = DECLARED DIMENSION OF ARRAY A .
C A = TRIANGULARIZED MATRIX OBTAINED FROM DEC.
C B = RIGHT HAND SIDE VECTOR.
C IP = PIVOT VECTOR OBTAINED FROM DEC.
C DO NOT USE IF DEC HAS SET IER.NE. 0.
C OUTPUT..
C B = SOLUTION VECTOR, X .
C-----
  IF (N .EQ. 1) GO TO 50
  NM1 = N - 1
  DO 20 K = 1,NM1
    KP1 = K + 1
    M = IP(K)
    T = B(M)
    B(M) = B(K)
    B(K) = T
    DO 10 I = KP1,N
      B(I) = B(I) + A(I,K)*T
    20 CONTINUE
  DO 40 KB = 1,NM1
    KM1 = N - KB
    K = KM1 + 1
    B(K) = B(K)/A(K,K)
    T = -B(K)
    DO 30 I = 1,KM1
      B(I) = B(I) + A(I,K)*T
    40 CONTINUE
  50 B(1) = B(1)/A(1,1)
  RETURN
C----- END OF SUBROUTINE SOL -----
END

C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE lubksb(a,n,np,indx,b)
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   INTEGER n,np,indx(n)
C   INTEGER i,j,il
C   REAL sum
C   DIMENSION a(np,np),b(n)
C   ii=0
  do 12 j=1,n
    il=indx(j)
    sum=b(il)
    b(il)=b(j)
    if (ii.ne.0)then
      do 11 j=ii,j-1
        sum=sum-a(j,il)*b(j)
      11 continue
    else if (sum.ne.0.) then
      ii=i
    endif
    b(j)=sum
  12 continue
  do 14 j=n,1,-1
    sum=b(j)
    do 13 j=i+1,n
      sum=sum-a(j,i)*b(j)
    13 continue
  14 continue

```


ANEXO IV

PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE LA SOLUCIÓN TERMO-HIDRODINÁMICA

```

C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
PROGRAM COJIN3D THD
C
c Este programa resuelve el flujo tridimensional en un cojinete cilíndrico.
c
C -----
c Las condiciones de borde son:
c   entrada   : presión(0,y,z) = 0
                temperatura (0,y,z)=0
c   salida    : presión(XLARGO,y,z) = 0
c   superf. sólida : vx(x,GAP,z) = UU
                vy(x,GAP,z) = 1/Pi*dh/dx
                vz(x,GAP,z) = 0
c                vx(x,0,z) = 0
c                vy(x,0,z) = 0
c                vz(x,0,z) = 0
c                dvx/dy(x,0,z) = ?
c                dvz/dy(x,0,z) = ?
c                dt/dy(x,0,z) = ?
C -----
c Variables:
c
c   ALARGO    :   largo del cojinete
c   ASPECTO   :   relación de aspecto (L/R)
c   DELGUESS  :   Vector con la variación de cada GUESS,
c                 elegida para el cálculo de las derivadas, DFDV,
c                 de las condiciones de borde en y=1 respecto
c                 de las variables supuestas.
c   DELTA     :   Proporción en que se quiere variar GUESS para
c                 obtener DELGUESS.
c   DELV(N2)  :   Equivalente a DELGUESS
c   DELX      :   1/nint = incremento en x para las diferencias
c   DELZ      :   1/ninz = incremento en z para las diferencias
c   DET       :   Determinante que sale del método L-U
c   DFDV(NP, NP) : Matriz con las derivadas de las condiciones
c                 de borde en y=1 respecto de las variables
c                 supuestas

```



```

NINT=15
NINZ=15
Y1 = 0.
Y2 = 1.
DELX = XLARGO / NINT
DELZ = ZLARGO / NINZ
DELTA = 1.E-6
NN=NINT
NZ = (NINT + 1) * 8
NVAR = NZ*(NINZ + 1)
N2 = NVAR - (4*(NINZ+1)*(NINT+1))
N2 = 2*(NINZ+1)*(NINT+1)+NINT*(NINZ+1)+(NINZ-1)*(NINT-1)
write(6,* 'N2',n2,'NVAR', 8*(NINZ+1)*(NINT+1))
EPS = 1.E-10
ICANTLOOPS=0
I2=0
THETA(1)=0.
ZZ(1)=0.
DO I=1, NINT
  THETA(I+1)=(THETA(I)+DELX) /XLARGO
END DO
DO I=1, NINT+1
  HH(I)=1+EPSILON*COS(PI*(THETA(I)))
  DH(I)=-PI*EPSILON*SIN(PI*(THETA(I)))
  D2H(I)=-PI**2.*EPSILON*COS(PI*(THETA(I)))
END DO
DO K=1, NINZ
  ZZ(K+1)=ZZ(K)+DELZ
END DO
Temp1=8.
TM=4.
! Temp estimada para X=1
DO I=2, NINT+1
  DO K=1,(NINZ+1)
    I2 = I2+1
    GUESS(I2) =Temp1*THETA(I)
  END DO
END DO
c
c
DO I=1, NINT+1
  DO K=1,(NINZ+1)
    I2 = I2+1
    GUESS(I2) =(-3./2./PI*(ZZ(K)**2.-ZZ(K))*(D2H(I)/ ! d vx/ dy
    @ HH(I)**2.-3.*DH(I)**2./HH(I)**3.)*0.+1./HH(I))
  END DO
END DO
DO I=1, NINT+1
  DO K=1,(NINZ+1)
    I2 = I2+1
    GUESS(I2) =0.
    ! d vz/ dy
  END DO
END DO
DO I=2, NINT
  DO K=2,(NINZ)
    I2 = I2+1
    GUESS(I2) =-3.*EPSILON*SIN(PI*(THETA(I)))/(HH(I))**3.*(-1)*
    !presiones
    @ ((ZZ(K))**2.-ZZ(K))*2.5*((THETA(I)/XLARGO)**2.-(THETA(I)/XLARGO))
  END DO
END DO
DO J=1, N2
  DELGUESS(J)=DABS(DELTA*GUESS(J))
  IF (GUESS(J).EQ.0.) THEN
    DELGUESS(J)=DELTA
  END IF
END DO
ICONTADOR=1
CALL
SHOOT(NVAR,GUESS,DELGUESS,N2,Y1,Y2,F,DGUESS,EPS,CONTADOR,TM,
@ TMED,PC)
CONTMED=0.
CONTCAV=0.
CONTADOR=CONTADOR+1
VaiToI=0.
SUMA2=0.
DO I=1,N2
  SUMA2=(DGUESS(I)**2+SUMA2)
  IF(DABS(DGUESS(I)).GT.0.1) THEN I.1
    VaiToI=1
  END IF
END DO
IF(SUMA2.GT.0.1) THEN I.1
  VaiToI=1
c
c

```

```

c      END IF
      WRITE(6,*) 'Iteración',ICONTADOR, ' Tolerancia',EPS,'FNORM',SUMA2
      IF (ValTol.GT.0.1) GO TO 100

      DELTAT=DABS(TMED-TM)
      write(6,*)TMED, TMED, 'TM', TM, DELTAT

c      IF (DELTAT.GT.0.15) THEN
c          TM=.5*(TMED+TM)
c          CONTTMED=1.
c          WRITE(6,*) 'CAMBIO DE TMED', TM, TM, ' TMED', TMED, DELTAT
c      END IF

      IF (CONTTMED.GT.0.1) GO TO 100

      IF (XLARGO.GT.(1.25)) THEN
          factor=0.95
      ELSE
          factor=.995
      END IF

      IF (PC.LT.(-0.001)) THEN
          XLARGO=XLARGO*factor
          DELX = XLARGO / NINT
          WRITE(6,*)'RECALCULANDO',' PC',PC, ' XMAX', XLARGO
          CONTCAV=1.
      END IF

      IF (CONTCAV.GT.0.1) GO TO 100

      WRITE(6,*) 'convirgio',GUESS(2),GUESS(6)
      WRITE(6,*) 'L/D',ALARGO/DIAMETRO
      WRITE(6,*) 'L/R',aspecto
      WRITE(6,*) 'c/R',huel
      WRITE(6,*) 'XMAX',XLARGO
      WRITE(27,*) 'L/D',ALARGO/DIAMETRO, 'L/R',aspecto, '
      @ 'c/R',huel, 'NINT',NINT, 'NINZ',NINZ, 'Iteración',
      @ ICONTADOR, ' Tolerancia',EPS, ' XLARGO', XLARGO
      END

c
c      SUBROUTINE SHOOT(NVAR,V,DELV,N2,X1,X2,F,DV,EE,CONT, TMEDI, TMED,PCC)
c
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      PARAMETER (NP=3900, PI=3.1415926)
      DIMENSION V(N2),DELV(N2),F(N2),DV(N2),Y(NP),DFDV(NP,NP),INDX(NP),
      @ HH(NINT+1),DH(NINT+1),THETA(NINT+1)
      COMMON/DATOS/NZ,DELX,DELZ,EPSILON,ASPECTO,HUEL,NINZ,NINT,

```

```

@ CAPPA, ALAMBDA
INDEX=1
H0=1.E-8
MF=22
K=1
EPS=EE
TOLP=1.E-10
THETA(1)=0.
HH(1)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(1))
DH(1)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(1))
DO I=2,NINT+1
  THETA(I)=THETA(I-1)+DELX
  HH(I)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(I))
  DH(I)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(I))
END DO

CALL LOAD (X1,V,N2,Y,NVAR,DELX,EPSILON,NINZ,NINT,NZ)

XIN = X1
XEND = XIN
OPEN(UNIT=11,FILE='VX.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=12,FILE='VY.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=13,FILE='VZ.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=14,FILE='Temp.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=15,FILE='DuDY.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=16,FILE='DwDY.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=17,FILE='DiDY.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=18,FILE='PRES.DAT',STATUS='UNKNOWN')

OPEN(UNIT=19,FILE='VXmed.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=20,FILE='VYmed.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=21,FILE='VZmed.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=22,FILE='Tmed.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=23,FILE='DuYmed.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=24,FILE='DwYmed.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=25,FILE='DiYmed.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=26,FILE='Presmed.DAT',STATUS='UNKNOWN')

OPEN(UNIT=27,FILE='Datos.DAT',STATUS='UNKNOWN')

NCOMPz = (NINZ+1)/2
ZCOMPz = (NINZ+1)/2.
IF (NCOMPz.EQ.ZCOMPz) THEN
  KMED = (NINZ+1)/2
ELSE
  KMED = (NINZ+1)/2 + 1
END IF
L=KMED

```

```

NCOMPX = (NINT+1)/2
ZCOMPX = (NINT+1)/2.
IF (NCOMPX.EQ.ZCOMPX) THEN
  IMED = (NINT+1)/2
ELSE
  IMED = (NINT+1)/2 + 1
END IF

M=IMED
FORMAT ('.1,3,1,3X,31(E11.4,2X))
FORMAT (2X,F3.1,3X,'X',3X,4(E11.4,2X))
FORMAT (8X,'VY',3X,4(E11.4,2X))
FORMAT (8X,'VZ',3X,4(E11.4,2X))
FORMAT (8X,'P',3X,4(E11.4,2X))
FORMAT ('.1,F3.1,3X,31(E11.4,2X))

WRITE(19,4600) XEND,(Y(8*II-7+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(20,4600) XEND,(Y(8*II-6+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(21,4600) XEND,(Y(8*II-5+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(22,4600) XEND,(Y(8*II-4+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(23,4600) XEND,(Y(8*II-3+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(24,4600) XEND,(Y(8*II-2+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(25,4600) XEND,(Y(8*II-1+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(26,4600) XEND,(Y(8*II-0+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))

DO KK=1, NINZ+1
WRITE(11,4500) KK,(Y(8*II-7+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(12,4500) KK,(Y(8*II-6+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(13,4500) KK,(Y(8*II-5+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(14,4500) KK,(Y(8*II-4+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(15,4500) KK,(Y(8*II-3+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(16,4500) KK,(Y(8*II-2+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(17,4500) KK,(Y(8*II-1+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(18,4500) KK,(Y(8*II-0+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))

END DO

CALL DRIVE (NVAR,XIN,H0,Y,XEND,EPS,MF,INDEX)
XIN = XEND
DO KK=1, NINZ+1
WRITE(11,4500) KK,(Y(8*II-7+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(12,4500) KK,(Y(8*II-6+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(13,4500) KK,(Y(8*II-5+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(14,4500) KK,(Y(8*II-4+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(15,4500) KK,(Y(8*II-3+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(16,4500) KK,(Y(8*II-2+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(17,4500) KK,(Y(8*II-1+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(18,4500) KK,(Y(8*II-0+8*(KK-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))

END DO
PAUSE

WRITE(19,4600) XEND,(Y(8*II-7+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(20,4600) XEND,(Y(8*II-6+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(21,4600) XEND,(Y(8*II-5+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(22,4600) XEND,(Y(8*II-4+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(23,4600) XEND,(Y(8*II-3+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(24,4600) XEND,(Y(8*II-2+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(25,4600) XEND,(Y(8*II-1+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))
WRITE(26,4600) XEND,(Y(8*II-0+8*(L-1)*(NINT+1)),II=1,(NINT+1))

IF (XEND.LT.X2) GO TO 200

WRITE(6,*) 'DESPUES DEL PRIMER DRIVE'
CALL SCORE (X2,Y,NVAR,F,N2,DELX,EPSILON,NINZ,NINT,NZ,TMED)
numero=0
DO IV=1,N2
  SAV = V(IV)
  V(IV) = V(IV) + DELV(IV)
CALL LOAD (X1,V,N2,Y,NVAR,DELX,EPSILON,NINZ,NINT,NZ)
INDEX = 1
HO = 1.E-8
MF=23
XIN = X1
XEND = XIN
XEND = XEND + 0.1

CALL DRIVE (NVAR,XIN,H0,Y,XEND,EPS,MF,INDEX)

XIN = XEND
IF (XEND.LT.X2) GO TO 300
CALL SCORE (X2,Y,NVAR,DV,N2,DELX,EPSILON,NINZ,NINT,NZ,TMED)

```

```

DO I=1,N2
  DFDV(I,IV) = (DV(I)-F(I))/DELV(IV)
  END DO
  V(IV) = SAV
  END DO
DO IV=1,N2
  DV(IV) = -F(IV)
  END DO
CALL LUDCMP(DFDV,N2,NP,INDX,DET)
CALL LUBKSB(DFDV,N2,NP,INDX,DV)
DO IV=1,N2
  V(IV) = V(IV) + DV(IV)
  END DO
EPS=EE
RETURN
END

C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE LOAD
(YIN,GUESS,NGUESS,Z,NVAR,DELX,EPSILON,NINZ,NINT,NZ)
C
c Se asumen los valores iniciales de las variables desconocidas (GUESS)
c y se asignan los valores iniciales de Z.

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION GUESS(NGUESS),Z(NVAR),THETA(NZ/8),HH(NZ/8),DH(NZ/8),
@ZZ(NZ/8)
PARAMETER (PI=3.1415926)
YIN=YIN ! lo requiere el compilador
THETA(1)=0.
HH(1)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(1))
DH(1)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(1))
DO I=2,NINT+1
  THETA(I)=THETA(I-1)+DELX
  HH(I)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(I))
  DH(I)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(I))
  END DO
DZ = 1. / NINZ
ZZ(1)=0.

```

```

DO K=1, NINZ
  ZZ(K+1)=ZZ(K)+DZ
  END DO
  I2=0
  DO K=1, NINZ+1
    DO I=1,(NINT+1)
      Z(8*I-7+(k-1)*NZ) = 0.
      END DO
      ! velocidades en x
    DO I=1,(NINT+1)
      Z(8*I-6+(k-1)*NZ) = 0.
      END DO
      ! velocidades en y
    DO I=1,(NINT+1)
      Z(8*I-5+(k-1)*NZ) = 0.
      END DO
      ! velocidades en z
    END DO
    ! temperaturas en x=0
  DO I=2, NINT+1
    DO K=1,(NINZ+1)
      I2 = I2+1
      Z(8*I-4+(k-1)*NZ) =GUESS(I2)
      END DO
      ! temp
    END DO
    DO I=1, NINT+1
      DO K=1,(NINZ+1)
        I2 = I2+1
        Z(8*I-3+(k-1)*NZ) =GUESS(I2)
        END DO
        ! d vz/ dy
      DO I=1, NINT+1
        DO K=1,(NINZ+1)
          I2 = I2+1
          Z(8*I-2+(k-1)*NZ) =GUESS(I2)
          END DO
          ! d vz/ dy
        END DO
      END DO
    END DO
  END DO

```

```

END DO
DO K=1, NINZ+1
DO I=1, (NINT+1)
  Z(8*I-1+(k-1)*NZ) = 0.
END DO
END DO
! d temp/ dy

DO I=2, NINT
DO K=2, (NINZ)
  I2 = I2+1
  Z(8*I+(k-1)*NZ) = GUESS(I2)
END DO
END DO
! presiones

DO K=1, (NINZ+1)
Z(8+(k-1)*NZ) = 0.
Z(8*(NINT+1)+(k-1)*NZ) = 0.
END DO
! presiones en x=0
! presiones en x=1

DO I=2, (NINT)
  Z(8*I+0*NZ) = 0.
  Z(8*I+NINZ*NZ) = 0.
END DO
! presiones en z=0
! presiones en z=1

RETURN
END

C
C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE SCORE(YFIN,Z,NVAR,F,NF,DELX,EPSILON,NINZ,NINT,NZ,TMEDI)
C
IMPLICIT REAL*(A-H,O-Z)
DIMENSION FNF,Z(NVAR),THETA(NINT+1),
@ HH(NINT+1), DH(NINT+1)
PARAMETER (PI=3.1415926)
YFIN=YFIN ! lo requiere el compilador
I3 = 0
THETA(1)=0.
HH(1)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(1))
DH(1)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(1))
DO I=2,NINT+1
  THETA(I)=THETA(I-1)+DELX
  HH(I)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(I))
  DH(I)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(I))
END DO
DO I=2,NINT+1
DO K=1,NINZ+1
  I3 = I3+1
  F(I3) = Z(8*I-4+(k-1)*8*(NINT+1))-TMEDI
END DO
END DO
DO I=1,NINT+1
DO K=1,NINZ+1
  I3 = I3+1
  F(I3) = Z(8*I-7+(k-1)*NZ)-1.
END DO
END DO
DO I=1,NINT+1
DO K=1,NINZ+1
  I3 = I3+1
  F(I3) = Z(8*I-5+(k-1)*NZ)-0.
END DO
END DO
DO I=2,NINT
DO K=2,NINZ
  I3 = I3+1
  F(I3) = Z(8*I-6+(k-1)*NZ)-1./PI*DH(I)
END DO
END DO
RETURN
END

C
C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE DIFFUN(N,T,Z,ZP)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION Z(N), ZP(N), THETA(NINT+1), HH(NINT+1), DH(NINT+1)
PARAMETER (PI=3.1415926)
COMMON/DATOS/NZ,DELX,DELZ,EPSILON,ASPECTO,HUEL,NINZ,NINT,N2,
@CAPPA,ALAMBDA
T = T
WRITE(6,*) CAPPA, ALAMBDA
THETA(1)=0.
HH(1)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(1))
DH(1)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(1))
DO I=2,NINT+1

```

```

THETA(I)=THETA(I-1)+DELX
HH(I)=1+EPSILON*COS(PI*THETA(I))
DH(I)=-PI*EPSILON*SIN(PI*THETA(I))
END DO

DO K=1, NINZ+1
DO I=1, NINT+1
ZP(8*1-7+(k-1)*NZ) = Z(8*1-3+(k-1)*NZ)
END DO
END DO

c derivadas de la velocidad en x respecto de y

DO K=2, NINZ
DO I=2, NINT
ZP(8*1-6+(k-1)*NZ) = -1./(2.*DELX) *
@ (Z(8*(I+1)-7+(k-1)*NZ) - Z(8*(I-1)-7+(k-1)*NZ))*
@ HH(I)/PI+ T *DH(I)/P/Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-1./(2.*DELZ)*
@ HH(I)*(Z(8*1-5+k*NZ) - Z(8*1-5+(k-2)*NZ))
END DO
END DO

c
DO K=1, NINZ+1
DO I=1, NINT+1
ZP(8*1-5+(k-1)*NZ) = Z(8*1-2+(k-1)*NZ)
END DO
END DO

c derivadas de la temperatura respecto de y

DO K=1, NINZ+1
DO I=1, NINT+1
ZP(8*1-4+(k-1)*NZ) = Z(8*1-1+(k-1)*NZ)
END DO
END DO

C
DO K=1, NINZ+1
DO I=1, NINT+1
ZP(8*1-3+(k-1)*NZ) = 1./(PI**2.+(HUEL*T*DH(I))**2.)*
@ (exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))*HH(I)**2.*Z(8*(I+1)+(k-1)*NZ)
@ -Z(8*(I-1)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)*PI*ASPECTO**2.
@ -HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)
@ Z(8*(I+1)-7+(k-1)*NZ)-Z(8*(I-1)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@ +HUEL**2.*T**2.*DH(I)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@ HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-5+(k)*NZ)-Z(8*1-5+(k-2)*NZ))/(2.*DELZ)+
@ HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*(Z(8*(I+1)-3+(k-1)*NZ)-
@ Z(8*(I-1)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)*HUEL**2.*T*DH(I)**2.*

```

```

@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)+HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*PI*
@Z(8*1-2+(k)*NZ)-Z(8*1-2+(k-2)*NZ))/(2.*DELX)
@+PI**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ) )
END DO
END DO

c derivada segunda de la velocidad en z respecto de y dos veces
DO I=1, NINT+1
ZP(8*1-2+(k-1)*NZ) = 1./(2.*DELZ) *HH(I)**2.*
@ exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))*
@ (Z(8*1+k*NZ) - Z(8*1+(k-2)*NZ))+
@ cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)
END DO
END DO

DO K=2, NINZ
DO I=2, NINT
ZP(8*1-1+(k-1)*NZ) = HH(I)/(PI*alambda)*
@Z(8*1-7+(k-1)*NZ)*(HH(I)*(Z(8*(I+1)-4+(k-1)*NZ)-
@ Z(8*(I-1)-4+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-T*DH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)/alambda*Z(8*1-6+(k-1)*NZ)
@*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)**2./alambda*
@Z(8*1-5+(k-1)*NZ)*(Z(8*1-4+k*NZ) -
@Z(8*1-4+(k-2)*NZ))/(2.*DELZ)-exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))
@/alambda*(Z(8*1-3+(k-1)*NZ)**2.+ASPECTO**2.*
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)**2.)
END DO
END DO

DO K=2, NINZ
DO I=2, NINT
ZP(8*1+(k-1)*NZ) = +(HUEL/ASPECTO)**2./((PI**2.+(HUEL*T*
@ DH(I))**2.)*HH(I)* (+DH(I)*T*HH(I)**2.*ASPECTO**2.*
@Z(8*(I+1)+(k-1)*NZ)-Z(8*(I-1)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+
@exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))* (cappa*PI*HH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*(Z(8*(I+1)-7+(k-1)*NZ)-Z(8*(I-1)-7+(k-1)*NZ))
@/(2.*DELX)+cappa*PI**2.
@HH(I)*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*(Z(8*1-5+(k)*NZ)-
@Z(8*1-5+(k-2)*NZ))/(2.*DELX)-PI*HH(I)*(Z(8*(I+1)-3+(k-1)*
@NZ)-Z(8*(I-1)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+PI*DH(I)*
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)-PI**2.*HH(I)*(Z(8*1-2+(k)*NZ)-
@Z(8*1-2+(k-2)*NZ))/(2.*DELZ) )
END DO
END DO

C llamada a la subrutina de cálculo de ecuaciones diferenciales de

```

```

C la línea I=1
C
CALL DIFENT (N,T,Z,ZP,THETA,HH,DH)
C llamada a la subrutina de cálculo de ecuaciones diferenciales de
C la línea I=NINT+1
CALL DIFSAL (N,T,Z,ZP,THETA,HH,DH)
RETURN
END
C
C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE PEDERV(N,T,A,PD,N0)
C
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension a(n),pd(n0,n0)
t=t
a(1)=a(1)
pd(1,1)=pd(1,1)
n0=n0
RETURN
END
C
C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE DIFENT(N,T,Z,ZP,THETA,HH,DH)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION Z(N), ZP(N), THETA(NINT+1), HH(NINT+1), DH(NINT+1)
PARAMETER (PI=3.1415926)
COMMON/DATOS/NZ,DELX,DELZ,EPSILON,ASPECTO,HUEL,NINZ,NINT,N2,
@CAPPA,ALAMBDA
T = T
C derivada de la velocidad en y respecto de y en x=0 (I=1)
I=1
DO K=2, NINZ
ZP(8*1-6+(k-1)*NZ) = -1./(2.*DELX) *
(-3.*Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ) +4.* Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ)-
Z(8*(l+2)-7+(k-1)*NZ))*
HH(l)/PI+ T*DH(l)/PI*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-1./(2.*DELZ)*
HH(l)*(-3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ) +4.* Z(8*1-5+(k-0)*NZ)
-Z(8*1-5+(k+1)*NZ))
DO I=2,NINT
ZP(8*1-6+(k-1)*NZ) = -1./(2.*DELX) *
(Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ) - Z(8*(l-1)-7+(k-1)*NZ))*
HH(l)/PI+ T*DH(l)/PI*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-1./(2.*DELZ)*
HH(l)*(-3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ) +4.* Z(8*1-5+(k-0)*NZ)
-Z(8*1-5+(k+1)*NZ))
END DO
I=NINT+1
ZP(8*1-6+(k-1)*NZ) = -1./(2.*DELX) *
(3.*Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ) -4.* Z(8*(l-1)-7+(k-1)*NZ)
+Z(8*(l-2)-7+(k-1)*NZ))*
HH(l)/PI+ T*DH(l)/PI*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-1./(2.*DELZ)*
HH(l)*(-3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ) +4.* Z(8*1-5+(k-0)*NZ)
-Z(8*1-5+(k+1)*NZ))
END DO
I=1
DO K=2, NINZ
ZP(8*1-3+(k-1)*NZ) = 1./(PI**2.+(HUEL*T*DH(l))**2.)*
@(exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))*HH(l)**2.*(-3.*Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ)
@+4.*Z(8*(l+1)+1+(k-1)*NZ)- Z(8*(l+2)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)*PI*
@ASPECTO**2.
@-HUEL**2.*T*DH(l)*HH(l)*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)
@*(-3.*Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ)-
@Z(8*(l+2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(l)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@HUEL**2.*T*DH(l)*HH(l)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-5+(k)*NZ)-Z(8*1-5+(k-2)*NZ))/(2.*DELZ)+
@HUEL**2.*T*DH(l)*HH(l)*(-3.*Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ)+4.*
@Z(8*(l+1)-3+(k-1)*NZ)- Z(8*(l+2)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-
@HUEL**2.*T*DH(l)**2.*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)+HUEL**2.*T*DH(l)*HH(l)*PI*

```

```

@Z(8*1-2+(k)*NZ)-Z(8*1-2+(k-2)*NZ)/(2.*DELX)
@+PI**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ)

END DO

C derivada segunda de velocidad en x respecto de y dos veces en z=0 (K=1)

K=1
ZP(8*1-3+(k-1)*NZ) = 1./(PI**2.+(HUEL*T*DH(I))**2.)*
@ (exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))*HH(I)**2.*Z(8*(I)+(k-1)*NZ)
@+4.*Z(8*(I+1)+(k-1)*NZ)-Z(8*(I+2)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)*PI*
@ ASPECTO**2.
@ -HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)
@* (-3.*Z(8*(I)-7+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(I+1)-7+(k-1)*NZ)-
@ Z(8*(I+2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(I)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@ HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)
@* (-3.*Z(8*(I)-7+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(I+1)-7+(k-1)*NZ)-
@ Z(8*(I+2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(I)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@ HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@* (-3.*Z(8*(I)-5+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(I+1)-5+(k-1)*NZ)-
@ Z(8*(I+2)-5+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(I)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@ HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@* (-3.*Z(8*(I)-5+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(I+1)-5+(k-1)*NZ)-
@ Z(8*(I+2)-5+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(I)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@ HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@* (-3.*Z(8*(I)-2+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(I+1)-2+(k-1)*NZ)-
@ Z(8*(I+2)-2+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+PI**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ)

DO I=2,NINT
ZP(8*1-3+(k-1)*NZ) = 1./(PI**2.+(HUEL*T*DH(I))**2.)*
@ (exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))*HH(I)**2.*Z(8*(I+1)+(k-1)*NZ)
@-Z(8*(I-1)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)*PI*ASPECTO**2.
@ -HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)
@* (-3.*Z(8*(I)-7+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(I+1)-7+(k-1)*NZ)-
@ Z(8*(I+1)-7+(k-1)*NZ)-Z(8*(I-1)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(I)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@ HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@* (-3.*Z(8*(I)-5+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(I+1)-5+(k-1)*NZ)-
@ Z(8*(I+2)-5+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(I)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@ HUEL**2.*T*DH(I)*HH(I)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@* (-3.*Z(8*(I)-2+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(I+1)-2+(k-1)*NZ)-
@ Z(8*(I+2)-2+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+PI**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ Z(8*1-3+(k-1)*NZ)

DO I=2,NINT+1
ZP(8*1-2+(k-1)*NZ) = 1./(2.*DELX)*HH(I)**2.*
@ exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(I+1)+(k-1)*NZ)-
@ (-3.*Z(8*(I)+1+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(I+2)+(k-1)*NZ)-
@ cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*Z(8*1-2+(k-1)*NZ))
@/(2.*DELX)

END DO

c derivada segunda de la temperatura respecto de y dos veces en x=0 (I)=1

I=1
DO K=2, NINZ
ZP(8*1-1+(k-1)*NZ) = HH(I)/(PI*alambda)*
@ Z(8*1-7+(k-1)*NZ)*HH(I)*(-3.*Z(8*(I)-4+(k-1)*NZ)+4.*
@ Z(8*(I+1)-4+(k-1)*NZ)
@ -Z(8*(I+2)-4+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-T*DH(I)*
@ Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)/alambda*Z(8*1-6+(k-1)*NZ)
@*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)**2./alambda*

```



```

C
I=1
DO K=2, NINZ
  ZP(8*1+(k-1)*NZ) = +(HUEL/ASPECTO)**2./((PI**2.+(HUEL*
    @ DH(I)**2.)*HH(I)**2.+(DH(I)*T*HH(I)**2.*ASPECTO**2.
    @(-3.*Z(8*(l+2)+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(l+1)+(k-1)*NZ)-
    @ Z(8*(l+2)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+
    @exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))*(cappa*PI*HH(I)*
    @Z(8*1-1+(k-1)*NZ)**(-3.*Z(8*(l)-7+(k-1)*NZ)+
    @4.*Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ)-
    @ Z(8*(l+2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+cappa*PI**2.*
    @HH(I)*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-
    @Z(8*1-5+(k-2)*NZ))/(2.*DELX)-PI*HH(I)**(-3.*Z(8*(l)-3+(k-1)*
    @NZ)+4.*Z(8*(l+1)-3+(k-1)*NZ)-Z(8*(l+2)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
    @+PI*DH(I)*
    @Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-PI**2.*HH(I)*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)-
    @Z(8*1-2+(k-2)*NZ))/(2.*DELX) )
  END DO
C derivada de la Presion respecto de y en z=0 (K=1)

```

```

C
K=1
ZP(8*1+(k-1)*NZ) = +(HUEL/ASPECTO)**2./((PI**2.+(HUEL*
    @ DH(I)**2.)*HH(I)**2.+(DH(I)*T*HH(I)**2.*ASPECTO**2.
    @(-3.*Z(8*(l+2)+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(l+1)+(k-1)*NZ)-
    @Z(8*(l+2)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+
    @exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))*(cappa*PI*HH(I)*
    @Z(8*1-1+(k-1)*NZ)**(-3.*Z(8*(l)-7+(k-1)*NZ)+
    @4.*Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ)-
    @-Z(8*(l+2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+cappa*PI**2.*
    @HH(I)*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)**(-3.*Z(8*(l)-5+(k-1)*NZ)+
    @NZ)+4.*Z(8*(l+1)-3+(k-1)*NZ)-Z(8*(l+2)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
    @+PI*DH(I)*
    @Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-PI**2.*HH(I)**(-3.*Z(8*(l)-2+(k-1)*NZ)+4.*
    @Z(8*1-2+(k-0)*NZ)-
    @Z(8*1-2+(k+1)*NZ))/(2.*DELX) ) )
  DO I=2, NINT
    ZP(8*1+(k-1)*NZ) = +(HUEL/ASPECTO)**2./((PI**2.+(HUEL*
      @ DH(I)**2.)*HH(I)**2.+(DH(I)*T*HH(I)**2.*ASPECTO**2.
      @Z(8*(l+1)+(k-1)*NZ)-Z(8*(l-1)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+
      @exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))*(cappa*PI*HH(I)*
      @Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*Z(8*(l+1)-7+(k-1)*NZ)-Z(8*(l-1)-7+(k-1)*NZ))
      @/(2.*DELX)+cappa*PI**2.*

```

```

@Z(8*1-5+(k-1)*NZ)*Z(8*1-4+(k-1)*NZ) -
@Z(8*1-4+(k-2)*NZ))/(2.*DELX)-exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))
@/alambda*(Z(8*1-3+(k-1)*NZ)**2.+ASPECTO**2.
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)**2.)
  END DO
c derivada segunda de la temperatura respecto de y dos veces en z=0 (K=1)
K=1
ZP(8*1-1+(k-1)*NZ) = HH(I)/(PI*alambda)*
@Z(8*1-7+(k-1)*NZ)*HH(I)**(-3.*Z(8*(l)-4+(k-1)*NZ)+4.*
@Z(8*(l+1)-4+(k-1)*NZ)
@-Z(8*(l+2)-4+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-T*DH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)/alambda*Z(8*1-6+(k-1)*NZ)
@*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)**2./alambda
@Z(8*1-5+(k-1)*NZ)**(-3.*Z(8*1-4+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*1-4+(k-0)*NZ)-
@Z(8*1-4+(k+1)*NZ))/(2.*DELX)-exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))
@/alambda*(Z(8*1-3+(k-1)*NZ)**2.+ASPECTO**2.
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)**2.)
  DO I=2, NINT

```

```

ZP(8*1-1+(k-1)*NZ) = HH(I)/(PI*alambda)*
@Z(8*1-7+(k-1)*NZ)*HH(I)**(-3.*Z(8*(l+1)-4+(k-1)*NZ)
@-Z(8*(l-1)-4+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-T*DH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)/alambda*Z(8*1-6+(k-1)*NZ)
@*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)**2./alambda
@Z(8*1-5+(k-1)*NZ)**(-3.*Z(8*1-4+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*1-4+(k-0)*NZ)-
@Z(8*1-4+(k+1)*NZ))/(2.*DELX)-exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))
@/alambda*(Z(8*1-3+(k-1)*NZ)**2.+ASPECTO**2.
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)**2.)
  END DO
I=NINT+1
ZP(8*1-1+(k-1)*NZ) = HH(I)/(PI*alambda)*
@Z(8*1-7+(k-1)*NZ)*HH(I)**(3.*Z(8*(l)-4+(k-1)*NZ)-4.*
@Z(8*(l-1)-4+(k-1)*NZ)
@+Z(8*(l-2)-4+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-T*DH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)/alambda*Z(8*1-6+(k-1)*NZ)
@*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)**2./alambda
@Z(8*1-5+(k-1)*NZ)**(-3.*Z(8*1-4+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*1-4+(k-0)*NZ)-
@Z(8*1-4+(k+1)*NZ))/(2.*DELX)-exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))
@/alambda*(Z(8*1-3+(k-1)*NZ)**2.+ASPECTO**2.
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)**2.)
  C derivada de la Presion respecto de y en x=0 (I=1)

```

```

@HH(I)*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*(-3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)+
@4.*Z(8*1-5+(k-0)*NZ)-
@Z(8*1-5+(k+1)*NZ))/(2.*DELZ)-PI*HH(I)*(Z(8*(1+1)-3+(k-1)*
@NZ)-Z(8*(1-1)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELZ)+PI*DH(I)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-PI**2.*HH(I)*(-3.*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)+4.*
@Z(8*1-2+(k-0)*NZ)-
@Z(8*1-2+(k+1)*NZ))/(2.*DELZ) ) )
END DO

I=NINT+1
ZP(8*1+(k-1)*NZ) = +(HUEL/ASPECTO)**2./((PI**2.+(HUEL*T*
@DH(I)**2.)*HH(I))* (+DH(I)*T*HH(I)**2.*ASPECTO**2.*
@Z(8*(1+1)+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*(1-1)+(k-1)*NZ)+ Z(8*(1-2)+(k-1)*NZ))
@/(2.*DELZ)+
@exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))* (cappa*PI*HH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*(3.*Z(8*(1)-7+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*(1-1)-7+(k-1)*NZ)
@+Z(8*(1-2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELZ)+cappa*PI**2.*
@HH(I)*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*(-3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)+
@4.*Z(8*1-5+(k-0)*NZ)-
@Z(8*1-5+(k+1)*NZ))/(2.*DELZ)-PI*HH(I)*(3.*Z(8*(1)-3+(k-1)*
@NZ)-4.*Z(8*(1-1)-3+(k-1)*NZ)+Z(8*(1-2)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELZ)+
@PI*DH(I)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-PI**2.*HH(I)*(-3.*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)+4.*
@Z(8*1-2+(k-0)*NZ)-
@Z(8*1-2+(k+1)*NZ))/(2.*DELZ) ) )

RETURN
END

C AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
SUBROUTINE DIFSAI (N,T,Z,ZP,THETA,HH,DH)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION Z(N), ZP(N), THETA(NINT+1), HH(NINT+1), DH(NINT+1)
PARAMETER (PI=3.1415926)
COMMON/DATOS/INZ,DELX,DELZ,EPSILON,ASPECTO,HUEL,NINZ,NINT,N2,
@CAPPA, ALAMBDA
T = T
WRITE(6,*) CAPPA, ALAMBDA, n2,nvar
C
C derivada de la velocidad en y respecto de y en x=1 (I=NINT+1)
I=NINT+1
DO K=2, NINZ
ZP(8*1-6+(k-1)*NZ) = -1./(2.*DELX)*
(3.*Z(8*(1)-7+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*(1-1)-7+(k-1)*NZ)+
Z(8*(1-2)-7+(k-1)*NZ))*
HH(I)/PI+ T*DH(I)/PI*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-1./(2.*DELZ)*
HH(I)*(3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-Z(8*1-5+(k-2)*NZ))
END DO
K=NINZ+1
ZP(8*1-6+(k-1)*NZ) = -1./(2.*DELX)*
(3.*Z(8*(1)-7+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*(1-1)-7+(k-1)*NZ)+
Z(8*(1-2)-7+(k-1)*NZ))*
HH(I)/PI+ T*DH(I)/PI*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-1./(2.*DELZ)*
HH(I)*(3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-5+(k-2)*NZ)+
Z(8*1-5+(k-3)*NZ))
DO I=2,NINT
ZP(8*1-6+(k-1)*NZ) = -1./(2.*DELX)*
(Z(8*(1+1)-7+(k-1)*NZ)-Z(8*(1-1)-7+(k-1)*NZ))*
HH(I)/PI+ T*DH(I)/PI*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-1./(2.*DELZ)*
HH(I)*(3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-5+(k-2)*NZ)
+Z(8*1-5+(k-3)*NZ))
C
ZP(8*1-6+(k-1)*NZ) = ZP(8*1-6+(1-1)*NZ)
!este es para simetría
ZP(8*1-6+(k-1)*NZ) = 4./3.*ZP(8*1-6+(k-2)*NZ)
C @ -1./3.*ZP(8*1-6+(k-3)*NZ)
END DO
I=1
ZP(8*1-6+(k-1)*NZ) = -1./(2.*DELX)*
(-3.*Z(8*(1)-7+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(1+1)-7+(k-1)*NZ)-
Z(8*(1+2)-7+(k-1)*NZ))*
HH(I)/PI+ T*DH(I)/PI*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-1./(2.*DELZ)*
HH(I)*(3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-5+(k-2)*NZ)+
Z(8*1-5+(k-3)*NZ))
C derivada segunda de velocidad en x respecto de y dos veces en x=1 (I=NINT+1)
I=NINT+1
DO K=2, NINZ
ZP(8*1-3+(k-1)*NZ) = 1./(PI**2.+(HUEL*T*DH(I))**2.)*

```

```

@ ( exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))**2.*(3.*Z(8*(1)+(k-1)*NZ)
@-4.*Z(8*(1-1)+(k-1)*NZ)+Z(8*(1-2)+(k-1)*NZ))
@ (2.*DELX)*PI*ASPECTO**2.
@ -HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)
@*(3.*Z(8*(1)-7+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*(1-1)-7+(k-1)*NZ)+
@Z(8*(1-2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(1)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-Z(8*1-5+(k-2)*NZ))/(2.*DELZ)+
@HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*(3.*Z(8*(1)-3+(k-1)*NZ)-4.*
@Z(8*(1-1)-3+(k-1)*NZ)+Z(8*(1-2)-3+(k-1)*NZ))
@ (2.*DELX)-HUEL**2.*T*DH(1)**2.*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)+HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*PI*
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)-Z(8*1-2+(k-2)*NZ))/(2.*DELZ)
@+PI**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ) )

```

END DO

C derivada segunda de velocidad en x respecto de y dos veces en z=1 (K=NINZ+1)

```

K=NINZ+1
ZP(8*1-3+(k-1)*NZ) = 1./(PI**2.+(HUEL*T*DH(1))**2.)
@ ( exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))**2.*
@ (3.*Z(8*(1)+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*(1-1)+(k-1)*NZ)
@+Z(8*(1-2)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)*PI*ASPECTO**2.
@ -HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)
@*(3.*Z(8*(1)-7+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*(1-1)-7+(k-1)*NZ)+
@Z(8*(1-2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(1)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ (3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-5+(k-2)*NZ)+Z(8*1-5+(k-3)*NZ))
@ (2.*DELZ)+
@HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*(3.*Z(8*(1)-3+(k-1)*NZ)-
@Z(8*(1-1)-3+(k-1)*NZ)+
@Z(8*(1-2)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-HUEL**2.*T*DH(1)**2.*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)+HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*PI*
@ (3.*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-2+(k-2)*NZ)+
@Z(8*1-2+(k-3)*NZ))/(2.*DELZ)
@+PI**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ) )
DO I=2,NINT
ZP(8*1-3+(k-1)*NZ) = 1./(PI**2.+(HUEL*T*DH(1))**2.)
@ ( exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))**2.*Z(8*(1+1)+(k-1)*NZ)
@-Z(8*(1-1)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)*PI*ASPECTO**2.

```

```

@ -HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)
@*(Z(8*(1+1)-7+(k-1)*NZ)-Z(8*(1-1)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(1)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ (3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-5+(k-2)*NZ)+Z(8*1-5+(k-3)*NZ))
@ (2.*DELZ)+
@HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*Z(8*(1+1)-3+(k-1)*NZ)-
@Z(8*(1-1)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-HUEL**2.*T*DH(1)**2.*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)+HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*PI*
@ (3.*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-2+(k-2)*NZ)+Z(8*1-2+(k-3)*NZ))
@ (2.*DELZ)
@+PI**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ) )

```

c ZP(8*1-3+(k-1)*NZ) = ZP(8*1-3+(1-1)*NZ)

END DO

I=1

```

ZP(8*1-3+(k-1)*NZ) = 1./(PI**2.+(HUEL*T*DH(1))**2.)
@ ( exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))**2.*(-3.*Z(8*(1)+(k-1)*NZ)
@+4.*Z(8*(1+1)+(k-1)*NZ)
@-Z(8*(1+2)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)*PI*ASPECTO**2.
@ -HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)
@*(-3.*Z(8*(1)-7+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(1+1)-7+(k-1)*NZ)-
@Z(8*(1+2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)
@+HUEL**2.*T**2.*DH(1)**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-
@HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*cappa*PI*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@ (3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-5+(k-2)*NZ)+Z(8*1-5+(k-3)*NZ))
@ (2.*DELZ)+
@HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*(-3.*Z(8*(1)-3+(k-1)*NZ)+4.*
@Z(8*(1+1)-3+(k-1)*NZ)-
@Z(8*(1+2)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-HUEL**2.*T*DH(1)**2.*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)+HUEL**2.*T*DH(1)*HH(1)*PI*
@ (3.*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-2+(k-2)*NZ)+Z(8*1-2+(k-3)*NZ))
@ (2.*DELZ)
@+PI**2.*cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ) )

```

c derivada segunda de la velocidad en z respecto de y dos veces en Z=1 (K=NINZ+1)

K=NINZ+1

DO I=1,NINT+1

```

ZP(8*1-2+(k-1)*NZ) = 1./(2.*DELZ)*HH(1)**2.*
@ exp(cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))**2.*

```

```

@ (3.*Z(8*1+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1+(k-2)*NZ)+Z(8*1+(k-3)*NZ))+
@cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)

END DO
I=1
ZP(8*1-1+(k-1)*NZ) = HH(I)/(PI*alambda)*
@Z(8*1-7+(k-1)*NZ)*(HH(I)**3.*Z(8*(I)-4+(k-1)*NZ)+4.*
@Z(8*(I+1)-4+(k-1)*NZ)
@-Z(8*(I+2)-4+(k-1)*NZ)/(2.*DELX)-T*DH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)/alambda*Z(8*1-6+(k-1)*NZ)
@*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)**2./alambda*
@Z(8*1-5+(k-1)*NZ)*(3.*Z(8*1-4+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-4+(k-2)*NZ)+
@Z(8*1-4+(k-3)*NZ))/(2.*DELZ)-exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))
@/alambda*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)**2.+ASPECTO**2.*
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)**2.)

C derivada de la Presión respecto de y en x=1 (I=NINT+1)
C
I=NINT+1
DO K=2, NINZ
ZP(8*1+(k-1)*NZ) = +(HUEL/ASPECTO)**2./((PI**2.+(HUEL*T
@DH(I)**2.)*HH(I))* (+DH(I)*T*HH(I)**2.*ASPECTO**2.
@ (3.*Z(8*(I)+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*(I-1)+(k-1)*NZ)+
@Z(8*(I-2)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+
@exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))* (cappa*PI*HH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)/(3.*Z(8*(I)-7+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*(I-1)-7+(k-1)*NZ)
@+Z(8*(I-2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+cappa*PI**2.*
@HH(I)*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)/(2.*DELX)+Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-
@Z(8*1-5+(k-2)*NZ))/(2.*DELZ)-PI*HH(I)*(3.*Z(8*(I)-3+(k-1)*
@NZ)-4.*Z(8*(I-1)-3+(k-1)*NZ)+Z(8*(I-2)-3+(k-1)*NZ))/
@ (2.*DELX)+PI*DH(I)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-PI**2.*HH(I)*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)-
@Z(8*1-2+(k-2)*NZ))/(2.*DELZ) )

END DO
C derivada de la Presion respecto de y en z=1 (K=NINZ+1)
C
K=NINZ+1
ZP(8*1+(k-1)*NZ) = +(HUEL/ASPECTO)**2./((PI**2.+(HUEL*T
@DH(I)**2.)*HH(I))* (+DH(I)*T*HH(I)**2.*ASPECTO**2.
@ (3.*Z(8*(I)+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*(I-1)+(k-1)*NZ)+
@Z(8*(I-2)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+
@exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))* (cappa*PI*HH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)/(3.*Z(8*(I)-7+(k-1)*NZ)-
@4.*Z(8*(I-1)-7+(k-1)*NZ)+
@Z(8*(I-2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+cappa*PI**2.*

```

```

@ (3.*Z(8*1+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1+(k-2)*NZ)+Z(8*1+(k-3)*NZ))+
@cappa*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)

END DO
I=NINT+1
DO K=2, NINZ
ZP(8*1-1+(k-1)*NZ) = HH(I)/(PI*alambda)*
@Z(8*1-7+(k-1)*NZ)*(HH(I)**3.*Z(8*(I)-4+(k-1)*NZ)-
@4.*Z(8*(I-1)-4+(k-1)*NZ)
@+Z(8*(I-2)-4+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-T*DH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)/alambda*Z(8*1-6+(k-1)*NZ)
@*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)**2./alambda*
@Z(8*1-5+(k-1)*NZ)*Z(8*1-4+(k-1)*NZ) -
@Z(8*1-4+(k-2)*NZ))/(2.*DELZ)-exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))
@/alambda*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)**2.+ASPECTO**2.*
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)**2.)

END DO
C derivada segunda de la temperatura respecto de y dos veces en z=1 (K=NINZ+1)
C
K=NINZ+1
ZP(8*1-1+(k-1)*NZ) = HH(I)/(PI*alambda)*
@Z(8*1-7+(k-1)*NZ)*(HH(I)**3.*Z(8*(I)-4+(k-1)*NZ)-4.*
@Z(8*(I-1)-4+(k-1)*NZ)
@+Z(8*(I-2)-4+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-T*DH(I)*
@*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)/alambda*Z(8*1-6+(k-1)*NZ)
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)**2./alambda*
@Z(8*1-5+(k-1)*NZ)*(3.*Z(8*1-4+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-4+(k-2)*NZ)+
@Z(8*1-4+(k-3)*NZ))/(2.*DELZ)-exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))
@/alambda*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)**2.+ASPECTO**2.*
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)**2.)

DO I=2,NINT
ZP(8*1-1+(k-1)*NZ) = HH(I)/(PI*alambda)*
@Z(8*1-7+(k-1)*NZ)*(HH(I)**3.*Z(8*(I+1)-4+(k-1)*NZ)
@-Z(8*(I-1)-4+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)-T*DH(I)*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)/alambda*Z(8*1-6+(k-1)*NZ)
@*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)**2./alambda*
@Z(8*1-1+(k-1)*NZ)+HH(I)**2./alambda*
@Z(8*1-5+(k-1)*NZ)*(3.*Z(8*1-4+(k-1)*NZ)-4.*Z(8*1-4+(k-2)*NZ)+
@Z(8*1-4+(k-3)*NZ))/(2.*DELZ)-exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))
@/alambda*Z(8*1-3+(k-1)*NZ)**2.+ASPECTO**2.*
@Z(8*1-2+(k-1)*NZ)**2.)

```

```

@HH(I)*Z(8*1-(k-1)*NZ)*(3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-
@4.*Z(8*1-5+(k-2)*NZ)+
@Z(8*1-5+(k-3)*NZ))/(2.*DELZ)+PI*HH(I)*(3.*Z(8*1)-3+(k-1)*
@NZ)-4.*Z(8*1)-3+(k-1)*NZ)+Z(8*1)-2-3+(k-1)*NZ)/
@Z(2.*DELX)+PI*DH(I)*
@Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-PI**2.*HH(I)*(3.*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)-
@4.*Z(8*1-2+(k-2)*NZ)+
@Z(8*1-2+(k-3)*NZ))/(2.*DELZ) )
DO I=2,NINT
    ZP(8*1+(k-1)*NZ) = +(HUEL/ASPECTO)**2./((PI**2.+(HUEL*T*
    @DH(I))**2.)*HH(I))*(+DH(I)*T*HH(I))**2.*ASPECTO**2.*
    @Z(8*(1+1)+(k-1)*NZ)-Z(8*(1-1)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+
    @exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))*(cappa*PI*HH(I)*
    @Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*Z(8*(1+1)-7+(k-1)*NZ)-Z(8*(1-1)-7+(k-1)*NZ))
    @/(2.*DELX)+cappa*PI**2.*
    @HH(I)*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*(3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-
    @4.*Z(8*1-5+(k-2)*NZ)+
    @Z(8*1-5+(k-3)*NZ))/(2.*DELZ)+PI*HH(I)*Z(8*(1+1)-3+(k-1)*
    @NZ)-Z(8*(1-1)-3+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+PI*DH(I)*
    @Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-PI**2.*HH(I)*(3.*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)-4.*
    @Z(8*1-2+(k-2)*NZ)+
    @Z(8*1-2+(k-3)*NZ))/(2.*DELZ) )
END DO
C
I=1
    ZP(8*1+(k-1)*NZ) = +(HUEL/ASPECTO)**2./((PI**2.+(HUEL*T*
    @DH(I))**2.)*HH(I))*(+DH(I)*T*HH(I))**2.*ASPECTO**2.*
    @(-3.*Z(8*(1)+(k-1)*NZ)+4.*Z(8*(1+1)+(k-1)*NZ)-
    @Z(8*(1+2)+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+
    @exp(-cappa*Z(8*1-4+(k-1)*NZ))*(cappa*PI*HH(I)*
    @Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*(-3.*Z(8*(1)-7+(k-1)*NZ)+
    @4.*Z(8*(1+1)-7+(k-1)*NZ)-
    @Z(8*(1+2)-7+(k-1)*NZ))/(2.*DELX)+cappa*PI**2.*
    @HH(I)*Z(8*1-1+(k-1)*NZ)*(3.*Z(8*1-5+(k-1)*NZ)-
    @4.*Z(8*1-5+(k-2)*NZ)+
    @Z(8*1-5+(k-3)*NZ))/(2.*DELZ)+PI*HH(I)*(-3.*Z(8*(1)-3+(k-1)*
    @NZ)+4.*Z(8*(1+1)-3+(k-1)*NZ)-Z(8*(1+2)-3+(k-1)*NZ))/
    @Z(2.*DELX)+PI*DH(I)*
    @Z(8*1-3+(k-1)*NZ)-PI**2.*HH(I)*(3.*Z(8*1-2+(k-1)*NZ)-4.*
    @Z(8*1-2+(k-2)*NZ)+
    @Z(8*1-2+(k-3)*NZ))/(2.*DELZ) )
RETURN
END

```

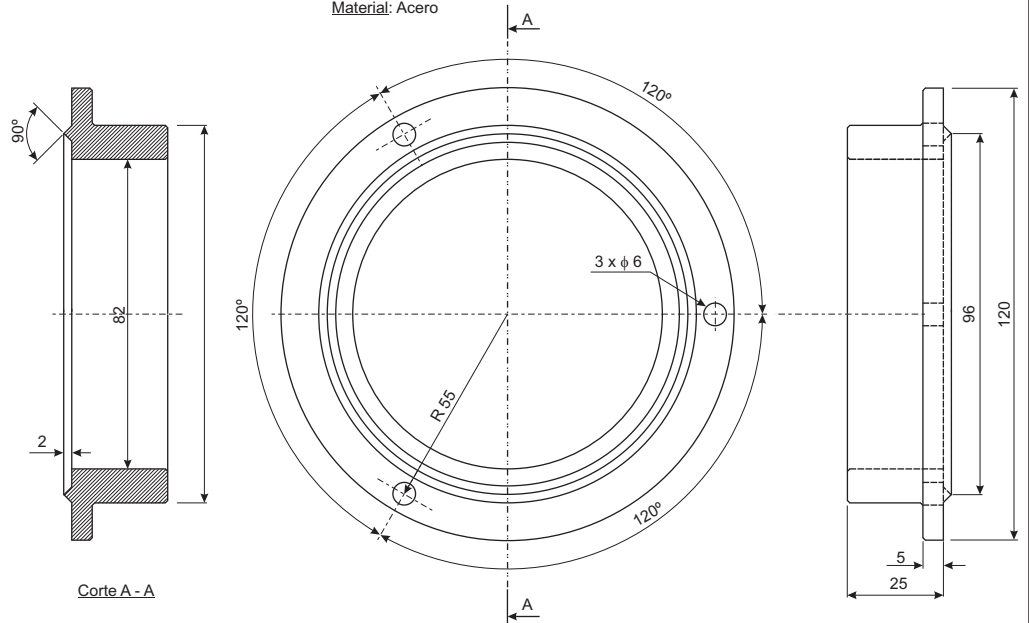

ANEXO V

PLANOS CONSTRUCTIVOS
DEL BANCO DE ENSAYO
DISEÑADO

A continuación se presentan copias reducidas de los planos constructivos de las diferentes piezas y partes del banco de ensayo diseñado, descrito en el Capítulo 6.

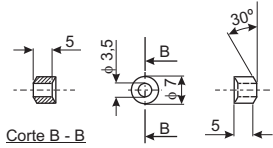
PORTA SENSORES DE PROXIMIDAD FRONTAL

Cantidad: 1
Material: Acero



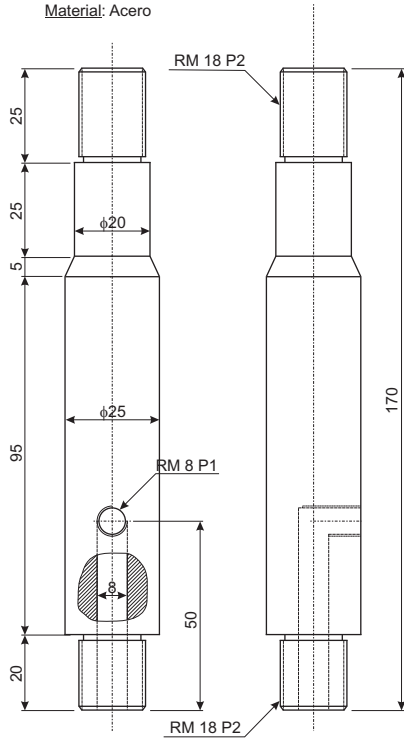
SELLOS PARA TOMAS DE PRESIÓN

Cantidad: 24
Material: Grilon[®]



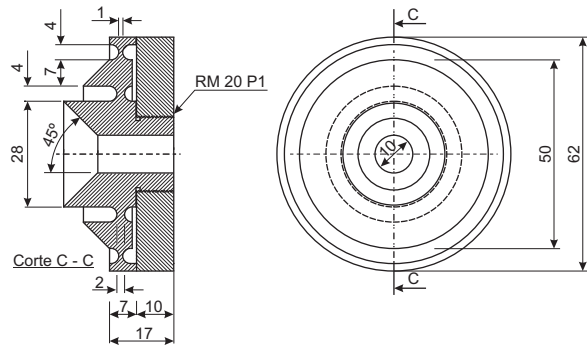
BRAZO DE SUJECIÓN DE PORTA COJINETE

Cantidad: 2
Material: Acero



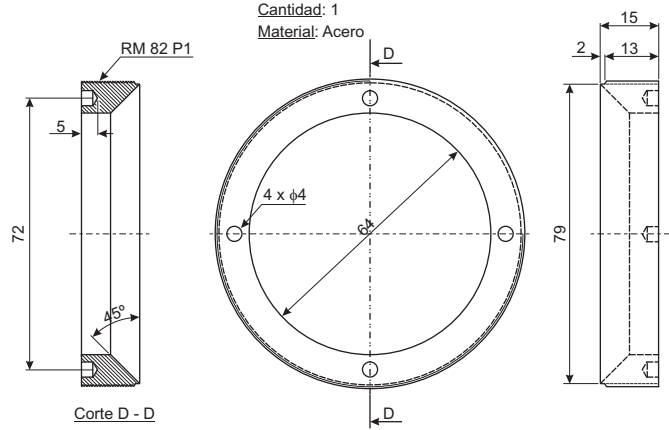
POSICIONADOR DEL MUÑÓN

Cantidad: 1
Material: Acero



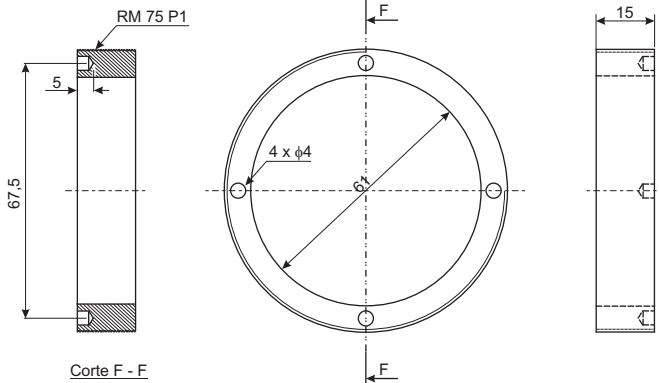
POSICIONADOR DEL COJINETE

Cantidad: 1
Material: Acero



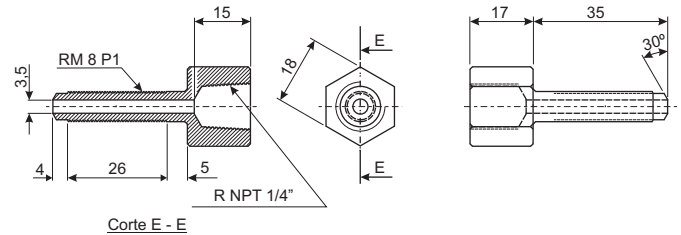
EXTRACTOR DEL COJINETE

Cantidad: 1
Material: Acero



ADAPTADORES PARA SENSORES DE PRESIÓN

Cantidad: 12
Material: Acero



Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur

BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

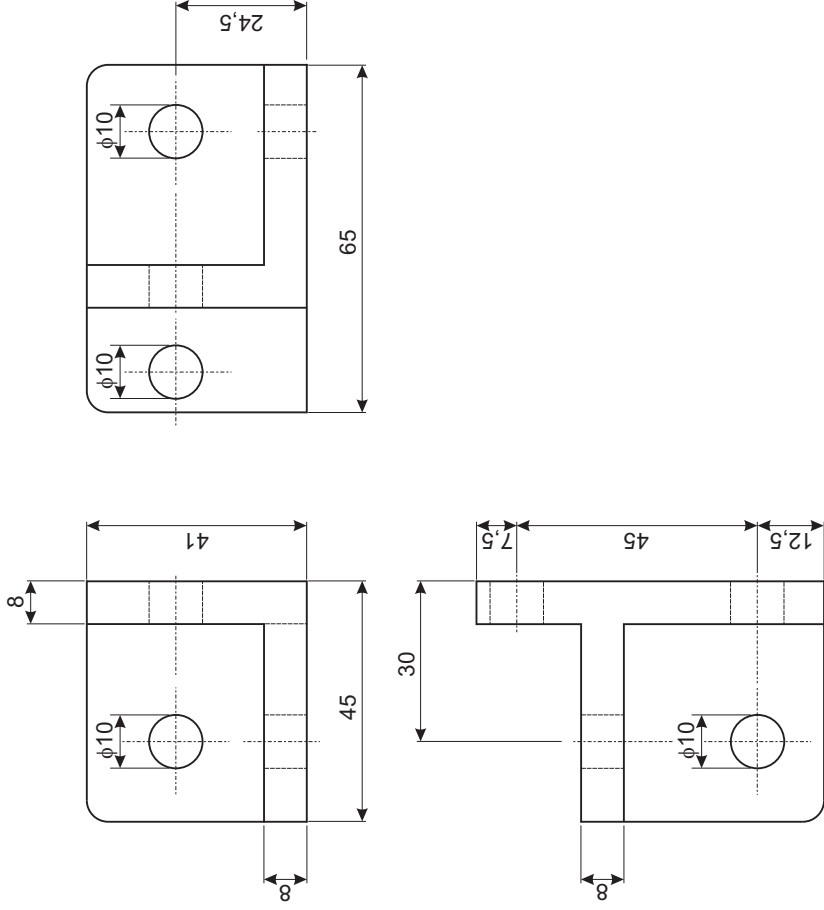
Gustavo Gabriel Vignolo

Accesorios de Porta Cojinete

ANCLAJE IZQUIERDO DE PORTA COJINETE

Cantidad: 1

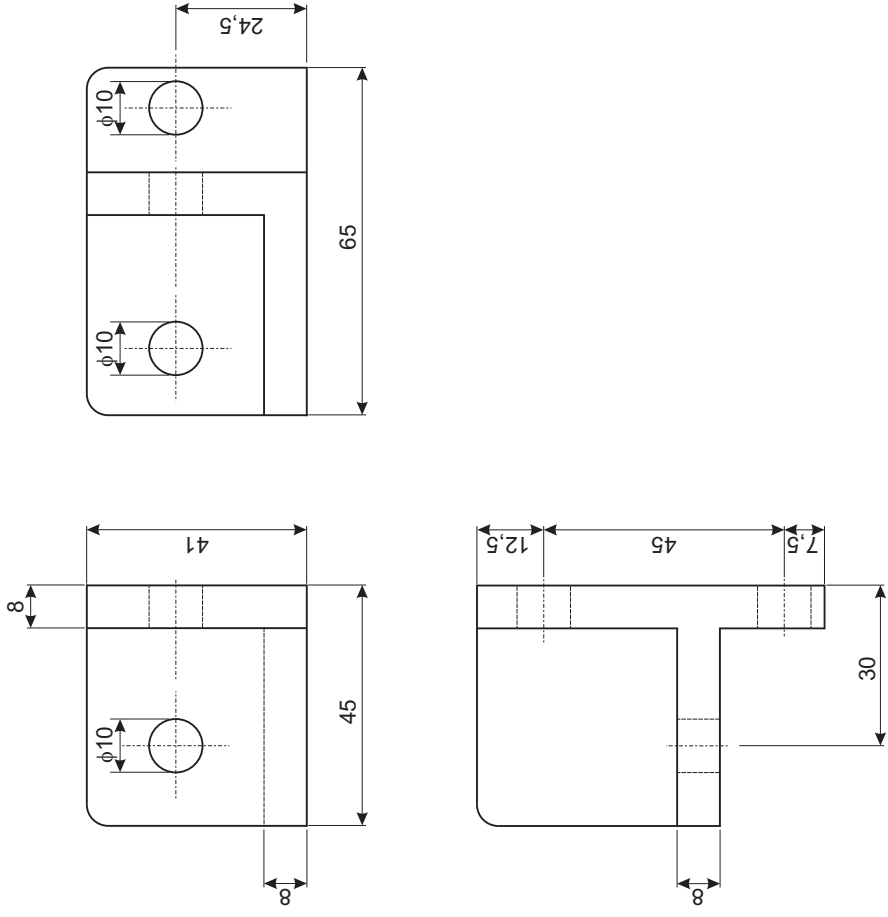
Material: Acero



ANCLAJE DERECHO DE PORTA COJINETE

Cantidad: 1

Material: Acero



Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur

BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

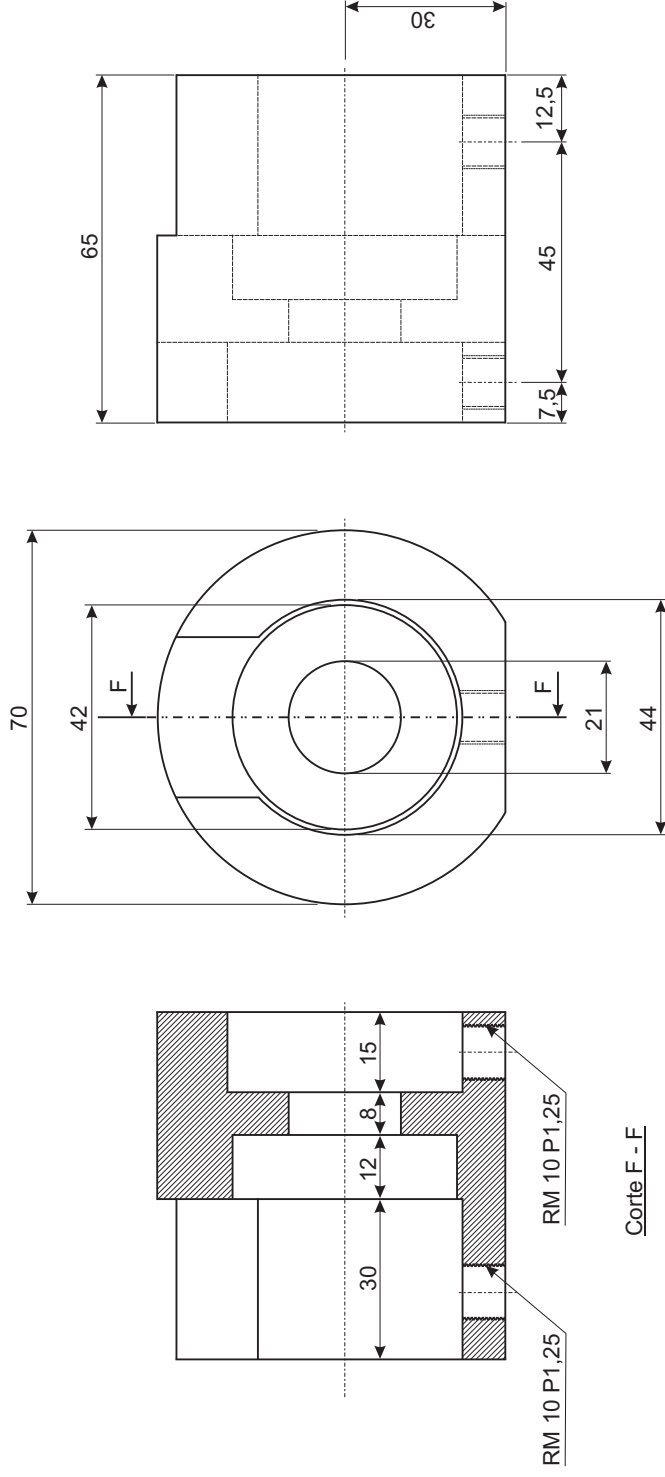
Anclajes Horizontales de Porta Cojinete

Gustavo Gabriel Vignolo

ANCLAJE VERTICAL DE PORTA COJINETE

Cantidad: 2

Material: Acero



Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur

BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

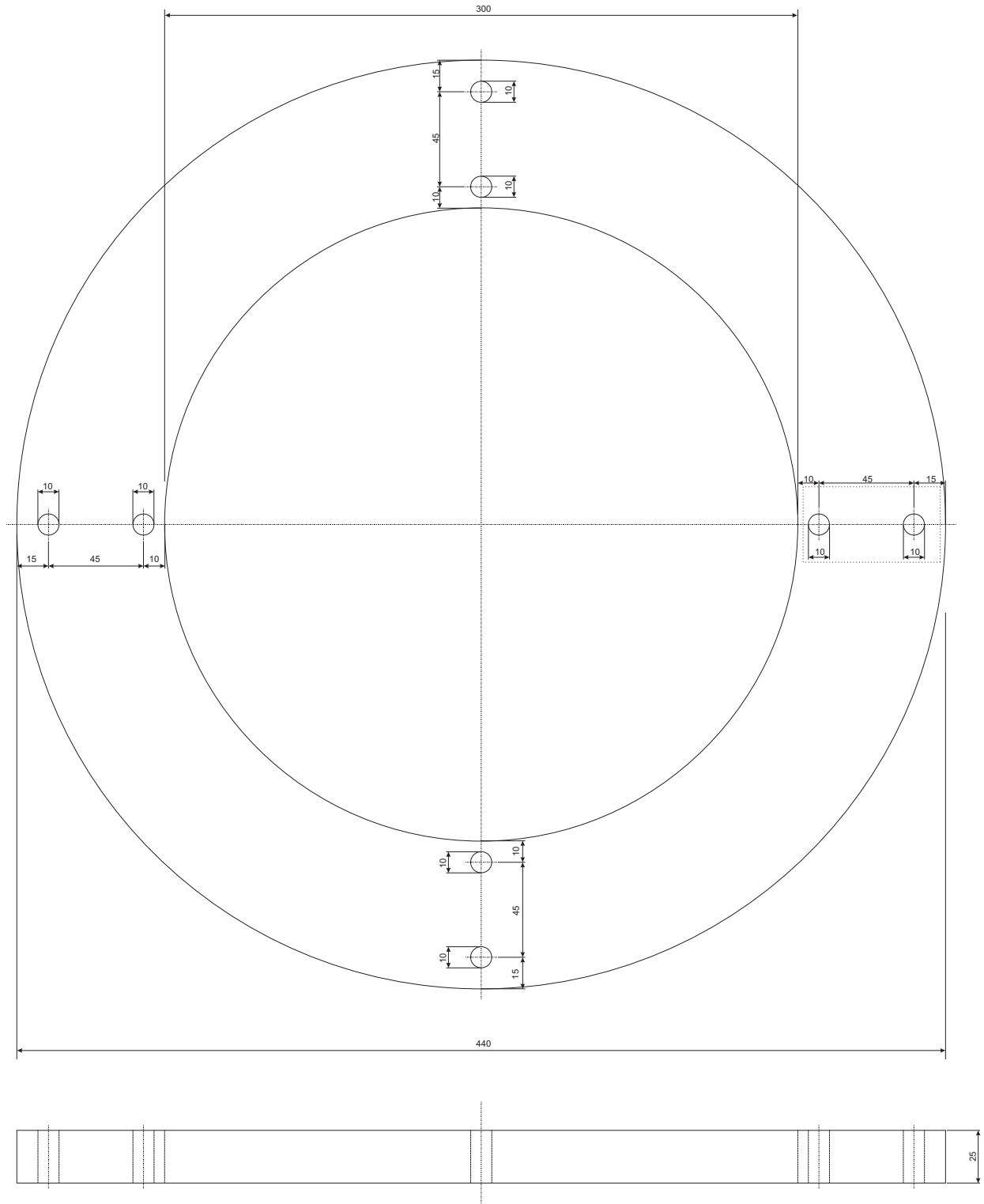
Gustavo Gabriel Vignolo

Anclaje Vertical de Porta Cojinete

ANILLO DE ANCLAJE DE PORTA COJINETE

Cantidad: 1

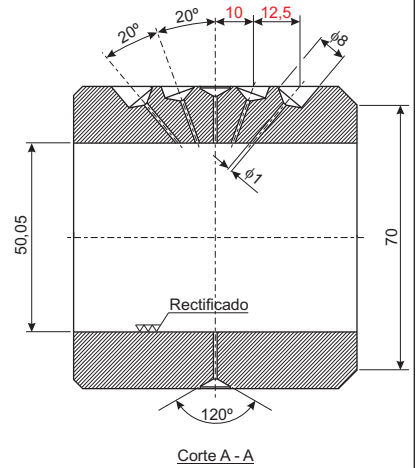
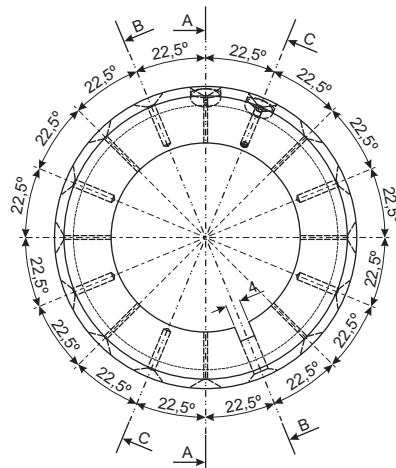
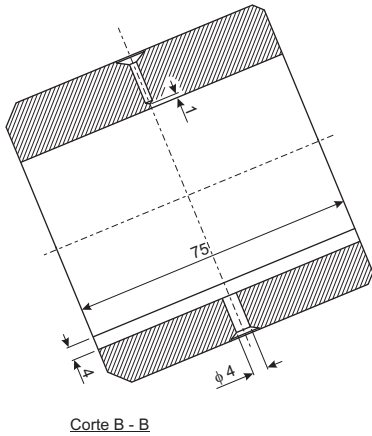
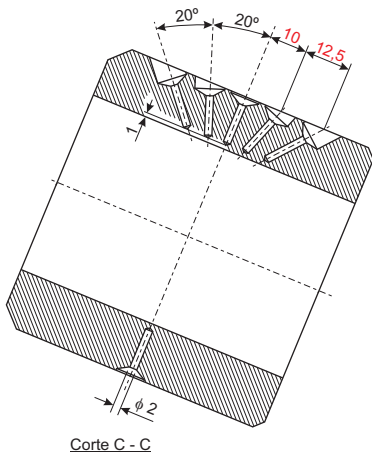
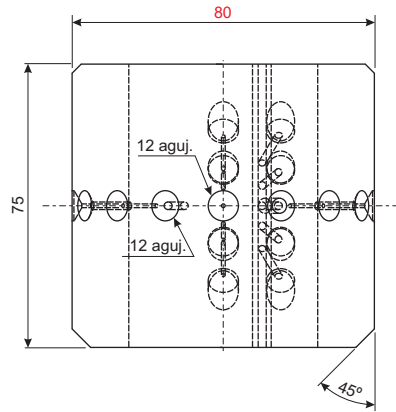
Material: Acero



COJINETE DIÁMETRO 50MM

Cantidad: 1

Material: Bronce

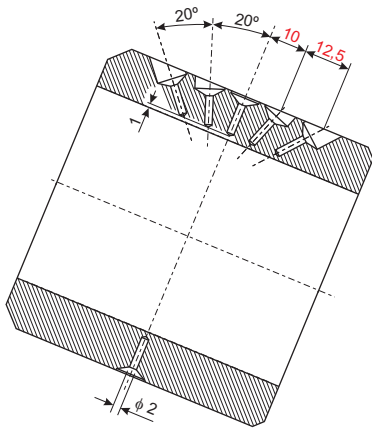
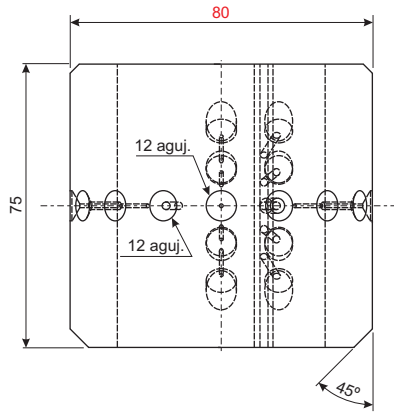


Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur	
BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS	
Gustavo Gabriel Vignolo	Cojinete Diámetro 50mm

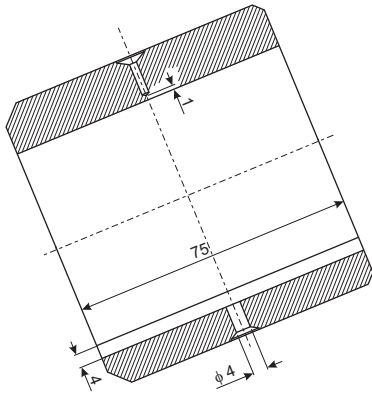
COJINETE DIÁMETRO 55MM

Cantidad: 1

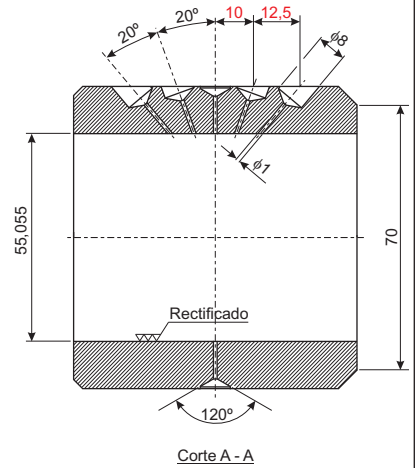
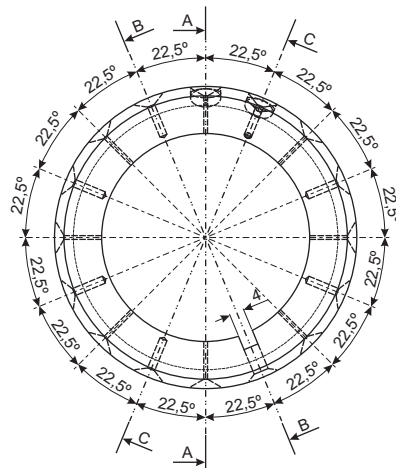
Material: Bronce



Corte C - C



Corte B - B

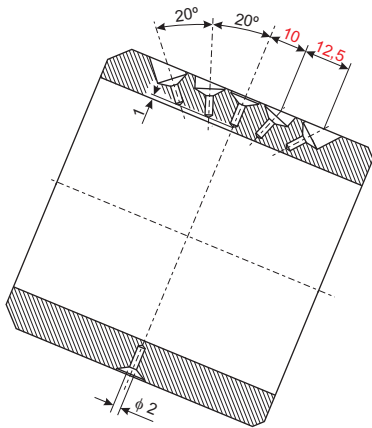
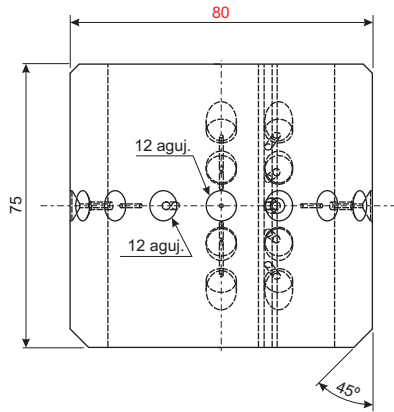


Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur	
BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS	
Gustavo Gabriel Vignolo	Cojinete Diámetro 55mm

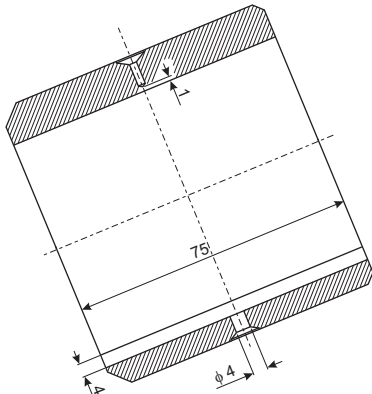
COJINETE DIÁMETRO 60MM

Cantidad: 1

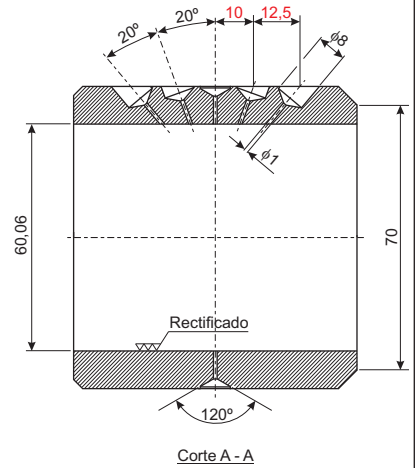
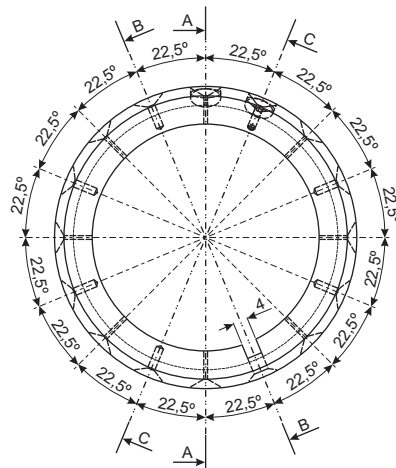
Material: Bronce



Corte C - C

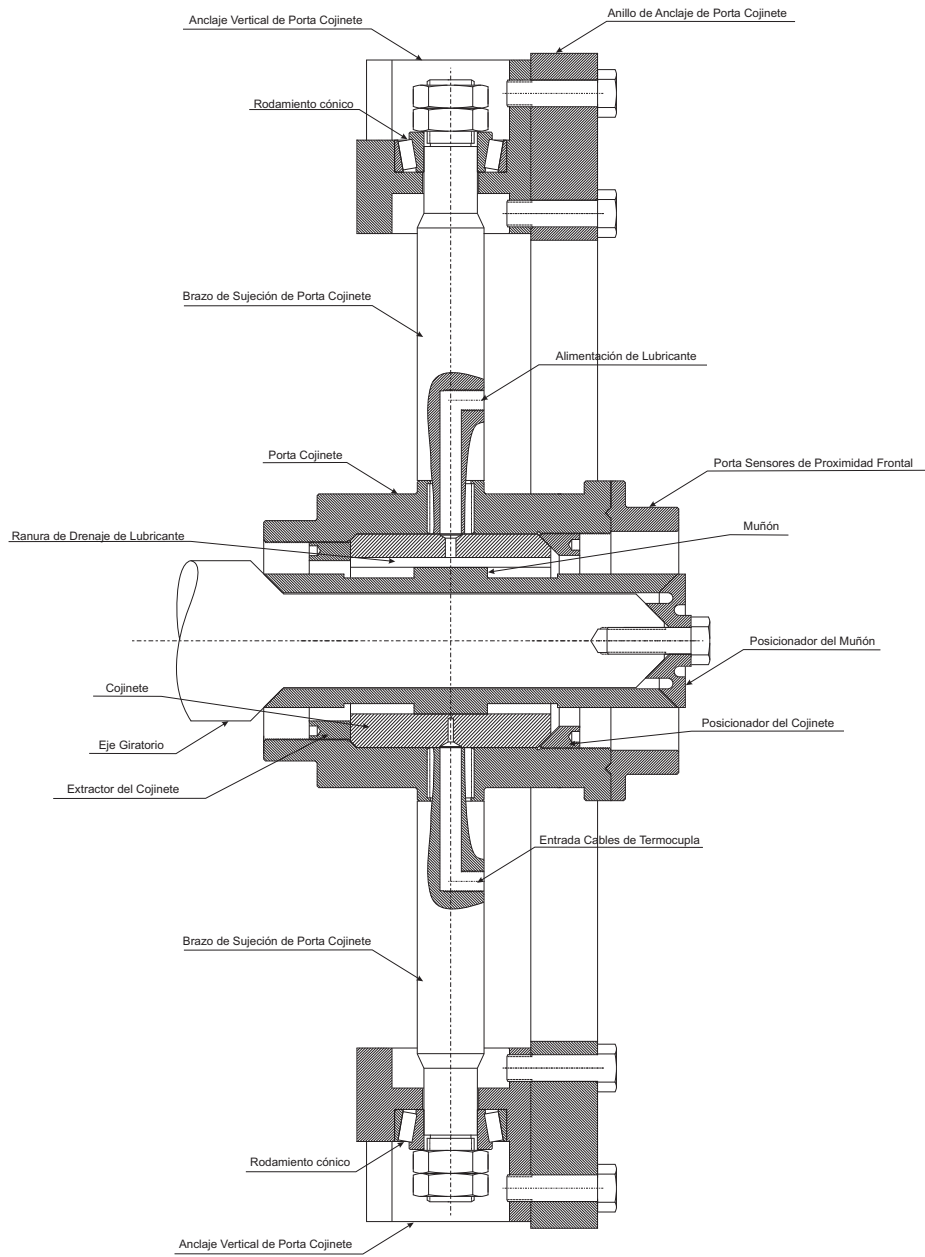


Corte B - B



Corte A - A

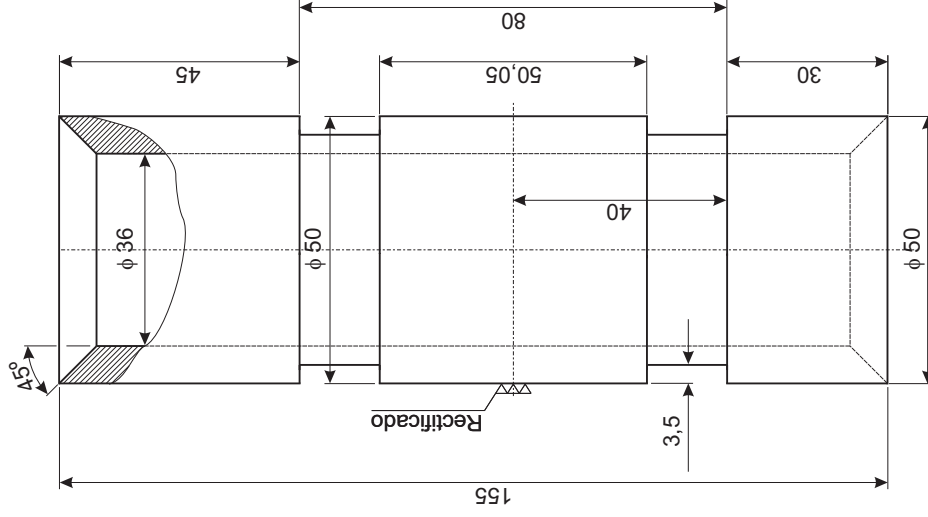
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur	
BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS	
Gustavo Gabriel Vignolo	Cojinete Diámetro 60mm



MUÑÓN DIÁMETRO 50MM - L/D=1

Cantidad: 1

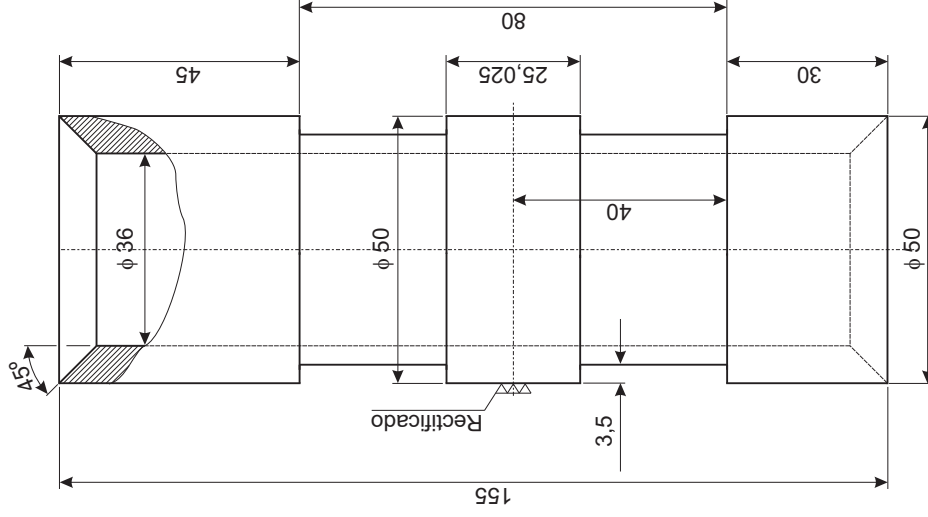
Material: Acero



MUÑÓN DIÁMETRO 50MM - L/D=1/2

Cantidad: 1

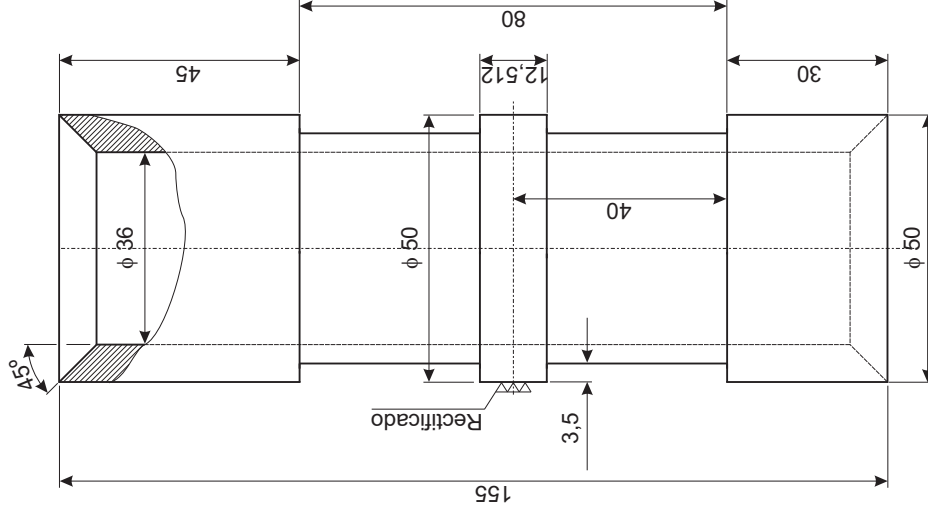
Material: Acero



MUÑÓN DIÁMETRO 50MM - L/D=1/4

Cantidad: 1

Material: Acero



Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur

BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

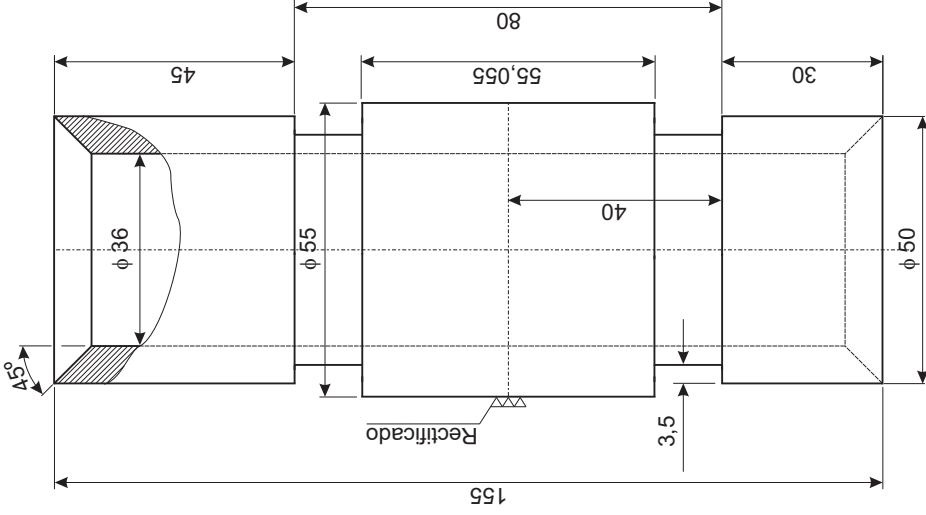
Gustavo Gabriel Vignolo

Muñón Diámetro 50mm

MUÑÓN DIÁMETRO 55MM - L/D=1

Cantidad: 1

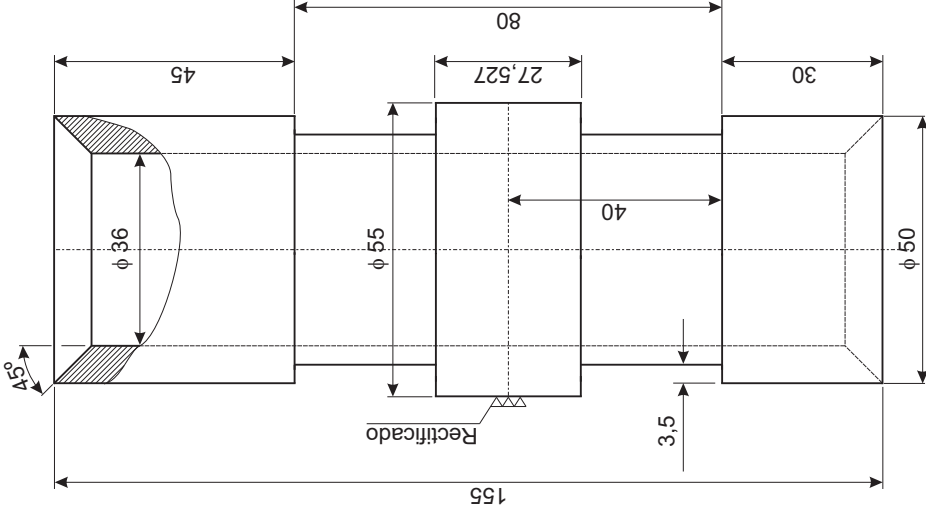
Material: Acero



MUÑÓN DIÁMETRO 55MM - L/D=1/2

Cantidad: 1

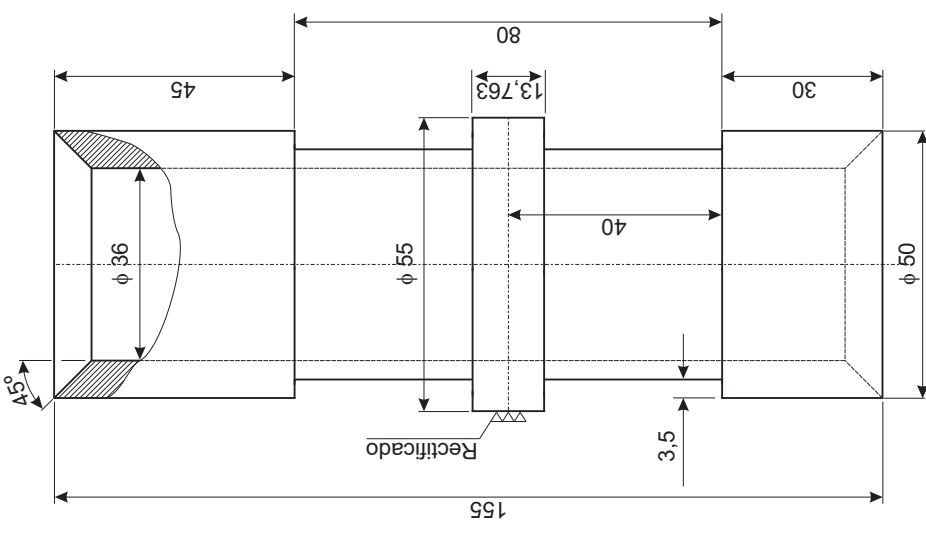
Material: Acero



MUÑÓN DIÁMETRO 55MM - L/D=1/4

Cantidad: 1

Material: Acero

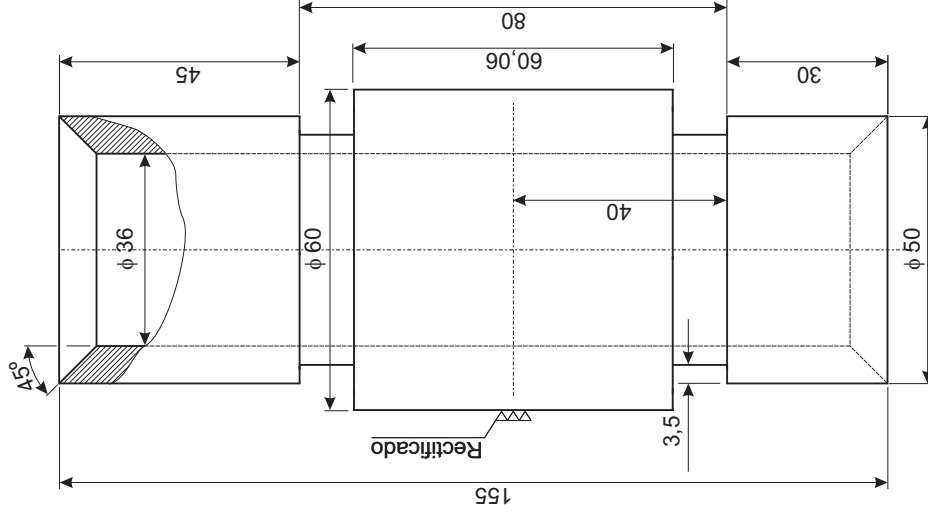


Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur	
BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS	
Muñón Diámetro 55mm	Gustavo Gabriel Vignolo

MUÑÓN DIÁMETRO 60MM - L/D=1

Cantidad: 1

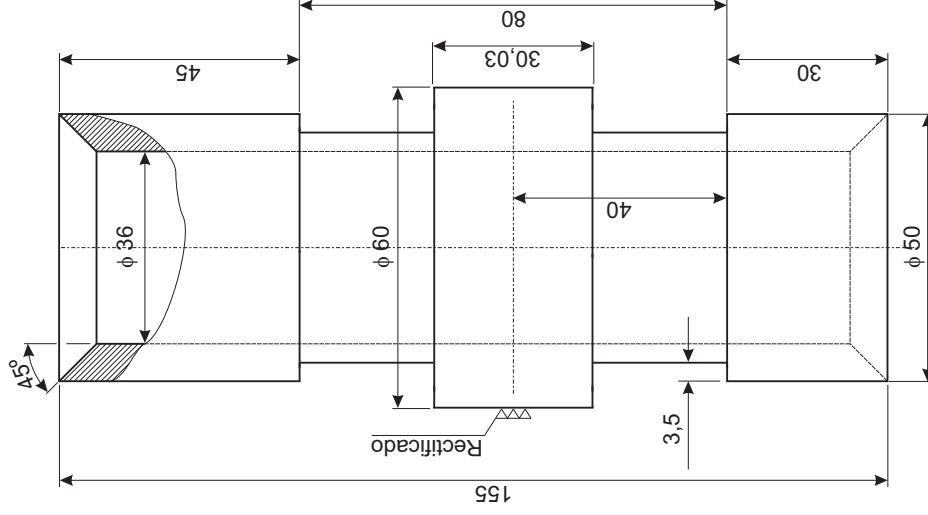
Material: Acero



MUÑÓN DIÁMETRO 60MM - L/D=1/2

Cantidad: 1

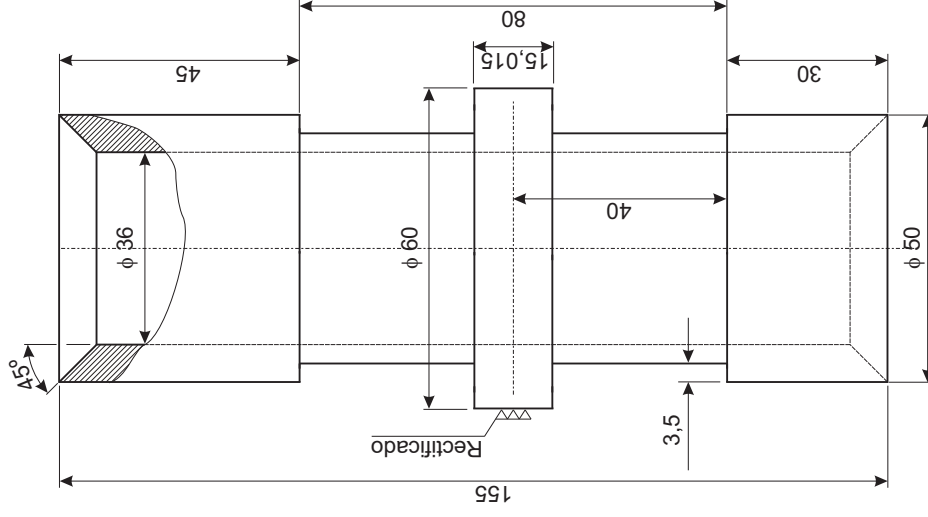
Material: Acero



MUÑÓN DIÁMETRO 60MM - L/D=1/4

Cantidad: 1

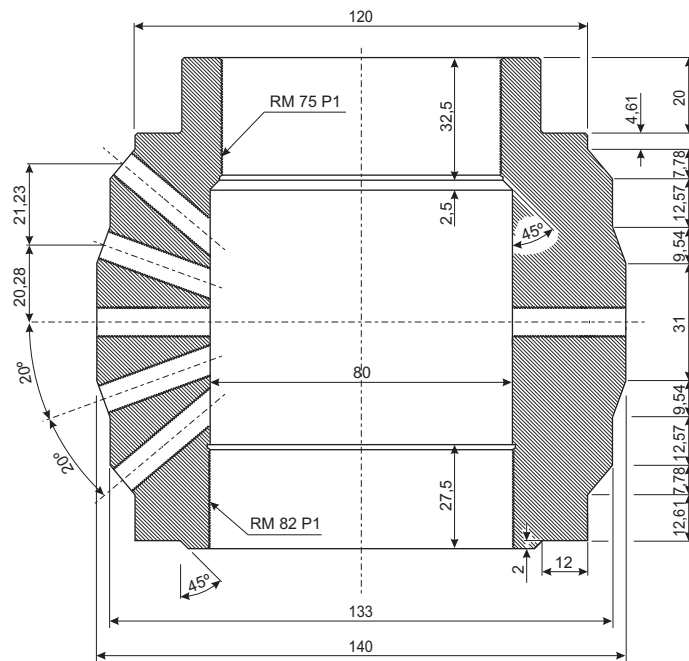
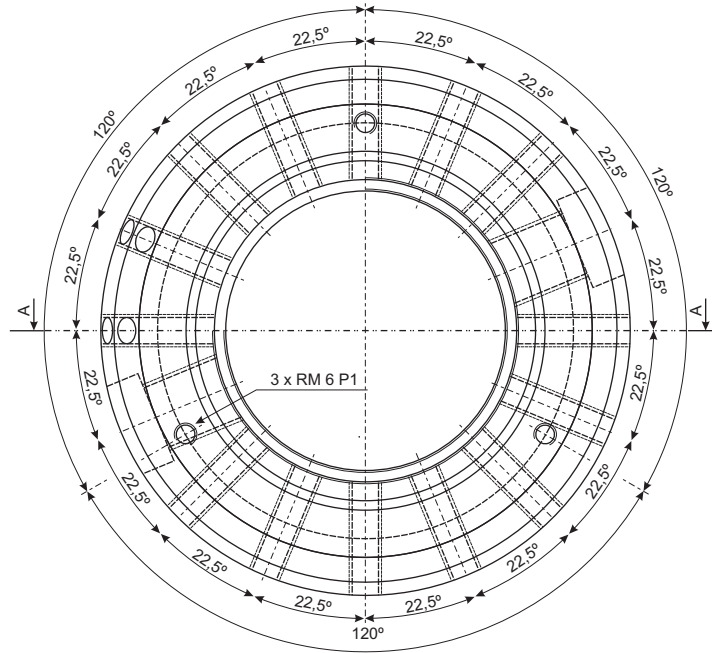
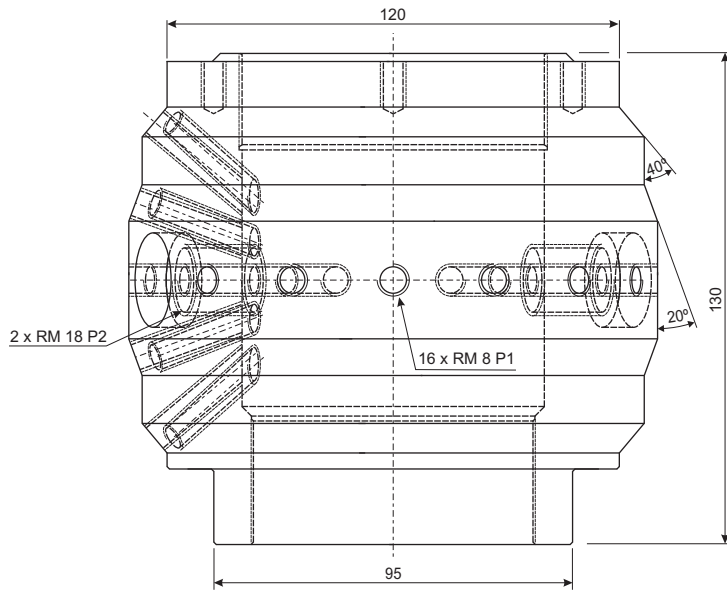
Material: Acero



PORTA COJINETE

Cantidad: 1

Material: Acero



Corte A - A

Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur

BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

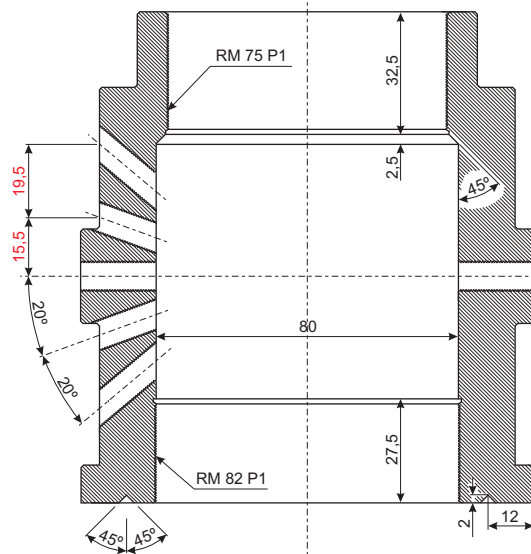
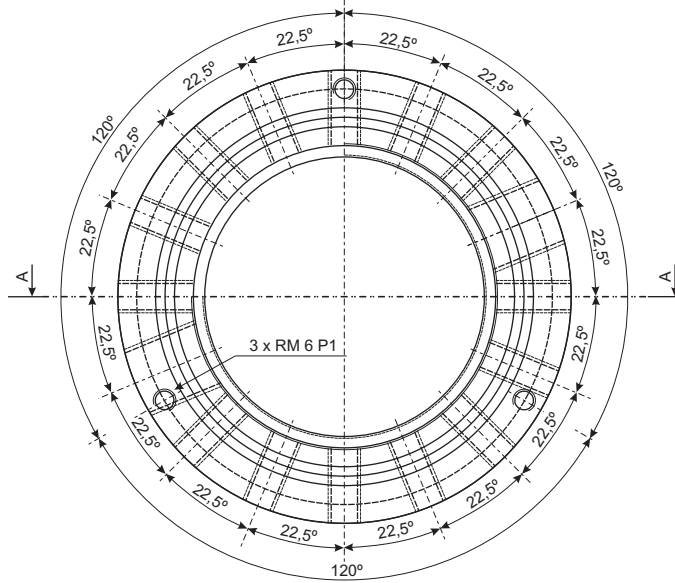
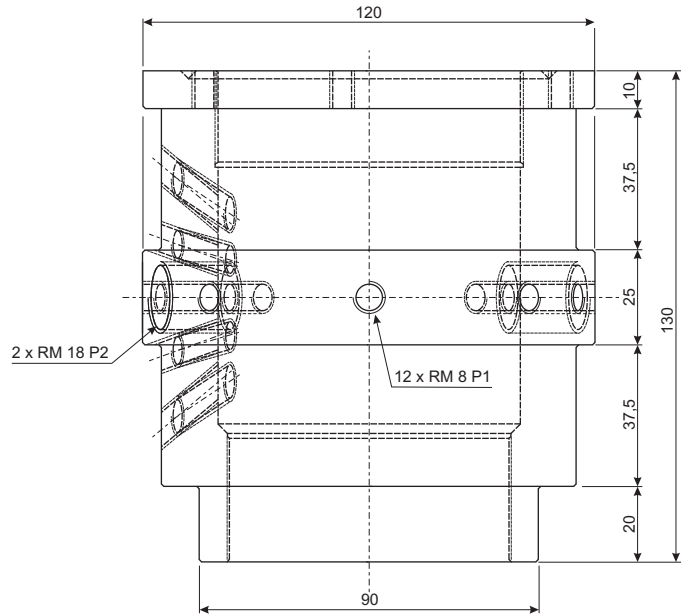
Gustavo Gabriel Vignolo

Porta Cojinete

PORTA COJINETE

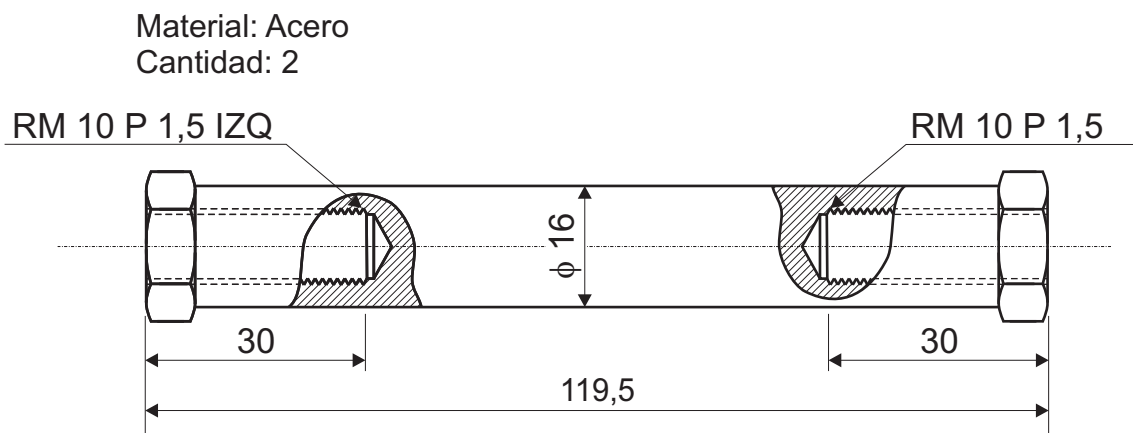
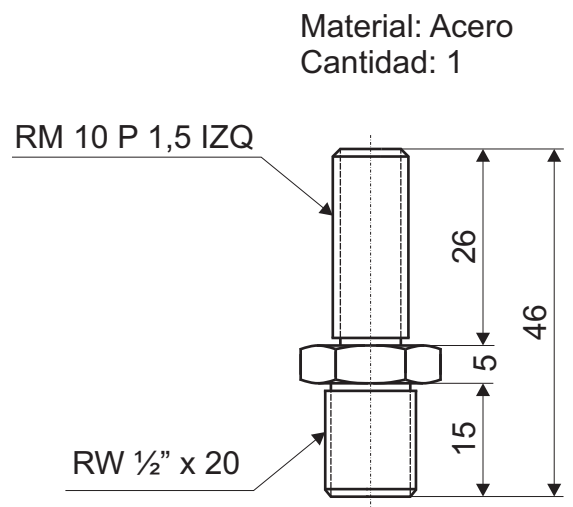
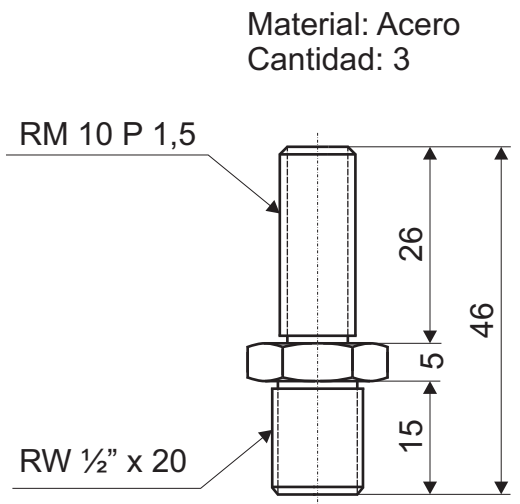
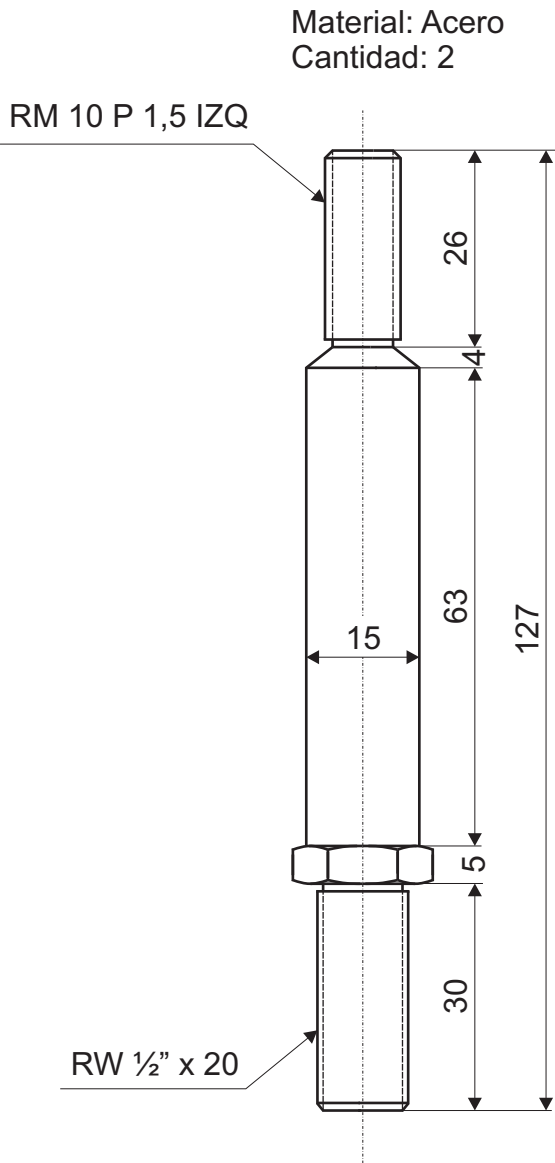
Cantidad: 1

Material: Acero



Corte A - A

Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur	
BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS	
Gustavo Gabriel Vignolo	Porta Cojinete



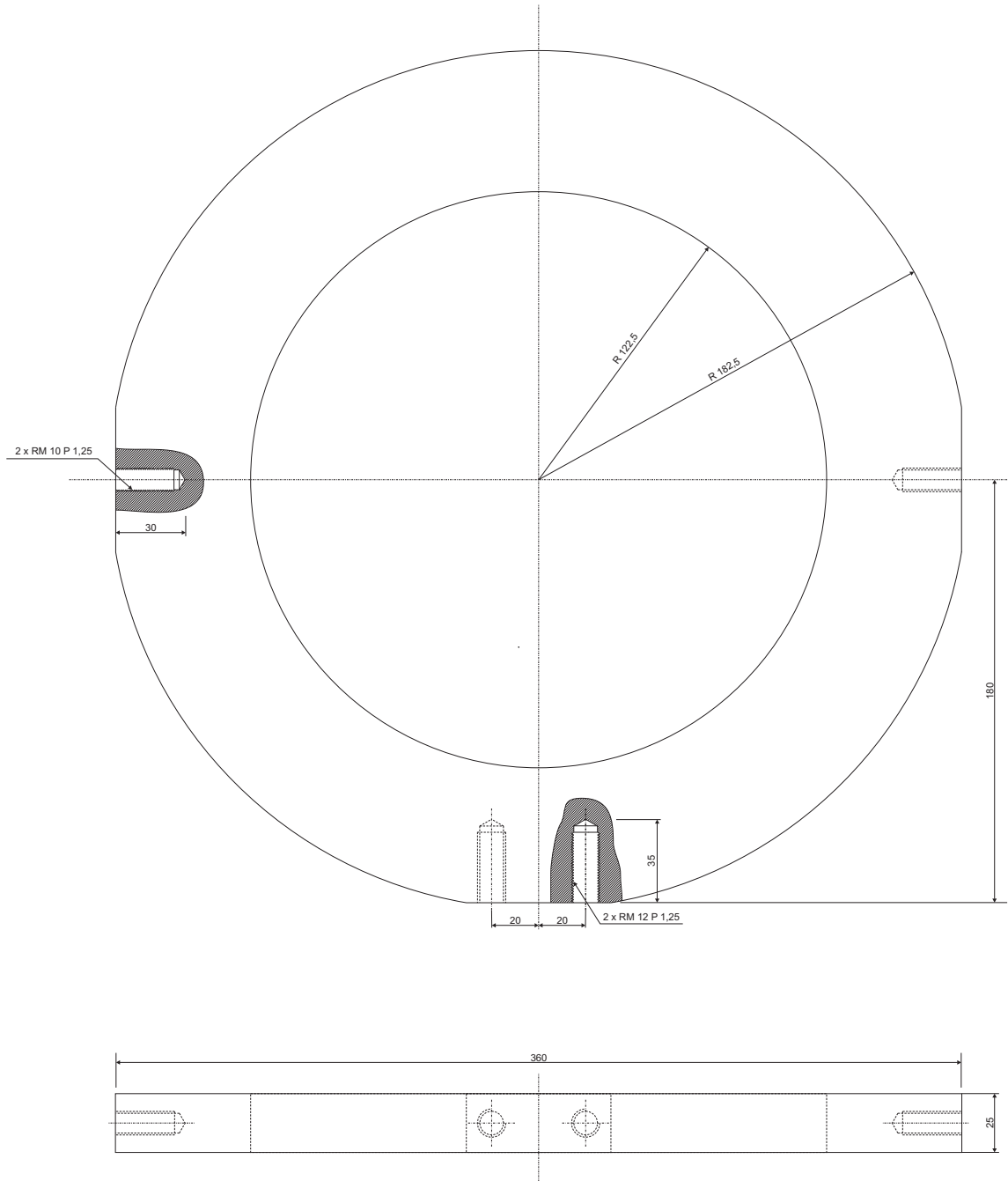
**Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur**

BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

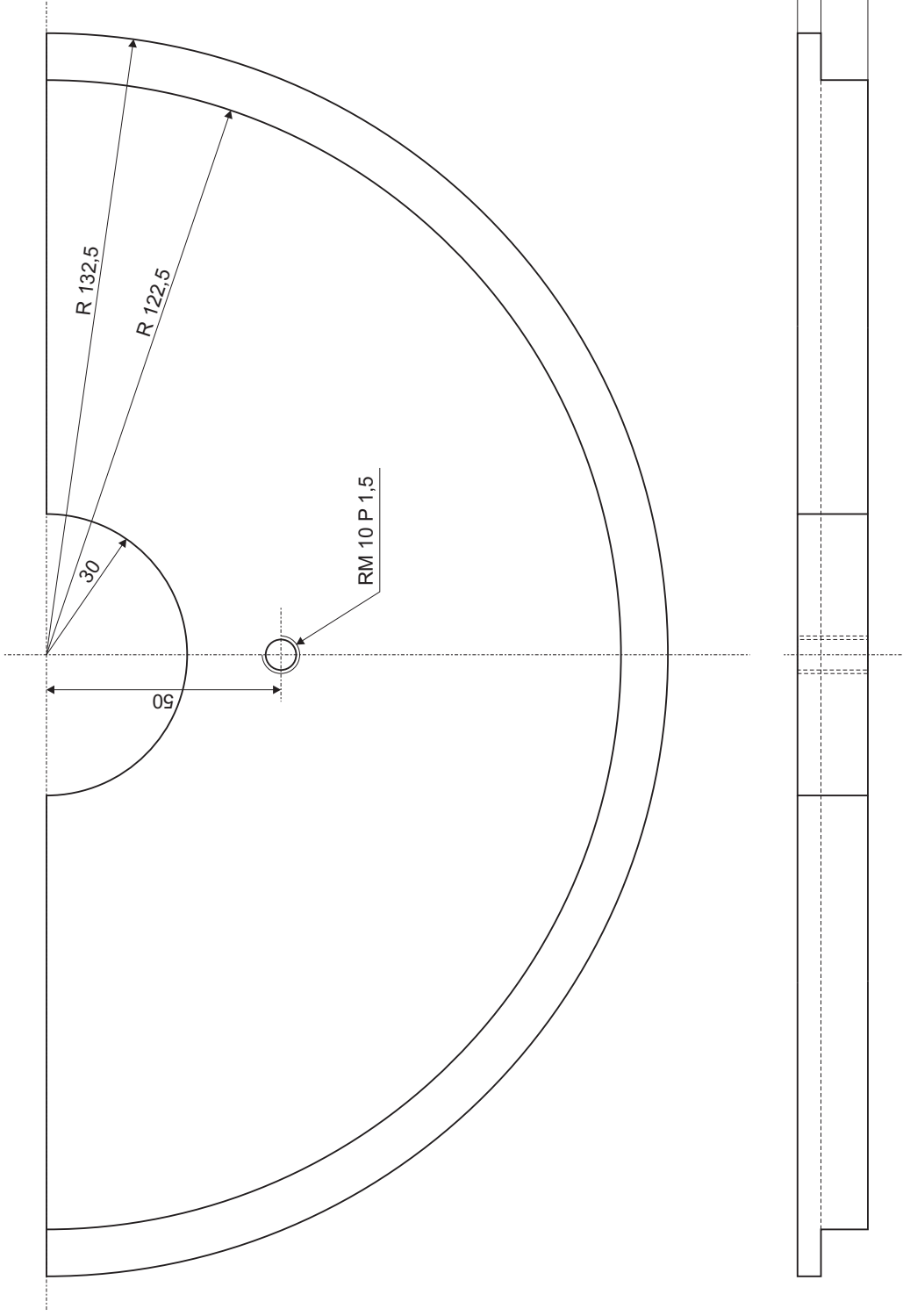
Gustavo Gabriel Vignolo

Registros de Posición de Anillo de Montaje

Material: Acero
Cantidad: 1



Material: Acero
Cantidad: 1



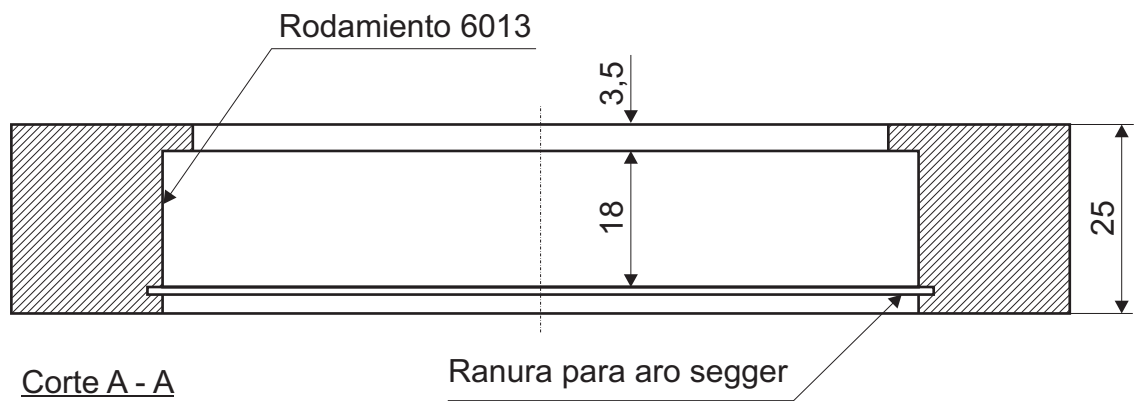
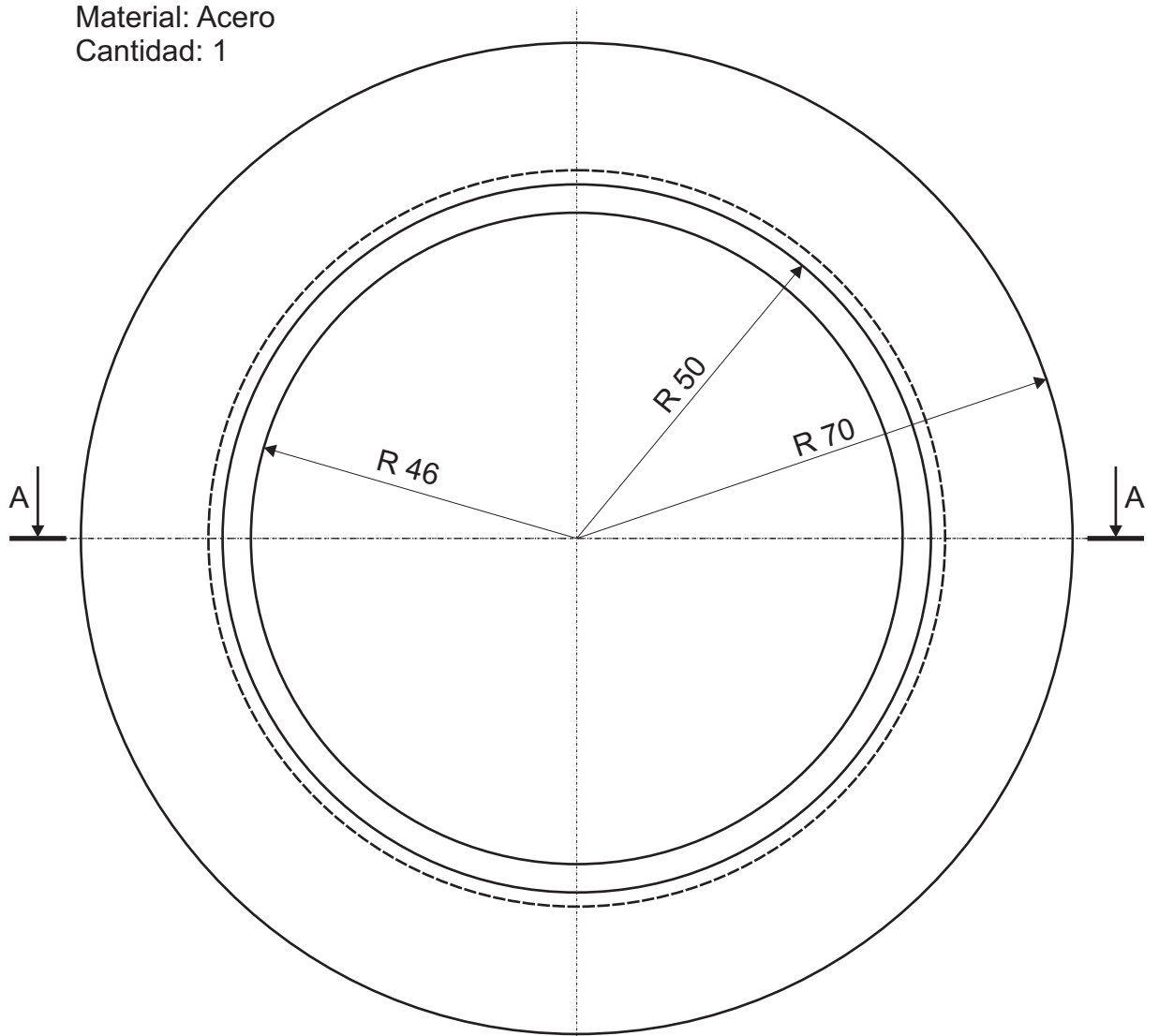
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur

BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

Gustavo Gabriel Vignolo

Centrador del eje

Material: Acero
Cantidad: 1

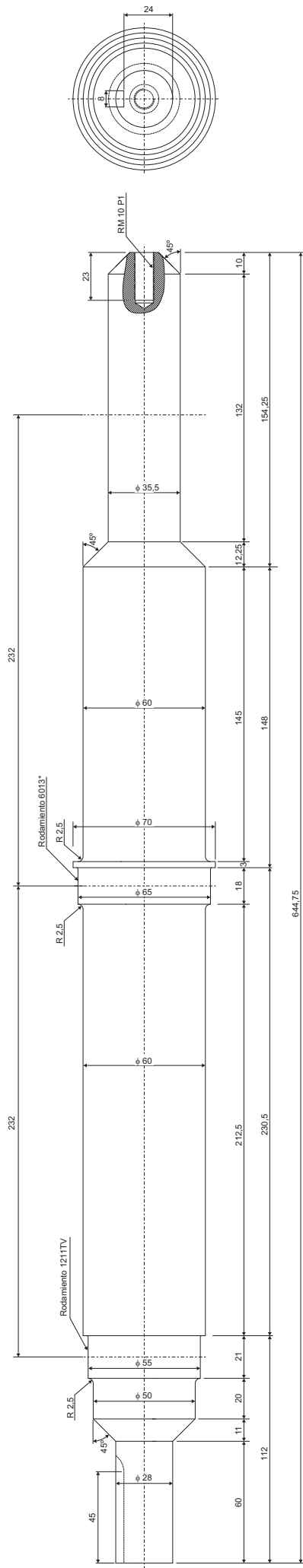


**Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur**

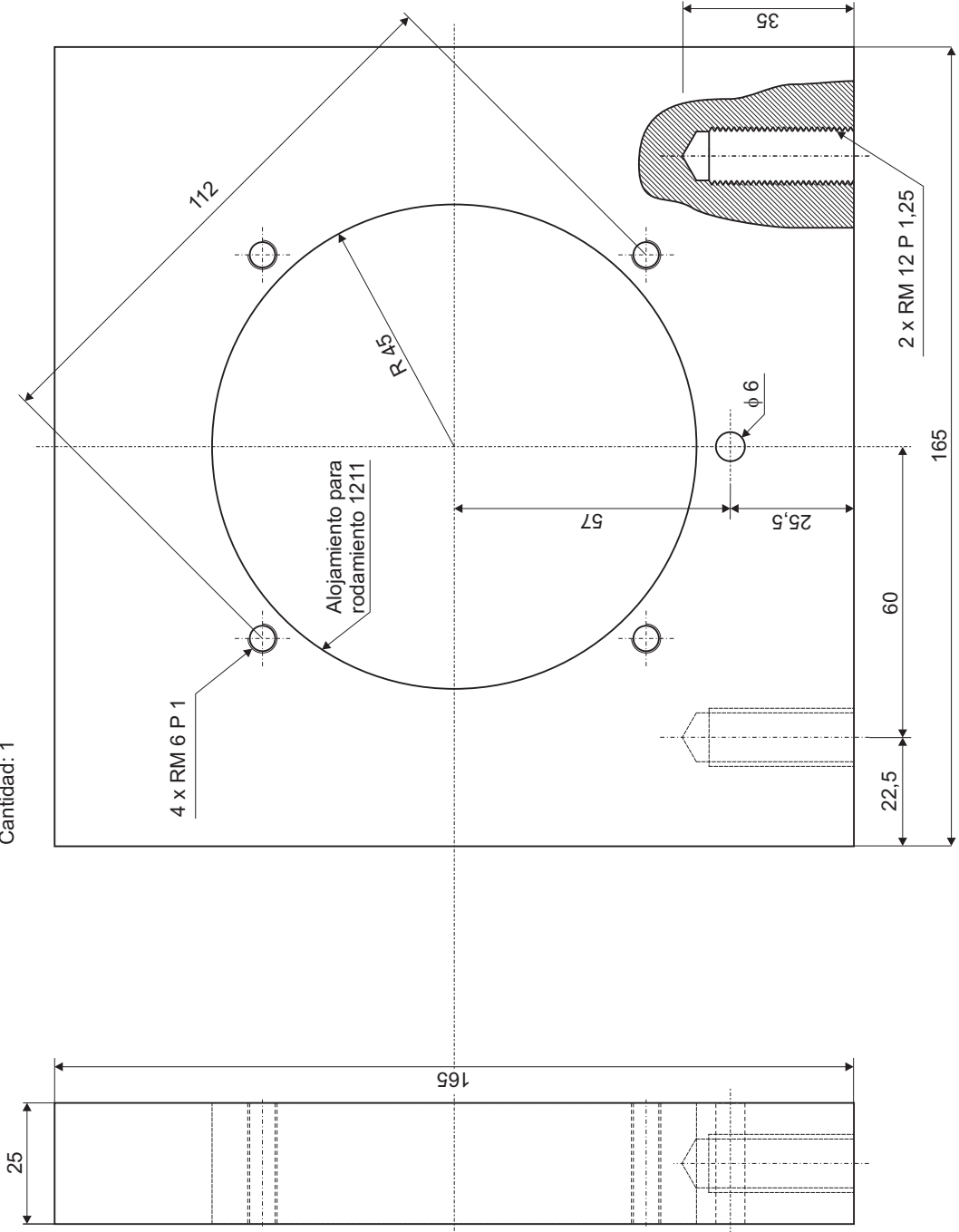
BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

Gustavo Gabriel Vignolo

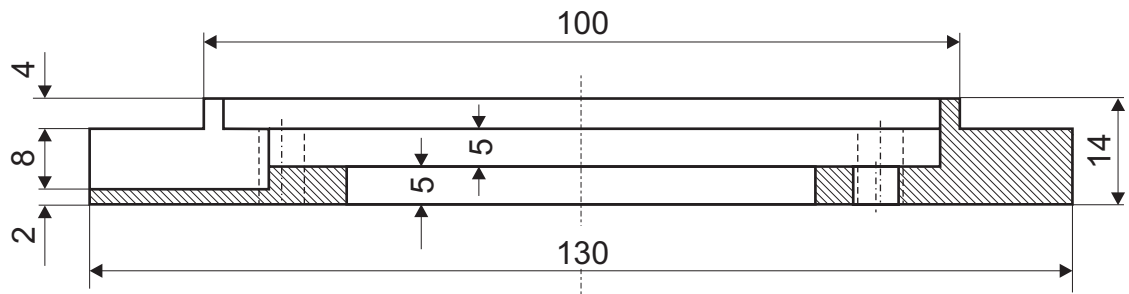
Cobertor de Rodamiento de Carga



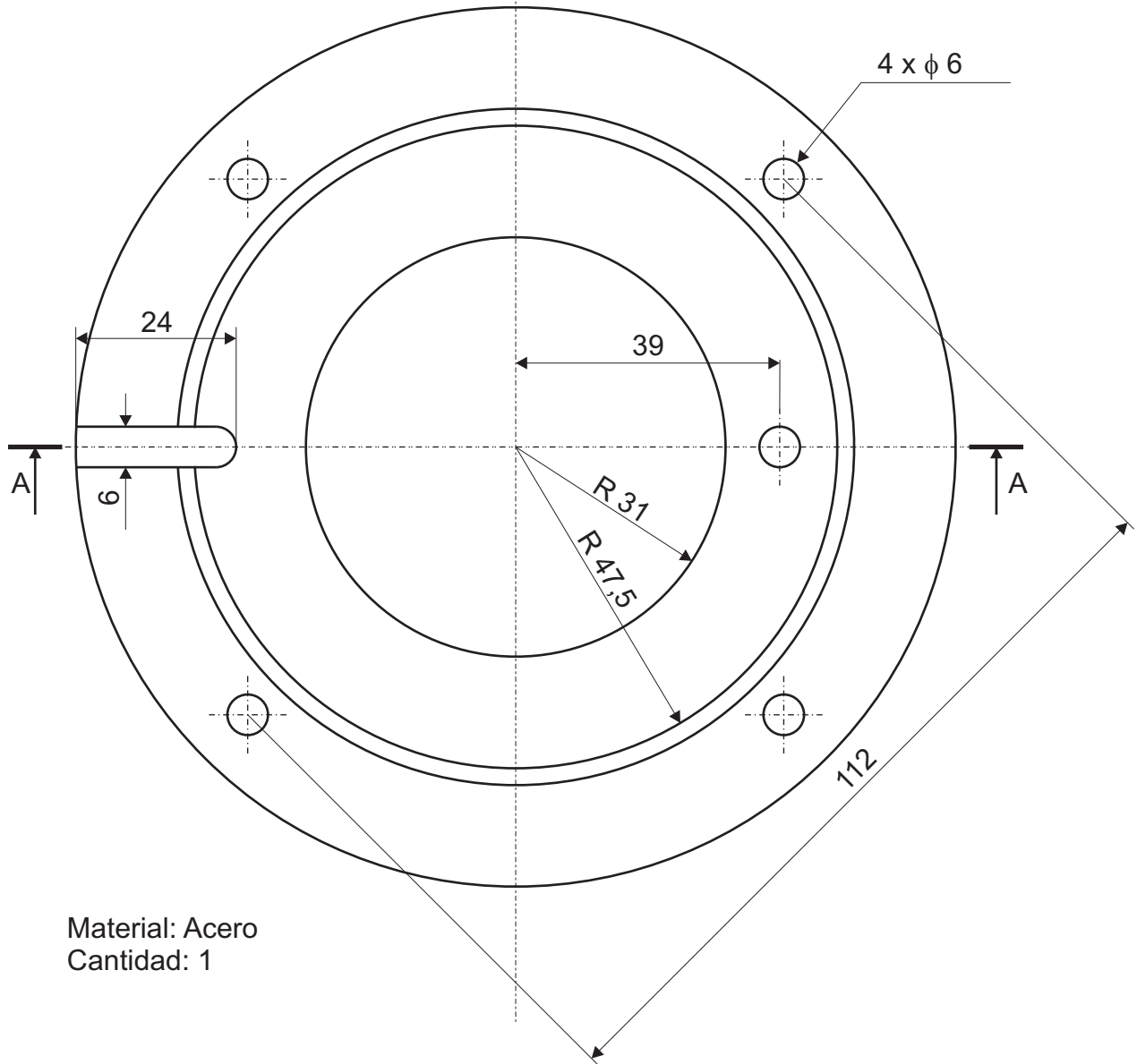
Material: Acero
Cantidad: 1



Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur	
BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS	
Gustavo Gabriel Vignolo	Caja Para Rodamiento



Corte A - A



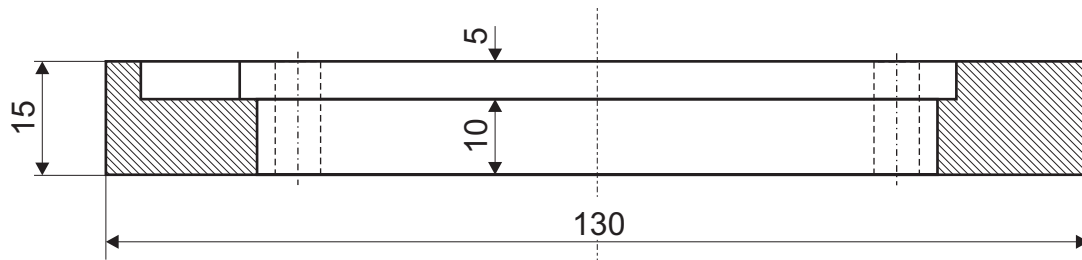
Material: Acero
Cantidad: 1

**Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur**

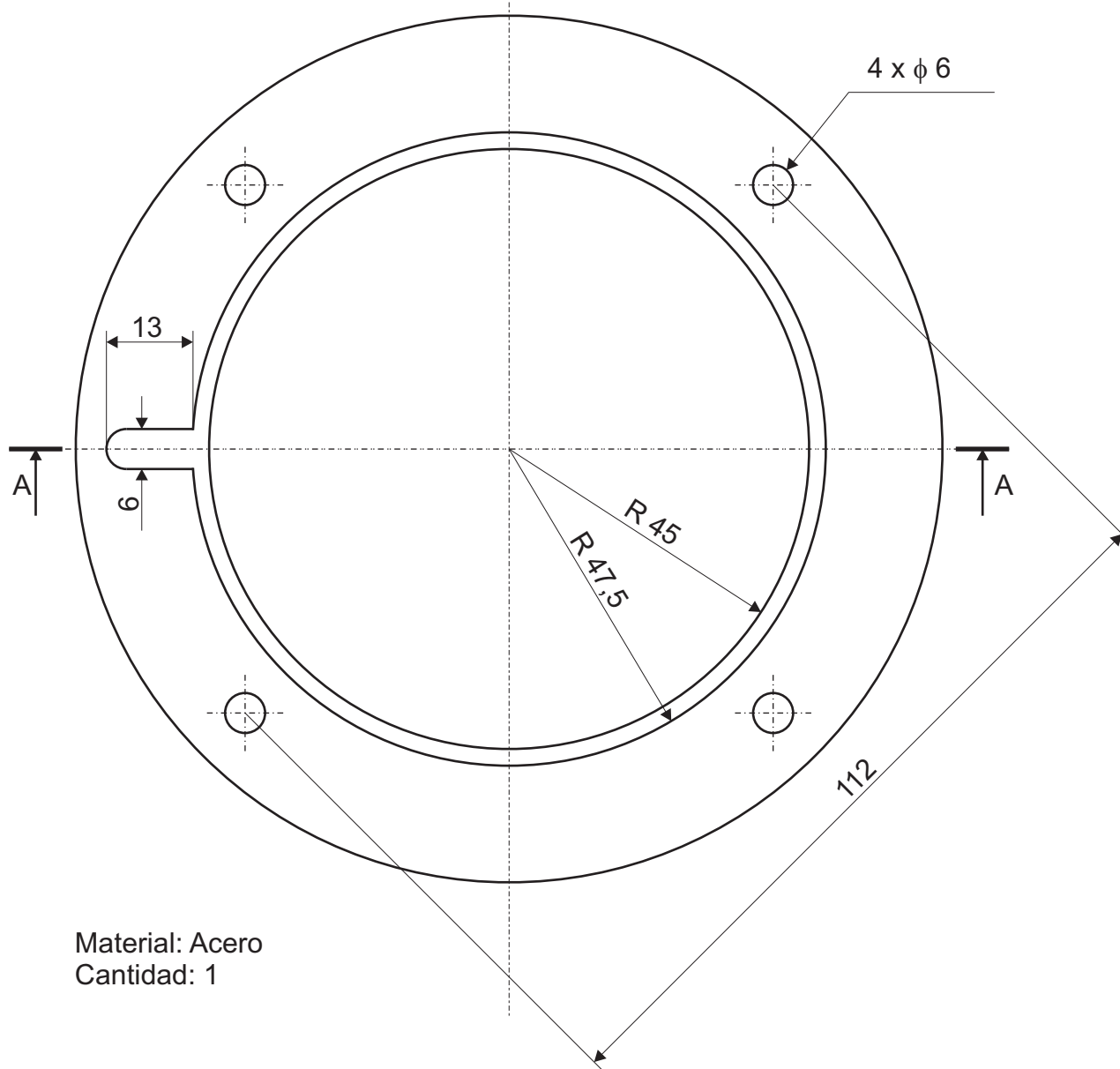
BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

Gustavo Gabriel Vignolo

Tapa Delantera de Caja Para Rodamiento



Corte A - A



Material: Acero
Cantidad: 1

**Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur**

BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

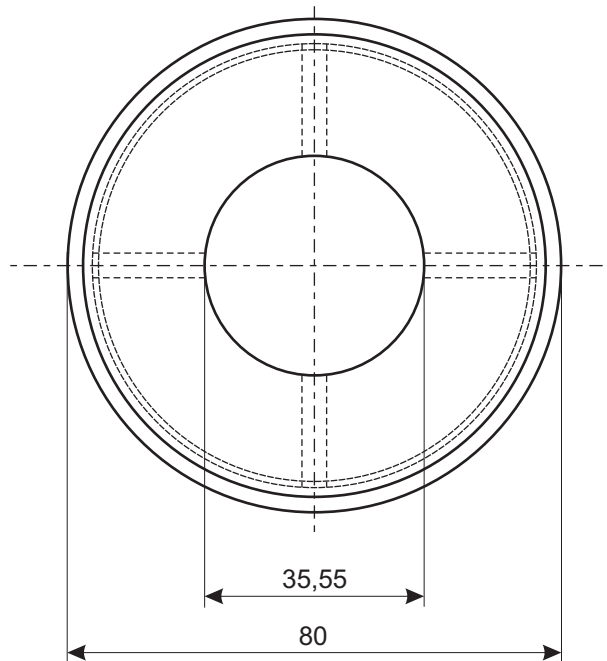
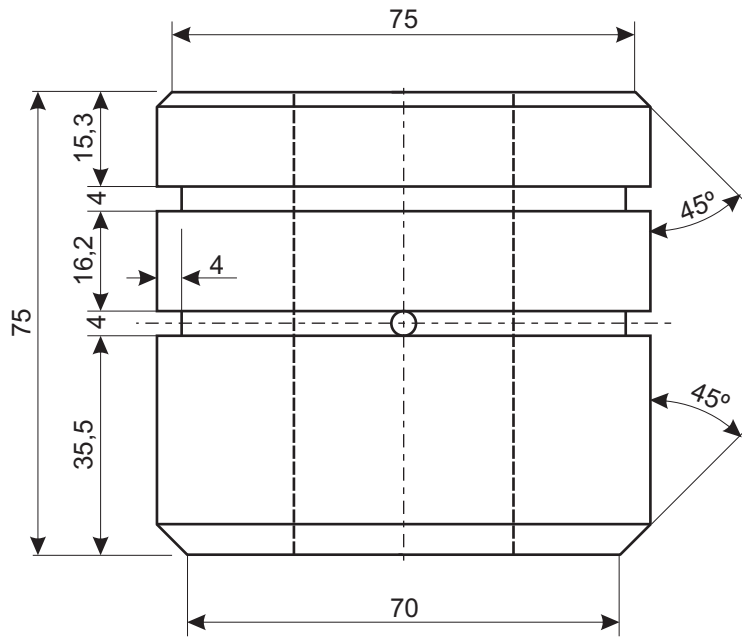
Gustavo Gabriel Vignolo

Tapa Trasera de Caja Para Rodamiento

COJINETE DE TRANSPORTE

Cantidad: 1

Material: Grylon

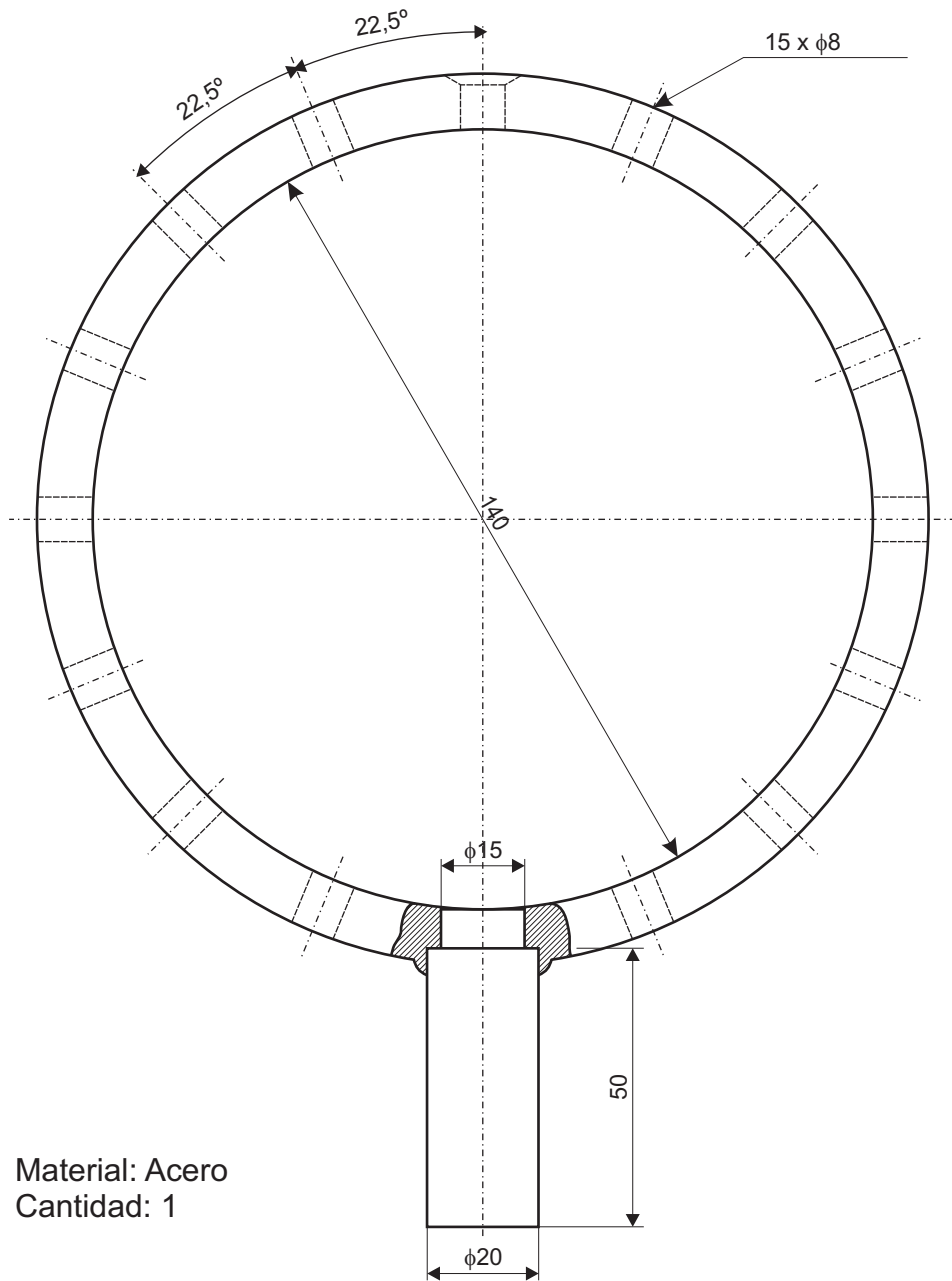
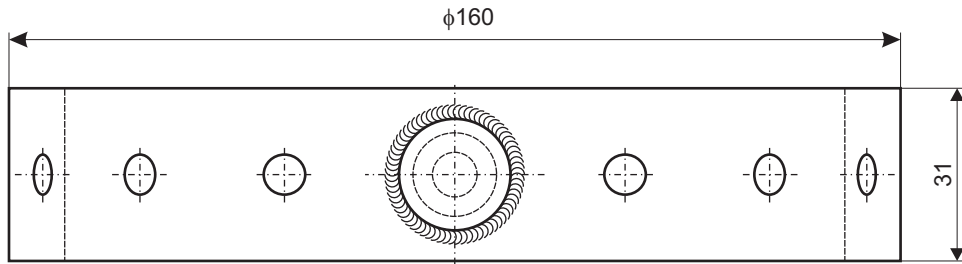


**Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur**

BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

Gustavo Gabriel Vignolo

Cojinete de Transporte



Material: Acero
Cantidad: 1

**Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Planta Piloto de Ingeniería Química-Universidad Nacional del Sur**

BANCO DE ENSAYOS DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

Gustavo Gabriel Vignolo

Mandril Para Fabricación de Porta Cojinete