UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctor en Matemática

Modelos de Cuantización

en Variedades

Guillermo Capobianco

Bahía Blanca Argentina

2016

Índice general

Prefacio

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Sur durante el período comprendido entre los meses de octubre de 2003 y julio de 2015, bajo la dirección del Dr. Walter Alberto Reartes, Profesor Asociado del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el ..../..../...... , mereciendo la calificación de ......(........................)

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento:

A mi director Walter Reartes, por su predisposición en todo momento, su paciencia y su guía.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por el financiamiento económico.

Al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur, autoridades, docentes, técnicos y administrativos.

A mis compañeros de trabajo y a mis compañeros de oficina.

A Hernán Cendra por sus observaciones y comentarios.

A toda mi familia, en especial a mis padres Nora y Juan por alentarme en este camino. Y también a Marcela, Marianela, Ana María y María.

A mis amigos y a todos aquellos que de alguna u otra manera me ayudaron en la realización de esta tesis.

Y por último a quienes son la razón de mi felicidad, a mi hija Isabella y a mi esposa Anahí.

Resumen

El estudio de la mecánica cuántica en espacios de configuración no triviales dista mucho de estar agotado y constituye un problema de amplio interés actualmente. Por ejemplo, no existe acuerdo sobre cuál es la ecuación de Schrödinger adecuada que contemple la dependencia con respecto a la curvatura espacial de la variedad, es decir el equivalente a una ecuación de Schrödinger para casos de curvatura distinta de cero, la cual en el límite reproduzca la cuántica usual.

En esta tesis se estudian métodos de cuantización inspirados en las integrales de Feynman para espacios de configuración que generalizan el euclidiano. En el caso de grupos de Lie con una métrica bi-invariante, se construye un propagador infinitesimal por medio de la integración en el álgebra de Lie del grupo vía el mapa exponencial. Se obtiene una ecuación de Schrödinger modificada que incluye un potencial correspondiente a la curvatura escalar de la variedad.

También se estudian métodos de cuantización holomorfa como el desarrollado por B. C. Hall [57, 59, 61, 62], se los relaciona con la transformada de Segal-Bargmann y se los conecta con integrales de Feynman, lo cual nos permite obtener resultados originales. Se define un propagador infinitesimal que genera la evolución cuántica. La medida de integración usada surge de la solución fundamental de la ecuación del calor en la complexificación de la variedad.

En el caso de variedades riemannianas conexas orientables de curvatura cero (*euclidean space form*) se muestra que existe un isomorfismo natural entre el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable en el espacio de configuración y el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable en el espacio fase. Los

productos escalares son definidos con una medida dada por la solución fundamental de la ecuación del calor en cada espacio.

Este espacio de funciones holomorfas en el espacio fase resulta ser un espacio de Hilbert con núcleo reproductor (*reproducing kernel Hilbert space*). Haciendo uso de la existencia de un núcleo reproductor se obtiene el isomorfismo mencionado y una integral de Feynman que coincide con las expresiones conocidas para el caso euclidiano, ver [27, 139].

En particular, las *euclidean space forms* de dimensión 3 orientables compactas presentan especial interés en cosmología, dado que permiten modelar la parte espacial de los llamados modelos de universo plano [34]. Ver el trabajo más reciente de J. Levin et al., en donde se busca desarrollar un modelo cosmológico plausible usando *euclidean space forms* orientables y compactas de dimensión 3 de acuerdo con los resutados de observaciones del fondo de radiación cósmico [98, 99, 100, 97].

Abstract

The study of quantum mechanics on nontrivial configuration spaces is far from being exhausted and it is a topic of current wide interest. For instance, there is no agreement on which is the appropriate Schrödinger equation that considers the dependence on the spatial curvature of the manifold, i. e. the equivalent of a Schrödinger equation for cases of non-zero curvature, which in the limit, reproduces the usual quantum mechanics.

In this thesis, quantization methods inspired by Feynman integrals for configuration spaces, which generalize the Euclidean case, are studied. In the case of Lie groups with a bi-invariant metric, an infinitesimal propagator is constructed by integrating in the Lie algebra of the group via the exponential map. A modified Schrödinger equation is obtained, which includes a potential corresponding to the scalar curvature of the manifold.

Also, holomorphic quantization methods are studied following Hall [57, 59, 61, 62], specifically in association with the Segal-Bargmann transform and the connection with Feynman integrals, which allows us to obtain original results. An infinitesimal propagator is defined, in order to obtain the quantum evolution. The measure of integration used arises from the fundamental solution of the heat equation in the complexification of the manifold.

In the case of an orientable connected compact flat Riemannian manifold (euclidean space form) it is shown that there is a natural isomorphism between the Hilbert space of square integrable complex functions on the configuration space and the space of square integrable holomorphic functions on the phase space. The scalar products are defined with a measure given by the fundamental solution of the heat equation on each space.

This space of holomorphic functions on the phase space turns out to be a reproducing kernel Hilbert space. Taking advantage of the existence of a reproducing kernel, the above mentioned isomorphism and a path integral are obtained, the latter of which coincides with the known expressions in the euclidean case, see [27, 139].

In particular, the 3-dimensional orientable compact euclidean space forms present a particular interest for cosmology, since they could model the spatial part of the flat-universe models [34]. See the most recent works of J. Levin et al. [98, 99, 100, 97], which seek to develop a plausible cosmological model using orientable compact euclidean space forms of dimension 3 in agreement with results of observations made on the cosmic microwave background radiation.

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo y el siguiente están destinados a presentar el marco teórico introductorio del trabajo desarrollado en la presente tesis. A modo de introducción se comienza en este capítulo presentando diferentes enfoques históricos al problema de la cuantización en general. En el capítulo 2 se desarrolla la formulación de integrales de Feynman.

1.1. Organización de la tesis

En el capítulo 1 se describe brevemente el formalismo de la mecánica clásica y de la mecánica cuántica. Luego se hace una reseña histórica del problema de la cuantización de espacios de configuración no triviales en general remarcando el alcance de diferentes métodos de cuantización.

En el capítulo 2 se introduce el formalismo de integrales de Feynman, donde se desarrolla la integral a partir de la fórmula de Trotter. Se concluye con discusiones sobre los casos de espacios de configuración distintos al euclidiano, los cuales motivaron el estudio realizado en esta tesis.

En el capítulo 3 se define un método inspirado en el formalismo de integrales de Feynman para el caso de grupos de Lie. La integración es realizada en el álgebra de Lie del grupo en consideración por medio del paso al tangente mediante el mapa exponencial. Se estudia en particular el caso de una partícula libre cuyo espacio de configuración es el grupo $SU(2)$. Se desarrolla además la cuantización de una partícula libre sobre la esfera S^n para el caso $n = 3$ y $n = 4$. Todos los resultados presentados en este capítulo son originales, la primera parte de los mismos se encuentra publicada en [15].

En el capítulo 4 se presenta la conexión con el método de cuantización por medio de funciones holomorfas y con generalizaciones de la transformada de Segal-Bargmann. Se estudia en particular el oscilador amónico en esta representación y su espectro. Luego en el capítulo 5 se desarrolla un método de integración funcional inspirado en integrales de Feynman y en relación con representaciones holomorfas de la mecánica cuántica. El formalismo tiene en consideración propiedades geométricas de las variedades a cuantizar y mediante el uso del mapa exponencial se desarrollan las integrales que representan la evolución infinitesimal en el espacio tangente correspondiente. Estos resultados son originales.

En el capítulo 6 se construye explícitamente una métrica que sirve para definir la cuantización por medio de integrales funcionales en variedades Riemannianas de curvatura cero, como primer paso para la cuantización en espacios más generales. La integración se desarrolla de manera distinta a la del capítulo anterior, lo cual hace al formalismo esencialmente diferente. La medida de integración proviene de la solución fundamental de la ecuación del calor definida en la variedad en consideración. Los espacios de Hilbert de funciones holomorfas definidos resultan ser ejemplos de espacios de Hilbert con núcleo reproductor (*Reproducing Kernel Hilbert Spaces*). La existencia de un núcleo reproductor permite escribir un propagador de Feynman y obtener así expresiones para la evolución cuántica que en el caso euclidiano coinciden con las expresiones conocidas, ver por ejemplo [27]. El método de cuantización propuesto en este capítulo es también un desarrollo original de la presente tesis. Estos resultados se encuentran en el trabajo [16].

1.2. Aportes más importantes de la tesis

- Desarrollo de un método de cuantización basado en integrales de Feynman extendiendo el esquema propuesto por W. Reartes en su tesis doctoral [116] para el caso en que el espacio de configuración es un grupo de Lie. Aparece un potencial adicional en la ecuación de Schrödinger dependiente de la curvatura escalar del espacio de configuración corroborando otros resultados previos. Ver [116].

- Conexión del método de cuantización holomorfo desarrollado en esta tesis basado en integrales de Feynman con el método de cuantización holomorfa desarrollado por B. C. Hall et. al. [57].

- Cuantización de variedades riemannianas de curvatura cero (*euclidean space forms*) por un método original desarrollado en esta tesis que en el caso euclidiano coincide con las expresiones conocidas de la integral de Feynman [27]. Para la construcción del propagador de Feynman propuesto se elige una medida de integración que surge de la solución fundamental de la ecuación del calor en la complexificación del espacio a cuantizar.

1.3. Cuantización

Nociones preliminares

En esta sección, a modo de introducción, se hará una breve descripción destacando algunas características del formalismo clásico y del formalismo cuántico. Puede consultarse, por ejemplo, los siguientes libros y apuntes [23, 95, 35, 139, 1, 41, 64].

Es sabido que en el marco de la geometría simpléctica [1], el espacio fase de un sistema físico está descripto por una variedad M junto con una estructura simpléctica Ω. Cada punto de la variedad representa un estado clásico del sistema. Puede decirse que la descripción geométrica del espacio fase de un sistema clásico es en general una variedad simpléctica (M, Ω) y los observables clásicos son funciones suaves en la variedad M, $(\Omega^0(M))$. En mecánica cuántica la descripción de un sistema está dada por una espacio de Hilbert complejo. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, en principio puede identificarse a un elemento $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ como un estado cuántico, pero si se consideran las ecuaciones que describen la dinámica del sistema no es posible distinguir entre $|\phi\rangle$ y $\lambda\,|\phi\rangle$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo, por lo cual ambos elementos deben describir el mismo estado cuántico. Es por eso que los estados son descriptos por rayos en el espacio de Hilbert. Se considera entonces el espacio proyectivo $P\mathcal{H}$ cuyos elementos $|\phi\rangle_{\mathbb{C}} := \{\lambda\,|\phi\rangle\,|\lambda \in \mathbb{C}, |\phi\rangle \in \mathcal{H}\}$. En esta representación un estado se encuentra descripto por un único elemento de $P\mathcal{H}$. Esto da lugar al siguiente postulado de la mecánica cuántica:

Postulado. *El sistema físico está descripto por un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ y cada estado del sistema a tiempo t está representado por un rayo $|\phi(t)\rangle_{\mathbb{C}}$ del espacio de Hilbert.*

En mecánica clásica se llama observable a una cantidad físicamente medible, la cual está representada por una función real $f \in \Omega^0(M)$. El resultado de la medición del observable está dado por el valor que toma la función en el punto (q, p) del espacio fase. En cuanto a los observables y al resultado de una medición en mecánica cuántica se tiene el siguiente postulado:

Postulado. *Todo observable de un sistema físico está representado por un operador lineal autoadjunto actuando sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. El resultado de la medición de un observable cuántico será un autovalor del correspondiente operador.*

El siguiente postulado establece la dinámica del sistema. En el formalismo clásico usualmente se tiene una función h llamada hamiltoniano, la cual contiene la información dinámica del sistema, cuya evolución queda determinada por las ecuaciones dinámicas de movimiento:

$$\frac{df}{dt} = X_h(f) = \{f, h\}, \tag{1.1}$$

donde $\{.,.\}$ es el corchete de Poisson. En mecánica cuántica, en cambio la dinámica está descripta por la ecuación de Schrödinger:

Postulado. *La dinámica del sistema está definida por un operador hermítico H (observable cuántico) llamado operador hamiltoniano. Y la ecuación de Schrödinger que determina la evolución del estado $|\phi(t)\rangle$ es:*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = H|\phi(t)\rangle, \tag{1.2}$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck dividido 2π. Por lo tanto en la representación de Schrödinger, la evolución temporal de un sistema está descripta por la ecuación de Schrödinger. Si se encuentra la solución a esta ecuación, dadas las condiciones de contorno adecuadas, es posible determinar la evolución del sistema.

Cuantización

A nivel microscópico, los comportamientos cuánticos de un sistema físico se tornan significativos y es necesario el uso de una teoría esencialmente diferente a la newtoniana, la cual corresponde esperar que en el límite reproduzca los resultados de la mecánica clásica (principio de correspondencia). Esta relación entre ambas teorías suele resumirse en la afirmación de que la mecánica clásica es el límite de la mecánica cuántica cuando $\hbar$ tiende a cero. Como es sabido, la cuantización de un sistema clásico es un problema delicado y complejo [1] [44].

Por cuantización se entiende el procedimiento por el cual se obtiene la descripción cuántica correspondiente a un sistema clásico [120], es decir es el intento de determinar la teoría cuántica de un sistema físico a partir del conocimiento de la teoría clásica. Dado que diferentes teorías cuánticas pueden tener el mismo límite cuando $\hbar \to 0$, diferentes cuantizaciones pueden conducir a teorías cuánticas no equivalentes. Existen diferentes teorías que desde los comienzos de la cuántica han abordado este problema con distinto enfoque. Puede mencionarse a modo de ejemplo, la cuantización canónica [23, 1, 29, 95], la cuantización por deformación [37, 69], el método de integrales de camino de Feynman [38, 107, 3, 86, 41] o dentro del contexto de la geometría simpléctica la cuantización geométrica [137, 74, 125, 123, 114, 1]. Dicho procedimiento de cuantización presenta ambigüedades, lo cual queda establecido por el teorema de Van Hove [44, 47, 46]. En cuanto a la interpretación física de diferentes análogos cuánticos a uno clásico puede decirse que la descripción cuántica de un sistema es más precisa que su contrapartida clásica. Matemáticamente esto implica la introducción de estructuras geométricas adicionales en el espacio cotangente, como por ejemplo la introducción de polarizaciones en la cuantización geométrica. En el caso de la cuantización por deformación, por otra parte, es necesario introducir una conexión simpléctica, la cual no está presente en la descripción clásica, ver [37], [36]. Diferentes elecciones de estas estructuras dan como resultado cuantizaciones inequivalentes de un mismo espacio fase. Análogamente la elección de métrica, torsión y estructura compleja también dan diferentes cuantizaciones de un sistema clásico dado.

La cuantización canónica es un proceso que asigna a los observables de la mecánica clásica sus correspondientes observables cuánticos. Esto es, a funciones reales $f(q,p)$, donde $(q,p) = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, (espacio fase), se le asignan operadores autoadjuntos Q_f del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ de manera tal que:

q1) la correspondencia $f \to Q_f$ sea lineal

q2) $Q_1 = I$, donde 1 es la función constante y I el operador identidad

q3) para toda función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para la cual $Q_{\phi\circ f}$ y $\phi(Q_f)$ estén bien definidas, $Q_{\phi\circ f} = \phi(Q_f)$; y

q4) los operadores Q_{p_j} y Q_{q_j} correspondiente a las funciones coordenadas p_j, q_j, $(j = 1, ..., n)$ están dados por

$$Q_{q_j}\psi = q_j\psi, \;\; Q_{p_j}\psi = -\frac{i\hbar}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}$$

para $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, dq)$.

Es sabido que la cuantización canónica presenta limitaciones para los sistemas cuyos grados de libertad no son finitos o cuyo espacio de configuración es una variedad riemanniana arbitraria. Además dicho método es dependiente del sistema de coordenadas utilizado, a diferencia de otros métodos como por ejemplo la cuantización geométrica, relacionada con la teoría de representaciones unitarias irreducibles de grupos de Lie [91]. La cuantización geométrica permite estudiar los casos con curvatura, si bien dicho proceso de cuantización está desarrollado esencialmente para casos de dimensión finita y su estudio en teoría de campos constituye una línea abierta de investigación.

Los primeros trabajos en cuantización geométrica fueron realizados por B. Kostant, J. M. Soriau y I. E. Segal, algunas de cuyas ideas se basaron en trabajos previos de A. A. Kirillov. Esos resultados, actualmente son conocidos como el proceso de *p*recuantización. El espacio de Hilbert que se obtiene por medio de la precuantización es demasiado extenso para representar correctamente un sistema cuántico. Ver por ejemplo el libro de Woodhouse [137] en donde se explica detalladamente el esquema de precuantización de un fibrado cotangente. Allí se pone de manifiesto que la precuantización conduce a funciones que dependen de p y de q, las cuales no reproducen las reglas de cuantización canónicas. En la cuantización geométrica se parte de un sistema físico arbitrario cuyo espacio fase es una variedad simpléctica $2n-$dimensional N. Para realizar la cuantización geométrica de N se debe elegir una polarización, esto es n direcciones en N a lo largo de las cuales las funciones de onda son constantes. Si $N = T^*M$, se puede elegir como polarización la *p*olarización vertical siendo constantes las funciones de onda a lo largo de las fibras del fibrado cotangente $N = T^*M$. En el caso del fibrado cotangente de un grupo de Lie compacto Hall demuestra [62] cómo la elección de una polarización compleja en particular da lugar a una transformada de Segal-Bargmann generalizada similar a las obtenidas en la presente tesis.

Dada una variedad simpléctica (M, Ω), el objetivo de la cuantización es construir un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y asociar un operador autoadjunto O_f para cada observable clásico f en una subálgebra de Poisson de $\Omega^0(M)$. Además como el conjunto de operadores $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ es un álgebra de Lie junto con el corchete, es razonable pedir que la correspondencia entre observables clásicos y cuánticos sea un homomorfismo de álgebras de Lie.

Definición 1.1. *Sea (M, Ω) una variedad simpléctica. Un conjunto de funciones $\{f_j\} \subset \Omega^0(M)$ se dice que es un conjunto completo de observables clásicos si y solo si dada otra función $g \in \Omega^0(M)$ que verifica que $\{f_j, g\} = 0$ para todo f_j, resulta que g es constante.*

Definición 1.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un conjunto de operadores autoadjuntos $\{O_j\}$ actuando en $\mathcal{H}$ se dice un conjunto completo de operadores si y solo si todo operador O que conmute con todos ellos es un múltiplo de la identidad.*

Proposición 1.1. *Si un conjunto de operadores autoadjuntos $\{O_j\}$ en $\mathcal{H}$ es un conjunto completo de operadores, entonces $\mathcal{H}$ es irreducible bajo la acción de $\{O_j\}$, es decir, todo subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ invariante por la acción de $\{O_j\}$ es $\{0\}$ o $\mathcal{H}$.*

No se dará aquí la demostración pero puede consultarse por ejemplo [35].

Postulado (Irreducibilidad). *Si $\{f_j\}$ es un conjunto completo de observables clásicos de un sistema físico, luego sus operadores cuánticos asociados forman un conjunto completo de observables cuánticos, es decir el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es irreducible por la acción de los operadores $O_{\{f_j\}}$.*

Lamentablemente una cuantización de todos los observables clásicos es imposible en general como queda establecido por los teoremas de Groenewold [51] y van Hove [73]. A continuación se define para el caso de la variedad $M = \mathbb{R}^{2n}$ el concepto de $f$ull quantization: [1]

Definición 1.3. *Una full quantization de M es un mapa de observables $f \in \Omega^0(M)$ en operadores autoadjuntos $\hat{f}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que:*

i) $(f+g)\hat{} = \hat{f} + \hat{g}$

ii) $(\lambda f)\hat{} = \lambda \hat{f}, \ \lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\{f, g\}\hat{} = (1/i)[\hat{f}, \hat{g}]$

iv) $\hat{1} = \mathbb{I}$

v) $\hat{q}^i$ *y* $\hat{p}_j$ *actuan irreduciblemente en* $\mathcal{H}$*.*

Por el teorema de Stone-Von Neumann (ver por ejemplo [1] pag. 452) la condición (v) significa que puede tomarse $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ y que q^i y p_j están dados por $\hat{q}_i = Q_{q_i}$ y $\hat{p}_j = (1/i)\partial/\partial q_j$; es decir, la representación de Schrödinger.

Sin embargo, no existe una cuantización que satisfaga las condiciones (i) a (v) ($f$ull quantization). Esto fue demostrado en primer lugar por Groenewold [51] y posteriormente por van Hove, quien demuestra una versión más refinada de dicho teorema [73], ver también [44].

Capítulo 2

Cuantización de Feynman

2.1. Introducción

En el presente capítulo se trata brevemente el desarrollo de integrales de Feynman (también conocida como integral de caminos o integral funcional). En primer lugar se estudia el caso de espacios euclidianos y posteriormente se presentan casos de espacios más generales de especial interés en la presente tesis.

La integral de caminos o integral funcional fue introducida en primer lugar por Wiener en el contexto de procesos estocásticos y como método para resolver problemas relacionados con el movimiento Browniano. Sin embargo posteriormente Richard Feynman reformula estas integrales para desarrollar un nuevo enfoque de la mecánica cuántica. Sus ideas fueron inspiradas por Dirac y sus observaciones sobre el papel del Lagrangiano y el principio de mínima acción en la mecánica cuántica, [38, 3].

Uno de los beneficios de la formulación de Feynman de la mecánica cuántica es la contribución al aspecto conceptual de la misma, especialmente en lo que respecta a la conexión de la mecánica cuántica con la mecánica clásica [28, 80, 139, 20, 119, 128, 27]. Las cantidades físicas son expresadas como promedios sobre todos los caminos posibles, pero ante el límite semiclásico $\hbar \to 0$, las contribuciones más significativas provienen de los caminos más cercanos a la trayectoria clásica esperada. En la presente tesis se desarrolla un esquema de cuantización basado en integrales de Feynman con el objetivo de plantear la evolución en espacios diferentes al euclidiano. En particular en el capítulo 3 se desarrolla el caso del grupo $SU(2)$ y de la esfera S^3 y S^4. Posteriormente dentro del contexto de espacios de Hilbert de funciones holomorfas, (representación holomorfa de la mecánica cuántica), se construye la integral de Feynman en los capítulos 4 y 5. En el capítulo 6 se desarrolla la integral de Feynman en *space forms* partiendo de una medida de integración que proviene de la solución de la ecuación del calor.

2.2. Integral de Feynman

En lo que sigue se expone un desarrollo de la integral de Feynman que es similar al que puede encontrarse en los libros de L. S. Schulman [121], R. P. Feynman y A. R. Hibbs [38] o en el texto más reciente de B. C. Hall [64]. Sobre los detalles técnicos de la construcción de la integral de Feynman pueden consultarse los siguientes libros de Simon [124], y Reed-Simon [118]). Para ciertos hamiltonianos especiales Nelson estudia en detalle la convergencia de las integrales y el desarrollo del *time-slicing* [108, 107]. Sobre la construcción de integrales de Feynman en contextos más generales en los cuales los espacios de configuración estudiados son espacios simétricos o grupos de Lie puede consultarse el libro de W. Tomé [130]. Por otro lado, el libro de H. Kleinert [84] es de especial interés por destacar las aplicaciones de integrales de Feynman a diversos campos. En particular desarrolla en detalle aplicaciones a problemas de estadística, estudio de polímeros (ver también [135]) y finanzas, específicamente opciones. Dedicado a este último tópico en su totalidad es el libro de E. B. Baaquie [6].

2.3. Integral de Feynman en espacios euclidianos

En esta sección se llegará a la expresión de la integral de Feynman aplicando la fórmula de Trotter al siguiente hamiltoniano $\hat{H}$.

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\Delta + V(x). \tag{2.1}$$

Se considera aquí la constante de Planck dividido 2π igual a 1 ($\hbar = 1$). (Ver en el apéndice B la deducción de la fórmula de Trotter. Puede consultarse además [64] y referencias citadas allí). Considérese el problema de valores iniciales para la ecuación de Schrödinger

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\left(-\frac{1}{2m}\Delta + V\right)\psi, \quad \psi(0) = u, \tag{2.2}$$

donde Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^n$, V es una función real medible y ψ y u pertenecen a $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supondrá que el potencial V hace que $\hat{H}$ sea esencialmente autoadjunto en $Dom(\Delta) \cap Dom(V)$, es decir de extensión analítica única. Cualquier potencial acotado tiene esta propiedad, así como ciertos potenciales no acotados. Por la fórmula de Trotter vale que

$$e^{-it\hat{H}}\psi = \lim_{N\to\infty}\left(\exp\left[\frac{it\Delta}{2mN}\right]\exp\left[-\frac{itV(x)}{N}\right]\right)^N \psi. \tag{2.3}$$

A continuación se tomará la masa $m = 1$. Sea $\mathcal{F}$ la transformada de Fourier y $\mathcal{F}^{-1}$ su inversa, puede escribirse el operador laplaciano como sigue:

$$\Delta\psi = \mathcal{F}^{-1}(-p^2)\mathcal{F}\psi, \tag{2.4}$$

donde p^2 es el cuadrado del módulo del momento $p = (p_1, ..., p_n)$. El dominio de Δ es el conjunto de aquellas $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, tales que $(-p^2)\mathcal{F}$ también pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. El operador Δ es autoadjunto. Llamando K_t al operador

$$K_t = \exp[it\Delta], \tag{2.5}$$

puede escribirse la solución de la ecuación de Schrödinger con $V = 0$ como sigue

$$\psi(t) = K_t u, \tag{2.6}$$

donde

$$K_t u = \frac{1}{(\sqrt{2\pi i t})^n} \int \exp\left(\frac{i}{2t}|x-y|^2\right) u(y) dy. \tag{2.7}$$

La integral existe para todo $u \in L^1 \cap L^2$.

El operador de multiplicación por la funcion V es autoadjunto también y su dominio son aquellas funciones $u \in L^2$ para las cuales $Vu \in L^2$. La solución al problema de valores iniciales está dada por

$$\psi(t) = M_t u, \tag{2.8}$$

donde

$$M_t = \exp(-itV). \tag{2.9}$$

Finalmente considérese el hamiltoniano total, T. Kato da condiciones para las cuales este hamiltoniano es autoadjunto [77]. Si bajo estas condiciones se considera el operador

$$U_t = \exp\left(-it\left(\frac{1}{2}\Delta + V\right)\right) \tag{2.10}$$

entonces por la fórmula de Trotter, se tiene que

$$\psi(t) = U_t u = \lim_{m\to\infty} (K_{t/m} M_{t/m})^m u. \tag{2.11}$$

Puede escribirse

$$(K_{t/m} M_{t/m})^m u = \frac{1}{(\sqrt{2\pi i (t/m)})^{nm}} \int \exp[iS(x_0, ..., x_m, t)] u(x_m) dx_1 ... dx_m, \tag{2.12}$$

donde se ha escrito $x_0 = x$ y

$$S(x_0, ..., x_m, t) = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{(t/m)^2} - V(x_{j-1})\right) \frac{t}{m}. \tag{2.13}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\psi(t) = \int dy G(x, y, t) u(y), \tag{2.14}$$

donde $G(x, y, t)$ es la función de Green, la expresión 2.12 corresponde en el límite (que según la ecuación 2.11 converge en L^2), a la expresión de la integral de camino de Feynman. En diversos textos de mecánica cuántica suele llamarse propagador a la función $G(x, y, t)$

$$G(x, y, t) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi i(t/m)})^{nm}} \int \exp[iS(x_0, ..., x_m, t)] dx_1 ... dx_{m-1}. \tag{2.15}$$

Se ha desarrollado aquí, usando la fórmula del producto de Trotter, la integral de Feynman. A continuación se dará una interpretación al aspecto más complicado de esta integral funcional, el límite de la expresión (2.15).

Sean x_j con $j = 0, ..., m$ los valores de un camino $x(s)$ correspondientes a los puntos $s_j := j\epsilon = jt/m$, i.e. $x_j = x(jt/m)$. Y a su vez esos puntos están conectados por segmentos de recta obteniéndose un camino lineal a trozos entre x_0 y x_j. La cantidad $|x_j - x_{j-1}|/\epsilon$ es una aproximación de la derivada de $x(s)$ con respecto a s. Y la sumatoria en el exponente puede verse como una suma de Riemann sobre este camino. Por lo tanto y de forma no rigurosa puede decirse que

$$\lim_{m \to \infty} \exp[iS(x_0, ..., x_m, t)] = \int_0^t d\tau \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \right). \tag{2.16}$$

La expresión en el integrando del miembro de la derecha de la ecuación (2.16) es el lagrangiano clásico de una partícula $L = T - V$, donde $T = (1/2)m|v|^2$ es la energía cinética y V la energía potencial. La integral del lagrangiano en un intervalo de tiempo t corresponde a la *a*cción clásica, a la cual se denotará por $A(x(\cdot))$. Es decir, dado un camino $x(\cdot)$ se define la acción de $x(\cdot)$ en un intervalo de tiempo $[a, b]$ de la siguiente manera

$$A(x(\cdot), a, b) := \int_a^b d\tau \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \right). \tag{2.17}$$

En mecánica lagrangiana se demuestra que las ecuaciones de Newton se deducen como los puntos estacionarios de la acción, es decir las trayectorias clásicas resultan ser aquellas que minimizan la funcional de la acción.

Puede escribirse entonces la siguiente expresión de la integral de Feynman

$$G(x, y, t) = \int_{x(0)=y}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(\tau) \exp(iA(x(\tau))), \tag{2.18}$$

donde $\mathcal{D}x$ es interpretada como la medida de Lebesgue en el espacio de todos los caminos $x(\cdot)$ que van de $x(0) = y$ a $x(t) = x$, es decir las integrales sobre los puntos intermedios se interpreta como la suma de todas las trayectorias posibles que parten de $x(0)$ y llegan a $x(t)$ en un tiempo t. Sin embargo, nótese que la expresión formal $\mathcal{D}x$ es el límite para $m \to \infty$ de la integral sobre $(\mathbb{R}^n)^m$ con respecto a la integral de Lebesgue dada por $dx_1 ... dx_m$. Por eso puede decirse que es interpretada como una medida de Lebesgue en el espacio de caminos, si bien se sabe que al ser un espacio de Banach infinito dimensional, no existe una medida adecuada (σ aditiva) invariante por traslación, equivalente a una medida de Lebesgue.

Es interesante que la integral de Feynman, que describe la mecánica cuántica del sistema, tenga una dependencia directa de la acción proveniente de la mecánica clásica. Esto presenta una ventaja de este formalismo cuántico frente a otros al buscar establecer conexiones entre ambas teorías.

2.4. Integral de Feynman en espacios de configuración no triviales

En esta tesis se proponen métodos de cuantización para espacios de configuración no triviales, ya sea el caso de grupos de Lie abordado en el capítulo 3 o el caso de la cuantización de *space forms* tratado en el capítulo 6. La motivación del estudio de diversos espacios de configuración tiene interés tanto matemático como físico. Desde el comienzo de la mecánica cuántica pero en particular a lo largo de los últimos años se han escrito numerosos trabajos relacionados con la formulación de integrales de Feynman en espacios de configuración cuya geometría es no trivial. Dicha formulación no solo sería de utilidad en la formulación de una teoría cuántica de la gravedad sino que también se ha demostrado su utilidad en la resolución de un problema fundamental en la mecánica cuántica, el átomo de hidrógeno [31, 32, 8, 13, 70].

La mayoría de los métodos de cuantización son dependientes del sistema de coordenadas usado (en general cartesiano) y en algunos casos solo llevan a un resultado correcto bajo ciertas consideraciones [29]. Sin embargo, la dinámica hamiltoniana clásica es covariante ante transformaciones generales de coordenadas en una variedad simpléctica y en este sentido, es independiente de las coordenadas.

Se han realizado trabajos con la intención de definir correctamente y de forma covariante dicha cuantización. Ver por ejemplo el trabajo de Shabanov y Klauder [122] en el cual se definen la integrales de Feynman para el caso de variedades simplécticas riemannianas haciendo especial énfasis en la elección de la medida en el espacio de caminos para lograr covarianza ante cambio de coordenadas generales en el espacio fase. Sin embargo, para eludir la dificultad de cuantizar una variedad simpléctica general con curvatura diferente a cero, realiza un *embedding* en una variedad euclidiana de mayor dimensión (plana) imponiendo ligaduras de segunda clase (*second class constraints* [54, 45, 48]), de manera tal que la estructura simpléctica canónica restringida resulte ser la estructura simpléctica original.

Por otra parte, en los últimos años la cuantización de sistemas físicos en grupos y espacios simétricos ha sido un tópico de amplio interés y desarrollo. Ver por ejemplo [14, 13] [52, 53]. Böhm y Junker haciendo uso de funciones esféricas zonales han realizado la construcción de integrales de Feynman para el caso de una partícula sobre grupos compactos y no compactos [13]. También para el grupo euclidiano [14] y en espacios simétricos [75]. La construcción en este último está desarrollada para grupos compactos G actuando en espacios simétricos compactos de la forma G/H, donde H es un subgrupo masivo de G.

En su tesis doctoral W. Reartes [116] estudia el problema de la cuantización de un sistema dinámico cuyo espacio de configuración es una variedad Riemanniana. El esquema propuesto está inspirado en el método de integrales de camino de Feynman. En particular, desarrolla un esquema de cuantización partiendo del formalismo lagrangiano clásico por medio de un propagador infinitesimal de carácter geométrico. Se obtiene posteriormente una ecuación de evolución en la cual se ponen de manifiesto características intrínsecas de la variedad riemanniana en consideración. Reartes [116] obtiene resultados que relacionan la curvatura escalar de la métrica de la variedad y la dinámica de una partícula libre sobre ella. En particular, observa que la curvatura escalar induce un potencial adicional en la ecuación de Schrödinger de la forma $\alpha R/3$, donde R es la curvatura escalar y α un factor que depende de la naturaleza del objeto propagado, siendo 0 para funciones, 1 para volúmenes y en general α para $\alpha-$densidades como generalización de las $1/2-$densidades presentes también en el formalismo de cuantización geométrica. En [116] se destaca además que si se modifica la definición del laplaciano, el factor adicional queda absorbido en el nuevo laplaciano. Dichos resultados concuerdan con los resultados obtenidos por medio de la cuantización geométrica [137].

Capítulo 3

Evolución cuántica en el grupo SU(2)

3.1. Introducción

En este capítulo se plantea un esquema de cuantización en grupos de Lie y en particular el caso del grupo $SU(2)$, estos resultados son parte del trabajo de G. Capobianco y W. Reartes [15].

Se verá que los objetos aquí definidos dependen únicamente de propiedades geométricas del espacio de configuración considerado.

En similitud con los resultados de esta tesis, distintos autores han obtenido correcciones a la ecuación de Schrödinger, específicamente potenciales adicionales proporcionales a la curvatura escalar de la variedad. Dichos potenciales difieren sin embargo en la constante multiplicativa que acompaña a la curvatura escalar, ver por ejemplo los siguientes trabajos [22, 76, 82, 83, 86, 106, 104, 105].

3.2. Mecánica cuántica en espacios con curvatura

El papel desempeñado en cualquier esquema de cuantización por la curvatura del sistema que se quiere cuantizar ha despertado interés desde los comienzos de la mecánica cuántica. Se pueden mencionar a modo de ejemplo los siguientes libros y trabajos [18, 101, 106, 104, 105, 76, 33, 12, 17, 86, 82, 83, 25, 26, 40, 4, 129, 30].

En particular, han sido y siguen siendo de interés los espacios de configuración cuya geometría es no trivial. A lo largo de los últimos 50 años se han escrito numerosos trabajos relacionados con la formulación de integrales de Feynman en dichos espacios. Contar con una formulación de la mecánica cuántica que incluya estos espacios y considere el papel desempeñado por la curvatura no solo sería de utilidad en la confección de una teoría cuántica de la gravedad, sino que también se ha demostrado su necesidad en la resolución de un problema tan fundamental como el movimiento de una partícula sujeta a un potencial de Coulomb. Duru y Kleinert reparametrizan la integral de caminos para resolver el átomo de hidrógeno haciendo uso de nuevas variables espacio temporales por medio de la transformada de Kustaanheimo-Stiefel, originalmente usada en mecánica celeste (ver Duru y Kleinert, [31], [32], Kleinert [84] y Chaichian [20]). Grosche y Steiner, por otra parte [52, 53], formulan la integral de Feynman en una variedad con curvatura considerando un lagrangiano efectivo modificado, el cual resulta de sustraer un potencial del orden de $\hbar^2$ al lagrangiano clásico.

En este capítulo se desarrolla un esquema de cuantización en grupos de Lie basado en las integrales de camino de Feynman. Puede consultarse otra forma de abordar el estudio de integrales de Feynman sobre ciertos grupos de Lie en los trabajos de Barut, Inomata y Junker. Estos autores en [8], estudian el caso del átomo de hidrógeno dentro del marco de las integrales de Feynman sobre el grupo $SU(1,1)$. Como resultado demuestran que se recupera el espectro estándar del átomo de hidrógeno al tomar apropiadamente el límite al caso *flat*. También en [9] los autores estudian el átomo de hidrógeno en un espacio hiperbólico. Los trabajos de De Witt y Berezin [28, 11] constituyen otros ejemplos de construcciones de la integral de caminos en variedades arbitrarias.

En su tesis doctoral W. Reartes [116, 117], desarrolla un esquema de cuantización para variedades riemannianas compactas basado en las integrales de camino de Feynman dentro del marco de la geometría diferencial y en estrecha relación con la cuantización geométrica [125, 78, 91, 137]. Demuestra la aparición de un término adicional en la ecuación de Schrödinger, el cual depende de la curvatura escalar de la variedad espacio de configuración. En base a estos resultados encuentra una relación existente entre dicho potencial y el objeto que se esté propagando. A saber, dicho potencial resulta ser $(\alpha/3)R$, donde R es la curvatura escalar y donde α toma distintos valores en función de la naturaleza del objeto propagado, siendo 0 para funciones, 1 para densidades y en general α para $\alpha-$densidades como generalización de las $1/2-$densidades. Es interesante notar que si se extiende la definición del laplaciano a $\alpha-$densidades en general, el término de corrección queda absorbido dentro del nuevo laplaciano. Cabe mencionar que hasta el momento sigue siendo un problema abierto determinar cuál es la ecuación equivalente a la de Schrödinger correspondiente a un espacio con curvatura.

3.3. Esquema general

Se aborda el problema de predecir la evolución cuántica de una partícula libre de masa m en un grupo de Lie G de dimensión d, equipado con una métrica riemanniana biinvariante y para ello se comenzará por definir lo que se llamará el propagador de un paso correspondiente a un *time-slice* ϵ. En lugar de integrar sobre el grupo, se realiza la integración sobre el espacio tangente al grupo en cada punto $g \in G$.

Se ha dicho en el capítulo 2 que en el marco de las integrales de Feynman conocer la expresión del propagador K permite describir la evolución temporal de la función de onda ψ,

$$\psi(x_1, t_1) = \int dx_0 K(x_1, t_1|x_0, t_0)\psi(x_0, t_0), \tag{3.1}$$

donde

$$K(x_1, t_1|x_0, t_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right)\mathcal{D}[x(t)]. \tag{3.2}$$

En el presente contexto la expresión del propagador equivale a

$$K(g_1, g_0; t) = \int_{g_0=g(0)}^{g_1=g(t)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[g]\right)\mathcal{D}[g(t)], \tag{3.3}$$

donde $S[g]$ es la acción correspondiente a la trayectoria clásica. La evolución temporal de la partícula en el grupo de Lie G puede describirse mediante la siguiente integral

$$U_t\psi(g_1) \equiv \psi(g_1, t) = \int_G K(g_1, g_0; t)\psi(g_0, 0)\, d\mu(g_0). \tag{3.4}$$

En lugar de integrar en el grupo, se realiza la integración sobre el plano tangente a g_0, esto es

$$U_t\psi(g_1) \equiv \psi(g_1, t) = \int_{T_{g_0}G} K(g_1, \exp_{g_0}\eta; t)\psi(\exp_{g_0}\eta, 0)\, \exp_{g_0}^{*} d\mu(\eta). \tag{3.5}$$

Utilizando la suryectividad del mapa exponencial se puede formular la integración en el tangente *l*evantando las funciones de onda como *pull-back* de las funciones de onda en el grupo por el mapa exponencial. Corresponde aclarar que nuestro propagador K es el que resulta de integrar sobre todo el tangente a g_0 y no $\tilde{K}$ el cual resultaría de integrar sobre la preimagen del *pull-back* del mapa exponencial $(\pi^{-1}(G))$

$$U_t\psi(g_1) \equiv \psi(g_1, t) = \int_{\pi^{-1}(G)} \tilde{K}(g_1, \exp_{g_0}\eta; t)\psi(\exp_{g_0}\eta, 0)\, \exp_{g_0}^{*} d\mu(\eta). \tag{3.6}$$

Si los sucesivos pasos de la evolución de la función ψ son calculados por medio del propagador discreto K el operador evolución cuántico puede representarse como el siguiente límite de operadores discretos como sigue

$$U_t = \lim_{N\to\infty} S_{t/N}^{N}, \tag{3.7}$$

donde la aproximación discreta S_ϵ está dada por (se toma $\epsilon = t/N$)

$$S_\epsilon \psi(g) = \left(\frac{m}{2\pi\epsilon i}\right)^{d/2} \int_{T_gG} \exp\left(\frac{im\|\eta\|^2}{2\epsilon}\right) \psi(\exp_g(\eta)) \exp_g^* d\mu(\eta). \tag{3.8}$$

Como se mencionó anteriormente, en este esquema, la función de onda es levantada, vía el mapa exponencial, al plano tangente en el punto g (T_gG) y posteriormente se integra, calculando la contribución a tiempo ϵ, es decir, nos interesa calcular el efecto que sobre la función de onda $\psi(g)$ causan las trayectorias sobre el grupo G que llegan al punto g en un tiempo ϵ.

Se verifica usando la invarianza de la métrica, que la última expresión puede ser calculada mediante una integración sobre $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie del grupo G, luego

$$S_\epsilon \psi(g) = \left(\frac{m}{2\pi\epsilon i}\right)^{d/2} \int_{\mathfrak{g}} \exp\left(\frac{im\|\eta\|^2}{2\epsilon}\right) \psi(g\exp(\eta)) \exp^* d\mu(\eta). \tag{3.9}$$

Mediante sucesivas aplicaciones del operador infinitesimal se obtiene el propagador de N pasos S_ϵ^N dado por la siguiente expresión integral

$$S_\epsilon^N \psi(g) = \left(\frac{m}{2\pi\epsilon i}\right)^{\frac{Nn}{2}} \int_{T_{g_0}G} \cdots \int_{T_{g_{N-1}}G} \exp\left(\frac{im}{2\epsilon}\sum_{j=1}^{N}\|\eta_j\|^2\right) \psi(\exp_{g_{N-1}}(\eta_N)) \prod_{j=1}^{N} \exp_{g_{j-1}}^* d\mu(\eta_j). \tag{3.10}$$

El operador evolución cuántico a tiempo finito puede ser representado por el siguiente límite de operadores

$$U_t = \lim_{N\to\infty} S_{t/N}^N. \tag{3.11}$$

Se observa que el operador S_ϵ es continuo a la derecha para $\epsilon = 0$ si se define $S_0\psi(g) = \psi(g)$. Es más, puede probarse que la expansión de $S_\epsilon\psi(g)$ a primer orden en ϵ es

$$S_\epsilon \psi(g) = \psi(g) + im\frac{\epsilon}{2}\left(\Delta\psi(g) - \frac{1}{3}R(g)\psi(g)\right) + o(\epsilon). \tag{3.12}$$

Puede apreciarse que la ecuación de Schrödinger obtenida a partir del propagador propuesto contiene un potencial dependiente de la curvatura escalar añadido al operador de Laplace-Beltrami.

3.4. El propagador para $SU(2)$

Nuestro propósito es poder calcular el propagador (3.8) o (3.9) en el caso del grupo $SU(2)$ para una clase amplia de funciones. En primer lugar, puede observarse que $SU(2)$ posee una estructura riemanniana natural cuya curvatura escalar es constante, $R = 6$. Teniendo presente el difeomorfismo existente entre $SU(2)$ y la esfera S^3, introduciendo coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} x^1 &= \sin\rho \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ x^2 &= \sin\rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ x^3 &= \sin\rho \cos\theta_1 \\ x^4 &= \cos\rho. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Con estas coordenadas se puede parametrizar el espacio tangente a S^3 sobre el punto base de coordenadas $e = (0, 0, 0, 1)$ como sigue

$$\begin{aligned} \eta^1 &= \rho \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \eta^2 &= \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ \eta^3 &= \rho \cos\theta_1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

La medida de Haar escrita en estas coordenadas es

$$d\mu = \sin^2(\rho)\sin(\theta_1) d\rho d\theta_1 d\theta_2. \tag{3.15}$$

Finalmente, el propagador de un paso para una función de onda arbitraria ψ es

$$S_\epsilon\psi(g) = \left(\frac{m}{2\pi\epsilon i}\right)^{3/2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp\left(\frac{im\rho^2}{2\epsilon}\right) \psi(\rho, \theta_1, \theta_2) d\mu, \tag{3.16}$$

donde se ha simplificado la notación.

Considérese el caso en que se aplica el propagador para una función constante, por ejemplo $\psi = 1$

$$S_\epsilon 1 = \frac{\sin\epsilon}{\epsilon} \exp(-i\epsilon). \tag{3.17}$$

Observar que como es de esperar, el resultado no depende del punto en el cual es calculado.

Es fácil construir en este caso el operador evolución para tiempo finito. Se obtiene como resultado

$$U_t\psi = \lim_{n\to\infty} S_{\frac{t}{n}}{}^n\psi \Rightarrow \bar{S}_t 1 = e^{iT} = e^{i\frac{R}{6}T}. \tag{3.18}$$

Ahora se estudiarán las autofunciones del operador de Laplace en el grupo, cuya expresión en coordenadas esféricas es

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + 2\cot(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho} + \csc^2(\rho)\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1} + \cot\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \csc^2\theta_1\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\right). \tag{3.19}$$

El operador de Laplace tiene autofunciones u_{nlm} con autovalores $-(n^2-1)$, con $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta u_{nlm} = -(n^2-1)u_{nlm}. \tag{3.20}$$

Si se normalizan convenientemente estas autofunciones, resulta

$$u_{nlm}(\rho,\theta_1,\theta_2) = AC_{n-l-1}^{l+1}(\cos(\rho))\sin^l(\rho)\,Y_{lm}(\theta_1,\theta_2), \tag{3.21}$$

donde

$$A = i^{n-1-l}2^{l+1}l!\left(\frac{n(n-l-1)!}{2\pi(n+l)!}\right)^{1/2}, \tag{3.22}$$

C_{n-l-m}^{l+1} son los polinomios de Gegenbauer y Y_{lm} son las funciones armónicas esféricas tridimensionales. Ver por ejemplo los libros de Vilenkin y Helgason, [133] y [67].

El valor del propagador de un paso (3.16), calculado en el punto e, resulta ser la siguiente expresión concisa

$$S_\epsilon u_{nlm}(e) = \exp\left(\frac{-i(n^2+1)\epsilon}{2}\right)\frac{\sin(n\epsilon)}{n\epsilon}u_{nlm}(e). \tag{3.23}$$

Hay que mencionar que ambos miembros de la ecuación anterior se anulan excepto que $l=0$ y $m=0$.

Luego, se puede probar que las funciones u_{nlm} son autofunciones de S_ϵ con autovalores $\lambda_n(\epsilon)$

$$S_\epsilon u_{nlm} = \lambda_n(\epsilon)u_{nlm} \tag{3.24}$$

para todo u_{nlm}.

Para estas funciones puede evaluarse el límite necesario para obtener el operador de evolución cuántico, obteniéndose como resultado

$$\begin{aligned} U_t u_{nlm} &= \lim_{N\to\infty} S_{\frac{t}{N}}{}^N u_{nlm} && (3.25)\\ &= \exp\left(-i\frac{(n^2-1)t}{2}\right)\exp\left(-i\frac{Rt}{6}\right)u_{nlm}. && (3.26)\end{aligned}$$

Finalmente usando la relación de clausura

$$\delta(\cos\rho-\cos\rho')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi') = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l}\bar{u}_{nlm}(\rho',\theta',\phi')u_{nlm}(\rho,\theta,\phi), \quad (3.27)$$

puede escribirse una expresión para el propagador de Feynman

$$K(\rho,\theta,\phi,\rho',\theta',\phi';t) = \\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l}\exp\left(-i\frac{(n^2-1)t}{2}\right)\exp\left(-i\frac{Rt}{6}\right)\bar{u}_{nlm}(\rho',\theta',\phi')u_{nlm}(\rho,\theta,\phi). \quad (3.28)$$

3.5. Cuantización en esferas

Caso $n = 3$

Sea $m \in S^2$, es conocido que para cada $l \in \mathbb{Z}^+$ hay un autovalor $\lambda_l = -l(l+1)$ del operador de Laplace-Beltrami Δ y que su correspondiente autoespacio de autofunciones tiene dimensión $2l+1$. La expresión del operador Δ en coordenadas (ρ,θ) en el espacio tangente T_mS^2 es la siguiente

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \cot\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + L_{S^1}. \quad (3.29)$$

Ver el libro de Helgason [68]. En la ecuación anterior L_{S^1} representa al Laplaciano en S^1, en este caso, con respecto a la variable θ. Es decir $L_{S^1} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.

Existe una autofunción de Δ que no depende de la variable θ, a la cual se la llamará $U_0(\rho,\theta) = U_0^m(\rho)$ y satisface $U_0^m(0) = 1$. Esta función verifica lo siguiente

$$\frac{d^2U_0^m}{d\rho^2} + \cot\rho\frac{dU_0^m}{d\rho} = \lambda_l U_0^m \qquad , U_0^m(0) = 1. \quad (3.30)$$

Puede probarse que existe una solución a este problema (ver [67]).

Sea $\{U_0^m, U_1^m, ..., U_r^m\}$, $r = 2l$ una base de $\mathfrak{H}^{3,l}$, el espacio de armónicos esféricos con autovalor λ_l. Es conocido, (ver por ejemplo [133] o [67]), que $\mathfrak{H}^{3,l}$ es exactamente el autoespacio de λ_l. Sea $SO(2) = \{K \in SO(3) \mid Km = m\}$ el grupo de isotropía.

Para cada $i = 0, ..., r$ sea

$$W_i^m(\rho) = \frac{1}{VolSO(2)} \int_{SO(2)} U_i^m(Kx)dK, \tag{3.31}$$

donde x denota los elementos $\in S^2$ tales que $d(m,x) = \rho$ (aquí $d(m,x)$ representa la distancia geodésica). Es claro que el lado derecho de la ecuación (3.31) no depende de θ donde $x = (\rho, \theta)$. También puede pensarse Kx en coordenadas polares como $K(\rho,\theta) = (\rho, \theta + \phi)$ y la ecuación (3.31) puede ser escrita como sigue

$$W_i^m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_i^m(\rho, \theta + \phi)d\phi. \tag{3.32}$$

De la ecuación (3.32) inmediatamente se obtiene diferenciando bajo la integral y teniendo en cuenta que

$$U_i^m(Kx) = (L_K^* U_i^m)(x) \tag{3.33}$$

donde $L_k : S^2 \to S^2$ está dado por $L_K x = Kx$ y también teniendo en cuenta que $\Delta L_K^* = L_K^* \Delta$, lo siguiente

$$\Delta W_i^m = \lambda_l W_i^m \tag{3.34}$$

en otras palabras, $W_i^m \in \mathfrak{H}^{3,l}$, $i = 0, ..., r$. Pero dado que $W_i^m(\rho)$ depende solamente de ρ se tiene que

$$W_i^m(\rho) = \alpha_i U_0^m \tag{3.35}$$

y dado que $U_0^m(0) = 1$, vale

$$W_i^m(\rho) = W_i^m(0) U_0^m. \tag{3.36}$$

Se tiene que $W_0^m = U_0^m$. Ahora sea

$$\begin{aligned} V_0^m &= U_0^m \\ V_i^m &= U_i^m - W_i(0) U_0^m. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Luego se tiene que para $i = 1, ..., r$

$$\begin{aligned} V_i^m(0) &= 0 \\ \frac{1}{VolSO(2)} \int_{SO(2)} V_i^m(Kx)dK &= 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

De la última ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} S_\epsilon V_0^m(m) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi i\epsilon})^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \frac{i\rho^2}{2\epsilon} V_0^m(\rho) \sin \rho d\rho d\theta \\ &= \lambda_l(\epsilon). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ahora nos interesa calcular $S_\epsilon V_i^m(m)$.

$$\begin{aligned} \left(S_\epsilon V_i^m\right)(m) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi i\epsilon})^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \frac{i\rho^2}{2\epsilon} V_i^m(\rho,\theta) \sin \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi i\epsilon})^2} \int_0^\infty d\rho \exp \frac{i\rho^2}{2\epsilon} \sin \rho \int_0^{2\pi} V_i^m(\rho,\theta) d\theta \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Dado que $V_i^m(m) = 0$ para $i = 1, ..., r$, se tiene la fórmula general

$$S_\epsilon V_i^m(m) = \lambda_l(\epsilon) V_i^m(m) \qquad i = 0, 1, ..., r \tag{3.41}$$

Ahora se quiere mostrar que

$$S_\epsilon V_i^m(m') = \lambda_l(\epsilon) V_i^m(m') \tag{3.42}$$

para todo $m' \in S^2$. Sea $m' = Am$, para algún $A \in SO(3)$. Puede verse fácilmente que para todo $f \in S^2$ es válido que

$$S_\epsilon \left(L_A^* f\right)(m) = \left(S_\epsilon f\right)(Am) \tag{3.43}$$

Sea $V_i^{m'} = L_A^* V_i^m$ para $i = 0, ..., r$, luego usando las ecuaciones anteriores puede verse que $\left\{V_i^{m'}\right\}$ para $i = 0, ..., r$ es una base del espacio $\mathfrak{H}^{3,l}$ y satisface

$$V_0^{m'}(m') = 1 \tag{3.44}$$

$$V_i^{m'} = 0 \qquad i = 1, ..., r \tag{3.45}$$

$$\left(S_\epsilon V_i^{m'}\right)(m') = \lambda_l(\epsilon) V_i^{m'}(m'). \tag{3.46}$$

Se tiene entonces

$$V_i^m = \sum_j a_i^j(m') V_j^{m'}, \tag{3.47}$$

por lo tanto

$$\left(S_\epsilon V_i^m\right)(m') = a_i^j(m') V_j^{m'} S_\epsilon V_j^{m'}(m'). \tag{3.48}$$

De las ecuaciones anteriores (3.40) y (3.42) se obtiene

$$V_i^m(m') = a_i^0(m') V_0^{m'} = a_i^0(m'). \tag{3.49}$$

Y de las ecuaciones (3.40), (3.41) y (3.44) se obtiene

$$\left(S_\epsilon V_i^{m'}\right)(m') = \lambda_l(\epsilon) V_i^m(m') \tag{3.50}$$

para $i = 0, ..., r$, lo cual es el resultado que se quería probar.

Caso $n = 4$

La idea general es la misma que la del caso $n = 3$. Se seguirá el procedimiento de una manera muy similar al caso anterior. Sea $m \in S^3$. Para todo $l \in \mathbb{Z}^+$ existe un autovalor $\lambda_l = -l(l + 4 - 2) = -l(l + 2)$ of Δ. El correspondiente autoespacio $\mathfrak{H}^{4,l}$ tiene la siguiente dimensión:

$$dim \mathfrak{H}^{4,l} = \frac{(l + 4 - 3)(2l + 4 - 2)!}{(4 - 2)! l!} = \frac{(l + 1)(2l + 2)!}{2l!} \tag{3.51}$$

El Laplaciano es

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 2 \cot \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + L_{S^2} \tag{3.52}$$

donde L_{S^2} es el laplaciano en S^2. Se denotará genéricamente θ a la variable angular en S^2. Donde $S^2 \subseteq T_m S^3$ es definido de la manera usual, $S^2 = \{x \in T_m S^3 \mid |x| = 1\}$ donde $|x| = d(m, x) = \rho$ es la distancia geodésica. Existe una autofunción $U_0^m(\rho)$ de Δ la cual no depende de θ y satisface $U_0^m(0) = 1$. Es la única solución al problema

$$\frac{\partial^2 U_0^m}{\partial \rho^2} + 2 \cot \rho \frac{\partial U_0^m}{\partial \rho} = \lambda_l U_0^m \tag{3.53}$$

$$U_0^m(0) = 1. \tag{3.54}$$

Sea $\{U_0.U, 1, ..., U_r\}$ una base de $\mathfrak{H}^{4,l}$ Para $i = 0, ..., r$ se define

$$W_i^m(\rho) = \frac{1}{Vol(SO(3))} \int_{SO(3)} U_i^m(Kx)dK \tag{3.55}$$

donde $x \in S^2$ es cualquier elemento que satisface $|x| = \rho$ y aquí

$$SO(3) = \{K \in SO(4) \mid Km = m\}. \tag{3.56}$$

Como en el caso $n = 3$, puede verse fácilmente que $\Delta W_i^m = \lambda_l W_i^m$, esto es $W_i^m \in \mathfrak{H}^{4,l}$, $i = 0, ..., r$. Pero como $W_i^m(\rho)$ depende solamente de ρ, se obtiene que

$$W_i^m(\rho) = \alpha_i U_0^m(\rho) \qquad i = 0, ..., r \tag{3.57}$$

y $\alpha_0 = 1, \alpha_i = W_i(0)$. Sea

$$V_0^m = U_0^m \tag{3.58}$$

$$V_i^m = U_i^m - W_i(0)U_0^m \qquad i = 1, ..., r \tag{3.59}$$

luego

$$V_i^m(0) = 0\, i = 1, .., r \tag{3.60}$$

y

$$\frac{1}{Vol(SO(3))} \int_{SO(3)} V_i^m(Kx)dK = 0 \tag{3.61}$$

para $i = 1, ..., m$. Ahora se piensa a $SO(3)$ como un *fiber bundle* (fibración de Hopf)

$$\pi : SO(3) \to S^2. \tag{3.62}$$

Más precisamente para un x fijo, se define $SO(2) = \{K \in SO(3) \mid Kx = x\}$. Puede aplicarse el teorema de Fubini a esta fibración. Cada $A \in SO(3)$ determina un $z \in S^2$, $z = Ax$. La integral (3.61) anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{Vol(S^2)} \frac{1}{Vol(SO(2))} \int_{S^2} dz \int_{SO(2)} V_i^m(Kx)dK. \tag{3.63}$$

Pero dado que $Kx = x$, para $K \in SO(2)$ se tiene

$$\frac{1}{Vol(S^2)} \int_{S^2} V_i^m(z)dz \qquad i = 1, .., r \tag{3.64}$$

$S^2 = SO(3)/SO(2)$.

Desde aquí se procede nuevamente como en el caso $n = 3$. Se obtiene que

$$\begin{aligned} S_\epsilon V_0^m(m) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\epsilon}\right)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \exp \frac{i\rho^2}{2\epsilon} V_0^m(\rho) \sin^2 \rho d\rho d^2\theta \\ &= \lambda_l(\epsilon) V_0^m(m) \\ &= \lambda_l(\epsilon). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Al calcular $S_\epsilon V_i^m(m)$ para $i = 1, ..., r$, se obtiene

$$\begin{aligned} S_\epsilon V_i^m(m) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\epsilon}\right)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \exp \frac{i\rho^2}{2\epsilon} V_i^m(\rho, \theta) \sin^2 \rho d\rho d^2\theta \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\epsilon}\right)^3} \int_0^\infty \exp \frac{i\rho^2}{2\epsilon} \sin^2 \rho d\rho \int_{S^2} d^2\theta V_i^m(\rho, \theta) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Se verifica entonces que

$$S_\epsilon V_i^m(m') = \lambda_l(\epsilon) V_i^m(m') \tag{3.67}$$

para $i = 0, ..., r$ y $m, m' \in S^3$ arbitrario.

Capítulo 4

Cuantización holomorfa

4.1. Introducción

En el presente capítulo se describirá el espacio de Segal-Bargmann en particular y las propiedades de espacios de núcleo reproductor en general (*reproducing kernel Hilbert spaces*). El mismo se encuentra organizado de la siguiente manera. En principio se presentan aspectos fundamentales de la teoría de espacios de funciones holomorfas. En primer lugar el espacio de Hilbert considerado es $L^2(\mathbb{R}^d, \rho_t)$. Aquí ρ_t es la medida gaussiana dada por

$$d\rho_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-x^2/2t} dx.$$

Aquí $x^2 = x_1^2 + ... + x_d^2$. Se usa la medida gaussiana en lugar de la de Lebesgue para simplificar las construcciones siguientes. Mientras que la dimensión d sea finita, el pasaje de una a otra es natural.

Luego se considera el espacio de Hilbert de Segal-Bargmann $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$. Aquí $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$ denota el espacio de funciones holomorfas en $\mathbb{C}^d$ que son de cuadrado integrable con respecto a la medida μ_t dada por:

$$d\mu_t(z) = (\pi t)^{-d} e^{-|z|^2/t} dz.$$

Aquí dz es la medida de Lebesgue de dimensión $2d$ en $\mathbb{C}^d$. Posteriormente se estudia el isomorfismo existente entre dichos espacios de Hilbert. Luego se presenta la transformada de Segal-Bargmann. Se presenta también la relación entre el teorema de Stone-von Neumann y la transformada de Segal-Bargmann.

El parámetro t del cual dependen las construcciones del presente capítulo, puede ser interpretado como la constante de Planck [66]. Si bien la terminología usada proviene en gran medida de la física, porque es nuestro interés en particular enfatizar dicha aplicación, todos estos desarrollos son importantes en análisis armónico en sí mismos.

Se verá también a continuación que dichas construcciones se han generalizado de diversas formas a otros espacios, extendiendo el caso euclidiano. De hecho Hall y Gross en varios de sus trabajos aquí citados, estudian el caso en el cual el espacio euclidiano es reemplazado por un grupo de Lie y la medida gaussiana por la medida proveniente del kernel del calor (*heat kernel measure*). En particular los resultados de Gross están relacionados con el análisis estocástico, específicamente análisis en loop groups. Hall en cambio pone énfasis en la relación entre el kernel del calor y la cuantización geométrica. Ver por ejemplo las secciones 3 y 4.2 de la presente cita [61].

Por último se aborda la mecánica cuántica dentro de este contexto, se desarrolla el oscilador armónico cuántico en la representación holomorfa y se estudia el espectro del mismo. Se obtiene a su vez el kernel reproductor asociado al hamitoniano del oscilador armónico.

4.2. Espacios de Hilbert de funciones holomorfas

En primer lugar, se define a continuación la noción de función holomorfa en una variedad M:

Definición 4.1. *Una función f definida en $U \subset M$ es holomorfa si $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ es holomorfa en $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$ para todo α.*

Se asume a continuación que el producto escalar es conjugado en la primera componente y no en la segunda (convención usada generalmente en mecánica cuántica).

Definición 4.2. *Sea $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable con respecto a la medida definida por la función positiva $\alpha(z)$, es decir*

$$\mathcal{H}L^2(U,\alpha) = \left\{ F \in \mathcal{H}(U) | \int_U |F(z)|^2 \alpha(z) dz < \infty \right\}. \tag{4.1}$$

Teorema 4.1. 1. *Para todo $z \in U$, existe una constante c_z tal que*

$$|F(z)|^2 \leq c_z \|F\|^2_{L^2(U,\alpha)} \tag{4.2}$$

para todo $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$.

2. *$\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ es un subespacio cerrado de $L^2(U,\alpha)$ y por lo tanto un espacio de Hilbert.*

El primer punto establece que la evaluación puntual es continua. Esto es, dado z, el mapa $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha) \to F(z)$ es una funcional lineal continua en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Esta propiedad es característica de los espacios de funciones holomorfas pero no se cumple en general para espacios L^2 no holomorfos.

Teorema 4.2. *Sea $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, existe entonces una función $K(z,w)$, $z, w \in U$ con las siguientes propiedades*

1. *$K(z,w)$ es holomorfa en z y antiholomorfa en w y satisface*

$$K(w,z) = \overline{K(z,w)}.$$

2. *Para cada z fijo perteneciente a U, $K(z,w)$ es de cuadrado integrable con respecto a la densidad $\alpha(w)$. Para todo $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ vale*

$$F(z) = \int_U K(z,w) F(w) \alpha(w) dw.$$

3. *Si $F \in L^2(U,\alpha)$, sea PF la proyección ortogonal de F sobre el subespacio cerrado $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Luego*

$$PF(z) = \int_U K(z,w) F(w) \alpha(w) dw.$$

4. *Para todo $z, u \in U$,*

$$\int_U K(z,w)K(w,u)\alpha(w)dw = K(z,u).$$

5. *Para todo $z \in U$*

$$|F(z)|^2 \leq K(z,z)||F||^2,$$

y la constante $K(z,z)$ es óptima en el sentido de que para cada $z \in U$ existe $F(z) \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, no nulo para el cual vale la igualdad.

6. *Dado $z \in U$, si $\phi_z(.) \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ satisface*

$$F(z) = \int_U \overline{\phi_z} F(w)\alpha(w)dw$$

para todo $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, entonces $\overline{\phi_z(w)} = K(z,w)$.

Para ver una prueba de este teorema consultar [61].

Este teorema es esencialmente el teorema de Riesz junto con la continuidad de la evaluación puntual.

En general el núcleo reproductor puede calcularse explícitamente como se verá a continuación.

Teorema 4.3. *Sea $\{e_j\}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Luego para todo $z, w \in U$*

$$\sum_j \left| e_j(z)\overline{e_j(w)} \right| < \infty$$

y

$$K(z,w) = \sum_j e_j(z)\overline{e_j(w)}. \tag{4.3}$$

Para la demostración de este teorema puede consultarse también [61]. Es importante remarcar que no siempre es de utilidad la fórmula anterior, dado que para ello es necesario conocer explicítamente la base ortonormal y ser capaz de computar la suma (4.3) que permite obtener la expresión del kernel reproductor.

4.3. Espacio y transformada de Segal-Bargmann

La transformada de Segal-Bargmann es una transformada integral del espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$ en el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$ de funciones holomorfas en $\mathbb{C}^d$. La transformada es esencialmente un mapa unitario C_t de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \nu_t)$, en donde ν_t es una medida gaussiana en $\mathbb{C}^d$, y en donde t es un parámetro positivo, y donde $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \nu_t)$ es el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable con respecto a la medida ν_t. Desde el punto de vista del análisis armónico se puede decir que la transformada de Segal-Bargmann relaciona información de la función $f(x)$ con su transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ en una sola función holomorfa $C_t f(x + i\xi)$. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica se interpreta a la transformada de Segal–Bargmann como un mapa unitario entre el espacio de Hilbert de configuración $L^2(\mathbb{R}^d)$ y el espacio fase $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \nu_t)$. El parámetro t en este caso puede ser interpretado como la constante de Planck. La transformada de Segal-Bargmann proporciona una descripción del estado cuántico de la partícula más cercano en cierto sentido a la descripción clásica que la descripción usual (representación posición), dado que la función se encuentra en el espacio fase y no en el espacio de configuración. Como introducción al uso de la transformada de Segal-Bargmann en la mecánica cuántica ver [61] y [39].

Espacio de Segal-Bargmann

Definición 4.3. *El espacio de Segal-Bargmann es el espacio de funciones holomorfas*

$$\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_t),$$

donde μ_t es la siguiente medida

$$\mu_t(z) = (\pi t)^{-d} e^{-|z|^2/t}$$

y donde $|z|^2 = |z_1|^2 + ... + |z_d|^2$ y t es un número positivo.

A continuación se calcula el núcleo reproductor correspondiente al espacio de Segal-Bargmann.

Considérese a continuación el caso $d = 1$. Se calculará el kernel reproductor. $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ forma una base del espacio de Segal-Bargmann con $d = 1$. La cual normalizada resulta

$$\left\{\frac{z^n}{\sqrt{n!t^n}}\right\}_{n=0}^{\infty}. \tag{4.4}$$

La fórmula para el kernel reproductor es entonces

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!t^n}} \frac{\overline{w^n}}{\sqrt{n!t^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{z\overline{w}}{t}\right)^n = e^{z\overline{w}/t}. \tag{4.5}$$

Así, para el caso $d \geq 1$ se tiene el siguiente resultado

Teorema 4.4. *Para $d \geq 1$, el kernel reproductor del espacio $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$ está dado por*

$$K(z,w) = e^{z.\overline{w}/t}$$

donde $z.\overline{w} = z_1\overline{w}_1 + ... + z_d\overline{w}_d$. En particular se tiene la siguiente acotación puntual

$$|F(z)|^2 \leq e^{|z|^2/t}\|F\|^2$$

para todo $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$ y para todo $z \in \mathbb{C}^d$.

Ver [61] para la prueba de este teorema (sección 3-2). Para otras derivaciones de este resultado puede consultarse también la sección 4 y la sección 6 de la misma cita [61].

Transformada de Segal–Bargmann

Teorema 4.5. *Considérese el mapa $A_\hbar : L^2(\mathbb{R}^d, dx) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^d, \mu_\hbar)$ dado por*

$$A_\hbar f(z) = (\pi\hbar)^{-d/4} \int_{\mathbb{R}^d} e^{(-z^2+2\sqrt{2}x.z-x^2)/(2\hbar)} f(x)dx. \tag{4.6}$$

1. *Para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, la integral es convergente y es una función holomorfa de $z \in \mathbb{R}^d$.*

2. *El mapa $A_\hbar$ es un mapa unitario de $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ en $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_\hbar)$.*

3. Para todo $k = 1, .., d$

$$A_\hbar \left(\frac{X_k + iP_k}{\sqrt{2}} \right) A_\hbar^{-1} = \hbar \frac{\partial}{\partial z_k} \tag{4.7}$$

$$A_\hbar \left(\frac{X_k - iP_k}{\sqrt{2}} \right) A_\hbar^{-1} = z_k, \tag{4.8}$$

donde X_k y P_k son los operadores de posición y momento respectivamente.

El punto (3) del teorema anterior pone de manifiesto la relación con los operadores de aniquilación y creación de la mecánica cuántica. Para la prueba de este teorema pueden consultarse [7] y [61] y referencias citadas en este último.

El espacio de Segal-Bargmann y la mecánica cuántica

El espacio y transformada de Bargmann están presentes en la teoría de la cuantización geométrica, la cual fue introducida por J.M. Souriau y B. Kostant a finales de la década de los años '60 [137]. El espacio de Bargmann se obtiene al pensar a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = dp_j \wedge dq_j)$ como la variedad de Kähler $(\mathbb{C}^n, \omega = idz_j \wedge d\overline{z}_j)$ y resulta ser el espacio de secciones sobre un haz complejo de líneas $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. En este contexto la transformada de Bargmann surge como la relación entre dos polarizaciones dentro de la construcción de la cuantización geométrica. Eligiendo una polarización, se restringe el espacio de funciones obtenido por el proceso de precuantización. Existe un mapa entre diferentes polarizaciones llamado *pairing map*. El mapa entre la polarización de Kähler y la polarización vertical es exactamente un múltiplo de la transformada de Segal-Bargmann. El espacio de Segal-Bargmann es un espacio de Hilbert de funciones en el espacio fase $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ en lugar del espacio de configuración $\mathbb{R}^n$. Bargmann considera el espacio de Hilbert de funciones holomorfas tales que $\int_{\mathbb{C}^n} |F(z)|^2 \alpha_t(z) dz < \infty$ donde $\alpha_t(z) = (\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp[\frac{-(Imz)^2}{t}]$.

La cantidad $|F(z)|^2 \alpha_t(z)$ puede interpretarse como una "densidad de probabilidad en el espacio fase". Bargmann demostró que

$$|F(z)|^2 \alpha_t(z) \leq (2\pi t)^{-n} \forall F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \alpha_t).$$

Observar que $(2\pi t)^n = (2\pi\hbar)^n$ es el volumen de la celda semiclásica en el espacio fase, por eso la desigualdad demostrada por Bargmann tiene la siguiente interpretación: si E es una región del espacio cuyo volumen es p-veces el volumen de la celda, la partícula tiene probabilidad a lo sumo p de estar en E. Esto representa el principio de incertidumbre de la mecánica cuántica. Hall desarrolló estos resultados para el caso en el cual el espacio de configuración es un grupo de Lie compacto K. El rango de la transformada de Segal-Bargmann en este caso es $\mathcal{H}L^2(K_{\mathbb{C}}, \alpha_t)$, i.e. las funciones holomorfas sobre el grupo complexificado $K_{\mathbb{C}}$ tales que

$$\int_{K_{\mathbb{C}}} |F(g)|^2 \alpha_t(g) dg < \infty,$$

donde dg es la medida de Haar en el grupo y α_t es el núcleo del calor en $K_{\mathbb{C}}/K$, i.e. una función K-invariante en $K_{\mathbb{C}}$. Puede consultarse el trabajo de van Leeuwen [131].

Es interesante mencionar que el exponente del núcleo de la transformada de Bargmann, a saber

$$\left[-\frac{z^2}{2} + zx\sqrt{2} - \frac{x^2}{2}\right],$$

resulta ser la función generatriz de una transformación canónica (simplectomorfismo) del espacio fase $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_n)$ en el espacio fase $(\mathbb{C}^n, \mu_n)$ donde μ_n es la forma simpléctica

$$\mu_n = -i \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z_j}.$$

Transformada de Segal-Bargmann y teorema de Stone-von Neumann

En esta sección se presenta la relación de la transformada de Segal-Bargmann y el teorema de Stone-von Neumann. El teorema de Stone von-Neumann establece la unicidad de operadores que satisfacen ciertas relaciones de conmutación. Sean A y B operadores autoadjuntos en $\mathcal{H}$ que satisfacen $[A, B] = i\hbar\mathbb{I}$ y que actúan irreduciblemente en $\mathcal{H}$ (esto es sus únicos subespacios cerrados invariantes por A y B son $\mathcal{H}$ y $\{0\}$). Si se verifican ciertas relaciones de conmutación exponenciadas (ver [64]), luego A y B son unitariamente equivalentes a los operadores de posición y momento usuales X y P. Esto es, hay un operador unitario $U : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R})$ tal que $UAU^{-1} = X$ y $UBU^{-1} = P$.

Sean A_j y B_j los operadores usuales de posición y momento X_j y P_j respectivamente, los cuales en el contexto holomorfo se encuentran representados de la siguiente forma

$$A_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j + \hbar\frac{\partial}{\partial z_j}), \tag{4.9}$$

$$B_j = \frac{i}{\sqrt{2}}(z_j - \hbar\frac{\partial}{\partial z_j}). \tag{4.10}$$

Dado que A_j y B_j satisfacen las relaciones de conmutación exponenciadas [64] y actúan de manera irreducible en $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$ (i.e. los únicos subespacios cerrados de $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$ invariantes por A_j y B_j son $\{0\}$ y $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$), el teorema de Stone–Von Neumann demuestra que hay un mapa unitario $U : \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, único salvo constantes, que mapea esos operadores en los usuales de posición y momento ($UA_jU^{-1} = X$ y $UB_jU^{-1} = P$). Al mapa inverso $V : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$ se lo conoce como transformada de Segal-Bargmann .

Teorema 4.6. *Sea V el mapa inverso del mapa $U : \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ dado por el teorema de Stone-von Neumann, y normalizado de manera que V mapee la función $\phi_0(x) = (\pi\hbar)^{-n/4}e^{-|x|^2/(2\hbar)} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a la función constante $1 \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$. Luego V se computa como sigue*

$$(V\psi)(z) = (\pi\hbar)^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\left(z^2 - 2\sqrt{2}z.x + x^2\right)\right\}\psi(x)dx.$$

La prueba del teorema puede consultarse en [64].

4.4. Generalizaciones de la transformada de Segal-Bargmann

La transformada de Segal-Bargmann se encuentra presente en diversas áreas, tales como el análisis armónico, la física matemática, la geometría y el análisis estocástico. También es importante en particular en mecánica cuántica y teoría cuántica de campos (es de destacar su conexión con los estados coherentes, donde los resultados obtenidos por Klauder son equivalentes a los trabajos de Segal y Bargmann, ver [79], [80], [81], [112]). Sin embargo, la transformada de Segal-Bargmann y en especial su generalización es también de interés puramente matemático. La misma establece una equivalencia entre funciones de cuadrado integrable en un espacio (ya no necesariamente $\mathbb{R}^n$) y ciertas funciones holomorfas en la complexificación de dicho espacio. Es interesante remarcar, como se verá más adelante, que esta equivalencia se logra a través del kernel de la ecuación del calor.

Los trabajos de Brian Hall [57, 58] y posteriores definieron dicha transformada en el caso de grupos de Lie compactos y espacios simétricos. Esta generalización, por otra parte, está relacionada con la cuantización geométrica [137], y por lo tanto es de interés para la física matemática.

Hall y Stenzel han generalizado la transformada de Segal-Bargmann a espacios simétricos compactos y no compactos. Ver [126] y también [66], donde Hall y Mitchell estudian la transformada de Segal-Bargmann para espacios simétricos de tipo compacto (*compact type*). En los últimos años distintos autores han intentado desarrollar el caso de espacios simétricos no compactos, pero hasta el momento sigue siendo un problema no resuelto.

En el presente capítulo se introduce principalmente la generalización de la transformada de Segal-Bargmann a grupos de Lie compactos por B. C. Hall y posteriormente se presenta nuestro desarrollo al caso de variedades riemanianas, objeto de estudio en esta tesis.

Esencialmente la transformada de Segal-Bargmann generalizada para grupos de Lie o transformada de Hall surge de la siguiente construcción. Dado un grupo de Lie compacto K, se considera su complexificación ($K_{\mathbb{C}}$) y una medida ν, bi-invariante por la acción de K en $K_{\mathbb{C}}$, la cual decae rápidamente al infinito. La transformada de Segal-Bargmann C_ν es una isometría de $L^2(K, \mu_H)$ en el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable en $K_{\mathbb{C}}$ con respecto a la medida ν, donde μ_H es la medida normalizada en K

$$C_\nu : L^2(K, \mu_H) \to \mathcal{H}L^2(K_\mathbb{C}, \nu).$$

Dicha transformada existe siempre que la derivada de Radon-Nikodym $d\nu/d\mu_H^\mathbb{C}$ exista, sea localmente acotada fuera del cero, y decaiga rápidamente al infinito [5], donde $\mu_H^\mathbb{C}$ es la medida de Haar en $K_\mathbb{C}$.

El grupo complejo $K_\mathbb{C}$ se identifica naturalmente con el espacio cotangente T^*K, el cual es el espacio fase natural asociado al espacio de configuración K.

4.5. Núcleo del calor y transformada de Segal-Bargmann

En esta sección se exponen brevemente algunos puntos básicos de la teoría de núcleos del calor en variedades y se definen las transformadas generalizadas desarrolladas por B. C. Hall para el caso de grupos de Lie [131, 49, 50].

En primer lugar se verá que el kernel del calor en $\mathbb{R}^n$ es la solución fundamental a la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u \tag{4.11}$$

donde Δ es el operador de Laplace en $\mathbb{R}^n$. La solución fundamental es

$$\rho_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2t}x^2\right). \tag{4.12}$$

Existe una relación directa entre el kernel del calor y el núcleo integral de la transformada de Segal-Bargmann. Por ejemplo para el caso en que el núcleo de la transformada de Segal-Bargmann es $A(z,x) = (2\pi)^{-n/4} \exp[-\frac{1}{4}(2z^2 + x^2) + zx]$ esto es

$$A(z,x) = \frac{\rho_1(z-x)}{\sqrt{\rho_1(x)}}, \tag{4.13}$$

donde la función en el denominador se debe interpretar como la continuación analítica de la solución fundamental en $\mathbb{C}^n$.

En la generalización a un grupo de Lie compacto K, haciendo uso de la estructura riemanniana bi-invariante se construye el operador de Laplace-Beltrami que es la generalización natural del operador de Laplace en $\mathbb{R}^n$. La ecuación del calor a considerar es la que corresponde a este operador con su correspondiente solución fundamental en la identidad, a la cual se llamará ρ_t haciendo abuso de notación. Si $K = \mathbb{R}^d$, luego el kernel del calor es la gaussiana $\rho_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-x^2/2t}$.

La expresión de la transformada resultante es

$$(A(f))(g) = \int_K f(x) \frac{\rho_t(gx^{-1})}{\sqrt{\rho_t(x)}} dx, \tag{4.14}$$

donde g es un elemento perteneciente a la complexificación $K_{\mathbb{C}}$ de K. Ver el Apéndice C en donde se presenta la construcción universal de la complexificación y ver [57].

Hall demostró que el kernel del calor ρ_t tiene una extensión holomorfa única a $K_{\mathbb{C}}$ [57]. La ecuación del calor puede generalizarse a cualquier variedad riemanniana, sin embargo al no existir una complexificación natural en general no es trivial la realización del espacio de Hilbert de funciones holomorfas obtenido mediante la transformada de Segal-Bargmann. Ver los trabajos de Olafsson [110], [111].

Transformadas B y C

Sea $K_{\mathbb{C}}$ la complexificación de K, la cual es definida en el Apéndice C, donde el álgebra de Lie $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ de $K_{\mathbb{C}}$ es la complexificación del álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ y $K_{\mathbb{C}}$ contiene a K como subgrupo. Por ejemplo en el caso en que $K = SU(n)$, se obtiene $K_{\mathbb{C}} = SL(n, \mathbb{C})$. La elección de un producto interno en $\mathfrak{k}$ determina un producto interno en $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ dado por $\langle X_1 + iY_1, X_2 + iY_2 \rangle = \langle X_1, X_2 \rangle + \langle Y_1, Y_2 \rangle$ donde X_1, Y_1, X_2, Y_2 pertenecen a $\mathfrak{k}$. Este producto interno en $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ da lugar a una métrica riemanniana invariante a izquierda en $K_{\mathbb{C}}$ y por lo tanto un operador de Laplace–Beltrami invariante a izquierda $\Delta_{K_{\mathbb{C}}}$. El kernel del calor en $K_{\mathbb{C}}$ al que se denotará μ_t es la solución fundamental en la identidad de la ecuación del calor

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{4} \Delta_{K_{\mathbb{C}}} \mu_t, \tag{4.15}$$

sujeto a la condición inicial

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{K_{\mathbb{C}}} f(g)\mu_t(g)dg = f(e).$$

Sea ahora la medida promediada $\nu_t(g)$ en $K_{\mathbb{C}}$ definida como sigue

$$\nu_t(g) = \int_K \mu_t(gx)dx, \tag{4.16}$$

donde $g \in K_{\mathbb{C}}$. Esta función puede interpretarse como el kernel del calor en el espacio simétrico $K_{\mathbb{C}}/K$. Esta función es K-invariante en $K_{\mathbb{C}}$. Se tiene entonces tres diferentes núcleos del calor en $K_{\mathbb{C}}$: la función holomorfa ρ_t que es la continuación analítica del kernel del calor en K; la función real positiva μ_t que es el kernel del calor en $K_{\mathbb{C}}$; y la función real positiva ν_t, la cual es el kernel del calor en $K_{\mathbb{C}}/K$. En el contexto de transformada de Segal-Bargmann clásica unidimensional, serían las siguientes funciones en $\mathbb{C}$:

$$\rho_t(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-z^2/2t}, \tag{4.17}$$

$$\mu_t(z) = \frac{1}{\pi t} e^{-|z|^2/t}, \tag{4.18}$$

$$\nu_t(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-(Imz)^2/t}. \tag{4.19}$$

En el contexto de la mecánica cuántica al parámetro t se lo interpreta como la constante de Planck $\hbar$.

Ahora se definen a continuación las transformadas de Segal–Bargmann B_t y C_t.

Sea dx la medida de Haar en K y $\mathcal{H}L^2\left(K_{\mathbb{C}}, \mu_t(g)dg\right)$ el espacio de funciones holomorfas en $K_{\mathbb{C}}$. Se define la transformada $B_t : L^2(K, \rho_t(x)dx) \to \mathcal{H}L^2\left(K_{\mathbb{C}}, \mu_t(g)dg\right)$ como sigue

$$B_t f(g) = \int_K \rho_t(gx^{-1})f(x)dx \tag{4.20}$$

con $g \in K_{\mathbb{C}}$. Aquí ρ_t es la continuación analítica de ρ_t de K a $K_{\mathbb{C}}$. Como ρ_t es el kernel del calor resulta que $B_t f$ es la continuación analítica de $e^{t\Delta/2}f$.

Teorema 4.7. *Para todo $t > 0$, B_t es un isomorfismo isométrico de $L^2(K, \rho_t(x)dx)$ en el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable $\mathcal{H}L^2\left(K_{\mathbb{C}}, \mu_t(g)dg\right)$, donde dg es la medida de Haar en el grupo complexificado $K_{\mathbb{C}}$.*

En esta versión de la transformada, las medidas son gaussianas (núcleos del calor) tanto en K como en $K_{\mathbb{C}}$. No es obvio, pero cierto, que $B_t f$ es siempre convergente y es una función holomorfa de g, ver [57].

Se define la transformada C_t como el mapa

$$C_t : L^2(K, dx) \to \mathcal{H}(K_{\mathbb{C}}),$$

dado por

$$C_t f(g) = \int_K \rho_t(gx^{-1}) f(x) dx, \tag{4.21}$$

$g \in K_{\mathbb{C}}$. Notar que el mapa C_t es esencialmente el mismo mapa que B_t. La diferencia se encuentra en que en cada uno se usa un producto interno diferente en el espacio dominio.

Teorema 4.8. *Para cada $t > 0$, C_t es un isomorfismo isométrico de $L^2(K, dx)$ en el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable $\mathcal{H}L^2(K_{\mathbb{C}}, \nu_t(g)dg)$.*

La prueba de estos teoremas puede verse en [57].

Esta versión última de la transformada de Segal-Bargmann generalizada propuesta por Hall tiene la ventaja de ser más invariante que la versión gaussiana. La medida dx en K es invariante bajo la acción a izquierda y a derecha de K, como la medida $\nu_t(g)dg$ en $K_{\mathbb{C}}$, y la transformada conmuta con la acción a derecha e izquierda de K. Es interesante ver que en el caso $\mathbb{R}^n$ no hay diferencias importantes entre ambas transformadas. Ver apéndice de [57].

El espacio de Segal-Bargmann $\mathcal{H}L^2(K_{\mathbb{C}}, \nu_t(g)dg)$ y la transformada C_t pueden ser obtenidos dentro del contexto de la cuantización geométrica. Ver el ejemplo del caso $\mathbb{R}^d$ del libro de Woodhouse, sección (9.5) [137].

4.6. Núcleo del calor en el círculo

En esta sección se obtiene la solución fundamental de la ecuación del calor en el círculo [131, 50]. En primer lugar se tiene que el operador de Laplace–Beltrami en

S^1 es

$$\Delta_{S^1} = \frac{d^2}{d\phi^2}. \tag{4.22}$$

Si se piensa a las funciones en el círculo como funciones periódicas en $\phi \in \mathbb{R}$, pueden escribirse las funciones en el círculo como $f(e^{i\phi})$. En el espacio complexificado el laplaciano es

$$\Delta_{\mathbb{C}} = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}. \tag{4.23}$$

La solución fundamental de la ecuación del calor puede obtenerse mediante series de Fourier. La serie de Fourier de una función suave f en el círculo es la siguiente

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_k(f) e^{ik\phi}, \tag{4.24}$$

donde $\mathcal{F}_k(f)$ es el coeficiente k-ésimo de Fourier de f definido por

$$\mathcal{F}_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_S f(\phi) e^{-ik\phi} d\phi. \tag{4.25}$$

Fácilmente se obtiene que

$$\mathcal{F}_k\left(\frac{df}{d\phi}\right) = ik\mathcal{F}_k(f). \tag{4.26}$$

La solución fundamental $\rho_{S^1}(t,\phi)$ satisface la ecuación del calor

$$\frac{\partial \rho_{S^1}(t,\phi)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_{S^1}\rho_{S^1}(t,\phi) \tag{4.27}$$

y converge a la delta de Dirac en la identidad para $t \to 0^+$. Tanto la transformada de Fourier como el operador de Laplace actúan sobre la variable $\phi \in S^1$. Comparando los coeficientes de Fourier

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}_k \rho_{S^1}) = \mathcal{F}_k\left(\frac{\partial \rho_{S^1}}{\rho t}\right) = \mathcal{F}_k\left(\frac{1}{2}\Delta_{S^1}\rho_{S^1}\right) = \mathcal{F}_k\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho_{S^1}}{\partial \phi^2}\right) = -\frac{1}{2}k^2 \mathcal{F}_k \rho_{S^1}. \tag{4.28}$$

Por lo tanto los coeficientes de Fourier de ρ_{S^1} son de la forma $c_k e^{-\frac{1}{2}k^2 t}$ con c_k constante. Los valores de estas constantes surgen de la condición de solución fundamental, esto es, que converja a la delta de Dirac en el cero

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{S^1} \rho_{S^1}(t,\phi) e^{-im\phi} d\phi = e^{-im0} = 1 \tag{4.29}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$. De la ecuación (4.24), intercambiando el orden de sumatoria y de integración, se obtiene $2\pi c_m = 1$. Los coeficientes c_k son todos iguales a $1/2\pi$ y la solución fundamental de la ecuación del calor es

$$\rho_{S^1}(t, \phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\phi - \frac{1}{2}k^2 t}. \tag{4.30}$$

4.7. El oscilador armónico en la representación holomorfa

En mecánica clásica el oscilador armónico describe el movimiento de una partícula sujeta al potencial

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2 \tag{4.31}$$

donde x es la coordenada de la partícula y el hamiltoniano expresado en función de coordenadas en el espacio fase es

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2. \tag{4.32}$$

El oscilador armónico en mecánica cuántica sirve como modelo para el estudio de numerosos problemas cuánticos, como el movimiento de un átomo en una molécula o al describir el campo electromagnético cuántico como una colección infinita de osciladores armónicos por ejemplo.

En una dimensión, la ecuación de Schrödinger del oscilador armónico tiene la siguiente expresión

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} \psi(x). \tag{4.33}$$

Introduciendo coordenadas complejas en el espacio fase

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{\hbar m\omega}} p \right) \tag{4.34}$$

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{\hbar m\omega}} p \right), \tag{4.35}$$

el hamiltoniano se escribe como

$$H(p,x) = \hbar\omega a^* a. \tag{4.36}$$

En mecánica cuántica las coordenadas (4.34) y (4.35) se asocian a los operadores hermíticos

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{\hbar m\omega}}\hat{p}\right) \tag{4.37}$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{\hbar m\omega}}\hat{p}\right), \tag{4.38}$$

los cuales verifican la siguiente relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \tag{4.39}$$

En términos de estos operadores, el hamiltoniano cuántico puede escribirse como

$$\hat{H}(p,x) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \tag{4.40}$$

y satisface las relaciones de conmutación

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a} \tag{4.41}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger. \tag{4.42}$$

Si $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es un autovector de $\hat{H}$ con autovalor λ, y $\hat{a}^\dagger\psi \neq 0$, luego $\hat{a}^\dagger\psi$ es autovector con autovalor $\lambda + 1$. Además la función

$$\psi_0(x) = (\kappa\sqrt{\pi})^{-1} e^{-\frac{x^2}{2\kappa^2}}, \tag{4.43}$$

$\left(\kappa = \sqrt{\hbar m\omega}\right)$, es la autofunción correspondiente al estado fundamental

$$\hat{H}\psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0 \tag{4.44}$$

$$\hat{a}\psi_0 = 0. \tag{4.45}$$

Las demás autofunciones pueden encontrarse por acción repetida del operador $\hat{a}^\dagger$

$$\psi_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}\hat{a}^\dagger\psi_k. \tag{4.46}$$

Mientras que el operador $\hat{a}$ actúa como sigue

$$\psi_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}} \hat{a} \psi_k. \tag{4.47}$$

Los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ son los operadores aniquilación y creación respectivamente. El estado ψ es el estado fundamental o vacío. Es conocido que las funciones $\psi_k(x)$ son de la forma $\psi_k(x) = c\psi_0 H_k(x)$, donde c es una constante y $H_k(x)$ un polinomio de Hermite. Las funciones $\psi_k(x)$ forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Representación holomorfa

El formalismo holomorfo se relaciona con la idea de asociar variables complejas a los operadores de creación y aniquilación, $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$. Consideremos en primer lugar un par de variables (x, y) y sea la integral

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy f(x, y),$$

si f es una función holomorfa uno puede considerar a x y a y como variables complejas pensando a $\mathbb{R}^2$ inmerso en $\mathbb{C}^2$ en donde $\operatorname{Im} x = \operatorname{Im} y = 0$. En $\mathbb{C}^2$ uno puede realizar el siguiente cambio de variables

$$z = \frac{x + iy}{\sqrt{2}}, \quad z' = \frac{x - iy}{\sqrt{2}}$$

luego $d\bar{z}dz = idxdy$. En las nuevas variables el dominio de integración es $z' = \bar{z}$ y la integral es

$$I = -i \int_{z'=\bar{z}} dz dz' f(z, z')$$

Las variables z y $\bar{z}$ deben ser consideradas variables independientes de integración. El símbolo $dzd\bar{z}$ corresponde a integrar sobre una superficie de dimensión real 2 inmersa en $\mathbb{C}^2$.

Se considera entonces el espacio de Hilbert de funciones holomorfas de cuadrado integrable dado por el siguiente producto escalar

$$(g, f) = \frac{1}{2\pi i} \int dz d\bar{z} e^{-z\bar{z}} \overline{g(z)} f(z). \tag{4.48}$$

Este espacio de Hilbert tiene como base ortonormal a $\{z^n/\sqrt{n!}\}$.

Ahora se construye la representación de los operadores de la mecánica cuántica. En esta sección se supone $\hbar = 1$ y $m = 1$ y se omite el nivel de energía correspondiente al estado fundamental, $\omega/2$. El operador $\hat{a}^\dagger$ es representado por la multiplicación por la variable z :

$$\hat{a}^\dagger f \to z f(z). \tag{4.49}$$

El operador $\hat{a}$ es representado por el operador diferencial

$$\hat{a} f \to \frac{d}{dz} f(z). \tag{4.50}$$

En primer lugar la representación es consistente con las relaciones de conmutación (4.39)

$$\left[\frac{d}{dz}, z\right] = 1. \tag{4.51}$$

Luego dadas dos funciones $g(z)$ y $f(z)$

$$(g, df/dz) = \int \frac{dz d\overline{z}}{i2\pi} e^{-z\overline{z}} \overline{g(z)} \frac{d}{dz} f(z), \tag{4.52}$$

e integrando por partes

$$(g, df/dz) = \int \frac{dz d\overline{z}}{i2\pi} f(z) \overline{g(z)} \frac{d}{dz} e^{-z\overline{z}} = \int \frac{dz d\overline{z}}{i2\pi} \overline{z g(z)} f(z). \tag{4.53}$$

Por lo tanto z y d/dz son operadores hermíticos conjugados con respecto al producto escalar (4.48) de manera análoga a los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$. La representación holomorfa es isomorfa a la representación en término de operadores de momento y posición o de operadores de aniquilación y creación empleada usualmente. El hamiltoniano $\hat{H}$ tiene la siguiente representación

$$\hat{H} = \omega z \frac{d}{dz}. \tag{4.54}$$

Por otro lado

$$\hat{H} z^n = \omega z \frac{d}{dz} z^n = \omega n z^n, \tag{4.55}$$

es decir $\{z^n\}$ son autofunciones del hamiltoniano $\hat{H}$. Se demuestra que son ortogonales con respecto al producto escalar (4.48), lo cual es consistente con la hermiticidad de $\hat{H}$.

Espectro del oscilador armónico

Es interesante ver cómo surge naturalmente en la representación holomorfa el espectro correcto para el oscilador armónico. En el relevamiento de antecedentes realizado no se ha encontrado presente en la literatura.

Partiendo de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hbar\omega z\frac{d}{dz} + \frac{\hbar\omega}{2},$$

esta puede resolverse mediante separación de variables

$$\psi = \phi(z)\beta(t),$$

donde $\phi(z)$ es una función holomorfa en z y $\beta(t)$ una función analítica en t que representa la variación temporal. Luego,

$$i\hbar\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = \omega z\frac{\phi'}{\phi} + \frac{\omega}{2}$$

Y de $i\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = \omega\alpha$ se obtiene

$$\beta(t) = e^{-i\omega\alpha t}$$

Por otro lado, de $\omega\alpha = \omega z\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{\omega}{2}$ se tiene

$$z\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \alpha - \frac{1}{2} = n \tag{4.56}$$

Por lo tanto

$$\phi(z) = z^n.$$

De la condición de que la solución debe ser una función holomorfa se deduce que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y por lo tanto que el espectro de energía correspondiente al oscilador armónico debe ser $E = \frac{1}{2} + n$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Operadores en el espacio de Segal–Bargmann

Suele encontrarse en la literatura distintas expresiones para la transformada de Segal-Bargmann, las cuales generalmente difieren en los valores de las constantes

a, b, c y k de la siguiente expresión genérica

$$Bf(z) = k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}z^2+\frac{b}{2}zx-\frac{c}{2}x^2} f(x)dx. \tag{4.57}$$

Se elige para la versión de la transformada de Segal–Bargmann que se usará a continuación $k^4 = \frac{1}{\pi}$, $b = 2\sqrt{2}$ y $a = c = 1$, donde la medida gaussiana es $\frac{1}{\pi}\exp -|z|^2 dz$, siendo dz la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}^n$.

Por lo tanto la expresión de la transformada de Segal–Bargmann B que se usará en esta sección es la siguiente

$$(Bf)(z) = \frac{1}{(\pi)^{\frac{1}{4}}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left[-\frac{z^2}{2} + \sqrt{2}zx - \frac{x^2}{2}\right] dz. \tag{4.58}$$

La transformada B actúa en el espacio de funciones de cuadrado integrable $L^2(\mathbb{R}^n)$ donde el producto es $\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}g(x)\,dx$ y sobre el espacio de Fock $\mathcal{H}L^2\left(\mathbb{C}^n, \frac{1}{\pi}\exp -|z|^2 dz\right)$ de funciones holomorfas de cuadrado integrable con respecto a la medida gaussiana $\mu = \frac{1}{\pi}\exp[-|z|^2]dz$, donde el producto escalar de funciones holomorfas allí definido es

$$\langle \phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n,\mu)} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^n} \overline{\phi(z)}\psi(z)e^{-|z|^2}\,dz. \tag{4.59}$$

La transformada de Bargmann $B : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}L^2\left(\mathbb{C}^n, \frac{1}{\pi}\exp -|z|^2 dz\right)$ es un isomorfismo unitario. Se verifica que la inversa de la transformada de Bargmann

$$B^{-1} : \mathcal{H}L^2\left(\mathbb{C}^n, \frac{1}{\pi}\exp -|z|^2 dz\right) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

tiene la siguiente expresión

$$(B^{-1}\phi)(x) = \frac{1}{(\pi)^{\frac{5}{4}}}\int_{\mathbb{C}^n} \phi(z)\exp\left[-\frac{\overline{z}^2}{2} + \overline{z}x\sqrt{2} - \frac{x^2}{2}\right]\exp -|z|^2 dz \tag{4.60}$$

Si se considera a continuación el hamiltoniano correspondiente a la partícula libre de masa $m = 1$ y tomando $\hbar = 1$

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{4.61}$$

surge el interés en calcular ahora $\tilde{H} = BHB^{-1}$. Sea $\phi(z) \in \mathcal{H}L^2\left(\mathbb{C}^n, \frac{1}{\pi}\exp -|z|^2 dz\right)$

$$\tilde{H}\phi = \frac{1}{(\pi)^{\frac{5}{2}}}\int_{\mathbb{C}^n}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z)\left((\sqrt{2}\overline{z} - x)^2 - 1\right) e^{-\frac{(\overline{z}^2+z^2)}{2}+\sqrt{2}x(\overline{z}+z)-x^2} e^{-|z|^2} dzdx. \tag{4.62}$$

Puede demostrarse, como se menciona en la sección (4.3), que $\left\{\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\right\}$ constituye una base del espacio de Bargmann. Puede verse que los elementos de la base del espacio de Bargmann, son transformados por la inversa de la transformada de Bargmann en el producto de polinomios de Hermite por funciones exponenciales. Por ejemplo para el caso de $\phi(z) = 1$ el polinomio de Hermite asociado es $H(2, x)$ y para el caso de $\phi(z) = z$ el polinomio de Hermite asociado es $H(3, x)$. También puede demostrarse que la transformada inversa (4.60) envía las potencias $\sqrt{2}z^n$ en $\frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-x^2/2}H(n, x)$.

A su vez,

$$B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\right)B^{-1} \to z, \tag{4.63}$$

es decir, corresponde a multiplicar por z. Y

$$B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\right)B^{-1} \to \frac{d}{dz}, \tag{4.64}$$

lo cual corresponde al operador derivación respecto de z.

Por otra parte esta transformada de Segal-Bargmann verifica la representación holomorfa del oscilador armónico dada por $z\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}$, es decir

$$B\left(\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\right)B^{-1} \to z\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}. \tag{4.65}$$

4.8. Núcleo del oscilador armónico

Para el hamiltoniano $H = z\frac{\partial}{\partial z}$, que corresponde al oscilador armónico renormalizado, el correspondiente kernel es $K_H = z\overline{w}e^{z\overline{w}}$ y el símbolo normal [27] es $z\overline{w}$, donde el kernel reproductor es $K(z, \overline{w}) = e^{z\overline{w}}$. Luego

$$z\frac{\partial}{\partial z}e^{z\overline{w}} = z\overline{w}e^{z\overline{w}}, \tag{4.66}$$

Y en general se verifica que $\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n e^{z\overline{w}} = f(z, \overline{w}) = g(z, \overline{w})e^{z\overline{w}}$. De hecho es función únicamente del producto $z\overline{w}$ y por lo tanto de $x^2 + y^2$, de lo cual se deduce su invarianza rotacional.

Para obtener el kernel reproductor del operador H^n teniendo en cuenta la relación entre el kernel el operador y su símbolo normal, es decir $K_H/K = H$. Luego $K_{H^n}/K = H^n$. Recursivamente puede escribirse la acción de H^n sobre $e^{z\overline{w}}$ como sigue. Para H^2 se tiene

$$H^2 e^{z\overline{w}} = \left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(z\overline{w}e^{z\overline{w}}\right) = z\overline{w}e^{z\overline{w}} + (z\overline{w})^2 e^{z\overline{w}} = H^1 e^{z\overline{w}} + (z\overline{w})^2 e^{z\overline{w}}. \tag{4.67}$$

Análogamente

$$H^3 e^{z\overline{w}} = H^2 e^{z\overline{w}} + 2z\overline{w}^2 e^{z\overline{w}} + (z\overline{w})^3 e^{z\overline{w}}, \tag{4.68}$$

$$H^4 e^{z\overline{w}} = H^3 e^{z\overline{w}} + (2\cdot 2(z\overline{w})^2 + 2(z\overline{w})^3 + 3(z\overline{w})^3 + (z\overline{w})^4)e^{z\overline{w}}, \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned} H^5 e^{z\overline{w}} = H^4 e^{z\overline{w}} + (2\cdot 2\cdot 2(z\overline{w})^2 + 2\cdot 2(z\overline{w})^3 + 3\cdot 2(z\overline{w})^3 + 2(z\overline{w})^4 + 3\cdot 3(z\overline{w})^3 + \\ + 3(z\overline{w})^4 + 4(z\overline{w})^4 + (z\overline{w})^5)e^{z\overline{w}}, \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned} H^6 e^{z\overline{w}} = H^5 e^{z\overline{w}} + (2\cdot 2\cdot 2\cdot 2(z\overline{w})^2 + 2\cdot 2\cdot 2(z\overline{w})^3 + 2\cdot 2\cdot 3(z\overline{w})^3 + 2\cdot 2(z\overline{w})^4 + \\ + 3\cdot 3\cdot 2(z\overline{w})^3 + 3\cdot 2(z\overline{w})^4 + 4\cdot 2(z\overline{w})^4 + 2(z\overline{w})^5 + 3\cdot 3\cdot 3(z\overline{w})^3 + \\ + 3\cdot 3(z\overline{w})^4 + 3\cdot 4(z\overline{w})^4 + 3(z\overline{w})^5 + 4\cdot 4(z\overline{w})^4 + 4(z\overline{w})^5 + 5(z\overline{w})^5 + (z\overline{w})^6)e^{z\overline{w}}. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Luego se deduce que puede calcularse $K_{H^n} = H^n e^{z\overline{w}}$ como sigue

$$H^n e^{z\overline{w}} = \left[(z\overline{w})^n + \sum_{i=1}^{n-1}\left\{\left(\!\!\binom{i}{n-i}\!\!\right)\right\}(z\overline{w})^i\right]\left(e^{z\overline{w}}\right), \tag{4.72}$$

donde

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(k+n-1-k)!} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} \tag{4.73}$$

es el número de formas de escoger k elementos de un conjunto de n elementos (en forma repetida). Y donde $\{.\}$ es la sumatoria de los $\left(\!\binom{i}{n-i}\!\right)$-elementos cada uno de los cuales es la productoria de los factores que componen cada elemento $\left(\!\binom{i}{n-i}\!\right)$. Por ejemplo para el caso K_{H^6} el coeficiente que acompaña a $(z\overline{w})^3 e^{z\overline{w}}$ es la sumatoria de los siguientes $\left(\!\binom{3}{3}\!\right) = 10$ elementos

$3\cdot 3\cdot 3+3\cdot 3\cdot 2+3\cdot 3\cdot 1+3\cdot 2\cdot 2+3\cdot 2\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1+2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1,$

los cuales son el producto de las diferentes formas de elegir de manera repetida tres elementos del conjunto $\{1, 2, 3\}$.

4.9. Integral de Feynman holomorfa

Siguiendo un planteo similar al desarrollado por [27] se planteará la integral de Feynman en representación holomorfa.

La siguiente expresión corresponde al propagador discreto de n-pasos, en una variable holomorfa en el plano, para un hamiltoniano con símbolo normal $h(z, \bar{z})$ que permite encontrar la evolución de un estado $\phi(z)$.

$$U_{n\epsilon}\phi(z) = \int \exp(\bar{z}_{n-1}(z_n - z_{n-1}) - \cdots - \bar{z}_0(z_1 - z_0)$$
$$\exp(-i(h(z_n, \bar{z}_{n-1}) + \cdots + h(z_1, \bar{z}_0))\epsilon)\phi(z_0) \prod_{k=0}^{n-1} dz_k. \quad (4.74)$$

Es decir, se aproxima

$$U_{n\epsilon}\phi(z) = (U_\epsilon)^n \phi(z). \quad (4.75)$$

donde

$$U_\epsilon \phi(z) = \int \exp(-\bar{z}'(z' - z) - ih(z, \bar{z}')\epsilon)\phi(z')dz'. \quad (4.76)$$

A continuación se plantea la integral de Feynman haciendo uso de la teoría de espacios de Hilbert con kernel reproductor.

$$U_{(t_1-t_0)}\phi(z_1) =$$
$$\int_{\mathbb{C}} K(z_1, z_0)\phi(z_0)\exp[-|z_0|^2]dz_0 - i(t_1 - t_0)\int_{\mathbb{C}} K_H(z_1, z_0)\phi(z_0)\exp[-|z_0|^2]dz_0, \quad (4.77)$$

donde K es el kernel reproductor, H es el hamiltoniano y K_H el correspondiente kernel asociado al hamiltoniano. Luego

$$U_{(t_1-t_0)}\phi(z_1) = \int_{\mathbb{C}} K(z_1, z_0)\left(1 - i(t_1 - t_0)\frac{K_H(z_1, z_0)}{K(z_1, z_0)}\right)\phi(z_0)\exp[-|z_0|^2]dz_0. \quad (4.78)$$

Aproximado a primer orden puede escribirse como

$$U_{(t_1-t_0)}\phi(z_1) = \int_{\mathbb{C}} K(z_1,z_0)\exp\left[-i(t_1-t_0)\frac{K_H(z_1,z_0)}{K(z_1,z_0)}\right]\phi(z_0)\exp[-|z_0|^2]dz_0. \tag{4.79}$$

Se busca la evolución para un intervalo de tiempo finito T dividiéndolo en n partes iguales, es decir $T = n\epsilon$, se tiene

$$\mathcal{U}_T = \lim_{n\to\infty} U^n_{T/n}, \tag{4.80}$$

donde

$$U_{(t_j-t_{j-1})}...U_{(t_1-t_0)}\phi(z_j) =$$
$$\int_{\mathbb{C}}...\int_{\mathbb{C}}\prod_{l=1}^{j}\exp\left[z_l\overline{z}_{l-1}\right]\exp\left[-ih(z_l,z_{l-1})(t_l-t_{l-1})\right]\phi(z_0)\exp[-|z_{l-1}|^2]dz_{l-1}. \tag{4.81}$$

Luego

$$\mathcal{U}_T\phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\exp[-|z_0|^2]\phi(z_0)dz_0\int\exp\left[|z|^2+\int_0^T\left[-z\dot{\overline{z}}-ih(z,\overline{z})\right]dt\right]\mathcal{D}z(t), \tag{4.82}$$

donde

$$\mathcal{D}z(t) = \prod_{0<t<T}\frac{dz(t)}{\pi}. \tag{4.83}$$

Capítulo 5

Cuantización de Feynman en espacios cotangentes usando el mapa exponencial

En este capítulo se estudia la evolución de un estado cuántico cuyo espacio de configuración es una variedad riemanniana. Las funciones holomorfas están definidas en el fibrado cotangente de dicha variedad. Se construyen espacios de Hilbert de funciones holomorfas en los cuales el producto escalar se define haciendo uso del mapa exponencial. Se plantea la evolución cuántica por medio de un propagador infinitesimal y se desarrolla la integral de Feynman holomorfa vía el mapa exponencial, realizando la integración correspondiente a cada paso de la integral de caminos en el espacio tangente.

En el capítulo siguiente se abordará la integral de Feynman para ciertas variedades riemannianas de curvatura cero (*euclidean space forms*) desde una perspectiva distinta a la expuesta en el presente capítulo, resolviendo la integración directamente en el espacio cotangente. Ambas formulaciones resultan interesantes de estudiar.

5.1. Geometría de Kähler y geometría simpléctica

En esta sección se desarrolla una breve introducción a la geometría diferencial compleja y de Kähler, con especial énfasis en la relación entre la geometría compleja y la geometría simpléctica [134, 138, 89, 102, 1, 2], lo cual servirá de marco teórico para la construcción de la integral de Feynman en el contexto de variedades riemannianas.

En primer lugar se dará la definición de variedad compleja:

Definición 5.1. *Sea M una variedad $2m$-dimensional y U_i un cubrimiento de M por abiertos. En cada U_i se define una carta coordenada como el par (U_i, ψ_i) donde $\psi_i : U \to M$ es un homeomorfismo de U_i en $\mathbb{C}^m$. Se dice que $(M, \{U_i, \psi_i\})$ es una variedad compleja si para cada intersección no vacía $U_i \cap U_j$ las funciones de transición $\psi_{ij} = \psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \to \psi_j(U_i \cap U_j)$ son mapas holomorfos de $\mathbb{C}^m$ en sí mismo.*

Es evidente que una variedad compleja es siempre una variedad real, por lo contrario no siempre es válido que una variedad real de dimensión par pueda ser pensada como una variedad compleja, es decir que admita una estructura compleja. Se definen a continuación estructuras complejas y casi-complejas:

Definición 5.2. *Sea M una variedad real $2m$-dimensional, se define una estructura casi-compleja J en M como un campo tensorial de tipo $(1,1)$ globalmente definido que satisface $J^2 = -\mathbb{I}$. Se dice que la variedad $2m$-dimensional M, dotada de una estructura casi-compleja J, es una variedad casi-compleja.*

Definición 5.3. *Dados dos campos vectoriales X e Y, se define el tensor de Nijenhuis como*

$$N(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]. \tag{5.1}$$

Una estructura casi-compleja J sobre una variedad M es integrable si y solo si $N(X,Y) = 0$ para todo par de campos vectoriales X e Y.

Definición 5.4. *Sea M una variedad real $2m$-dimensional y J una estructura casi-compleja en M. Si $N \equiv 0$, J es una estructura compleja en M. Se define como variedad compleja a (M, J) donde J es una estructura compleja en M.*

Definición 5.5. *Sea (M, J) una variedad casi-compleja. Si dados dos campos vectoriales holomorfos, el corchete de Lie aplicado a estos campos es nuevamente un campo vectorial, la estructura casi-compleja se dice integrable.*

Recuérdese que el corchete de Lie está definido en el espacio de campos vectoriales y actúa sobre las funciones como $[X, Y] f = X(Y(f)) - Y(X(f))$. Se definen a continuación muy brevemente algunas nociones de geometría simpléctica a modo de introducción y para dejar en claro la notación que se usará más adelante. Pueden consultarse los siguientes textos [1, 102, 2].

Definición 5.6. *Una variedad simpléctica (M, ω) es una variedad M equipada con una $2 - forma$ ω cerrada y no degenerada.*

Definición 5.7. *Una estructura casi-compleja J en M se dice compatible con la 2-forma ω si para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ se verifica*

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$$

Definición 5.8. *Una variedad de (casi-)Kahler se define como el triplete (M, J, ω) donde:*

1. *(M, ω) es una variedad simpléctica.*

2. *(M, J) es una variedad (casi-)compleja.*

3. *J y ω son compatibles.*

Teorema 5.1. *Las variedades simplécticas son variedades casi-complejas.*

La demostración puede verse en [132].

Teorema 5.2. *Una estructura casi-compleja J en una variedad M es integrable si y solo si $N(X,Y) = 0$ para todo par de campos X e Y en M.*

Para una variedad compleja, $N = 0$, y por lo tanto la estructura casi-compleja es integrable. Lo recíproco también es válido, si J es integrable, la variedad M es compleja, como fue probado por Newlander y Nirenberg en 1957 [109]:

Teorema 5.3. *(Newlander-Nirenberg) Sea (M, J) una variedad casi-compleja. Si J es integrable, luego (M, J) es una variedad compleja.*

Para una demostración de este teorema puede consultarse [72].

Definición 5.9. *Sea M una variedad compleja, con métrica riemanniana g y estructura compleja J. Si g satisface*

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \tag{5.2}$$

para cualquier par de campos vectoriales X e Y, luego g se dice que es una métrica hermitiana. El par (M, g) es llamado variedad hermitiana.

Similarmente, si (M, J) es una variedad casi-compleja, con una métrica que satisface la ecuación (5.2), luego g es una métrica casi-hermitiana y (M, g, J) es una variedad casi-hermitiana.

Teorema 5.4. *Toda variedad compleja (M, J) admite una métrica hermitiana.*

Observar que una variedad simpléctica siempre admite una estructura casi-hermitiana. Se deduce como corolario del teorema 5.1.

Definición 5.10. *Sea M una variedad compleja con métrica hermitiana g y dos-forma fundamental ω. Si ω es cerrada,*

$$d\omega = 0,$$

luego M es una variedad de Kähler, g la métrica de Kähler y ω la forma de Kähler.

Como ejemplo, toda variedad compleja de dimensión real 2 es una variedad de Kähler. Surge del hecho de que toda variedad compleja es hermitiana y de que ω en una variedad de dimensión dos es cerrada.

Toda variedad de Kähler es también simpléctica, dado que la forma de Kähler es cerrada y no degenerada. Lo contrario no es necesariamente cierto. Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 5.5. *Sea (M, ω, J) una variedad simpléctica con una estructura compleja integrable y compatible. Luego M es una variedad de Kähler.*

La demostración puede consultarse en [132].

Tangentes complexificados

Previamente se ha definido la noción de estructura compleja J, la cual puede pensarse como un endomorfismo de espacios tangentes reales: en un punto p de M, J da el mapa lineal $J_p : T_pM \to T_pM$. Complexificando el espacio tangente T_pM, se tiene el espacio $T_pM \otimes \mathbb{C}$, que es un espacio vectorial complejo isomorfo a $\mathbb{C}^{2m}$. El mapa J_p se extiende naturalmente al mapa $J : T_pM \otimes \mathbb{C} \to T_pM \otimes \mathbb{C}$.

Dado que $J^2 = -1$, los autovalores de J en $T_pM \otimes \mathbb{C}$ son $\pm i$. Sea $T_p^{(1,0)}M$ el autoespacio de J_p con autovalor i y $T_p^{(0,1)}M$ el autoespacio de J_p con autovalor $-i$. Ambos subespacios son isomorfos a $\mathbb{C}^m$, complejos conjugados uno del otro, y se tiene la siguiente descomposición $T_pM \otimes \mathbb{C} = T_p^{(1,0)}M \oplus T_p^{(0,1)}M$. Esto es válido para todo $p \in M$ y puede ser extendido a todo el fibrado TM, esto es, el fibrado tangente complexificado, que se denotará como $T_{\mathbb{C}}M$ y se descompone como $T_{\mathbb{C}}M = T^{(1,0)}M \oplus T^{(0,1)}M$. Se llamará a $T^{(1,0)}M$ fibrado tangente holomorfo y a $T^{(0,1)}M$ fibrado tangente anti-holomorfo.

La descomposición del fibrado tangente en parte holomorfa y anti-holomorfa es similar en el caso del fibrado cotangente, siendo $T^*_{\mathbb{C}}M = T^{*(1,0)}M \oplus T^{*(0,1)}M$.

Surge naturalmente la descomposición de campos vectoriales a valores complejos sobre variedades complejas en componentes holomorfa y anti-holomorfa. Esto es, se definen las proyecciones $P_{(1,0)}$ y $P_{(0,1)}$ de manera tal que para cualquier campo vectorial complejo Z en M vale lo siguiente:

$$P_{(1,0)}(Z) = \frac{1}{2}(Z - iJZ) \tag{5.3}$$

$$P_{(0,1)}(Z) = \frac{1}{2}(Z + iJZ). \tag{5.4}$$

Vale que $P^2_{(0,1)} = P_{(0,1)}$, $P^2_{(1,0)} = P_{(1,0)}$, $P_{(0,1)} + P_{(1,0)} = \mathbb{I}$, $P_{(0,1)}P_{(1,0)} = P_{(1,0)}P_{(0,1)} = 0$. Se verifica fácilmente que $J(P_{(1,0)}(Z)) = iP_{(1,0)}(Z)$ y que $J(P_{(0,1)}(Z)) = -iP_{(0,1)}(Z)$.

5.2. Integral de Feynman en la representación holomorfa usando el mapa exponencial

El método de cuantización propuesto por Gorbunov et al. [43] tiene como característica principal la construcción formal de una estructura de Kähler en fibrados cotangentes. La métrica en el espacio cotangente T^*Q se obtiene del levantamiento de la métrica correspondiente a la variedad base Q (riemanniana) y su expresión resulta ser una serie formal en potencias de los momentos p cuyos coeficientes son campos tensoriales en la base.

Aquí se aplica el isomorfismo existente entre funciones holomorfas y los coeficientes tensoriales (del desarrollo en series de Taylor).

En el caso de una variedad Q riemanniana, pensada como espacio de configuración, surge naturalmente la pregunta de si su fibrado cotangente posee una estructura compleja natural. En primer lugar surge la inquietud de saber si existe una métrica en el cotangente que sea el levantamiento natural de la métrica en Q. La respuesta es afirmativa y está dada por la siguiente expresión:

$$G = g_{ij}dx^i \otimes dx^j + g^{ij}Dp_i \otimes Dp_j \tag{5.5}$$

Por este método se obtiene una estructura casi-compleja compatible con la estructura simpléctica del cotangente. Desafortunadamente, esta estructura no resulta integrable a menos que la curvatura de Q sea nula. Gorbunov et al. [43] muestran que formalmente puede hallarse una métrica que permita obtener una estructura compleja integrable por medio de potencias de la coordenada p en el cotangente.

Usualmente se define el espacio de Hilbert de funciones holomorfas de cuadrado integrable, integrando sobre la variedad compleja. En este capítulo de la tesis se procede de manera distinta. Se asigna a cada punto m del cotangente un espacio de Hilbert integrando en el espacio tangente T_mP con el objetivo de realizar una integral euclidiana.

Como ventaja, esta integral euclidiana resulta sencilla de plantear, por ejemplo en el caso del cilindro o toros se simplifica mucho el cálculo. El método desarrollado por otra parte toma en cuenta los caminos homotópicos que aparecen en la integral de Feynman. Por ejemplo, en el caso de S^1 [116], la función de Green que se obtiene al estudiar una partícula libre, cuyo lagrangiano es $L = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$ está dada por la siguiente expresión

$$G(\theta, T, \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i T}} e^{i\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2T}}. \tag{5.6}$$

Sin embargo, no resulta ser la función de Green para S^1. Están tenidos en cuenta únicamente los caminos homotópicos con la identidad en $\mathbb{Z}$, identificado con el grupo de homotopía de S^1. Si se considera como la función de Green adecuada a aquella función que tiene en cuenta todos los caminos, es decir

$$G(\theta, T, \theta_0) = \sum_{\mathbb{Z}} G_n(\theta, T, \theta_0), \tag{5.7}$$

donde

$$G_n(\theta, T, \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i T}} \sum_{\mathbb{Z}} e^{i\frac{(\theta-\theta_0+2\pi n)^2}{2T}}, \tag{5.8}$$

se obtiene finalmente una función de Green que coincide con la que resulta del propagador infinitesimal propuesto en [116] . En la construcción de dicho propagador la integración es realizada en el espacio tangente a S^1.

5.3. Métrica en T^*Q

Sea Q una variedad riemanniana conexa. Se asume que Q es geodésicamente completa y *flat* (curvatura cero). También se asume que el mapa exponencial es suryectivo. Q es visto como el espacio de configuración y el espacio cotangente $P = T^*Q$, como el espacio fase del sistema. Se considera en nuestro caso que P está equipado con la estructura simpléctica canónica, ω.

Nos interesa en particular un levantamiento natural de la métrica en Q a una métrica en P. Se usa la siguiente construcción.

Sean $\alpha(t) = (q_1(t), p_1(t))$ y $\beta(t) = (q_2(t), p_2(t))$ curvas en P que satisfacen $\alpha(0) = \beta(0) = (q, p)$, $\alpha'(0) = V$ y $\beta'(0) = W$, esto es V y W son vectores tangentes en (q, p). Se llamará σ a la métrica en Q, y $\sigma^\sharp$ al isomorfismo inducido por σ entre P y TQ. Luego se obtiene la métrica G en P dada por la siguiente expresión

$$G(V, W) = \sigma\left(d\pi V, d\pi W\right) + \sigma\left(\sigma^\sharp \frac{Dp_1}{dt}(0), \sigma^\sharp \frac{Dp_2}{dt}(0)\right), \tag{5.9}$$

en donde $d\pi$ es la derivada de la proyección $\pi\colon P \to Q$ y $\frac{D}{dt}$ las derivadas covariantes. Las derivadas covariantes son evaluadas en las curvas base $q_1(t)$ y $q_2(t)$ respectivamente.

Para todo campo V y W existe un único automorfismo de fibrados vectoriales J, el cual verifica

$$G(V, W) = \omega(V, JW). \tag{5.10}$$

Es decir, si $\omega^\sharp\colon T^*P \to TP$ es el isomorfismo inducido por ω y si $G^\flat\colon TP \to T^*P$ es el isomorfismo inducido por G, entonces J está dado por $J = \omega^\sharp G^\flat$.

J, obtenido a partir de ω y G, es de hecho una estructura casi-compleja. Esto puede verse usando las coordenadas canónicas $(q, p) = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$. En estas coordenadas la métrica mencionada anteriormente está representada por la siguiente matriz

$$G = \begin{pmatrix} \sigma + \Psi & \Phi^t \\ \Phi & \sigma^{-1} \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi^i_j &= -\sigma^{im} p_k \Gamma^k_{mj} && (5.12) \\ \Psi_{ij} &= \sigma_{ik} \Phi^k_l \Phi^l_j, && (5.13) \end{aligned}$$

y donde los símbolos Γ, son los símbolos de Christoffel de la métrica en las coordenadas de Q. Se usará el mismo símbolo σ para la matriz asociada a la métrica.

Se observa que el determinante de G es idénticamente igual a uno. Luego el volumen riemanniano coincide con el volumen de Liouville, Ω en la variedad simpléctica P.

De la ecuación (5.10), se llega a la siguiente expresión matricial de J

$$J = \begin{pmatrix} -\Phi & -\sigma^{-1} \\ \sigma + \Psi & \Phi^t \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Puede verificarse que J es en efecto una estructura casi-compleja. Luego $J^2 = -1$. Esto significa que en cada punto $m = (q,p)$ el mapa $J_m \colon T_mP \to T_mP$ verifica $J^2_m V = -V$. Además J es compatible con ω como se ve a continuación

$$\begin{aligned} \omega(JX, JY) &= G(JX, Y) = G(Y, JX) \\ &= \omega(Y, J^2X) = -\omega(Y, X) = \omega(X, Y). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Por supuesto, J es también compatible con G. J es una transformación canónica y una isometría.

Ahora interesa encontrar coordenadas locales complejas. Sea $T^{\mathbb{C}}_m P$ el fibrado tangente complexificado de P en m, esto es

$$T^{\mathbb{C}}_m P = T^{(1,0)}_m P \oplus T^{(0,1)}_m P, \tag{5.16}$$

en donde $T^{(1,0)}_m P$ y $T^{(0,1)}_m P$ son las imágenes de las siguientes proyecciónes Π^+ y Π^-

$$\Pi^{\pm} = \frac{1 \mp iJ}{2}. \tag{5.17}$$

Si se toma un vector $V = (\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n) \in T_mP$, luego Π^+ constituye un isomorfismo natural entre el espacio tangente real T_mP y el *e*spacio tangente holomorfo $T_m^{(1,0)}P$. Se tiene entonces

$$\Pi^+ V = z^i \frac{\partial}{\partial z^i} \tag{5.18}$$

donde las coordenadas complejas inducidas de esta manera son

$$z^i = \dot{q}^i + i\sigma^{im}(\dot{p}_m - p_k \Gamma^k_{ml}\dot{q}^l) \tag{5.19}$$

y los correspondientes campos vectoriales holomorfos son

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + p_k \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial p^j} - i\sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial p^j}\right). \tag{5.20}$$

A continuación se estudiará la integrabilidad de J, la cual por el teorema de Newlander-Niremberg es equivalente a la anulación del tensor de Nijenhuis $N(V,W)$ definido como sigue

$$N(V,W) = [V,W] + J([JV,W] + [V,JW]) - [JV,JW]. \tag{5.21}$$

Equivalentemente puede chequearse la involutividad de la distribución compleja $T_m^{(1,0)}P$. Tomando el corchete de Lie de dos vectores base se tiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right] = iR^m_{kij} p_m \sigma^{lk}\left(\frac{\partial}{\partial z^l} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}\right). \tag{5.22}$$

Por ello, la distribución es integrable si y solo si el tensor de curvatura de la métrica σ es idénticamente nulo, esto es, la variedad base es de curvatura cero. Si esta condición no se satisface, Gorbunov et al. [43] encontraron una expresión formal de una métrica de Kähler, la cual puede usarse en lugar de la métrica G. A continuación se asumirá que el espacio de configuración es de curvatura cero.

5.4. El espacio de Hilbert

Con la métrica G el fibrado cotangente P constituye una variedad riemanniana completa. Luego para todo $m \in P$ se tiene un mapa exponencial definido en $T_m P$.

Aquí se representan los vectores tangentes por sus coordenadas complejas (5.19) usando la proyección Π^+, esto es un espacio vectorial de dimensión n. El módulo al cuadrado $|z|^2$ está dado por la siguiente fórmula

$$|z|^2 = G_m(z,z) = \sigma_{ij}(\pi m) z^i \bar{z}^j. \tag{5.23}$$

Notar que la métrica es evaluada en la proyección sobre Q.

El volumen natural en el espacio vectorial T_mP es el *pull-back* por el mapa exponencial de la métrica riemanniana (la cual coincide con el volumen de Liouville). Se tiene entonces la siguiente proposición:

Proposition 5.4.1. *El pullback del volumen riemanniano por el mapa exponencial al fibrado tangente en el punto m está dado por*

$$\exp_m^* \Omega(z) = \sigma(\pi m)\, dz. \tag{5.24}$$

donde σ es el determinante de la métrica, y dz es la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}^n$.

Se usará el mapa exponencial para definir un producto de funciones holomorfas. La construcción es como sigue. Sea m un punto perteneciente a P. Luego, para funciones holomorfas ϕ y ψ definidas en P se define el siguiente producto

$$\langle \phi, \psi \rangle_m = \sigma(\pi m) \int_{T_mP} \overline{\phi(\exp_m z)}\, \psi(\exp_m z)\, e^{-|z|^2}\, dz. \tag{5.25}$$

Se verifica que es un producto escalar. En lo que sigue se muestra que el conjunto de funciones holomorfas es de hecho un espacio de Hilbert.

Teorema 5.6. *Sea Q una variedad con las mismas características antes mencionadas. También se asume que el mapa exponencial es suryectivo. Luego el espacio de funciones holomorfas en P con la norma asociada al producto escalar (5.25) es un espacio de Hilbert. Se llamará a este espacio $\mathcal{B}_P$.*

Demostración. Una función holomorfa $\phi : P \to \mathbb{C}$ induce por *pull-back* una función holomorfa en T_mP, esto es $\tilde{\phi} = \phi \circ \exp_m$. El conjunto de funciones holomorfas en T_mP con el producto escalar (5.25) constituye un subespacio de Hilbert

$\mathcal{B} = \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2}) \subset L^2(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2})$ (see [61]). Sea $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de funciones holomorfas en P. La sucesión inducida $\{\tilde{\phi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a una función holomorfa $\tilde{\phi}$ en $\mathcal{B}$. La propiedad crucial de estos espacios de funciones holomorfas es la continuidad del mapa de evaluación, esto es, para cada z existe una constante M_z tal que para todo $\tilde{\phi}$ se tiene

$$|\tilde{\phi}(z)|^2 \leq M_z ||\tilde{\phi}||_{L^2}^2. \tag{5.26}$$

Luego,

$$|\tilde{\phi}_i(z) - \tilde{\phi}(z)|^2 \leq M_z ||\tilde{\phi}_i - \tilde{\phi}||_{L^2}^2 \to 0. \tag{5.27}$$

Luego para $n \in P$ se define $\phi(n) = \tilde{\phi}(\exp_m^{-1} n)$. Esta ϕ está bien definida porque si $z_1, z_2 \in \exp_m^{-1} n$ se tiene $\tilde{\phi}_i(z_1) = \tilde{\phi}_i(z_2)$, luego por (5.27) $\tilde{\phi}(z_1) = \tilde{\phi}(z_2)$. ■

Puede considerarse a $\mathcal{B}_P$ como un subespacio de $\mathcal{B}$ usando el pull-back del mapa exponencial. En $\mathcal{B}$ existe una función, llamada núcleo reproductor $K(z,w)$ (ver [61] y capítulo 4 de la presente tesis) con la propiedad siguiente

$$\tilde{\phi}(z) = \int_{\mathbb{C}^n} K(z,w)\, \tilde{\phi}(w)\, e^{-|w|^2} dw \tag{5.28}$$

$\forall\, \tilde{\phi} \in \mathcal{B}$. Además $K(w,z) = \overline{K(z,w)}$ y satisface la siguiente regla de composición:

$$K(z,u) = \int_{\mathbb{C}^n} K(z,w)\, K(w,u)\, e^{-|w|^2} dw \tag{5.29}$$

para todo $z, u \in \mathbb{C}^n$. Y para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $|\tilde{\phi}(z)|^2 \leq K(z,z)\ ||\tilde{\phi}||^2$ (para cada z, la igualdad se realiza para algún $\tilde{\phi}_z \in \mathcal{B}$ no nulo). Además el núcleo reproductor actúa como un proyector, es decir, si $\tilde{\phi}_z \in L^2(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2})$, denotando por $\mathcal{P}\tilde{\phi}$ la proyección ortogonal de $\tilde{\phi}$ sobre $\mathcal{B}$, luego

$$\mathcal{P}\tilde{\phi}(z) = \int_{\mathbb{C}^n} K(z,w)\, \tilde{\phi}(w)\, e^{-|w|^2} dw. \tag{5.30}$$

El núcleo reproductor $K(z,w)$ es único en el siguiente sentido. Dado cualquier $z \in \mathbb{C}^n$, si $F_z(\,\cdot\,) \in \mathcal{B}$ satisface

$$\tilde{\phi}(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{F_z(w)}\, \tilde{\phi}(w)\, e^{-|w|^2} dw \tag{5.31}$$

para todo $\tilde{\phi} \in \mathcal{B}$, luego $\overline{F_z(w)} = K(z,w)$.

Pero en general el núcleo reproductor $K(z,w)$ no es el pull-back de una función bien definida en P.

En el caso de un núcleo reproductor para $\mathcal{H}_P$, se entiende una función

$$K_P \colon P \times P \to \mathbb{C}, \tag{5.32}$$

holomorfa en la primera coordenada y antiholomorfa en la segunda, tal que la siguiente ecuación es válida para todo $\phi \in \mathcal{B}_P$

$$\phi(n) = \int_{T_m P} K_P(n, \exp_m w)\, \phi(\exp_m w)\, e^{-|w|^2} dw. \tag{5.33}$$

El siguiente teorema permite obtener el núcleo reproductor

Teorema 5.7. *Sea $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ una base ortonormal para $\mathcal{B}_P$, luego para m, $n \in P$*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |e_j(m)\overline{e_j(n)}| < \infty \tag{5.34}$$

y

$$K_P(m,n) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j(m)\overline{e_j(n)}. \tag{5.35}$$

Demostración. Dado que $\mathcal{B}_P$ es un subespacio de Hilbert de $\mathcal{B}$, se tiene la siguiente descomposición en suma directa

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_P \oplus \mathcal{B}_P^{\perp}. \tag{5.36}$$

Sea $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ una base ortonormal en $\mathcal{B}$ de acuerdo con esta descomposición. Con esta base, existe un núcleo reproductor $K(z,w)$ en este espacio (ver [61]) dado por la siguiente fórmula explícita

$$K(z,w) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)\overline{f_j(w)}. \tag{5.37}$$

Luego puede escribirse

$$K(z,w) = \tilde{K}_P(z,w) + \tilde{K}_P^{\perp}(z,w). \tag{5.38}$$

La contribución a la integral relacionada con la parte ortogonal de $K(z,w)$ es nula actuando en una función $\phi \in \mathcal{B}_P$. Considerando esto, se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \int_{T_m P} K(\exp_m^{-1} n, w)\phi(\exp_m w)e^{-|w|^2}\, dw \\ &= \int_{T_m P} \tilde{K}_P(\exp_m^{-1} n, w)\phi(\exp_m w)e^{-|w|^2}\, dw\end{aligned} \tag{5.39}$$

y $K_P(n,q) = \tilde{K}_P(\exp_m^{-1} n, \exp_m^{-1} q)$ es el núcleo reproductor buscado. ■

5.5. Mecánica cuántica en el círculo

Considérese el caso de una partícula cuyo espacio de configuración es el círculo unitario. Luego el espacio fase es un cilindro. En este caso la métrica euclidiana en el círculo unitario induce una métrica euclidiana en el cilindro. El sistema es interesante porque la topología es no trivial, en particular es una variedad no simplemente conexa. Se eligen las siguientes coordenadas (en cartas) en el cilindro

$$-\pi < q < \pi \quad \text{y} \quad -\infty < p < \infty. \tag{5.40}$$

En el plano tangente al cilindro correspondiente al punto $(0,0)$ se eligen las siguientes coordenadas que se llamará x e y. Esto es, un vector puede ser escrito como

$$V = x\frac{\partial}{\partial q} + y\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.41}$$

El mapa exponencial envía el punto (x,y) al punto $q = x \mod 2\pi$ y $p = y$ en la carta anterior. Puede identificarse al espacio tangente (real) a un punto dado con el espacio tangente holomorfo de la siguiente manera. Sea J la estructura compleja,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

luego por el mapa

$$\Pi^+ V = \frac{1}{2}\left(V - iJV\right) \tag{5.43}$$

se obtiene

$$\Pi^+ \left(x\frac{\partial}{\partial q} + y\frac{\partial}{\partial p} \right) = z\frac{d}{dz}, \tag{5.44}$$

donde la coordenada compleja z es

$$z = x + iy \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q} - i\frac{\partial}{\partial p} \right). \tag{5.45}$$

Ahora se define el producto escalar en el espacio de funciones holomorfas en el cilindro

$$\langle \phi, \psi \rangle_0 = \int_{\mathbb{C}} \overline{\phi(z)}\, \psi(z)\, e^{-|z|^2}\, dz. \tag{5.46}$$

Se reconoce al espacio de Segal-Bargmann, pero además, nuestras funciones son periódicas. En vista del Teorema 5.6 este espacio de funciones holomorfas periódicas es un subespacio de Hilbert del espacio $\mathcal{B}$.

Aquí se usa el mismo símbolo (ϕ o ψ) para la función holomorfa en el cilindro o su extensión periódica al plano tangente.

5.6. Kerneles

Sea P una variedad de Kähler conexa y ϕ, ψ funciones holomorfas definidas en P. Se define:

$$(\phi, \psi) = \int_{T_m P} \overline{\phi(\exp_m \xi)} \psi(\exp_m \xi) e^{-\xi^2} \exp_m^*(d\sigma) \tag{5.47}$$

El pullback de la métrica riemanniana, coincide con el volumen de Liouville. Recordar que hay un isomorfismo entre el espacio tangente real y el espacio tangente holomorfo (este es el subespacio de la polarización compleja)

$$T_{\mathbb{R},p}(M) \longrightarrow T_{\mathbb{C},p}(M) \longrightarrow T'_p(M) \tag{5.48}$$

las flechas son las proyecciones naturales. En definitiva el punto (x, y) es enviado al número complejo $z = x + iy$.

Se supone que el mapa exponencial es un difeomorfismo entre la variedad (o un entorno U de la misma) y un entorno abierto del vector nulo en el tangente en un punto m_0.

$$(\phi, \psi) = \int_{\exp^{-1}(U) \subset T_{m_0}P} \overline{\phi(\exp_{m_0} \xi)} \psi(\exp_{m_0} \xi) e^{-\xi^2} d\sigma(\xi). \tag{5.49}$$

Existe un kernel reproductor $K(\xi, \bar{\eta})$ que cumple

$$\phi(m) = \int_{\exp^{-1}(U) \subset T_{m_0}P} K(\xi, \bar{\eta}) \phi(\exp_{m_0} \eta) e^{-\eta^2} d\sigma(\eta). \tag{5.50}$$

Sea $\{u_i(\xi)\}$ una base del espacio de Hilbert, entonces el kernel reproductor se puede escribir

$$K(\xi, \bar{\eta}) = \sum u_i(\xi) \overline{u_i(\eta)}. \tag{5.51}$$

Sea A un operador entonces

$$A\phi(m) = \int_{\exp^{-1}(U) \subset T_{m_0}P} K_A(\xi, \bar{\eta}) \phi(\exp_{m_0} \eta) e^{-\eta^2} d\sigma(\eta), \tag{5.52}$$

donde $K_A(\xi, \bar{\eta})$ es el kernel del operador A y puede calcularse así

$$K_A(\xi, \bar{\eta}) = \sum (A u_i(\xi)) \overline{u_i(\eta)}. \tag{5.53}$$

La composición de operadores permite obtener por resultado el kernel

$$K_{AB}(\xi, \bar{\eta}) = \int_{\exp^{-1}(U) \subset T_{m_0}P} K_A(\xi, \bar{\eta}) K_B(\eta, \bar{\nu}) e^{-\eta^2} d\sigma(\eta). \tag{5.54}$$

Símbolos normales

Si al operador A se lo escribe en forma normal

$$A = \sum A_{mn} \hat{z}^m \hat{\bar{z}}^n, \tag{5.55}$$

se le puede asociar el símbolo normal

$$A(z, \bar{z}) = \sum A_{mn} z^m \bar{z}^n. \tag{5.56}$$

Este par de operadores $\hat{z}$ y $\hat{\bar{z}}$ son los operadores de creación y aniquilación. Uno es el adjunto del otro. Si se eligen las $\{u_i\}$ tales que

$$\hat{z} u_i = z u_i \quad \text{y} \quad \hat{\bar{z}} u_i = \frac{du_i}{dz}, \tag{5.57}$$

se obtiene fácilmente

$$K_A(z, \bar{w}) = A(z, \bar{w}) K(z, \bar{w}). \tag{5.58}$$

Hilbert holomorfo en el cilindro

Se tomará como espacio de fases el cotangente de S^1, es decir un cilindro. Se considera el plano tangente al cilindro en un punto de la sección nula. En este plano se eligen coordenadas complejas de acuerdo a las siguientes consideraciones.

Se supone que las coordenadas canónicas tienen las unidades usuales (q longitud, p momento lineal) y que están dadas las constantes con unidades de frecuencia y de masa, que se llamarán ω y m respectivamente. Conviene definir las coordenadas complejas de la siguiente manera

$$z = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q - \frac{i}{m\omega}\,p\right) = \frac{x - iy}{\sqrt{2}} \tag{5.59}$$

$$\bar{z} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q + \frac{i}{m\omega}\,p\right) = \frac{x + iy}{\sqrt{2}}, \tag{5.60}$$

donde se han definido la posición y momento adimensionales

$$x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q \quad \text{y} \quad y = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}}. \tag{5.61}$$

Con estas definiciones la medida de volumen en el plano resulta

$$\frac{dz}{2\pi} = \frac{dxdy}{2\pi} = \frac{dqdp}{2\pi\hbar}. \tag{5.62}$$

Se propone ahora trabajar con el espacio de funciones holomorfas en el cilindro levantadas con el mapa exponencial al plano tangente. Resultan funciones holomorfas de la coordenada z periódicas en la parte real, coordenada x. Si la coordenada q representa la longitud sobre un círculo de radio a entonces el período en la coordenada adimensional x es

$$\Delta x = 2\pi a\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = 2\pi\tilde{a}. \tag{5.63}$$

Se define un producto escalar en el espacio de funciones holomorfas en el cilindro de la siguiente manera

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \overline{\phi(z)}\psi(z)e^{-z\bar{z}}dz. \tag{5.64}$$

En esta expresión las funciones ϕ y ψ en la integral del miembro derecho son los levantamientos de las ϕ y ψ al tangente y por simplicidad (y abuso de notación) se llaman de la misma manera. A continuación se prueba que con este producto escalar el conjunto de funciones holomorfas en el cilindro de cuadrado integrable es un espacio de Hilbert. Se lo denota $\mathcal{H}_P$.

Teorema 5.8. *El conjunto de funciones holomorfas en el cilindro de cuadrado integrable con el producto escalar*

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{\phi(z)} \psi(z) e^{-z\bar{z}} dz$$

es un espacio de Hilbert.

Demostración. Considérese el conjunto de funciones holomorfas en el plano, de cuadrado integrable con el producto escalar dado. A estos espacios se los suele denotar $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, \mu)$, donde la función positiva μ es la medida gaussiana. Éste es un espacio de Hilbert llamado espacio de Bargmann [61]. Las funciones que son periódicas en la variable x, con período Δx y de cuadrado integrable forman un subespacio vectorial. Son precisamente los levantamientos de las funciones de $\mathcal{H}_P$.

Se quiere demostrar que es cerrado. Considérese una sucesión convergente de funciones de este tipo. La convergencia es en $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, \mu)$. Es decir $\phi_n \to \phi$ en media cuadrática. Quiere verse ahora que el límite es una función periódica, es decir que verifica $\phi(z) = \phi(z + \Delta x)$ en casi todo punto. La convergencia en media cuadrática implica que por lo menos una subsucesión converge en casi todo punto a ϕ [90]. Se tiene $\phi_n(z) \to \phi(z)$ y $\phi_n(z + \Delta x) \to \phi(z + \Delta x)$. Como $\phi_n(z) = \phi_n(z + \Delta x)$ para todo n entonces $\phi(z) = \phi(z + \Delta x)$ en casi todo punto. Así ϕ es periódica, dando lugar a una función bien definida en el cilindro. ∎

Las funciones

$$\phi_n(z) = e^{inz\sqrt{2}/\tilde{a}} = e^{in(x-iy)/\tilde{a}}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{5.65}$$

son periódicas en la variable x con período $2\pi\tilde{a}$. El conjunto $\{\phi_n\}$ es una base de $\mathcal{H}_P$ (aunque no son ortogonales). Si ψ es holomorfa, debe ser de la forma

$$\psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m. \tag{5.66}$$

Se calcula

$$\langle \phi_n, \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-in\bar{z}\sqrt{2}/\tilde{a}} \psi(z) e^{-z\bar{z}} dz \tag{5.67}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \, \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} z^m e^{-in\bar{z}\sqrt{2}/\tilde{a}} e^{-z\bar{z}} \, dz. \tag{5.68}$$

La última integral se puede escribir en polares $z = re^{i\theta}$ de la siguiente manera

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{2\pi(\sqrt{2})^m} \int_0^{\infty} dr \; r^{m+1} e^{-r^2/2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \; e^{-im\theta} e^{-inre^{i\theta}/\tilde{a}} \tag{5.69}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^m} \int_0^{\infty} dr \; r^{m+1} e^{-r^2/2} g\left(\frac{nr}{\tilde{a}}, m\right), \tag{5.70}$$

donde:

$$g(\xi, m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \; e^{-im\theta} e^{-i\xi e^{i\theta}}. \tag{5.71}$$

Tomando $m = 0$, la función $g(\xi, 0)$ es constante e igual a 1, como puede comprobarse desarrollando en serie de Taylor la exponencial $e^{-i\xi e^{i\theta}}$ e integrando término a término.

Otra propiedad de $g(\xi, m)$ es la siguiente,

$$\frac{d}{d\xi} g(\xi, m) = -ig(\xi, m-1). \tag{5.72}$$

Teniendo en cuenta que $g(0, m) = 0$ para todo $m \neq 0$. Usando la fórmula recursiva anterior se obtiene la función

$$g(\xi, m) = (-i)^m \, \frac{\xi^m}{m!}. \tag{5.73}$$

Resulta

$$\alpha_{mn} = \frac{(-i)^m n^m}{m! \tilde{a}^m (\sqrt{2})^m} \int_0^{\infty} r^{2m+1} e^{-r^2/2} = \left(-\frac{i\sqrt{2}n}{\tilde{a}} \right)^m \tag{5.74}$$

$$\langle \phi_n, \psi \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(-\frac{i\sqrt{2}n}{\tilde{a}} \right)^m. \tag{5.75}$$

El sistema de funciones es completo, en efecto si ψ es un polinomio de grado k, entonces tomando el producto con las primeras $k+1$ ϕ_n's e igualando a 0 resulta un sistema con determinante no nulo (de Vandermonde) y por lo tanto $\psi = 0$.

Las funciones ϕ_n no son ortogonales, en efecto

$$\langle \phi_p, \phi_q \rangle = e^{2pq/\tilde{a}^2}. \tag{5.76}$$

Como puede comprobarse utilizando la fórmula anterior o integrando directamente.

Teniendo en cuenta que $||\phi_p|| = e^{p^2/\tilde{a}^2}$, y normalizando las funciones $\tilde{\phi}_p$

$$\tilde{\phi}_p(z) = \frac{\phi_p(z)}{||\phi_p||} = e^{ipz\sqrt{2}/\tilde{a} - p^2/\tilde{a}^2}. \tag{5.77}$$

Con estas funciones, el producto escalar resulta

$$\left\langle \tilde{\phi}_p, \tilde{\phi}_q \right\rangle = e^{-(p-q)^2/\tilde{a}^2}. \tag{5.78}$$

Se puede encontrar un sistema ortogonal usando Gram-Schmidt. Ordenando los índices adecuadamente puede escribirse la fórmula:

$$\alpha_n = \tilde{\phi}_{(-1)^{n+1}[(n+1)/2]} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left\langle \tilde{\phi}_{(-1)^{n+1}[(n+1)/2]}, \alpha_j \right\rangle}{||\alpha_j||^2} \alpha_j, \tag{5.79}$$

donde los corchetes indican la parte entera.

Finalmente resulta el sistema ortonormal

$$\beta_k(z) = \frac{\alpha_k(z)}{||\alpha_k||}. \tag{5.80}$$

Operadores de creación y aniquilación

En función de la base ortonormal $\{\beta_i\}$ el kernel reproductor es

$$K(z, \bar{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(z) \overline{\beta_n(w)} = \overline{\zeta_{\bar{z}}(w)}. \tag{5.81}$$

Se definen los operadores a^+ y a tomando el producto L^2 en el tangente

$$a^+ \psi(z) = \langle \zeta_{\bar{z}}, w\psi \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(z) \int_{\mathbb{C}} \overline{\beta_n(w)} w \psi(w) e^{-z\bar{z}} dw, \tag{5.82}$$

$$a\chi(z) = \left\langle \zeta_{\bar{z}}, \frac{d\chi}{dw} \right\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(z) \int_{\mathbb{C}} \overline{\beta_n(w)} \frac{d\chi}{dw}(w) e^{-z\bar{z}} dw. \tag{5.83}$$

Las funciones ψ y χ tienen un desarrollo en serie de la siguiente forma

$$\psi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p \beta_p(z) \quad \text{y} \quad \chi(z) = \sum_{q=0}^{\infty} v_q \beta_q(z). \tag{5.84}$$

Resulta

$$\begin{aligned} \left\langle a^+\psi, \chi \right\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{C}} \overline{w\psi(w)} \beta_n(w) e^{-w\bar{w}} dw \int_{\mathbb{C}} \overline{\beta_n(z)} \chi(z) e^{-z\bar{z}} dz \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{C}} \overline{\psi(w)} \frac{d\beta_n}{dw}(w) e^{-w\bar{w}} dw \int_{\mathbb{C}} \overline{\beta_n(z)} \chi(z) e^{-z\bar{z}} dz, \end{aligned} \tag{5.85}$$

donde la última expresión fue obtenida mediante una integración por partes.

Reemplazando ψ y χ por sus desarrollos, resulta

$$\begin{aligned} \left\langle a^+\psi, \chi \right\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n,p,q=0}^{\infty} \bar{u}_p v_q \int_{\mathbb{C}} \frac{d\beta_n}{dw}(w) \overline{\beta_p(w)} e^{-w\bar{w}} dw \int_{\mathbb{C}} \overline{\beta_n(z)} \beta_q(z) e^{-z\bar{z}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p,q=0}^{\infty} \bar{u}_p v_q \int_{\mathbb{C}} \frac{d\beta_q}{dw}(w) \overline{\beta_p(w)} e^{-w\bar{w}} dw, \end{aligned} \tag{5.86}$$

donde se usa la ortonormalidad de las β_i's.

Por otro lado

$$\langle \psi, a\chi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{C}} \overline{\beta_n(w)} \frac{d\chi}{dw}(w) e^{-w\bar{w}} dw \int_{\mathbb{C}} \overline{\psi(z)} \beta_n(z) e^{-z\bar{z}} dz. \tag{5.87}$$

Otra vez se han reemplazado los desarrollos de ψ y χ,

$$\begin{aligned} \langle \psi, a\chi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n,p,q=0}^{\infty} \bar{u}_p v_q \int_{\mathbb{C}} \frac{d\beta_q}{dw}(w) \overline{\beta_n(w)} e^{-w\bar{w}} dw \int_{\mathbb{C}} \overline{\beta_p(z)} \beta_n(z) e^{-z\bar{z}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p,q=0}^{\infty} \bar{u}_p v_q \int_{\mathbb{C}} \frac{d\beta_q}{dw}(w) \overline{\beta_p(w)} e^{-w\bar{w}} dw. \end{aligned} \tag{5.88}$$

Se ha demostrado que

$$\left\langle a^+\psi, \chi \right\rangle = \langle \psi, a\chi \rangle, \tag{5.89}$$

o sea que a^+ y a son adjuntos.

Operadores adjuntos

El operador A definido por $A\phi = e^{iz}\phi$ verifica $A\phi_k = \phi_{k+1}$. El operador $e^{i\frac{d}{dz}}$ verifica $e^{i\frac{d}{dz}}\phi_k = e^{-k}\phi_k$ como puede verificarse desarrollando la exponencial en serie de Taylor. Otro operador interesante, caso general del anterior

$$B\phi_l = e^{-ia\frac{d}{dz}+b}e^{icz}\phi_l = e^{-ia\frac{d}{dz}+b}\phi_{l+c} = e^{b+a(l+c)}\phi_{l+c}. \tag{5.90}$$

Se obtiene desarrollando la primera exponencial y usando la fórmula del binomio. Se buscan a, b y c para que A y B sean adjuntos. Se tienen los siguientes productos

$$\langle A\phi_k, \phi_l\rangle = \langle \phi_{k+1}, \phi_l\rangle = e^{l(k+1)} \tag{5.91}$$

y

$$\langle \phi_k, B\phi_l\rangle = e^{b+a(l+c)}\langle \phi_k, \phi_{l+c}\rangle = e^{b+a(l+c)+k(l+c)}. \tag{5.92}$$

Es decir, debe cumplirse $l(k+1) = b + a(l+c) + k(l+c)$ para todos los valores de l y k. Esto ocurre únicamente si $a = 1$, $b = c = 0$. O sea $B = e^{-i\frac{d}{dz}}$ y $B\ \phi_k = e^k\phi_k$. Se puede verificar desarrollando en serie de potencias el operador dentro de la integral e integrando por partes n veces término a término.

Funciones holomorfas periódicas Una observación interesante es la propiedad que cumplen los coeficientes del desarrollo de funciones holomorfas periódicas. Supóngase que ϕ es holomorfa y periódica en la parte real de z (se supone con período 1), entonces se cumple que

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \phi(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k. \tag{5.93}$$

Comparando coeficientes se deduce que para todo $k \geq 1$ se debe verificar lo siguiente

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k-1} c_n = 0. \tag{5.94}$$

Espacios de Hilbert y transformada de Segal-Bargmann

Se toma el siguiente producto escalar en $\mathcal{H}_{cil} = \mathcal{H}_P L^2(\mathbb{C}, \mu)$ (acá $dz = dxdy$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}$)

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{\phi(z)} \psi(z) e^{-|z|^2}\, dz. \tag{5.95}$$

La transformada de Segal-Bargmann adecuada es

$$Af(z) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{(-z^2+2\sqrt{2}zx-x^2)/2}\, dx. \tag{5.96}$$

El mapa $A^{-1} : \mathcal{H}_P L^2(\mathbb{C}, \mu) \to L^2_P(\mathbb{R})$ es la inversa de la transformada de Segal-Bargmann

$$A^{-1}\phi(x) = \frac{1}{2\pi^{5/4}} \int_{\mathbb{C}} \phi(z)\, e^{(-\bar{z}^2+2\sqrt{2}\bar{z}x-x^2)/2} e^{-|z|^2}\, dz. \tag{5.97}$$

En $L^2(S^1)$ se toma el producto escalar

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}(\theta) v(\theta)\, d\theta. \tag{5.98}$$

Se toma en $L^2(S^1)$ la base ortonormal $u_l = e^{il\theta}$. En $\mathcal{H}_P L^2(\mathbb{C}, \mu)$ se toma la base normalizada (no ortogonal) $\phi_n = e^{zn-n^2}$. Los productos de los elementos de esta base son

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = e^{-(m-n)^2}. \tag{5.99}$$

Se tiene además

$$A^{-1}\phi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\, e^{-(x-2n)^2/2}. \tag{5.100}$$

Transformación entre $L^2(\mathbb{R})$ y $L^2(S^1)$ Sea el siguiente cambio de variables

$$x = \frac{2\theta - 1}{\theta(1-\theta)} \qquad \theta = \frac{-2 + x + \sqrt{x^2+4}}{x} \tag{5.101}$$

Se tiene la siguiente transformación

$$f(x) \mapsto \frac{\sqrt{1-2\theta+2\theta^2}}{(-1+\theta)\theta} f\left(\frac{2\theta-1}{\theta(1-\theta)}\right), \tag{5.102}$$

y las igualdades

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_0^1 \left| f\left(\frac{2\theta-1}{\theta(1-\theta)}\right)\right|^2 \frac{1-2\theta+2\theta^2}{(-1+\theta)\theta}\, d\theta, \tag{5.103}$$

$$\int_0^1 |r(\theta)|^2\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \left| r\left(\frac{-2+x+\sqrt{x^2+4}}{x}\right)\right|^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2\sqrt{x^2+4}}\right) dx. \tag{5.104}$$

Análogamente

$$x = -\cot(\pi\theta) \qquad \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x). \tag{5.105}$$

Se tiene la siguiente transformación

$$f(x) \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{\sin(\pi\theta)} f\left(-\cot(\pi\theta)\right) \tag{5.106}$$

y las igualdades

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_0^1 |f(-\cot(\pi\theta))|^2 \frac{\pi}{\sin^2(\pi\theta)}\, d\theta, \tag{5.107}$$

$$\int_0^1 |r(\theta)|^2\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \left| r\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)\right)\right|^2 \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx. \tag{5.108}$$

Los tres espacios de Hilbert

Se tienen los siguientes mapas R y B. Se consideran los núcleos del calor en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con $t = 1/2$.

$$L^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{R} L^2(\mathbb{R}, \rho) \xrightarrow{B} \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, \mu) \tag{5.109}$$

donde $\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$ y $\mu = \frac{2}{\pi}\, e^{-2|z|^2}$ son las soluciones de $\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}\,\Delta_{\mathbb{R}}\,\rho$ y $\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{4}\,\Delta_{\mathbb{C}}\,\mu$ respectivamente. Luego

$$Rf(x) = \pi^{1/4} e^{x^2/2} f(x) = F(x) \tag{5.110}$$

$$BF(z) = \int_{\mathbb{R}} \rho(z-x)F(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(z-x)^2} F(x)dx = \phi(z). \tag{5.111}$$

Y los mapas inversos son

$$R^{-1}F(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2} F(x) \tag{5.112}$$

y

$$B^{-1}\phi(x) = \frac{2}{\pi} \int e^{-\bar{z}^2 - 2\bar{z}x - 2|z|^2} \phi(z) dz. \tag{5.113}$$

Los productos escalares correspondientes a cada espacio de Hilbert son

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x)\, dx, \tag{5.114}$$

$$\langle F, G\rangle_{L^2(\mathbb{R},\rho)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{F(x)} G(x) e^{-x^2}\, dx \tag{5.115}$$

y

$$\langle \phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C},\mu)} = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{\phi(z)} \psi(z) e^{-2|z|^2}\, dz. \tag{5.116}$$

Los tres espacios de Hilbert, caso S^1

Se consideran los núcleos del calor en S^1 y $S^1_{\mathbb{C}}$ con $t = 1/2$.

$$L^2(S^1) \xrightarrow{R} L^2(S^1, \rho) \xrightarrow{B} \mathcal{H}_P L^2(S^1_{\mathbb{C}}, \mu) \tag{5.117}$$

$$f(x) \to F(x) \to \phi(z) \tag{5.118}$$

donde

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2/4} e^{inx} \tag{5.119}$$

es la solución de la ecuación del calor

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2} \Delta_{S^1}\, \rho \tag{5.120}$$

y donde en este caso el μ_t es

$$\mu_t(\theta, x) = \frac{e^{-x^2/t}}{2\pi\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} e^{-n^2 t/4} = \frac{e^{-(x^2+\theta^2)/t}}{\pi t} \vartheta_3\left(-2i\pi\theta/t, e^{-4\pi^2/t}\right), \tag{5.121}$$

donde $\vartheta_3\left(-2i\pi\theta/t, e^{-4\pi^2/t}\right)$ es la función theta 3 de Jacobi.

En este caso μ_t es la solución (obtenido por separación de variables) de la siguiente ecuación del calor

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{4} \Delta_{S^1_{\mathbb{C}}}\, \mu. \tag{5.122}$$

Luego

$$Rf(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} f(x) = F(x) \tag{5.123}$$

y

$$BF(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(z-x)F(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2/4}e^{inx}F(x)dx = \phi(z). \tag{5.124}$$

Los productos escalares son respectivamente

$$\langle f, g\rangle_{L^2(S^1)} = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx, \tag{5.125}$$

$$\langle F, G\rangle_{L^2(S^1,\rho)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(x)}G(x)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2/4}e^{inx}\,dx \tag{5.126}$$

y

$$\langle \phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}_P L^2(\mathbb{C},\mu)} = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \overline{\phi(z)}\psi(z)\,d\mu_t. \tag{5.127}$$

5.7. Integral de Feynman

Sea Q una variedad riemanniana, conexa y geodésicamente completa y sea P su fibrado cotangente, se vio en la sección (5.3) que hay un levantamiento natural de la métrica g en Q a una métrica G en P dado por

$$G = g_{ij}dx^i \otimes dx^j + g^{ij}Dp_i \otimes Dp_j \tag{5.128}$$

donde

$$D = dp_i\frac{\partial}{\partial p_i} - dx_i\nabla_i \tag{5.129}$$

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j} \tag{5.130}$$

donde Γ^k_{ij} son los símbolos de Christoffel de la métrica g.

Además, toda variedad simpléctica P es casi-Kähler, por lo tanto P admite una estructura casi compleja J compatible, es decir un campo tensorial en P que verifica:

1. $J_p : T_pP \to T_pP$ es un endomorfismo $\forall\ p$
2. $J^2 = -\mathbb{I}$
3. J es compatible con ω en P: $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$

J permite escribir el tangente complexificado $T^{\mathbb{C}}P = TP \otimes \mathbb{C}$ como la siguiente suma directa:

$$T^{\mathbb{C}}P = T^{(1,0)}P \oplus T^{(0,1)}P,$$

tal que

$$J_pX = iX \quad \forall\ X \in T_p^{(1,0)}P, \qquad J_pY = -iY \quad \forall\ Y \in T_p^{(0,1)}P$$

para todo $p \in P$. Elegimos J de tal manera que la métrica $G = \omega(\cdot, J\cdot)$ coincida con el levantamiento de la métrica en Q. Si J es integrable, P es una variedad de Kähler.

J es integrable cuando la curvatura de la variedad riemanniana Q es cero. Sin embargo se puede construir una métrica G en el caso general ([43])

$$G = \tilde{g}_{ij}dx^i \otimes dx^j + \tilde{g}^{ij}\tilde{D}p_i \otimes \tilde{D}p_j. \tag{5.131}$$

Para el caso en que la variedad Q es de curvatura cero, G y J (definidos en la sección 5.3) pueden expresarse matricialmente de la siguiente forma

$$G = \begin{pmatrix} g+\Psi & \Phi^t \\ \Phi & g^{-1} \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -\Phi & -g^{-1} \\ g+\Psi & \Phi^t \end{pmatrix} \tag{5.132}$$

$$\Phi^i_j = -g^{im}p_k\Gamma^k_{mj} \tag{5.133}$$

$$\Psi_{ij} = p_kp_mg^{ln}\Gamma^k_{li}\Gamma^m_{nj} \tag{5.134}$$

Las coordenadas son $z^i = \dot{x}^i + ig^{im}\left(\dot{p}_m - p_k\Gamma^k_{ml}\dot{x}^l\right)$.

Como ejemplo, para el caso unidimensional donde $g = f(x)$, $\left(\Gamma = \frac{f'(x)}{2f(x)}\right)$, se tiene

$$z = \dot{x} + i\left(\frac{\dot{p}}{f(x)} - \dot{x}\frac{f'(x)}{2f(x)^2}\right) \tag{5.135}$$

$$G = \begin{pmatrix} f(x) + \frac{p^2f'(x)^2}{4f(x)^3} & -\frac{pf'(x)}{2f(x)^2} \\ -p\frac{f'(x)}{2f(x)^2} & \frac{1}{f(x)} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} p\frac{f'(x)}{2f(x)^2} & -\frac{1}{f(x)} \\ f(x) + \frac{p^2f'(x)^2}{4f(x)^3} & -p\frac{f'(x)}{2f(x)^2} \end{pmatrix}.$$

Como segundo ejemplo, se considera el caso de $Q = S^1$. El cotangente es $S^1 \times \mathbb{R}$. Considerando el plano tangente al cilindro en un punto m, en ese plano las coordenadas complejas son $z = \dot{q} + i\dot{p}$. El conjunto de funciones holomorfas definidas en el cilindro de cuadrado integrable con el producto escalar

$$\langle \phi, \psi \rangle_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{\phi(\exp_m z)} \psi(\exp_m z) e^{-z\bar{z}} \, dz \tag{5.136}$$

es un espacio de Hilbert. Resulta ser un espacio de Hilbert de funciones holomorfas en z y periódicas de período 2π en la parte real. En este caso G y J son:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, sea $m \in P$ y sean ϕ, ψ funciones holomorfas en P, se definió en dicho espacio de funciones holomorfas, $\mathcal{H}(P)$, el siguiente producto escalar

$$\langle \phi, \psi \rangle_m = \int_{T_m P} \overline{\phi(\exp_m z)} \psi(\exp_m z) e^{-|z|^2} \, d\mu(z), \tag{5.137}$$

donde $d\mu(z) = g(m) d^n z$, $|z|^2 = z^i \bar{z}_j$ y y $\exp_m : T_m P \to P$ el mapa exponencial en m.

Se demostró en este capítulo que el conjunto de funciones holomorfas de cuadrado integrable con el producto escalar

$$\langle \phi, \psi \rangle_m = \int_{T_m P} \overline{\phi(\exp_m z)} \psi(\exp_m z) e^{-|z|^2} \, d\mu(z) \tag{5.138}$$

es un espacio de Hilbert. Llamamos a este espacio $\mathcal{H}L^2(P)$.

Propagador infinitesimal

A continuación se verá la evolución temporal de la función de onda.

Sea el siguiente núcleo reproductor $K \colon P \times P \to \mathbb{C}$.

$$\phi(m) = \int_{T_m P} K(m, \exp_m z) \phi(\exp_m z) e^{-|z|^2} \, d\mu(z). \tag{5.139}$$

Sea H el operador hamiltoniano en $\mathcal{H}L^2(P)$, representado por el núcleo integral K_H

$$H\phi(m) = \int_{T_mP} K_H(m, \exp_m z)\phi(\exp_m z)e^{-|z|^2}\, d\mu(z). \tag{5.140}$$

Sea el operador de evolución para hamiltonianos independientes del tiempo como solución de la ecuación de Schrödinger

$$U_t = e^{-iHt}. \tag{5.141}$$

No es posible sustituir el kernel del hamiltoniano en la expansión de Taylor de la exponencial, pero para intervalos pequeños vale la siguiente aproximación

$$U_\Delta \cong 1 - iH\Delta. \tag{5.142}$$

Se define el propagador infinitesimal de evolución de la siguiente manera

$$u_\Delta\phi(m) = \int_{T_mP} K(m, \exp_m z)\phi(\exp_m z)e^{-|z|^2}e^{-i\Delta K_H/K}\, d\mu(z). \tag{5.143}$$

A partir de éste, se puede encontrar el operador de evolución tomando el siguiente límite

$$U_t\phi(m) = \lim_{n\to\infty} (u_{t/n})^n\phi(m). \tag{5.144}$$

Capítulo 6

Cuantización de Feynman en espacios riemannianos de curvatura cero

6.1. Introducción

La cuantización de un sistema cuyo espacio de configuración es una variedad diferenciable es un tema de interés actual. De hecho, en el caso de una variedad riemanianna, no se conoce cual es el esquema de cuantización más apropiado que contemple la curvatura de la variedad, ver [19, 21, 28, 82, 83, 85, 92, 93, 106]. Estos problemas tienen motivaciones físicas y matemáticas. Por un lado está el problema de la existencia de estructuras involucradas en el proceso de cuantización y por otro lado las posibles aplicaciones a problemas físicos concretos.

Cuando la variedad es un grupo de Lie compacto, Hall demostró que la cuantización del grupo es naturalmente isomorfa a la cuantización del espacio cotangente. El espacio cotangente coincide con la complexifiación del grupo, ver [57, 60, 66]. En otras palabras, hay dos estructuras de espacio de Hilbert, una dada por las funciones en el grupo y la otra por las funciones en la complexificación del grupo, ambas estructuras están naturalmente relacionadas. Estos problemas han sido explorados y generalizados en varios trabajos, ver e. g. [57, 58, 60, 63, 126].

Es sabido que el espacio cotangente de una variedad riemanniana admite una estructura compleja natural, compatible con la forma simpléctica y el levantamiento natural de la métrica riemanniana si y solo si la variedad es de curvatura cero. Ver el trabajo de Gorbunov [43], ver también [89].

En el caso de una variedad riemanniana compacta orientable y de curvatura cero (*euclidean space form*) se demuestra que existe un isomorfismo natural entre el espacio de Hilbert de funciones complejas de cuadrado integrable en el espacio de configuración y el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable en el espacio fase. Los productos escalares son definidos con una medida dada por la solución fundamental de la ecuación del calor en cada espacio.

Este espacio de funciones holomorfas en el espacio fase resulta ser un espacio de Hilbert con kernel reproductor (*reproducing kernel hilbert space*). Haciendo uso de la existencia de un núcleo reproductor se obtiene una fórmula explícita para el isomorfismo mencionado anteriormente y para la integral de Feynman, la cual en el caso euclidiano coincide con las expresiones conocidas, ver [27, 139].

Las *euclidean space forms* compactas y orientables de dimensión 3 presentan un interés particular en cosmología, dado que son adecuados para modelar la parte espacial de los llamados *flat universe models* [34]. Ver los trabajos más recientes de J. Levin, en donde se busca desarrollar un modelo cosmológico plausible usando *euclidean space forms* orientables y compactas de dimensión 3 en concordancia con los resultados de las observaciones de la radiación de fondo cósmico de microondas (*cosmic microwave background*) [98, 99, 100, 97].

En este capítulo se desarrolla un método de cuantización basado en integrales de Feynman para el caso de variedades riemannianas compactas de curvatura cero (*euclidean space forms*). En particular, se verá que en dimensión 3 existen seis clases difeomórficamente afines para el caso de variedades riemanianas conexas orientables compactas de curvatura cero, todas ellas se pueden representar mediante la identificación de caras de un poliedro (región fundamental). Resultan ser el espacio cociente de $\mathbb{R}^3/\Gamma$, siendo Γ un subgrupo discreto del grupo de isometría $E(3)$ cuya acción es libre y propiamente discontinua [136].

Se muestra que existe un isomorfismo natural entre el espacio de funciones complejas de cuadrado integrable en la variedad y el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable en el espacio fase. En cada espacio, los productos escalares son definidos por medio de una medida que surge de la solución fundamental de la ecuación del calor.

Posteriormente, se construye el espacio de Hilbert de funciones holomorfas en la complexificación de la variedad. Este espacio resulta ser un espacio de Hilbert con núcleo reproductor (*reproducing kernel Hilbert space*). Luego se define un propagador de Feynman basado en la propiedad reproductiva característica de estos espacios. Se verá que en el caso euclidiano los resultados obtenidos concuerdan con las expresiones conocidas [27]. Se estudia también el caso S^1 y se obtiene una expresión aproximada para el núcleo reproductor luego de invertir una matriz infinita de Vandermonde por medio de un algoritmo adecuado.

6.2. Variedades riemannianas de curvatura cero

Definición 6.1. *Una* space form *es una variedad riemanniana completa con curvatura seccional constante.*

La clasificación completa de *space forms* solo se conoce para los casos de baja dimensión. Por ejemplo, existen 18 clases de *euclidean space forms* de dimensión 3 de las cuales diez son compactas y ocho no compactas y para el caso de dimensión 4 son 75 las compactas difeomórficamente afines.

Los espacios riemannianos completos de curvatura cero son espacios que tienen como cubrimiento riemanniano universal los espacios euclidianos de igual dimensión. Estos espacios son de la forma $M = E^n/\Gamma$, es decir el espacio de órbitas de un subgrupo Γ del grupo de isometrías (movimientos rígidos) de $\mathbb{R}^n$. Si se identifica a E^n con R^n y se usa notación vectorial, se puede pensar a cada isometría de la forma $x \to Ax + b$ donde $A \in O(n)$ y $b = (b^1, ..., b^n)$, y determinan por lo tanto una rotación y una traslación respectivamente. Como localmente M es isomorfo a un espacio euclidiano, podrían parecer carentes de interés. Sin embargo, no es el caso. Históricamente el estudio de estos espacios está relacionado con el estudio de estructuras cristalográficas en E^2 y en E^3. Cubrimientos uniformes por polígonos y poliedros respectivamente. El grupo de simetría asociado a dichas estructuras forma un subgrupo del grupo de movimientos rígidos. Estos grupos son más generales que aquellos que generan ejemplos de variedades de curvatura cero. Bieberbach demostró en 1911 que el número posible de clases de isomorfismos de grupos de movimiento propios discontinuos Γ de E^n para los cuales el espacio de órbitas E^n/Γ es compacto, es finito para todo n. Estos grupos son los grupos cristalográficos [136]. Esto implica que para cada dimensión n existe al menos un número finito de variedades compactas riemannianas de curvatura cero. Entre ellas por supuesto se encuentra el toro T^n. La demostración de estos teoremas puede encontrarse en el libro de Kobayashi y Nomizu [88] y de Joseph Wolf [136]. En [136] además se brinda una clasificación completa de las variedades riemannianas de curvatura cero en dimensión 2 y 3. No existe hasta el momento una clasificación general para el caso de dimensión n.

Si se consideran las *space forms* de dimensión 3 compactas de curvatura nula conexas y orientables, existen seis clases difeomórficamente afines, como se verá en la sección 6.2. Están representadas por variedades $\mathbb{R}^3/\Gamma$. A cada una de estas clases corresponde un grupo Γ en particular. Puede consultarse el teorema 3. 5. 5 de la página 117 del libro de J. Wolf [136] sobre espacios de curvatura constante en donde esta clasificación se encuentra en detalle. También se puede consultar la representación de las *euclidean space forms* de dimensión 3 en el libro de Kühnel [94] (página 312), donde se expone gráficamente cómo es la realización de estas variedades mediante la identificación de caras de poliedros en $\mathbb{R}^3$.

Se han elegido en este capítulo variedades orientables por razones físicas. Para el caso de variedades no orientables, en principio se puede elegir una métrica riemanniana, pero no hay un volumen riemanniano asociado y por lo tanto surgen complicaciones asociadas a la teoría de integración.

Variedades riemanianas de curvatura cero

Una variedad riemanniana de curvatura cero conexa completa es el cociente de $\mathbb{R}^n$ por un subgrupo Γ del grupo euclidiano $E(n)$, el cual tiene una acción libre y propiamente discontinua. El siguiente teorema es parte de un teorema más general de W. Killing y H. Hopf [136].

Teorema 6.1. *Sea M una variedad riemanniana de dimensión $n \geq 2$ de curvatura nula. Luego M es completa, conexa si y solo si es isométrica al cociente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ con $\Gamma \subset E(n)$ donde la acción de Γ es libre y propiamente discontinua.*

Estas variedades se conocen como *euclidean space forms*.

El grupo euclidiano $E(n)$ es el producto semidirecto de los grupos $O(n)$ y $\mathbb{R}^n$. Un elemento $\gamma \in \Gamma \subset E(n)$ se identifica con $\gamma = (A, a)$, $A \in O(n)$ y $a \in \mathbb{R}^n$. La acción del grupo en un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ está dada por $\gamma(x) = Ax + a$.

En dimensión 1 se tienen únicamente la recta $\mathbb{R}$ y la circunferencia S^1. En dimensión 2 hay cinco variedades, a saber el plano $\mathbb{R}^2$, el cilindro, la cinta de Möebius infinita, el toro y la botella de Klein. Las últimas dos son compactas y el toro es la única orientable. En dimensión 3 hay 18 tipos, de los cuales diez son compactos con seis orientables y cuatro no-orientables [136, 94]. En dimensiones superiores el número crece significativamente, por ejemplo en dimensión 4 hay 74 tipos compactos.

Si $\Gamma \subset E(n)$ es una *lattice*, luego el cociente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es un n-toro, y es una *space form* euclidiana compacta.

Puede probarse que toda variedad riemanniana homogénea es difeomorfa a un grupo de Lie pero en general una *space form* no es necesariamente homogénea. En particular, cuando una *space form* es homogénea, se tiene el siguiente teorema (pág. 88 [136]):

Teorema 6.2. *Sea M una variedad riemanniana homogénea de dimensión n y curvatura cero, luego es isométrica al producto $\mathbb{R}^m \times T^{n-m}$ de un espacio euclidiano con un toro flat riemanniano.*

Un subgrupo discreto es un subgrupo que es discreto como subconjunto.

Si Γ es un subgrupo cerrado de G, Γ se llama uniforme si el espacio cociente $G/\Gamma = \{g\Gamma : g \in G\}$ es compacto.

El siguiente teorema caracteriza los grupos discontinuos en espacios euclidianos.

Teorema 6.3. *Sea Γ un subgrupo del grupo euclidiano $E(n)$.*

(i) *Γ actúa propia y discontinuamente en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ si, y solo si, Γ es discreto en $E(n)$.*

(ii) *Si Γ es cerrado, luego actúa libremente en $\mathbb{R}^n$ si, y solo si, es libre de torsión (único elemento de orden finito es la identidad).*

(iii) *Γ actúa propiamente discontinuamente y con cociente compacto en $\mathbb{R}^n$ si, y solo si, Γ es un subgrupo discreto uniforme de $E(n)$.*

Este capítulo se concentra en variedades riemannianas de curvatura cero orientables y compactas.

Las variedades riemannianas de curvatura cero compactas de dimensión n son el cociente de poliedros en $\mathbb{R}^n$ identificando caras (ver pág. 99 [136]). El interior de estos poliedros puede tomarse como una carta, a la cual llamaremos Q°. Las funciones definidas en la variedad son funciones en $\mathbb{R}^n$, las cuales son invariantes por la acción del grupo.

Un invariante importante de una *space form* compacta es su volumen. Este puede ser definido en términos de una región fundamental para Γ en $\mathbb{R}^n$ [103]. El volumen de una *space form* $\mathbb{R}^n/\Gamma$ se define como el volumen de cualquier región fundamental. Como región fundamental para Γ podemos tomar c_γ, la clausura del dominio de Dirichlet centrado en $\gamma(0)$

$$c_\gamma := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\ \|\gamma(0) - x\| \leq \|\gamma'(0) - x\| \,\text{para todo}\, \gamma' \in \Gamma\},$$

donde $\gamma(0)$ es la acción de γ en $0 \in \mathbb{R}^n$. c_γ es un poliedro convexo n-dimensional en $\mathbb{R}^n$ cuya frontera son hiperplanos que son bisectores perpendiculares al segmento de linea $[\gamma(0), \gamma'(0)]$. Su frontera ∂c_γ puede descomponerse en una colección localmente finita de poliedros convexos de dimensión $n-1$. La *space form* $\mathbb{R}^n/\Gamma$ se obtiene de c_γ identificando puntos en ∂c_γ los cuales son equivalentes módulo Γ.

En particular, las seis *space forms* euclidianas de dimensión 3 compactas y orientables son $\mathbb{R}^3/\Gamma_i$, $i = 1..,6$ (ver pág. 117 [136] y pág. 302 [94]). Para el toro T^3, el cual se construye identificando las caras opuestas de un paralelepípedo por traslaciones, Γ_1 es aquel generado por tres traslaciones t_1, t_2, t_3, en la dirección de tres vectores linealmente independientes. Otras cuatro se obtienen pegando las caras luego de girarlas. Por último el conocido como espacio de Hantzsche-Wendt tiene una estructura más complicada, tres giros son necesarios (*screw motions*). Γ_2 es generado por Γ_1 y un *screw motion* $\alpha^2 = t_3$, las caras del paralelepípedo trasladado son identificadas luego de una rotación de un ángulo de π, Γ_3 es generado por Γ_1 y un *screw motion* $\alpha^3 = t_3$. Γ_4 es generado por Γ_1 y un *screw motion* $\alpha^4 = t_3$. Γ_5 es generado por Γ_1 y un *screw motion* $\alpha^6 = t_3$. En el último, el espacio de Hantzsche-Wendt, Γ_6 resulta de Γ_2 y dos *screw motions* adicionales de un ángulo de π. Las variedades $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$ y $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$ se obtienen de una *lattice* construida trasladando una red hexagonal de dimensión 2 una cierta distancia perpendicular al plano y identificando caras opuestas con la tapa superior rotada en $2\pi/3$ y $\pi/3$ respectivamente. Estos seis ejemplos se desarrollan en la sección siguiente.

La familia $\{c_\gamma\}$ forma una estructura cristalina cuyo grupo de simetría contiene a Γ como un subgrupo de índice finito (ver pág. 100 [136]). Podemos elegir al interior de c_0 (la celda correspondiente a la identidad del grupo) como la carta Q° of $\mathbb{R}^n/\Gamma$. La estructura cristalina puede ser generada por traslación de un conjunto finito de vectores definiendo una red cristalina (*crystal lattice*). Este conjunto forma una base de $\mathbb{R}^n$. La base dual multiplicada por 2π es la base de la llamada red recíproca, $\mathcal{L}$. Sea K un elemento de la red recíproca, luego una función con la simetría de la *lattice* tiene una desarrollo de Fourier dado por

$$f(x) = \sum_{K \in \mathcal{L}} c_K e^{iK \cdot x}. \tag{6.1}$$

Esta función está bien definida en la variedad si es invariante por la acción de Γ, esto es $(\gamma f)(x) = f(\gamma x) = f(x)$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Space forms euclidianas de dimensión tres

Es conocido que para una variedad compacta arbitraria M de dimensión 2, existe una métrica riemanniana con curvatura seccional constante K [94] (Ver teorema $7-25$). El signo de K, por el teorema de Gauss-Bonnet, es necesariamente igual al signo de la característica de Euler de M, $\chi(M)$. No existe un análogo tridimensional de este teorema, dado que hay variedades de dimensión 3 que no admiten una métrica con curvatura seccional constante, por ejemplo $S^1 \times S^2$, [94]. Sin embargo, en dimensión 3 hay varios ejemplos interesantes de variedades riemannianas topológicamente diferentes que tienen curvatura seccional constante. Se verán a continuación algunos ejemplos.

Hay diez cocientes de E^3 de la forma E^3/Γ, de los cuales seis son orientables y cuatro no orientables. Nos centraremos aquí en los seis casos orientables, los cuales surgen del cociente por los siguientes grupos $\Gamma_1, ..., \Gamma_6$, respectivamente.

i) Γ_1 es generada por las traslaciones t_1, t_2, t_3 en las direcciones de tres vectores linearmente independientes X_1, X_2, X_3. El cociente E^3/Γ_1 es llamado *t*oro tridimensional. En el caso en que los X_i corresponden a la base estandar de $\mathbb{R}^3$. En este caso, Γ_1 es el grupo de traslación de la *lattice* de todos los puntos en $\mathbb{Z}^3$:

$$\begin{aligned} t_1(x,y,z) &= (x+1,y,z) \\ t_2(x,y,z) &= (x,y+1,z) \\ t_3(x,y,z) &= (x,y,z+1) \end{aligned}$$

ii) Γ_2 es generado por Γ_1 y una rotación α (*screw motion*) con $\alpha^2 = t_3$. Aquí se asume que el plano generado por X_1 y X_2 es perpendicular a X_3. En el caso más simple se tiene entonces

$$\begin{aligned} t_1(x,y,z) &= (x+1,y,z)\\ t_2(x,y,z) &= (x,y+1,z)\\ t_3(x,y,z) &= (x,y,z+1)\\ \alpha(x,y,z) &= (-x,-y,z+1/2). \end{aligned} \tag{6.2}$$

iii) Γ_3 es generado por Γ_1 y una rotación α con $\alpha^3 = t_3$. Se asume que el plano generado por X_1 y X_2 es perpendicular a X_3 y que t_1 y t_2 son compatibles con una rotación de $2\pi/3$, por ejemplo

$$\begin{aligned} t_1(x,y,z) &= (x+1,y,z)\\ t_2(x,y,z) &= (x-1/2,y+\sqrt{3}/2,z)\\ t_3(x,y,z) &= (x,y,z+1)\\ \alpha(x,y,z) &= (-x/2-(\sqrt{3}/2)y,(\sqrt{3}/2)x-y/2,z+1/3). \end{aligned} \tag{6.3}$$

iv) Γ_4 es generado por

$$\begin{aligned} t_1(x,y,z) &= (x+1,y,z)\\ t_2(x,y,z) &= (x,y+1,z)\\ t_3(x,y,z) &= (x,y,z+1)\\ \alpha(x,y,z) &= (y,-x,z+1/4), \end{aligned} \tag{6.4}$$

donde $\alpha^4 = t_3$.

v) Γ_5 es definido como Γ_3 pero con $\alpha^6 = t_3$, de manera tal que el *screw motion* contiene una rotación de $\pi/3$ en lugar de $2\pi/3$:

$$\alpha(x,y,z) = (x/2-(\sqrt{3}/2)y,(\sqrt{3}/2)x+y/2,z+1/6). \tag{6.5}$$

vi) Γ_6 es definido como Γ_2 agregando dos *screw motions* mas, con un ángulo de π, de tal manera que en este caso hay rotaciones alrededor de los ejes $(x,0,0)$,$(0,y,\frac{1}{4})$ y $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},z)$, respectivamente

$$\begin{aligned}
t_1(x,y,z) &= (x+1,y,z)\\
t_2(x,y,z) &= (x-1/2,y+\sqrt{3}/2,z)\\
t_3(x,y,z) &= (x,y,z+1)\\
\alpha(x,y,z) &= (x+1/2,-y,-z)\\
\beta(x,y,\frac{1}{4}+z) &= (-x,y+1/2,1/4-z)\\
\gamma(\frac{1}{4}+x,\frac{1}{4}+y,z) &= (1/4-x,1/4-y,z+1/2).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

6.3. Estructura compleja en el espacio fase

En una variedad riemanniana se puede elegir una estructura compleja en su fibrado cotangente, compatible con el levantamiento natural de la métrica, si y solo si la variedad tiene curvatura nula [43, 89].

Primero se presenta el caso general. Sea Q una variedad riemanniana compacta y orientable de dimensión finita. Q es visto como el espacio de configuración mientras que el fibrado cotangente T^*Q, es el espacio de fases del sistema. Se considerará aquí que T^*Q está equipado con la estructura simpléctica canónica, ω.

La métrica en Q se puede levantar de manera natural al cotangente mediante la siguiente construcción. Sean $\alpha(t)=(q_1(t),p_1(t))$ y $\beta(t)=(q_2(t),p_2(t))$ curvas en T^*Q tales que

$$\alpha(0)=\beta(0)=(q,p)=m, \quad \alpha'(0)=V, \quad \text{and} \quad \beta'(0)=W, \tag{6.7}$$

i.e. V y W son vectores tangentes en m. Se llamará σ a la métrica en Q, y $\sigma^\sharp$ al isomorfismo inducido por σ entre T^*Q y TQ. Luego se obtiene una métrica G en T^*Q dada por la siguiente expresión

$$G_m(V,W)=\sigma_q\left(d\pi V,d\pi W\right)+\sigma_q\left(\sigma_q^\sharp\frac{Dp_1}{dt}(0),\sigma_q^\sharp\frac{Dp_2}{dt}(0)\right). \tag{6.8}$$

Hasta el momento se tienen dos estructuras en T^*Q, la estructura simpléctica canónica ω y la métrica riemanniana G. Una tercera estructura aparece naturalmente. Es la estructura casi–compleja J. Si se llama $\omega^\sharp\colon T^*T^*Q \to TT^*Q$ al isomorfismo inducido por ω y $G^\flat\colon TT^*Q \to T^*T^*Q$ al isomorfismo inducido por G, entonces J esta dado por $J = \omega^\sharp G^\flat$. Es decir para todo par de campos V y W se tiene

$$G(V, W) = \omega(V, JW). \tag{6.9}$$

En cada punto $m = (q, p)$ el mapa $J_m\colon T_mT^*Q \to T_mT^*Q$ verifica $J_m^2 V = -V$. Además J es compatible con ω. J es también compatible con G. J es una transformación canónica y una isometría. (J, G, ω) se denomina un triplete compatible. Ahora surge el interés de encontrar coordenadas locales complejas. El fibrado tangente complexificado, $T^{\mathbb{C}}T^*Q$, se descompone de la siguiente manera

$$T^{\mathbb{C}}T^*Q = T^{(1,0)}T^*Q \oplus T^{(0,1)}T^*Q, \tag{6.10}$$

en donde $T^{(1,0)}T^*Q$ y $T^{(0,1)}T^*Q$ son las imágenes de las proyecciones Π^+ y Π^- dadas por

$$\Pi^\pm = \frac{1 \mp iJ}{2}. \tag{6.11}$$

Sea un vector $V = (\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n) \in T_mT^*Q$, luego Π^+ constituye un isomorfismo natural entre el espacio tangente real T_mT^*Q y el $e$spacio tangente holomorfo $T_m^{(1,0)}T^*Q$. Se tiene entonces

$$\Pi^+ V = \dot{z}^i \frac{\partial}{\partial z^i} \tag{6.12}$$

donde $\dot{z}^i = \dot{q}^i + i\sigma^{im}(\dot{p}_m - p_k\Gamma^k_{ml}\dot{q}^l)$, y los correspondientes campos vectoriales holomorfos son

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q^i} + p_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial p^j} - i\sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial p^j}\right). \tag{6.13}$$

En estas expresiones los símbolos σ_{ij} y Γ^k_{ij} son los coeficientes de la matriz de la métrica y los símbolos de Christoffel respectivamente. Aquí y en lo que sigue se utiliza la convención de suma de Einstein.

Tomando el corchete de Lie de dos de los campos mencionados se obtiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right] = iR^m_{kij} p_m \sigma^{lk} \left(\frac{\partial}{\partial z^l} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}\right). \tag{6.14}$$

Por ello la distribución es integrable si y solo si el tensor de curvatura de la métrica σ es idénticamente nulo, i.e. la variedad base es flat, ver por ejemplo Gorbunov et al. [43]. Se asumirá que el espacio de configuración es flat.

6.4. Los espacios de Hilbert de cuantización

En una serie de trabajos Hall [57, 60, 66] mostró que para un grupo de Lie compacto hay un isomorfismo natural entre el espacio de funciones de cuadrado integrable en el grupo, con una medida dada por una solución fundamental de la ecuación del calor, y el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable en la complexificación del grupo (que es isomorfa al espacio cotangente).

Distintas pero equivalentes versiones de este isomorfismo pueden encontrarse en la literatura, ver por ejemplo [57, 58, 66, 60, 126].

En esta tesis se muestra que en el caso de una variedad compacta riemanniana de curvatura cero existe un isomorfismo natural entre el espacio de funciones complejas de cuadrado integrable en la variedad y el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable en el espacio fase. Los productos escalares son definidos por medio de una medida que proviene de la solución fundamental de la ecuación del calor en cada espacio. Y las integrales se desarrollan en espacios euclidianos. Esto nos permite escribir la integral de Feynman en estos espacios, lo cual es el resultado fundamental del presente capítulo. Este parece ser el primer paso hacia la cuantización de una variedad riemanniana más general.

La representación de Schrödinger

En particular se hallará la solución fundamental de la ecuación del calor, también llamado kernel del calor, en variedades riemannianas flat. Como se dijo estas variedades pueden construirse como cociente de un poliedro, Q° en $\mathbb{R}^n$, por un subgrupo Γ del grupo euclidiano. Las soluciones de la ecuación del calor definidas en estas variedades pueden hallarse encontrando soluciones en la carta dada por el poliedro Q°. Aquellas soluciones de la ecuación del calor que resultan invariantes por la acción del subgrupo Γ son soluciones en la variedad.

Para ello se elige un punto $x_0 \in Q^\circ$. Se busca entonces una función $\rho_t^{x_0}(x)$ que verifique la ecuación del calor

$$\frac{\partial \rho_t^{x_0}(x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta \rho_t^{x_0}(x), \tag{6.15}$$

donde Δ es el Laplaciano. Además la función solución debe verificar la condición

$$\lim_{t\to 0^+} \rho_t^{x_0}(x) = \delta(x - x_0). \tag{6.16}$$

Como se vió previamente, la función debe ser de la forma

$$\rho_t^{x_0}(x) = \frac{1}{V}\sum_{K\in R} c_K(t) e^{iK\cdot(x-x_0)}, \tag{6.17}$$

donde se ha introducido el volumen V de la celda por cuestiones de normalización. Además $\rho_t^{x_0}(x)$ debe ser invariante por la acción del grupo Γ. Introduciendo esta última expresión en la ecuación (6.15) y considerando (6.16), se tiene

$$\rho_t^{x_0}(x) = \frac{1}{V}\sum_{K\in R} e^{iK\cdot(x-x_0)-K^2t/2}. \tag{6.18}$$

La expresión anterior es bastante simétrica. En particular es invariante por la acción del grupo. Esto es consecuencia de la simetría de los coeficientes del desarrollo. En efecto si $\gamma = (A, a) \in \Gamma$, entonces

$$\begin{aligned}(\gamma\rho_t)^{x_0}(x) &= \frac{1}{V}\sum_{K\in R} e^{iK\cdot\gamma(x-x_0)-K^2t/2} \\ &= \frac{1}{V}\sum_{K\in R} e^{iK\cdot A(x-x_0)+iK\cdot a-K^2t/2} \\ &= \rho_t^{x_0}(x).\end{aligned} \tag{6.19}$$

La última igualdad resulta de la ortogonalidad de A y del hecho de que Γ tiene índice finito en el grupo de simetrías del cristal. Luego la solución fundamental en Q° es la solución fundamental en Q.

Se define el espacio de Hilbert $L^2(Q, \rho_t^{x_0})$ de funciones complejas de cuadrado integrable en Q con producto escalar dado por la integración en la variedad

$$\langle f, g \rangle_Q = \int_Q \overline{f(x)} g(x) \rho_t^{x_0}(x)\, dx. \tag{6.20}$$

La diferencia entre este espacio y el de la representación de Schrödinger, $L^2(Q)$ es multiplicación por una función positiva. Si f_S es una función de $L^2(Q)$ entonces

$$f(x) = \frac{f_S(x)}{\sqrt{\rho_t^{x_0}(x)}} \tag{6.21}$$

es la correspondiente función de $L^2(Q, \rho_t^{x_0})$. Éste es un isomorfismo. A la representación en $L^2(Q, \rho_t^{x_0})$ se la llamará representación de Schrödinger pesada.

La representación holomorfa

El fibrado cotangente de una variedad flat tiene una estructura compleja natural. Se ha visto que una carta adecuada para estas variedades es el interior de un poliedro en $\mathbb{R}^n$ al que se denota por Q°. Usando esta carta el fibrado cotangente tiene una carta natural $Q^\circ \times \mathbb{R}^n$. La estructura compleja puede elegirse tomando los puntos del poliedro como las coordenadas reales de la variedad compleja. Cualquier función analítica definida en $Q^\circ \subset \mathbb{R}^n$ tiene una extensión analítica a $Q^\circ_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$, donde $Q^\circ_{\mathbb{C}}$ es $Q^\circ_{\mathbb{C}} = Q^\circ \times \mathbb{R}^n$. En particular la solución fundamental (6.17) tiene una extensión analítica en ambas variables x y x_0.

Si se considera la ecuación del calor en la variedad $Q^\circ_{\mathbb{C}}$

$$\frac{\partial \nu_t^{z_0}(z)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta \nu_t^{z_0}(z), \tag{6.22}$$

donde $z_0 = x_0 + iy_0$ es un punto de $Q^\circ_{\mathbb{C}}$ y el laplaciano Δ es el que corresponde a las $2n$ variables reales $x \in Q^\circ$ e $y \in \mathbb{R}^n$ de $z = x + iy$.

Es conocido que el núcleo del calor en una variedad producto es el producto de los respectivos núcleos del calor [49, 50, 131]. Debido a la naturaleza producto de la carta, la solución fundamental se puede calcular como el producto de la solución en Q° por la solución en $\mathbb{R}^n$, obteniéndose

$$\nu_t^{z_0}(z) = \frac{1}{V(2\pi t)^{n/2}}\, e^{-|\operatorname{Im}(z-z_0)|^2/2t} \sum_{K\in R} e^{iK\cdot\operatorname{Re}(z-z_0)-K^2t/2}. \tag{6.23}$$

Luego, se define el producto escalar

$$\langle\psi,\phi\rangle_{Q_\mathbb{C}} = \int_{Q_\mathbb{C}} \overline{\psi(z)}\phi(z)\nu_{t/2}^{x_0}(z)\,dz. \tag{6.24}$$

La solución fundamental ha sido evaluada en $t/2$ por conveniencia, como se pondrá de manifiesto más adelante. Se denotará $\mathcal{H}L^2(Q_\mathbb{C},\nu_{t/2}^{x_0})$ al espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable con este producto escalar.

Este espacio es un ejemplo de espacio de Hilbert con núcleo reproductor (*reproducing kernel Hilbert space*) [61]. Esto es debido a las propiedades del producto escalar. En estos espacios por definición existe una función holomorfa $K(z,\bar w)$, holomorfa en ambos argumentos, i.e. K es holomorfa en z y antiholomorfa en w (holomorfa en $\bar w$). Para todo $\phi\in\mathcal{H}L^2(Q_\mathbb{C},\nu_{t/2}^{x_0})$ se verifica la siguiente identidad

$$\phi(z) = \int_{Q_\mathbb{C}} K(z,\bar w)\phi(w)\nu_{t/2}^{x_0}(w)\,dw. \tag{6.25}$$

Considérese ahora un operador lineal A en este espacio representado por un kernel $K_A(z,\bar z_0)$ de la siguiente manera

$$A\phi(z) = \int_{Q_\mathbb{C}} K_A(z,\bar w)\phi(w)\nu_{t/2}^{x_0}(w)\,dw. \tag{6.26}$$

Dada una base ortonormal del espacio de Hilbert $\{u_i(\xi)\}$, $i=1,\ldots,$ el kernel reproductor puede escribirse

$$K(z,\bar w) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(z)\overline{u_i(w)}, \tag{6.27}$$

y el correspondiente kernel del operador A se calcula como sigue

$$K_A(z,\bar w) = \sum_{i=1}^{\infty}(Au_i(z))\overline{u_i(w)}. \tag{6.28}$$

A su vez la composición de operadores tiene asociada el siguiente kernel

$$K_{AB}(z,\bar{w}) = \int_{Q_{\mathbb{C}}} K_A(z,\bar{v}) K_B(v,\bar{w}) \nu_{t/2}^{x_0}(v)\, dv. \tag{6.29}$$

Isometría entre los espacios de Hilbert

Los espacios $L^2(Q,\rho_t^{x_0})$ y $\mathcal{H}L^2(Q_{\mathbb{C}},\nu_{t/2}^{x_0})$ son naturalmente isomorfos. El isomorfismo

$$\mathcal{A}_t \colon L^2(Q,\rho_t^{x_0}) \to \mathcal{H}L^2(Q_{\mathbb{C}},\nu_{t/2}^{x_0}) \tag{6.30}$$

viene dado por la integración sobre Q de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_t f(z) = \int_Q \rho_t^z(x) f(x)\, dx, \tag{6.31}$$

donde $\rho_t^z(x)$ es la extensión analítica de $\rho_t^{x_0}(x)$ en la variable x_0.

La expresión anterior es un isomorfismo. Ésto puede probarse explícitamente usando las expresiones para los núcleos de las ecuaciones de calor de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_t f, \mathcal{A}_t g\rangle_{Q_{\mathbb{C}}} &= \int_{Q_{\mathbb{C}}} \overline{\mathcal{A}_t f(z)} \mathcal{A}_t g(z) \nu_{t/2}^{x_0}(z)\, dz \\
&= \int_{Q\times Q} \overline{f(x)} g(x') \int_{Q_{\mathbb{C}}} \overline{\rho^z(x,t)} \rho_t^z(x') \nu_{t/2}^{x_0}(z)\, dz\, dx\, dx' \\
&= \int_{Q\times Q} \overline{f(x)} g(x') \rho_t^{x_0}(x'\delta(x-x')\, dx\, dx' \\
&= \langle f, g\rangle_Q
\end{aligned} \tag{6.32}$$

La integral sobre $Q_{\mathbb{C}}$ se evaluó usando las expresiones (6.18) y (6.23) junto con las relaciones de ortogonalidad usuales.

6.5. Integral de Feynman

En esta sección se propone una definición de integral de Feynman en la representación holomorfa, adecuada para las variedades flat. Se dará una motivación heurística de nuestra definición. En primer lugar consideramos la propagación de una función de onda ϕ durante un tiempo ϵ. Ésto es, se tiene una partícula moviéndose en la variedad sometida a algún potencial. La propagación está regida por la ecuación de Schrödinger con operador hamiltoniano H. La isometría (6.30) representa un mapa unitario entre la representación de Schrödinger y la representación holomorfa en $Q_{\mathbb{C}}$. Se llamará H al hamiltoniano en esta última y K_H al kernel correspondiente.

$$H\phi(z) = \int_{Q_{\mathbb{C}}} K_H(z,\overline{w})\phi(w)\nu_{t/2}^{x_0}(w)dw. \tag{6.33}$$

Partiendo de $\psi(z,t) = e^{-iHt}\psi(z,0)$ como solución de la ecuación de Schrödinger $i\frac{d\psi}{dt} = H\psi$ con $\psi(z,t) \in \mathcal{H}L^2(Q_{\mathbb{C}}, \nu_{t/2}^{x_0})$.

$$\begin{aligned}\psi(z,\epsilon) &= e^{-i\epsilon H}\psi(z,0) \approx (1 - i\epsilon H)\psi(z,0) = \\ &= \int_{Q_{\mathbb{C}}} K(z,\overline{w})\psi(w,0)d\nu_{t/2}^{x_0}(w) - i\epsilon \int_{Q_{\mathbb{C}}} K_H(z,\overline{w})\psi(w,0)d\nu_{t/2}^{x_0}(w).\end{aligned} \tag{6.34}$$

Luego

$$\begin{aligned}&\int_{Q_{\mathbb{C}}} K(z,\overline{w})\psi(w,0)\left(1 - i\epsilon\frac{K_H(z,\overline{w})}{K(z,\overline{w})}\right) \approx \\ &\qquad \approx \int_{Q_{\mathbb{C}}} K(z,\overline{w})e^{-i\epsilon K_H(z,\overline{w})/(K(z,\overline{w}))}\psi(w,0)d\nu_{t/2}^{x_0}(w).\end{aligned} \tag{6.35}$$

Lo anterior es analítico, convergente y nos permite despreocuparnos por problemas de dominio. Si bien, en general es cierto que

$$K_{H^n}(z,\overline{w})/(K(z,\overline{w})) \neq \left(K_H(z,\overline{w})/(K(z,\overline{w}))\right)^n, \tag{6.36}$$

las dos integrales de Feynman difieren en términos cuadráticos en ϵ para el caso estudiado, dando lugar a la misma cuántica.

El operador de evolución se obtiene exponenciando el hamiltoniano. Por medio del desarrollo en serie de la exponencial y utilizando la propiedad de los kerneles de las sucesivas potencias del hamiltoniano se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}e^{-i\epsilon H}\phi(z) &= \int_{Q_{\mathbb{C}}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\epsilon)^n}{n!} K_{H^n}(z,\bar{w})\right)\phi(w)\nu_{t/2}^{x_0}(w)\,dw \\ &= \int_{Q_{\mathbb{C}}} K(z,\bar{w})e^{-i\epsilon K_H(z,\overline{w})/K(z,\bar{w})}\phi(w)\nu_{t/2}^{x_0}(w)\,dw + \epsilon^2\psi(z,\epsilon).\end{aligned} \tag{6.37}$$

Así, llamando $U_\epsilon\phi(z) = e^{-i\epsilon H}\phi(z)$ y $\tilde{U}_\epsilon\phi(z)$ a la última integral, se tiene

$$U_\epsilon\phi(z) = \tilde{U}_\epsilon\phi(z) + \epsilon^2\psi(z,\epsilon). \tag{6.38}$$

Si se divide un intervalo de tiempo T en n partes iguales, es decir $T = n\epsilon$, se tiene

$$\mathcal{U}_T = \lim_{n\to\infty} U^n_{T/n}, \tag{6.39}$$

es decir

$$\mathcal{U}_T\phi(z) = \lim_{n\to\infty} U^n_{T/n}\phi(z) = \lim_{n\to\infty}\Big(\tilde{U}^n_{T/n}\phi(z) + (T/n)^2\Gamma(z,T/n)\Big) = \tilde{\mathcal{U}}_T\phi(z). \tag{6.40}$$

La última expresión sugiere definir un propagador de Feynman para un tiempo finito T entre dos puntos de la variedad z_0 y z_T, a tiempo T, dividiendo el intervalo $[0,T]$ en n subintevalos iguales y tomando el límite $n\to\infty$. Se obtiene

$$G(z_T, z_0, T) = \lim_{n\to\infty}\int_{Q^{n-1}_{\mathbb{C}}} e^{-i\frac{T}{n}\sum_{j=1}^n h(z_j,\bar{z}_{j-1})}\prod_{j=1}^{n} K(z_j,\bar{z}_{j-1})\prod_{j=1}^{n-1}\nu^{x_0}_{t/2}(z_j)\,dz_j, \tag{6.41}$$

donde se ha definido el símbolo normal del hamiltoniano

$$h(z,\bar{w}) = \frac{K_H(z,\bar{w})}{K(z,\bar{w})}. \tag{6.42}$$

6.6. Ejemplos

El caso euclidiano

Como primer ejemplo se mostrará que en el caso euclidiano la definición propuesta para la integral de camino permite obtener los resultados conocidos para el propagador [27]. Este caso no corresponde a una variedad compacta, pero la convergencia de las integrales está garantizada por la presencia de la medida gaussiana. Este caso es el ejemplo canónico de espacios de funciones holomorfas, llamado espacio de Segal–Bargman. El resultado puede compararse con otros en la bibliografía [139, 27].

Considérese aquí el caso euclidiano unidimensional. La variedad Q es $\mathbb{R}$. El kernel del calor en $\mathbb{R}$ es

$$\rho_t^{x_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-(x-x_0)^2/2t}. \tag{6.43}$$

La complexificación de Q es $Q_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$. El espacio de Hilbert holomorfo es el espacio de Bargmann [7, 61]. Éste es el espacio de Hilbert con kernel reproductor prototípico. El kernel reproductor en este caso es

$$K(z, \bar{w}) = e^{z\bar{w}/t}, \tag{6.44}$$

y la medida ν^{x_0} es

$$\nu_{t/2}^{x_0}(z) = \frac{1}{\pi t}\, e^{-|z-x_0|^2/t}. \tag{6.45}$$

La transformada (6.31) se reduce a la usual transformada de Bargmann, que puede escribirse como

$$\mathcal{A}_t f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-z)^2/2t} f(x)\, dx. \tag{6.46}$$

En lo que sigue se toma $t = 1$ y $x_0 = 0$. A continuación se considera el Hamiltoniano

$$H = z\frac{\partial}{\partial z}, \tag{6.47}$$

que corresponde a un oscilador armónico unidimensional renormalizado. El kernel de este hamiltoniano es $K_H(z, \bar{z}) = z\bar{z}e^{z\bar{z}}$. La ecuación (6.41) queda

$$G(z_T, z_0; T) = \lim_{n\to\infty} \int_{Q_{\mathbb{C}}^{n-1}} e^{\sum_{j=1}^{n} z_j\bar{z}_{j-1} - i\frac{T}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j\bar{z}_{j-1} - \sum_{j=1}^{n-1}|z_j|^2} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{dz_j}{2\pi}. \tag{6.48}$$

Luego, reagrupando los términos se obtiene

$$G(z_T, z_0; T) = \lim_{n\to\infty} \int_{Q_{\mathbb{C}}^{n-1}} e^{z_n\bar{z}_{n-1} - \epsilon\sum_{j=1}^{n-1} z_j\frac{(\bar{z}_j - \bar{z}_{j-1})}{\epsilon} - i\epsilon\sum_{j=1}^{n-1} z_j\bar{z}_{j-1} - i\epsilon z_n\bar{z}_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{dz_j}{2\pi}. \tag{6.49}$$

donde se conservó el $\epsilon = T/n$.

Como se ve esta expresión es la representación de la conocida integral de Feynman ([27] o [139])

$$G(z_T, z_0; T) = \int e^{z(T)\bar{z}(T)} e^{i\int_0^T (iz(s)\dot{\bar{z}}(s) - h(z(s),\bar{z}(s)))ds} \mathcal{D}[z(s)]. \tag{6.50}$$

El caso S^1

Considérese el caso en que la variedad $Q = S^1$. La solución fundamental $\rho_t^{\theta_0}(\theta)$, centrada en θ_0, satisface la ecuación del calor

$$\frac{\partial \rho_t^{\theta_0}(\theta)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_{S^1}\rho_t^{\theta_0}(\theta) \tag{6.51}$$

y converge a la delta de Dirac $\delta(\theta - \theta_0)$, para $t \to 0^+$. La función $\rho_t^{\theta_0}$ se escribe

$$\rho_t^{\theta_0}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k(t) e^{ik(\theta-\theta_0)}, \tag{6.52}$$

y por lo tanto las funciones ρ_k satisfacen

$$\frac{d\rho_k(t)}{dt} = -\frac{1}{2}k^2\rho_k(t). \tag{6.53}$$

Obteniéndose finalmente

$$\rho_t^{\theta_0}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik(\theta-\theta_0)-\frac{1}{2}k^2 t}. \tag{6.54}$$

Luego el producto escalar en S^1 de dos funciones f y g es

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m,n=-\infty} \bar{c}_m d_n e^{i\theta(n-m)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\theta-\theta_0)-k^2t/2}\, d\theta \\ &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_m d_n e^{-i(m-n)\theta_0-(m-n)^2t/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{c}_j d_{j-k}\right) e^{-ik\theta_0-k^2t/2},\end{aligned} \tag{6.55}$$

donde los c's y d's son los coeficientes de Fourier de f y g, respectivamente.

El espacio cotangente es el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Luego, la variedad compleja $S^1_{\mathbb{C}}$ puede ser representada por la carta $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ vista como la tira vertical en el plano complejo.

Las funciones holomorfas definidas en el cilindro son aquellas funciones holomórfas en $\mathbb{C}$ y además periódicas en la coordenada correspondiente a la parte real. Como puede verse fácilmente utilizando las condiciones de Cauchy–Riemann, son de la forma

$$\psi(w) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_l e^{ilw}. \tag{6.56}$$

Como el núcleo del calor en una variedad producto es el producto de los respectivos núcleos del calor [49, 50], en este caso en particular, el núcleo del calor en $S^1 \times \mathbb{R}$ se obtiene de los núcleos del calor en S^1 y $\mathbb{R}$ respectivamente, (6.54) y (6.43).

Luego, la medida $\nu^{z_0}(z,t)$ en este caso es

$$\nu_t^{z_0}(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\mathrm{Im}(z-z_0)^2}{2t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\,\mathrm{Re}(z-z_0)-n^2t/2}. \tag{6.57}$$

La transformada de Segal–Bargmann (6.31) de una función f es muy fácil de hallar en función de sus coeficientes de Fourier, está dada por

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta-z)-n^2t/2}\, d\theta \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imz-m^2t/2}. \end{aligned} \tag{6.58}$$

Teniendo en cuenta que $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}$ con n entero constituye una base ortonormal de $L^2(S^1)$, usando (6.21) y (6.31) puede obtenerse $\{\phi_n\}$, base ortonormal de $\mathcal{H}L^2(S^1 \times \mathbb{R}, \nu_t^{x_0})$

$$\phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}\rho_t^z(x)}{\sqrt{\rho_t^{x_0}(x)}} dx. \tag{6.59}$$

Luego, por la ecuación (6.27) el kernel reproductor es

$$\begin{aligned} K(z,\overline{w}) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikx}e^{-iky}}{\sqrt{\rho_t^{x_0}(x)\rho_t^{x_0}(y)}} \rho_t^z(x)\rho_t^{\overline{w}}(y)dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho_t^z(x)\rho_t^{\overline{w}}(x)}{\rho_t^{x_0}(x)} dx. \end{aligned} \tag{6.60}$$

Por otra parte, como se dijo al referirse a la ecuación (6.56) resulta que el kernel reproductor en el cilindro se escribe como

$$K(z,\bar{w}) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} k_{mn} e^{imz} e^{in\bar{w}}. \tag{6.61}$$

La propiedad (6.25) permite encontrar las condiciones que verifican los coeficientes

k_{mn}, en particular, tomando $z_0 = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \int_{(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}} K(z,\bar{w})\psi(w)\nu^{z_0}_{t/2}(w)\,dw \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi t}} \sum_{m,n,p,l=-\infty}^{\infty} \psi_l k_{mn} e^{imz} e^{-p^2t/4} \int_{(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}} e^{ilw+in\bar{w}+ip\operatorname{Re}w-(\operatorname{Im}w)^2/t}\,dw \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imz} \sum_{n,p,l=-\infty}^{\infty} \psi_l k_{mn} e^{-p^2t/4+(l-n)^2t/4} \delta_{l+n+p,0} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imz} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{mn} e^{-nlt/2},
\end{aligned} \tag{6.62}$$

de donde se deduce que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{mn} e^{-nlt/2} = \delta_{ml}. \tag{6.63}$$

Es decir, los coeficientes del kernel reproductor son los coeficientes de la matriz (infinita) inversa de la que tiene coeficientes $V_{mn} = e^{(-t/2)mn} = \xi^{mn}$.

Encontrar la expresión exacta de los coeficientes k_{mn} es un problema difícil. Sin embargo, si se hace un *ultraviolet cutoff*, es decir si se considera solamente un número finito de frecuencias, se puede obtener un expresión explícita.

Mediante un algoritmo puede obtenerse el kernel $K(z,\bar{w})$ hasta el orden r deseado

$$K_r(z,\bar{w}) = \sum_{m,n=-r}^{r} k_{mn} e^{imz} e^{in\bar{w}} \tag{6.64}$$

El kernel $K_r(z,\bar{w})$ reproduce el subespacio generado por $\left\{e^{ikz}\right\}_{k=0}^{r}$.

Matrices de Vandermonde

Por lo tanto, resolver k_{mn} implica encontrar la inversa de una matriz infinita de Vandermonde generalizada.

La matriz de Vandermonde generalizada usada en el presente caso es la siguiente

$$V(x) = \begin{pmatrix} x_1^{-n} & ... & x_1^{-2} & x_1^{-1} & 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ x_2^{-n} & ... & x_2^{-2} & x_2^{-1} & 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2n+1}^{-n} & ... & x_{2n+1}^{-2} & x_{2n+1}^{-1} & 1 & x_{2n+1} & x_{2n+1}^2 & ... & x_{2n+1}^n \end{pmatrix}. \tag{6.65}$$

Encontrar la expresión exacta de los coeficientes k_{mn} es un problema difícil. Sin embargo, puede considerarse solamente un número finito de frecuencias y obtener un expresión explícita, la cual reproduce hasta el orden deseado un subespacio generado por armónicos de orden inferior.

En este caso $x_i^j = e^{(-t/2)ij}$, por lo cual la matriz resultante posee mayor simetría en sus elementos, no obstante el alto grado de variabilidad en el orden de magnitud de sus elementos dificulta el estudio desde un punto de vista numérico.

Por lo tanto, encontrar k_{mn} involucra encontrar la inversa de una matriz de Vandermonde generalizada. La matriz de Vandermonde presente en este caso es

$$V^r = \begin{pmatrix} \xi^{-n(-n)} & \cdots & 1 & \cdots & \xi^{-nn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi^{n(-n)} & \cdots & 1 & \cdots & \xi^{nn} \end{pmatrix}. \tag{6.66}$$

Es un problema de interés en particular encontrar algoritmos para invertir matrices de Vandermonde generalizadas, [42, 87, 10, 115].

Pólya [113] ha dado condiciones suficientes en una matriz infinita A para asegurar la solución del sistema infinito de ecuaciones lineales $Au = b$, donde u y b son vectores infinitos. Es interesante destacar que no se necesita imponer condiciones sobre b. Dicha solución resulta no ser única, de hecho se demostró que posee infinitas soluciones [113]. Este teorema ha sido útil para la demostración de problemas similares, no triviales, como es el caso del trabajo de Copping [24] que mediante la aplicación del teorema de Pólya encuentra condiciones para la existencia de infinitas soluciones al problema de matrices infinitas $AX - BX = C$, donde B y C son matrices arbitrarias y A una matriz que verifique las condiciones del teorema de Pólya.

Cabe destacar que encontrar la inversa de una matriz infinita de Vandermonde en general es un problema complejo en lo que concierne a la existencia y unicidad, [115]. La tesis [115] estudia la convergencia de los elementos de la matriz de Vandermonde infinita a través del método de sección finita.

A continuación se definen los polinomios de Horner para la base de potencias $\{x^{-n}, ..., x^{-1}, 1, x, ..., x^n\}$.

Definición 6.2. *Sea*

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 + a_{-1}x^{-1} + a_{-2}x^{-2} + ... + a_{-n}x^{-n} \\ &= (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n+1})(x^{-1} - x_{n+2}^{-1})(x^{-1} - x_{n+3}^{-1})...(x^{-1} - x_{2n+1}^{-1}) \end{aligned} \tag{6.67}$$

el polinomio maestro cuyos ceros $(x_1, x_2, ..., x_{2n+1})$ son los nodos de la matriz de Vandermonde $V(x)$. Luego se definen los polinomios $\{p_{-n}(x), ..., p_{-1}(x), p_0(x), ..., p_n(x)\}$ como los polinomios de Horner de la base de potencias $\{x^{-n}, ..., x^{-1}, 1, x, ..., x^n\}$ por medio de

$$Q[t, x] = \frac{Q(t) - Q(x)}{t - x} \tag{6.68}$$

$$= p_{-n}t^{-n} + ... + p_{-1}t^{-1} + p_0(x) + p_1 t + ... + p_n(x)t^n \tag{6.69}$$

donde se define por conveniencia también el polinomio de Horner $p_{n+1}(x) = Q(x)$.

Puede obtenerse la matriz inversa de $V(x)$ por medio de un algoritmo. Se obtiene entonces $V^{-1}(x)$, la cual está dada por la siguiente expresión

$$V^{-1}(x) = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & p_1(x_2) & \cdots & p_1(x_{2n+1}) \\ p_2(x_1) & p_2(x_2) & \cdots & p_2(x_{2n+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{2n+1}(x_1) & p_{2n+1}(x_2) & \cdots & p_{2n+1}(x_{2n+1}) \end{pmatrix} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{Q'[x_i]}\right)_{i=1}^{2n+1} \tag{6.70}$$

Por medio de este algoritmo puede obtenerse el kernel $K(z,\bar{w})$ de manera aproximada hasta el orden r deseado

$$K_r(z,\bar{w}) = \sum_{m,n=-r}^{r} k_{mn} e^{imz} e^{in\bar{w}}. \tag{6.71}$$

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis se desarrollaron modelos de cuantización que permiten generar la evolución cuántica en espacios de configuación no triviales.

Los capítulos 1 y 2 se destinaron a introducir el concepto de cuantización y el formalismo de integrales de Feynman resaltando su aplicación a variedades riemannianas.

En el capítulo 3, se desarrolló un método inspirado en el formalismo de integrales de Feynman para el caso de grupos de Lie. Se estudió la evolución de una partícula cuyo espacio de configuración es un grupo de Lie equipado con una métrica riemanniana bi-invariante. Para ello se definió un propagador infinitesimal, el cual permite definir un propagador de Feynman. La integración se realizó sobre el espacio tangente al grupo en cada punto $g \in G$, esto es, en el álgebra de Lie del grupo en consideración por medio del paso al tangente mediante el mapa exponencial. Aparece un potencial adicional en la ecuación de Schrödinger dependiente de la curvatura escalar del espacio de configuración corroborando otros resultados previos. Ver [116].

Se estudió en particular el caso de una partícula libre cuyo espacio de configuración es el grupo $SU(2)$ y se desarrolló la cuantización de una partícula libre sobre la esfera S^n para el caso $n = 3$ y $n = 4$. Todos los resultados presentados en el capítulo 3 son originales, la primera parte de los mismos se encuentra publicada en [15].

En el capítulo 4 se presentó la conexión con el método de cuantización por medio de funciones holomorfas como el desarrollado por Hall [57] y con generalizaciones de la transformada de Segal-Bargmann.

Luego en el capítulo 5 se desarrolló un método original de integración funcional inspirado en integrales de Feynman y en relación con representaciones holomorfas de la mecánica cuántica. El formalismo tiene en consideración propiedades geométricas de las variedades a cuantizar y mediante el uso del mapa exponencial se desarrollaron las integrales que representan la evolución infinitesimal en el espacio tangente correspondiente.

En el capítulo 6 se construyó un método de cuantización por medio de integrales funcionales en variedades orientables compactas riemannianas de curvatura cero (*euclidean space forms*), como primer paso para la cuantización en espacios más generales. La integración se desarrolló de manera distinta a la del capítulo anterior, lo cual hace al formalismo esencialmente diferente. Las medidas de integración provienen de la solución fundamental de la ecuación del calor. Los espacios de Hilbert de funciones holomorfas definidos resultan ser ejemplos de espacios de Hilbert con núcleo reproductor (*Reproducing Kernel Hilbert Spaces*). La existencia de un núcleo reproductor permite escribir un propagador de Feynman y obtener así expresiones para la evolución cuántica que en el caso euclidiano coinciden con las expresiones conocidas de la integral de Feynman, ver por ejemplo [27]. El método de cuantización propuesto en el capítulo 6 es un desarrollo original de la presente tesis y si bien es aplicable a variedades de curvatura cero, el método que lleva a la construcción de la integral de Feynman es interesante en sí mismo. Además, permitió estudiar la cuantización de *space forms*, lo cual es un resultado novedoso. Estos resultados se encuentran en el trabajo [16].

Cabe destacar que las *euclidean space forms* de dimensión 3 presentan un interés particular en cosmología ya que permiten modelar la componente espacial de los llamados *flat-universe models*, ver [34, 97]. Ver los trabajos más recientes de J. Levin, en donde se busca desarrollar un modelo cosmológico plausible usando *euclidean space forms* orientables y compactas de dimensión 3 en concordancia con los resultados de las observaciones de la radiación de fondo cósmico de microondas (*cosmic microwave background*) [98, 99, 100, 97].

Líneas de investigación futuras

El fibrado cotangente de una variedad riemanniana admite una estructura compleja compatible con la estructura simpléctica y el levantamiento natural de la métrica riemanniana si y solo si la variedad es flat, es decir, la estructura compleja no es integrable salvo que la curvatura sea cero (ver capítulo 6).

La restricción en la integrabilidad para la estructura casi-compleja puede ser eludida si se modifica la métrica. En [43], en el contexto de cuantización por deformación, Gorbunov et al. construyen una métrica de Kähler en el espacio cotangente que involucra potencias del momento, obteniendo así una estructura de Kähler integrable.

También se ha probado que una variedad compleja puede construirse en un entorno de la sección nula del fibrado tangente de una variedad riemanniana real. Son los llamados tubos de Grauert [55, 56, 96, 127]. Las estructuras complejas definidas allí, llamadas estructura complejas adaptadas, son compatibles con la estructura simpléctica, dando lugar a variedades de Kähler [65]. En ciertos casos la estructura compleja existe en todo el tangente, por ejemplo, cuando la variedad base es un grupo de Lie compacto con una métrica bi-invariante.

Resulta interesante estudiar a futuro la posibilidad de ampliar los resultados del capítulo 6 y obtener una formulación de integrales de Feynman holomorfa para el caso de *space forms* no euclidianas.

Por otra parte, se podría profundizar la relación exsitente entre los métodos de cuantización desarrollados en la presente tesis y el formalismo de la cuantización geométrica.

Apéndice A

Variedades riemannianas pesadas

Sea (M, μ) una variedad riemanniana pesada (*weighted Riemannian manifold*) [49], una función suave $u(t, x)$ en $\mathbb{R}^+ \times M$ se llama solución fundamental de la ecuación del calor en un punto $y \in M$ si satisface en $\mathbb{R}^+ \times M$ la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_\mu u \tag{A.1}$$

y la condición

$$\lim_{t \to 0^+} u(t, .) = \delta_y. \tag{A.2}$$

Es decir, en el sentido de distribuciones, para toda $\phi \in \mathcal{D} := C_0^\infty(M)$,

$$\lim_{t \to 0^+} \int_M u(t, x)\phi(x) d\mu(x) = \phi(y). \tag{A.3}$$

Se dice que $u(t, x)$ es solución fundamental regular si, además de ser solución fundamental, es positiva y para todo $t > 0$ verifica $\int_M u(t, x) d\mu(x) \leq 1$.

Una función $q_t(x, y)$ en $\mathbb{R}^+ \times M \times M$ se llama solución fundamental (regular) de la ecuación del calor, si para todo $y \in M$, la función $(t, x) \to q_t(x, y)$ es una solución fundamental (regular) en y. Una función $p_t(x, y)$ definida en $\mathbb{R}^+ \times M \times M$ se llama kernel del calor del operador Δ_μ si para todo $f \in L^2, t > 0, x \in M$,

$$e^{t\Delta_\mu} f(x) = \int_M \rho_t(x, y) f(y) d\mu(y). \tag{A.4}$$

Teorema A.1. *[49] Toda variedad riemanniana pesada* (M, μ) *posee un único kernel del calor* $\rho_t(x, y)$*, el cual es una función* C^∞ *en* $\mathbb{R}^+ \times M \times M$ *y satisface las siguientes propiedades:*

- $\rho_t(x, y)$ *es una solución fundamental regular de la ecuación del calor*
- $\rho_t(x, y) = \rho_t(y, x)$
- $\rho_{t+s}(x, y) = \int_M \rho_t(x, z)\rho_s(z, y)d\mu(z)$

Veamos ahora el caso de una variedad pesada producto [49]. Se dice que (M, μ) es el producto directo de variedades pesadas (M', μ') y (M'', μ'') si M es el producto de M', M'' y $\mu = \mu' \otimes \mu''$. Vale que los correspondientes Laplacianos $\Delta_{\mu'}$ y $\Delta_{\mu''}$ se extienden a $L^2(M, \mu)$, conmutan y $\Delta_\mu = \Delta_{\mu'} + \Delta_{\mu''}$. Luego $e^{t\Delta_\mu} = e^{t\Delta_{\mu'}} e^{t\Delta_{\mu''}}$ y por lo tanto el núcleo del calor ρ_t en M es el producto tensorial de los núcleos del calor ρ'_t y ρ''_t en M' y M'' respectivamente

$$\rho_t(x, y) = \rho'_t(x', y')\rho''_t(x'', y''), \tag{A.5}$$

donde $x = (x', x'') \in M$ y $y = (y', y'') \in M$.

Apéndice B

Fórmula de Trotter

Teorema B.1 (Trotter). *Sean A y B dos operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $A+B$ un operador densamente definido y esencialmente autoadjunto en $Dom(A) \cap Dom(B)$. Vale el siguiente resultado:*

i) Para todo $\psi \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} \|e^{it(A+B)}\psi - (e^{itA/N}e^{itB/N})^N\psi\| = 0. \tag{B.1}$$

ii) Si A y B son acotados inferiormente, entonces para todo $\psi \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\lim_{N\to\infty} \|e^{-t(A+B)}\psi - (e^{-tA/N}e^{-tB/N})^N\psi\| = 0. \tag{B.2}$$

En ambos resultados, la expresion $A+B$ se refiere a la única extensión autoadjunta del operador definido en $Dom(A) \cap Dom(B)$.

Para ver la prueba de este teorema para el caso especial en que $A+B$ es densamente definido y autoadjunto en $Dom(A) \cap Dom(B)$ puede consultarse [64]. Para la demostración del teorema enunciado arriba, puede verse la sección $A.5$ de [41].

Apéndice C

Complexificación de un grupo de Lie compacto

Dado un grupo de Lie K compacto y conexo definiremos su complexificación $K_{\mathbb{C}}$ [57],[58].

En principio $K_{\mathbb{C}}$ debe ser un grupo complejo analítico cuya álgebra de Lie $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ sea la complexificación de $\mathfrak{k}$ (álgebra de Lie correspondiente a K). Este requisito no hace único a $K_{\mathbb{C}}$. Definimos entonces la complexificación de K de la siguiente manera:

Definición C.1. *Sea K un grupo de Lie compacto y conexo. Su complexifiación $K_{\mathbb{C}}$ es un grupo complejo-analítico de Lie junto con un homomorfismo de grupo de Lie $i : K \to K_{\mathbb{C}}$ con la siguiente propiedad: si H es cualquier grupo de Lie complejo-analítico y ϕ un homomorfismo de grupos de Lie de K en H, entonces existe un único homomorfismo complejo-analítico Φ de $K_{\mathbb{C}}$ en H tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & & K_{\mathbb{C}} \arrow[dl, "\Phi"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

En la definición anterior si K resulta ser simplemente conexo, entonces es posible probar que $K_{\mathbb{C}}$ es el único grupo de Lie conexo cuya álgebra de Lie $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ es la complexificación del álgebra de Lie $\mathfrak{k}$.

Teorema C.1. *Sea K un grupo de Lie compacto y conexo cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{k}$. Luego*

i) Existe una complexificacion $(i, K_{\mathbb{C}})$ y es única, salvo isomorfismos.

ii) $K_{\mathbb{C}}$ es conexo.

iii) El homomorfismo $i : K \to K_{\mathbb{C}}$ es inyectivo.

iv) El álgebra de Lie de $K_{\mathbb{C}}$ es la complexificacion de $K_{\mathbb{C}}$.

v) $i(K)$ es un subgrupo compacto maximal de $K_{\mathbb{C}}$.

Para ver la prueba de este teorema se puede consultar [71].

A modo de ejemplo mencionaremos los dos casos siguientes. Si $K = \mathbb{R}^n$, luego $K_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$. Por otro lado, si $K = SU(n)$, $K_{\mathbb{C}} = SL(n; \mathbb{C})$.

Observar que si $K = \mathbb{R}^d$ con la métrica usual, ρ_t coincide con la medida gaussiana.

En particular, en el caso que K sea simplemente conexo, la complexificación $K_{\mathbb{C}}$ es el grupo de Lie simplemente conexo (único) cuya álgebra de Lie $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ es $\mathfrak{l} + i\mathfrak{l}$.

Bibliografía

[1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Reading, second edition, 1978.

[2] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds Tensor, Tensor Analysis and Applications*. Addison Wesley, 1983.

[3] S. Albeverio. *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals: An Introduction*. Lecture notes in Mathematics. Springer, 2nd edition, 2008.

[4] V. I. Arnold, V. V. Koslov, and A. I. Neishtadt. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, volume 3 of *Enciclopædia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1988.

[5] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao, and T. Thiemann. Coherent state transforms for spaces of connections. *J. Funct. Anal.*, 135:519–551, 1996.

[6] B. E. Baaquie. *Quantum Finance, Path integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates*. Cambridge, University Press, 2004.

[7] V. Bargmann. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:187–214, 1961.

[8] A. O. Barut, A. Inomata, and G. Junker. Path integral treatment of the hydrogen atom in a curved space of constant curvature. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20:6271–6280, 1987.

[9] A. O. Barut, A. Inomata, and G. Junker. Path integral treatment of the hydrogen atom in a curved space of constant curvature: II, hyperbolic space. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 23:1179–1190, 1990.

[10] T. Bella, V. Olshecsky, and S. Perera. Traub-like algorithm for inversion of Laurent Vandermonde matrix in connection to greens matrices. preprint, 2009.

[11] F. A. Berezin. General concept of quantization. *Commun. Math. Phys.*, 40:153, 1975.

[12] N.D. Birrell and P.C.W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1986.

[13] M. Böhm and G. Junker. Path integration over compact and noncompact rotation groups. *J. Math. Phys.*, 28(9):1978–1994, 1987.

[14] M. Böhm and G. Junker. Path integration over the n-dimensional euclidean group. *J. Math. Phys.*, 30:1195–1197, 1989.

[15] G. Capobianco and W. A. Reartes. Quantum dynamics on the $SU(2)$ group. *Actas del VIII Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro*, pages 33–37, 2005.

[16] G. Capobianco and W. A. Reartes. Path integrals on euclidean space forms. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, 11-071:12, 2015. http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2015.071.

[17] P. Cartier and C. DeWitt-Morette. Functional integration. *Jour. Math. Phys.*, 41(6):4154–4187, 2000.

[18] H. B. G. Casimir. *Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics*. PhD thesis, Rijksuniversiteit te Leiden, 1931.

[19] H. B. G. Casimir. *Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics*. PhD thesis, Rijksuniversiteit te Leiden, 1931.

[20] M. Chaichian and A. Demichev. *Path Integrals in Physics*, volume 1. Springer, 2001.

[21] M. Chaichian and A. Demichev. *Path Integrals in Physics*, volume 1. Springer, 2001.

[22] K. S. Cheng. Quantization of a general dynamical system by Feynman's path integration formulation. *J. Math. Phys.*, 13(11):1723–1726, 1972.

[23] C. Cohen-Tanoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum Mechanics*, volume 1. John Wiley Sons, 1977.

[24] J. Copping. Application of a theorem of pólya to the solution of an infinite matrix equation. *Pacific J. Math.*, 4:21–28, 1954.

[25] R. C. T. da Costa. Quantum mechanics of a constrained particle. *Phys. Rev. A*, 23(4):1982–1987, 1981.

[26] R. C. T. da Costa. Constraints in quantum mechanics. *Phys. Rev. A*, 25(6):2893–2900, 1982.

[27] P. Deligne, P. Etingof, D. S. Fred, L. C. Jeffrey, D. Kazhdan, J. W. Morgan, D. R. Morrison, and E. Witten, editors. *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, volume 1. American Mathematical Society, Institute for Advanced Study, 1999.

[28] B. S. DeWitt. Dynamical theory in curved spaces. A review of the classical and quantum principles. *Rev. Mod. Phys.*, 29 (3):377–397, 1957.

[29] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 4th edition, 1978.

[30] P. Duclos, P. Exner, and D. Krejčiřík. Locally curved quantum layers. *arXiv:quant-phys/9910035*, 1999.

[31] I. H. Duru and H. Kleinert. Solution of the path integral for the H-atom. *Physics Letters*, 84B:185–188, 1979.

[32] I. H. Duru and H. Kleinert. Quantum mechanics of H-atom from path integrals. *Fortschitte der Physik*, 80:401–435, 1982.

[33] A. Dynin. A rigorous path integral construction in any dimension. *Lett. Math. Phys.*, 44:317–329, 1998.

[34] G. Ellis. Topology and cosmology. *Gen. Rel. Grav.*, 2(1):7–21, 1971.

[35] A. Echeverria Enriquez and M. C. Munoz Lecanda. Mathematical foundation of geometric quantization. *Extracta Mathematicae*, 13:135–238, 1998.

[36] B. V. Fedosov. A simple geometric construction of deformation quantization. *J. Diff. Geom.*, 40:213–238, 1994.

[37] B.V. Fedosov. *Deformation Quantization and Index Theory.* Springer series in Nuclear and Particle Physics. Akademie Verlag - Berlin, 1996.

[38] R. P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals.* McGraw-Hill, 1965.

[39] G. Folland. *Harmonic Analysis in Phase Space.* Princeton University Press, 1989.

[40] R. Froese and I. Herbst. Realizing holonomic constraints in classical and quantum mechanics. In *Proceedings of the VAB-GIT International Conference on Differential Equations*, 1999. mp_arc preprint no. 00-426 at http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/.

[41] J. Glimm and A. Jaffe. *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View.* Springer, 1987.

[42] I. Gohberg, V. Olshevsky, and J. Traub. The fast generalized Parker-Traub algorithm for inversion of Vandermonde and related matrices. In *in Communications, Computation, Control and Signal Processing*, pages 208–234. Kluwer Academic Publishing, 1997.

[43] I. V. Gorbunov, S. L. Lyakhovich, and A. A. Sharapov. Wick quantization of cotangent bundles over Riemannian manifolds. *J. Geom. Phys.*, 53:98–121, 2005.

[44] M. J. Gotay. Functorial geometric quantization and Van Hove's theorem. *International Journal of Theoretical Physics*, 19(2), 1980.

[45] M. J. Gotay. Constraints, reduction, and quantization. *J. Math. Phys.*, 27(8):2051–2066, 1986.

[46] M. J. Gotay. On the Groenewold-van Hove problem for R2n. *Journal of Mathematical Physics*, 40:2107–2116, 1999.

[47] M. J. Gotay, Hendrik Grundling, and C. A. Hurst. A Groenewold-van Hove theorem for S2. arXiv:dg-ga/9502008v1, 1996.

[48] M. J. Gotay and J. M. Nester. *Generalized constraint algorithm and special presymplectic manifolds in Geometric Methods in Mathematical Physics editors G. Kaiser and J. E. Marsden*, volume 775 of *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1980.

[49] A. Grigor'yan. Heat kernels on weighted manifolds and applications. *Contemp. Math.*, pages 93–191, 2006.

[50] A. Grigor'yan. *Heat Kernel and Analysis on Manifolds*. Studies in Advanced Mathematics. AMS, 2009.

[51] H. J. Groenewold. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, 12:405–460, 1946.

[52] C. Grosche and F. Steiner. Path integrals on curved manifolds. *Ztschr. Physik*, C36:699–714, 1987.

[53] C. Grosche and F. Steiner. The path integral on the pseudosphere. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 182:120–156, 1988.

[54] H. Grundling and C. A. Hurst. The quantum theory of second class constraints. *Commun. Math. Phys.*, 119:75–93, 1988.

[55] V. Guillemin and M. Stenzel. Grauert tubes and the homogeneous Monge-Ampère equation. *J. Differential Geom.*, 34(2):561–570, 1991.

[56] V. Guillemin and M. Stenzel. Grauert tubes and the homogeneous Monge-Ampére equation II. *J. Differential Geom.*, 35(3):627–641, 1992.

[57] B. C. Hall. The Segal-Bargmann "Coherent state" transform for compact Lie groups. *Journal of Functional Analysis*, 122:103–151, 1994.

[58] B. C. Hall. The inverse Segal-Bargmann transform for compact lie groups. *J. Funct. Anal.*, 143:98–116, 1997.

[59] B. C. Hall. Quantum mechanics in phase space. *Contemporary Mathematics*, 214:47–62, 1998.

[60] B. C. Hall. Harmonic analysis with respect to heat kernel measure. *Bull. Am. Math: Soc.*, 38(1):43–78, 2000.

[61] B. C. Hall. Holomorphic methods in mathematical physics. arXiv: quant-ph/9912054v2, 2000.

[62] B. C. Hall. Geometric quantization and the generalized Segal-Bargmann transform for lie groups of compact type. *Comm. Math. Phys.*, 226:233–268, 2002.

[63] B. C. Hall. The Segal-Bargmann transform for noncompact symmetric spaces of the complex type. *J. Funct. Anal.*, 227:338–371, 2005.

[64] B. C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians.* Springer, 2013.

[65] B. C. Hall and W. D. Kirwin. Adapted complex structures and the geodesic flow. *Math. Ann.*, 350(2):455, 2011.

[66] B. C. Hall and J. Mitchell. The Segal-Bargmann transform for noncompact symmetric spaces of the complex type. *J. Funct. Anal.*, 227:338–371, 2005.

[67] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Academic Press, 1978.

[68] S. Helgason. *Group and Geometric Analysis (Integral Geometry, Invariant Differential Operators and Spherical Functions).* American Mathematical Society, 1984.

[69] A. C. Hirshfeld and P. Henselder. Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics. *Am. J. Phys.*, 70:537, 2002.

[70] R. Ho and A. Inomata. Exact path-integrals treatment of the hidrogen atom. *Phys. Rev. Lett.*, 48:231–234, 1982.

[71] G. P. Hochschild. *The Structure of Lie Groups.* Holden-Day, San Francisco, 1965.

[72] L. Hörmander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* Princeton, N.Y., 1966.

[73] L. Van Hove. Sur certaines represéntations unitaires dun groupe infini de transformations. *Mem. de l Acad. Roy. de Belgique (Classe des Sci.)*, XXVI:61–102, 1951.

[74] N. E. Hurt. *Geometric quantization in action.* Reidel, 1982.

[75] G. Junker. *Path Integration on Homogeneous Spaces, In: Path Integrals from meV to MeV, proceedings.* World Scientific, 1989.

[76] L. Kaplan, N. T. Maitra, and E. J. Heller. Quantizing constrained systems. *Phys. Rev. A*, 56(4):2592–2599, 1997.

[77] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Verlag, 1966.

[78] A. A. Kirillov. *Geometric Quantization*, volume 4 of *Encyclopedia of Mathematical Sciences-Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1990.

[79] J. R. Klauder. Continuous-representation theory I. *J. Math. Phys.*, 4:1055–1058, 1963.

[80] J. R. Klauder. Continuous-representation theory II. *J. Math. Phys.*, 4:1058–1073, 1963.

[81] J. R. Klauder. Continuous-representation theory III. *J. Math. Phys.*, 5:177–187, 1964.

[82] H. Kleinert. Quantum equivalence principle for path integrals in spaces with curvature and torsion. *Mod. Phys. Lett. A*, 4:2329, 1989.

[83] H. Kleinert. Path integral on spherical surfaces in D dimensions and on group spaces with charged and Dirac monopoles. *Phys. Lett. B*, 236:315, 1990.

[84] H. Kleinert. *Path Integrals in Quantum Mechanics Statistics and Polymer Physics*. World Scientific, 2nd edition, 1995.

[85] H. Kleinert. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets*. World Scientific, 3rd edition, 2004.

[86] H. Kleinert and S. V. Shabanov. Proper Dirac quantization of free particle on D-dimensional sphere. *Phys. Lett. A*, 232(3):482, 1996.

[87] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume 1 of *Addison-Wesley series in computer science and information processing*. ADDISON WESLEY (PEAR), 2011.

[88] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume 1. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1963.

[89] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume 2. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1969.

[90] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, volume 1 and 2, two volumes bound as one. Dover Publishing, Inc., 1957.

[91] B. Kostant. *Quantization and Unitary Representations in Lecture notes in Modern Analysis III editor C. T. Taam*, volume 170 of *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1970.

[92] K. Kowalski and J. Rembieliński. Quantum mechanics on a sphere and coherent states. *J. Phys. A: Math. Gen*, 33:6035–6048, 2000.

[93] K. Kowalski, J. Rembieliński, and L. C. Papaloucas. Coherent states for a quantum particle on a circle. arXiv:quant-ph/9801029v1, 1998.

[94] W. Kühnel. *Differential Geometry, Curves – Surfaces – Manifolds*. AMS, 2nd edition, 2006.

[95] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mecánica Cuántica. Teoría no Relativista*, volume 3 of *Curso de Física Teórica*. Reverté, 1969.

[96] L. Lempert and R. Szoke. Global solutions of the Monge-Ampère equation and complex structures on the tangent bundle of Riemannian manifolds. *Math. Ann.*, 290(4):698–712, 1991.

[97] J. Levin. Topology and the cosmic microwave background. *Physics Reports*, 365:251–333, 2002.

[98] J. Levin, E. Scannapieco, G. de Gasperis, J. Silk, and J.D. Barrow. How the universe got its spots. *Phys. Rev. D*, 58:123006, 1998.

[99] J. Levin, E. Scannapieco, and J. Silk. Is the universe infinite or is it just really big? *Phys. Rev. D*, 58:103516, 1998.

[100] J. Levin, E. Scannapieco, and J. Silk. The topology of the universe: the biggest manifold of them all. *Class. Quantum Grav.*, 15:2689, 1998.

[101] R. G. Littlejohn and M. Reinsch. Gauge fields in the separation of rotations and internal motions in n–body problem. *Review of Modern Physics*, 69(1):213–275, 1997.

[102] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer-Verlag, first edition, 1994.

[103] P. McMullen and E. Schulte. *Abstract Regular Polytopes*. Cambridge University Press, 2002.

[104] A. Mostafazadeh. Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem: The scalar curvature factor in the Schrödinger equation: I. *J. Math. Phys.*, 35:1025–1138, 1994.

[105] A. Mostafazadeh. Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem: The scalar curvature factor in the Schrödinger equation: II. *J. Math. Phys.*, 35:1095–1124, 1994.

[106] A. Mostafazadeh. Scalar curvature factor in the Schrödinger equation and scattering on a curved surface. *Phys.Rev. A*, 54:1165–1170, 1996.

[107] E. Nelson. Feynman integrals and the Schrödinger equation. *J. Math. Phys.*, 5:332–343, 1964.

[108] E. Nelson. *Quantum Fluctuations*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, 1985.

[109] A. Newlander and L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math.*, 65:391–404, 1957.

[110] G. Ólafsson and B. Ørsted. Generalization of the Bargmann transform. In Dobrev, Döbner, and Hilgert, editors, *Proceedings of a Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics, Clausthal.* World Scientific, 1996.

[111] G. Ólafsson and H. Schlichtkrull. The Segal-Bargmann transform for the heat equation associated with root systems. *Adv. in Math.*, 208:422–437, 2007.

[112] A. Perelomov. *Generalized Coherent States and Their Applications.* Springer–Verlag, 1986.

[113] G. Polya. Eine einfache, mit funktiontheoretishen aufgaben verknüpfte, hinreichende bedingung fur die auflbösbarkeit eines systems unendlich vieler linearer gleichungen. *Comment. Math. Helv.*, 11:234–252, 1939.

[114] M. Puta. *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization.* Kluwer, 1993.

[115] H. Rabe. The finite section method for infinite vandermonde matrices and applications. Thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree Magister Scientiae in Mathematics at the North-West University (Potchefstroom Campus), 2007.

[116] W. A. Reartes. Cuantización de Feynman en variedades riemannianas. Tesis de Doctor en Matemática, Universidad Nacional del Sur, 2001.

[117] W. A. Reartes. Path integral quantization of the sphere. *New Advances in Celestial and Hamiltonian Systems*, pages 225–237, 2004.

[118] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis*, volume 1. Academic Press, 1980.

[119] G. Roepstorff. *Path Integral Approach to Quantum Physics.* Springer, first edition, 1994.

[120] Miroslav Englis S. Twareque Ali. Quantization methods: A guide to physicists and analysts. *Rev. Math. Phys.*, 17:391, 2005.

[121] L. S. Schulman. *Techniques and Applications of Path Integration.* John Wiley Sons, 1981.

[122] Sergei V. Shabanov and John R. Klauder. Path integral quantization and riemannian-symplectic manifolds. *Physics Letters B*, 435:343–349, 1998.

[123] D. J. Simms and N. M. J. Woodhouse. *Lectures on Geometric Quantization*, volume 53 of *Lecture notes in Physics.* Springer-Verlag, 1976.

[124] B. Simon. *Functional integration and quantum physics.* AMS Chelsea Publishing, second edition, 2005.

[125] Jedrzej Śniatycki. *Geometric Quantization and Quantum Mechanics.* Applied Mathematical Sciences (30). Springer-Verlag, New York, 1980.

[126] M. B. Stenzel. The Segal-Bargmann transform on a symmetric space of compact type. *Journal of Functional Analysis*, 165:44–58, 1999.

[127] R. Szöke. Complex structures on tangent bundles of Riemannian manifolds. *Math. Ann.*, 291(3):409–428, 1991.

[128] Y. Ohnuki T. Kashiwa and M. Suzuki. *Path Integral Methods.* Oxford Science Publications, first edition, 1997.

[129] F. Takens. Motion under the influence of a strong constraining force. In *Global Theory of Dynamical Systems*, volume 819 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 425–445. Springer-Verlag, 1980.

[130] W. Tomé. *Path Integrals on Group Manifolds - The Representation Independent Propagator for General Lie Group.* World Scientific, first edition, 1998.

[131] S. van Leeuwen. The Segal-Bargmann transform and its generalizations. arXiv:, 2009.

[132] S. Vandoren. Lectures on riemannian geometry, part II: Complex manifolds. *MRI Masterclass in Mathematics, Utretch*, 2008.

[133] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk. *Representation of Lie Groups and Special Functions*, volume 1. Kluwer Academic Publishers, 1991.

[134] R. O. Wells, Jr. *Differential Analysis on Complex Manifolds*. Springer-Verlag, 1980.

[135] F. W. Wiegel. *Introduction to Path–Integral Methods in Physics and Polymer Science*. World Scientific, 1986.

[136] Joseph A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. AMS Chelsea Publishing, 6th edition, 2006.

[137] N. M. J. Woodhouse. *Geometric Quantization*. Clarenton Press. Oxford, second edition, 1991.

[138] K. Yano. *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*. Pergamon Press, 1965.

[139] J. Zinn-Justin. *Path Integrals in Quantum Mechanics*. Oxford University Press, first edition, 2005.

Índice alfabético