



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

TESIS DE DOCTORADO EN INGENIERÍA

**MÁSTILES ARRIOSTRADOS: ANÁLISIS DINÁMICO NO LINEAL Y  
CUANTIFICACIÓN DE INCERTIDUMBRES**

Jorge Sebastian Ballaben

BAHIA BLANCA

ARGENTINA

2016

## **PREFACIO**

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ingeniería durante el período comprendido entre el 14 de Septiembre de 2011 y el 23 de Diciembre de 2015, bajo la dirección de la Dra. Marta Rosales y el Dr. Sergio Preidikman (Universidad Nacional de Córdoba).



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el ..../..../..... , mereciendo la calificación de .....(.....)

## **RESUMEN**

Frecuentemente las empresas de telecomunicaciones (radio, TV, telefonía móvil, etc.) hacen uso de mástiles arriostrados como estructuras de soporte de sus antenas. Esta tipología estructural está generalmente conformada por una columna esbelta de sección triangular, reticulada, que es soportada por varios niveles de cables tensos. Estudios detallados de la respuesta de mástiles arriostrados, frente a acciones dinámicas como viento o sismo, no son frecuentes pese al gran potencial de impacto adverso, debido a que se trata de una estructura flexible y a que los cables añaden un comportamiento geoméricamente no lineal. Por otra parte, algunos parámetros estructurales como la tensión de los cables o la rigidez del mástil tienen un alto grado de incertidumbre. En el primer caso, porque generalmente no se cuenta con dispositivos que permitan medir con precisión esta variable y en el segundo, porque frecuentemente el mástil debe ser reforzado (para cumplir con los requerimientos de rigidez de la estructura, cada vez mayores, debidos a la creciente sensibilidad de los equipos instalados) y la gran variedad de mecanismos de refuerzo usados (incluso dentro de la misma torre) no permite evaluar su efectividad.

En este trabajo, primeramente, se presentan estudios sobre la dinámica no lineal de mástiles arriostrados, mediante programas comerciales de elementos finitos, explorando también la sensibilidad de la respuesta a la variación de parámetros de diseño, como la tensión inicial de los cables o la rigidez del mástil. Las cargas dinámicas provenientes de la acción del viento son generadas como procesos estocásticos, con consideración de las correlaciones espaciales y temporales, a través del Método de Representación Espectral (SRM). Luego, se presentan estudios sobre la propagación de incertidumbres en cargas o parámetros estructurales sobre la respuesta. Para ello se desarrollaron modelos simplificados (tipo cable-viga o columna-cable) y de orden reducido. Finalmente, un modelo de elementos finitos no lineal fue implementado, con el objetivo de crear una herramienta de cálculo y/o verificación de la respuesta estática y/o dinámica de mástiles arriostrados que resulte útil tanto para futuras investigaciones, como para el uso profesional.

## **ABSTRACT**

Guyed masts are frequently used by telecommunication companies (radio, TV, cell, etc.) as support structures for the antennas. A typical configuration comprises a lattice tower with triangular cross-section, supported by several levels of prestressed guys. Despite the large potential of adverse impact, considering the slenderness of the structure and the non linear behavior of the guys, dynamic analysis of guyed masts subjected to natural loads, as wind and earthquakes, are not commonly addressed in detail. Furthermore, a high level of uncertainty is present on structural parameters such as the initial tension of the guys, due de lack of instruments to precisely measure it in the field, or the mast stiffness, since the mast frequently must be reinforced (the communication technologies poses increasing higher structural demands since the growing sensitivity of the new equipment) and the large extent of adopted reinforcement mechanisms (even in a single structure) does not allow the evaluation of their performance.

In this thesis, first, the non linear dynamic response of guyed masts subjected to wind loads is studied, using finite element commercial software. The sensitivity of the response to design parameters, as the initial pretension of the guys or the stiffness of the mast is also explored. The dynamic wind load records are simulated as stochastic processes, with consideration of temporal and spatial correlations, through the Spectral Representation Method (SRM). Next, simplified and reduced order models (ROM) of guyed structures were developed and tested. Then, by means of the ROM and considering structural or load parameters as stochastic variables, uncertainty propagation studies were performed. Finally, an ad hoc non linear finite element tool, to study the static and dynamic behavior of guyed structures, is developed, which can be useful both for future research in the topic as well as for professional use.

# Contenido

Título . . . . .	i
Prefacio . . . . .	ii
Resumen . . . . .	iii
Tabla de contenidos . . . . .	iv
Lista de Figuras . . . . .	vii
Lista de Tablas . . . . .	xi
Agradecimientos . . . . .	xiv
Dedicatoria . . . . .	xv
<b>1 Introducción General.</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación y estado del arte. . . . .	1
1.2 Originalidad y aportes. . . . .	6
1.3 Objetivos. . . . .	6
1.4 Organización de la tesis. . . . .	7
<b>2 Modelado dinámico de las cargas de viento</b>	<b>9</b>
2.1 Introducción. . . . .	9
2.2 Método de Representación Espectral (SRM). . . . .	10
2.2.1 SRM: Marco teórico. . . . .	10
2.2.2 Aplicación del SRM para reproducir el campo de velocidades del viento. . . . .	12
2.3 Construcción de registros temporales de carga de viento. . . . .	15
2.4 Comentarios Finales. . . . .	17
<b>3 Análisis de mástiles arriostrados via FEM</b>	<b>19</b>
3.1 Introducción. . . . .	19
3.2 La estructura y el modelo. . . . .	20
3.2.1 Estudios de sensibilidad. . . . .	21
3.2.2 Cargas dinámicas. . . . .	23
3.2.3 Aplicación de las cargas. . . . .	23
3.3 Resultados de los estudios. . . . .	23
3.3.1 Desplazamientos del mástil arriostrado. . . . .	24
3.3.2 Tensión dinámica de las riostras. . . . .	31
3.4 Comentarios Finales. . . . .	34

<b>4</b>	<b>Derivación de ec. cable–viga y construcción de mod. reducidos.</b>	<b>35</b>
4.1	Introducción. . . . .	35
4.2	Herramientas para la deducción de las ecuaciones diferenciales de vigas y cables. . . . .	36
4.2.1	Principio de Hamilton. Concepto general. . . . .	36
4.2.2	Conceptos sobre cálculo de variaciones y minimización de funcionales. . . . .	38
4.3	Deducción de las ecuaciones diferenciales de vigas y cables tensos. . . . .	41
4.3.1	Ecuaciones diferenciales de vigas Euler-Bernoulli. . . . .	41
4.3.2	Ecuaciones diferenciales de cables tensos. . . . .	44
4.4	Sistema compuesto viga/columna-cable y modelos reducidos. . . . .	48
4.4.1	Planteo del problema. . . . .	48
4.5	Formulación variacional. . . . .	50
4.5.1	Proyección de Bubnov-Galerkin y modelo de orden reducido (ROM). . . . .	51
4.6	Comentarios Finales. . . . .	54
<b>5</b>	<b>Análisis de prop. de incertidumbre en ROM de mástiles arriostrados</b>	<b>55</b>
5.1	Introducción. . . . .	55
5.2	Modelado y cuantificación de incertidumbres. . . . .	56
5.2.1	El método de Monte Carlo. . . . .	57
5.2.2	El Principio de Máxima Entropía (PME). . . . .	58
5.2.3	Parámetros estocásticos. . . . .	59
5.2.4	Obtención de funciones de distribución de probabilidad de los resultados. . . . .	60
5.3	Modelo viga-cable con carga armónica. . . . .	61
5.3.1	Descripción del Modelo. . . . .	61
5.3.2	Definición de la variable aleatoria. . . . .	62
5.3.3	Cargas y duración del ensayo. . . . .	63
5.3.4	Modelo reducido. . . . .	63
5.3.5	Resultados. . . . .	65
5.4	Modelo columna-cable con cargas estocásticas. . . . .	72
5.4.1	Descripción del modelo. . . . .	72
5.4.2	Modelo reducido. . . . .	73
5.4.3	Cargas y duración del ensayo. . . . .	74
5.4.4	Parámetros estocásticos y distribuciones de probabilidad. . . . .	75
5.4.5	Sobre los resultados. . . . .	75
5.4.6	CASO 1. Carga de viento estocástica. $H$ , $EI$ y $V_n$ determinísticos. . . . .	76
5.4.7	CASO 2. Carga de viento estocástica. $V_n$ como variable estocástica. $H$ y $EI$ determinísticos. . . . .	85
5.4.8	CASO 3. Carga de viento estocástica. $H$ como variable estocástica. $EI$ y $V_n$ determinísticos. . . . .	87
5.4.9	CASO 4. Carga de viento estocástica. $EI$ estocástico. $H$ y $V_n$ determinísticos. . . . .	90

5.4.10	CASO 5. Carga de viento estocástica. $V_n$ y $EI$ conjuntamente estocásticos. $H$ determinístico. . . . .	92
5.4.11	CASO 6. Carga de viento estocástica. $V_n$ y $H$ conjuntamente estocásticos. $EI$ determinístico. . . . .	93
5.5	Comentarios Finales. . . . .	94
<b>6</b>	<b>Modelo FEM no lineal ad hoc de mástiles arriostrados.</b>	<b>98</b>
6.1	Introducción. . . . .	98
6.2	Formulación de elementos finitos no lineal de cables en tres dimensiones.	99
6.2.1	Ecuaciones diferenciales de cables tensos en tres dimensiones. . . . .	99
6.2.2	Forma débil de las ecuaciones diferenciales de cables. . . . .	100
6.2.3	Formulación de elementos finitos no lineal para cables tensos en tres dimensiones. . . . .	101
6.2.4	Solución de ecuaciones de elementos finitos no lineales. . . . .	111
6.2.5	Verificación del modelo. . . . .	123
6.3	Programa adhoc para el cálculo de estructuras arriostradas por medio de elementos finitos. . . . .	127
6.3.1	Elementos viga 3D. . . . .	127
6.3.2	Mallado. . . . .	129
6.3.3	Algoritmos de ensamblado. . . . .	129
6.3.4	Ejemplo de aplicación. . . . .	130
6.4	Comentarios Finales. . . . .	141
<b>7</b>	<b>Conclusiones y Sugerencias de Trabajo Futuro</b>	<b>143</b>
7.1	Resumen. . . . .	143
7.2	Aportes y Conclusiones. . . . .	145
7.2.1	Modelos dinámicos de cargas de viento. . . . .	145
7.2.2	Estudios paramétricos de mástiles arriostrados. . . . .	145
7.2.3	Modelos reducidos y estudios de propagación de incertidumbre. . . . .	146
7.2.4	Desarrollo de herramientas específicas para cálculo y verificación de estructuras arriostradas. . . . .	148
7.3	Sugerencias de trabajos futuros. . . . .	149
<b>A</b>	<b>Apéndice: Códigos de Matlab y GiD.</b>	<b>158</b>

# Lista de Figuras

1.1	Mástil arriostrado. . . . .	2
2.1	Espectro de viento propuesto por Davenport . . . . .	13
2.2	Comparación entre el espectro de velocidades de viento teórico de partida y el de las señales generadas numéricamente via SRM. . . . .	15
2.3	Variación del valor medio de la carga de viento con la altura. . . . .	17
2.4	Registro típico de carga de viento en un punto $z$ del mástil. . . . .	17
3.1	Geometría del mástil arriostrado . . . . .	21
3.2	Registro típico de desplazamientos en el extremo superior del mástil arriostrado. . . . .	24
3.3	Desplazamientos máximos para todas las combinaciones de parámetros y tres alturas distintas. . . . .	25
3.4	Desplazamientos máximos para algunas combinaciones de parámetros $D$ y $TS$ y para un valor fijo de $IP = 25$ kN, para dos alturas distintas. (a) 60m, (b) 120m. . . . .	26
3.5	Desplazamientos máximos para algunas combinaciones de parámetros a 120m. . . . .	27
3.6	Influencia de los parámetros sobre los desplazamientos máximos a distintas alturas. . . . .	28
3.7	Influencia de los parámetros sobre los desplazamientos medios a distintas alturas. . . . .	29
3.8	Comparación entre desplazamientos máximos obtenidos para todas las combinaciones de parámetros estudiadas y con distintos enfoques para modelar las cargas. . . . .	30
3.9	Registro de desplazamiento típico que se obtiene cuando se usa una carga periódica para simular la dinámica del viento. . . . .	30
3.10	Comparación de FFTs de desplazamientos provocados por cargas de viento simuladas por medio de (a) un campo de velocidades estocástico (CASO 1) (b) una carga periódica con frecuencias dentro de la zona pico del espectro de viento (CASO 2). . . . .	31
3.11	Tensiones dinámicas máximas, medias y mínimas para los cables en el nivel 2, y en la dirección "b". . . . .	32

3.12	Tensiones dinámicas máximas, medias y mínimas para los cables en el nivel 1, y en la dirección "a". . . . .	33
4.1	Formulación de cables tenso: a) Detalle de configuración de referencia ; b) Componentes de tensión inicial. . . . .	44
4.2	Configuraciones del mástil arriostrado: a) estática; b) dinámica. . . . .	49
4.3	Verificación del modelo de orden reducido. Desplazamientos en el extremo usando los dos primeros modos normales en ROM vs resultados obtenidos de un software comercial de elementos finitos. . . . .	52
5.1	Diagrama de flujo de estudio de cuantificación de incertidumbre. . . . .	57
5.2	Sistema viga-cable. . . . .	62
5.3	Representación de los tres primeros modos normales del sistema viga-cable estudiado. . . . .	64
5.4	Desplazamientos transversales en $x_b = 4\text{m}$ usando el modelo de orden reducido (análisis determinístico) y para los casos extremos de $H$ . a) historia de desplazamientos; b) FFT. . . . .	66
5.5	Convergencia de la desviación estándar en simulaciones Monte Carlo. . . . .	67
5.6	PDF de los desplazamientos máximos absolutos de la viga, en $x_b = 4\text{ m}$ , considerando a $H$ como variable estocástica, para todos los casos de $H_m$ . . . . .	68
5.7	Modelo determinístico. Valores pico de desplazamiento en $x_b = 4\text{ m}$ vs. $H$ . . . . .	69
5.8	Modelo estocástico. PDF de valores pico de desplazamiento en $x_b = 4\text{ m}$ . . . . .	70
5.9	PDF 3d de los desplazamientos pico para $H_m$ dentro del rango 2800-5780N. . . . .	71
5.10	Sistema columna-cable . . . . .	72
5.11	Representación de los tres primeros modos normales del sistema columna-cable estudiado. . . . .	74
5.12	Registro de desplazamientos transversales de la viga–columna en el extremo del mástil, encontrado con el modelo de orden reducido, determinístico, para los casos extremos de $H$ . . . . .	77
5.13	Análisis de la frecuencia fundamental de vibración de los desplazamientos transversales de la viga–columna, en el extremo superior del mástil, encontrados con el modelo determinístico, para todas las combinaciones de $V_n$ y $H$ , y bajo cargas estocásticas de viento. a) Dos FFT típicas; b) Mosaico de frecuencia principal $V_n$ vs $H$ . . . . .	77
5.14	Plano de fase y mapa de Poincaré típicos, de los desplazamientos transversales de la viga columna, en su extremo superior, encontrados con el modelo reducido en análisis determinísticos. (Este caso corresponde a $H = 10400\text{ N}$ y $V_n = 55\text{ m/s}$ ) . . . . .	78
5.15	Desplazamientos transversales de la viga–columna, en el extremo superior del mástil, encontrados con el modelo determinístico, para todas las combinaciones de $V_n$ y $H$ , y bajo cargas estocásticas de viento. . . . .	79



5.16	Evolución de la PDF de los desplazamientos transversales de la viga–columna, en el extremo superior del mástil, variando $H$ y para $V_n = 70$ m/s. (a) Imagen 3D de desplazamientos vs $H$ vs PDF; (b) Vista superior de la imagen (a); (c) algunos cortes de la imagen (a) . . . . .	80
5.17	Evolución de la PDF de los desplazamientos transversales de la viga–columna, en el extremo superior del mástil, variando $V_n$ y para $H = 7000$ N. (a) imagen 3D de desplazamientos vs $V_n$ vs PDF; (b) Vista superior de la imagen (a); (c) algunos cortes de la imagen (a) . . . . .	82
5.18	Correlación de los desplazamientos transversales de la viga–columna, encontrados con el modelo de orden reducido determinístico, para todas las combinaciones de $H$ y cuatro casos de $V_n$ : a) $V_n = 22.5$ m/s , b) $V_n = 25$ m/s , c) $V_n = 32.5$ m/s , d) $V_n = 55$ m/s. . . . .	83
5.19	Probabilidad de excedencia de un valor límite de 0.2m en el extremo del mástil, de los desplazamientos transversales en el extremo de la viga–columna. (a) para todas la combinaciones de $H$ y $V_n$ , (b) para todas las combinaciones de $H$ y $EI$ . . . . .	84
5.20	Vista superior de las PDFs de los desplazamientos pico usando $V_n$ con distribuciones Gumbel y Fréchet. (a) Variación con $EI$ y $V_n$ representada por medio de una distribución Gumbel y $H=10500$ N. (b) Variación con $EI$ y $V_n$ representada por medio de una distribución Fréchet y $H=10500$ N. (c) Variación con $H$ y $V_n$ representada por medio de una distribución Gumbel y $EI=1.75 \times 10^8$ Nm <sup>2</sup> . (b) Variación con $H$ y $V_n$ representada por medio de una distribución Fréchet y $EI = 1.75 \times 10^8$ Nm <sup>2</sup> . . . . .	86
5.21	Vista superior de las PDFs desplazamientos picos para cada valor de $V_n$ , con $EI=1.75 \times 10^8$ Nm <sup>2</sup> y tensión inicial del cable $H$ estocástica con distribuciones: Uniforme (a), Exponencial Truncada (b) y Gamma (c). . . . .	88
5.22	Vista superior de las PDF de desplazamientos pico encontrados con $H$ (con distribución Gamma) para distintos casos de velocidades nominales de viento y desviaciones estándar para la distribución Gamma. . . . .	90
5.23	Vista superior de las PDFs de desplazamientos picos para cada valor de $V_n$ , usando la rigidez del mástil $EI$ como variable estocástica con distribuciones: Uniforme (a), Exponencial Truncada (b), Gamma (c). . . . .	91
5.24	PDFs de desplazamientos picos usando $EI$ y $V_n$ como variables conjuntamente estocásticas. Cada figura muestra los casos usando distribuciones Gumbel y Fréchet para $V_n$ . Las distribuciones de $EI$ son: Uniforme (a), Exponencial Truncada (b), Gamma (c). . . . .	92
5.25	PDFs de desplazamientos picos usando $H$ y $V_n$ como variables conjuntamente estocásticas. Cada figura muestra los casos usando distribuciones Gumbel y Fréchet para $V_n$ . Las distribuciones de $H$ son: Uniforme (a), Exponencial Truncada (b), Gamma (c). . . . .	94
6.1	Desplazamientos de nodos y función de interpolación lineal. . . . .	105
6.2	Funciones de interpolación lineales. . . . .	106

6.3	Funciones de interpolación cuadráticas. . . . .	107
6.4	Situación resorte-fuerza-desplazamiento para ejemplificar el método de Newton-Raphson. . . . .	113
6.5	Posibilidades de respuesta del resorte. . . . .	113
6.6	Aplicación del método de Newton-Raphson (una sola iteración). . . . .	114
6.7	Aplicación del método de Newton-Raphson (varias iteraciones). . . . .	115
6.8	Aproximación de la integral de la aceleración, usando el valor medio. . . . .	119
6.9	Aproximación de la integral de la velocidad, usando un trapecio. . . . .	120
6.10	Resultado de estudio estático de cables de tres nodos . . . . .	124
6.11	Desplazamientos en el centro de la luz del cable, para distintos valores de carga distribuida. . . . .	125
6.12	Verificación de comportamiento dinámico de modelo FEM no lineal de cables con una tensión inicial de 5000 N. Referencias: M=Modelo desarrollado en esta tesis; F=solución de FlexPDE; q100 = modelo con sobrecarga de 100 N; q500 = modelo con sobrecarga de 500 N. . . . .	126
6.13	Verificación de comportamiento dinámico de modelo FEM no lineal de cables con una tensión inicial de 10000 N. Referencias: M=Modelo desarrollado en esta tesis; F=solución de FlexPDE; q100 = modelo con sobrecarga de 100 N; q500 = modelo con sobrecarga de 500 N. . . . .	126
6.14	Detalle de mástil arriostrado para ejemplificar uso del programa FEM ad hoc. . . . .	131
6.15	Definición de tipo de problema en GiD. . . . .	132
6.16	Cuadro de diálogo para indicar condiciones de borde. . . . .	133
6.17	Cuadro de diálogo de asignación de materiales. . . . .	134
6.18	Geometría de modelo de mástil arriostrado en GiD y resultado de mallado. . . . .	135
6.19	Reacciones de vínculo obtenidas de la solución del problema estático. . . . .	138
6.20	Configuración deformada que devuelve el algoritmo de solución para problemas estáticos. En negro se ilustra la configuración inicial, en rojo, la deformada. . . . .	139
6.21	Configuración deformada que devuelve el algoritmo de solución para problemas dinámicos. En negro se ilustra la configuración inicial, en rojo, la deformada para $t = 4.40$ s. . . . .	139
6.22	Registros de desplazamientos en la dirección global x a distintas alturas h de la columna . . . . .	140

# Lista de Tablas

2.1	Coefficientes para calcular el campo de velocidades del viento mediante el SRM. . . . .	14
2.2	Coefficientes para determinar las cargas estáticas de viento sobre estructuras, de acuerdo con CIRSOC-INTI (2005) . . . . .	16
3.1	Número de orden usado en el análisis de desplazamientos correspondiente a cada combinación de parámetros. . . . .	24
3.2	Número de orden usado en el análisis de tensiones dinámicas correspondiente a cada combinación de parámetros. . . . .	32
5.1	Valores de las constantes para el problema viga-cable. . . . .	61
5.2	Valores de las constantes para las Eqs. (5.8-5.9) . . . . .	72
6.1	Valores de para verificación de elementos cable (Haluk, 1978). . . . .	124
6.2	Valores usados para verificación de la respuesta dinámica del modelo de cables e integrador propuestos. . . . .	126
6.3	Parámetros para ejemplo de aplicación de programa FEM . . . . .	131

# Lista de Códigos

6.1	Código de Matlab para generar las matrices y funciones de elementos finitos no lineal para cables . . . . .	107
A.1	archivo fem3d.bas . . . . .	158
A.2	archivo fem3d.cnd . . . . .	159
A.3	archivo fem3d.prb . . . . .	159
A.4	archivo fem3d.tcl . . . . .	160
A.5	archivo fem3d.mat . . . . .	160
A.6	archivo DATA.m . . . . .	163
A.7	archivo mallado.m . . . . .	166
A.8	archivo FEM_estatico.m . . . . .	168
A.9	archivo Newmark.m . . . . .	171
A.10	archivo frameg.m . . . . .	176
A.11	archivo massV.m . . . . .	179
A.12	archivo PeV.m . . . . .	180
A.13	archivo Ke3d.m . . . . .	181
A.14	archivo Kel.m . . . . .	182
A.15	archivo mass.m . . . . .	183
A.16	archivo Pel.m . . . . .	185
A.17	archivo PU3d.m . . . . .	186
A.18	archivo FF3d.m . . . . .	187
A.19	archivo FF3dV.m . . . . .	188
A.20	archivo Plot_mast.m . . . . .	188
A.21	archivo Plot_dyn.m . . . . .	189
A.22	archivo posproceso.m . . . . .	190

---

A.23	archivo cable_eff.m . . . . .	191
A.24	archivo beam_eff.m . . . . .	193

## **Agradecimientos**

A la Dra. Marta Rosales.

Al Dr. Sergio Preidikman.

Al Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas.

Al Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Dedico esta tesis a mis padres Roberto y Norma; y a mi hermana, Eliana, por su incondicional y permanente apoyo.

Hago extensiva esta dedicatoria a la Dra. Marta Rosales, quién además de dirigir mi doctorado, me inició e instruyó en el camino de la investigación científica.

Por último quiero dedicar este trabajo a Mariana, que con su compañía hace mis días más felices y mis largas noches mucho más interesantes.

# Capítulo 1

## Introducción General.

### 1.1 Motivación y estado del arte.

Los mástiles arriostrados (Fig. 1.1) son estructuras esbeltas y relativamente económicas que desde hace años resultan preferidas para sostener antenas de radio, TV y otros tipos de comunicaciones. Esta tipología estructural se usa mayormente en áreas rurales, ya que requiere de una gran superficie para la ubicación de los anclajes de las riostras, aunque debido a la gran demanda que existe en la calidad de comunicación -sobre todo de la telefonía celular- hoy en día es común ver mástiles arriostrados emplazados en las ciudades, debido a su bajo costo comparados con otras tipologías estructurales.

Una configuración típica consta de una torre reticulada muy esbelta, de sección transversal triangular (tres montantes vinculados por medio de diagonales), arriostrada a distintas alturas por varios niveles de cables tensos. La altura es variable según la finalidad de las comunicaciones, pero actualmente no es excepcional encontrar torres de más de 300 m. Las posibles acciones dinámicas que pueden actuar sobre la estructura, como el viento, son usualmente simplificadas por los códigos como cargas estáticas, que representan el comportamiento medio del fenómeno dinámico, amplificadas con factores que tienen en cuenta las posibles interacciones dinámicas entre las cargas y la estructura. El contenido de energía de las cargas de viento puede interactuar con estructuras flexibles, por lo que el estudio de la respuesta dinámica se vuelve importante en los mástiles arriostrados. Los mástiles se comportan de una forma fuertemente no lineal cuando las riostras pasan de un estado tenso a uno flojo.





**Figura 1.1:** Mástil arriostrado.

Siendo estructuras de apoyo a las telecomunicaciones, los requerimientos estructurales debidos al uso son más severos que los estrictamente necesarios para garantizar la integridad y estabilidad de la estructura, ya que movimientos fuera del rango admisible pueden ocasionar que grandes zonas se vean afectadas de mala calidad en las comunicaciones o directamente incomunicadas. Aún así y pese al gran potencial de impacto adverso, la respuesta dinámica de mástiles arriostrados frente a cargas de viento no suele ser estudiada, con excepción de contados casos. En los últimos años, la compleja respuesta estructural y los desafíos inherentes a la formulación no lineal de los cables y el análisis de problemas de estabilidad y de fatiga en mástiles arriostrados (y teniendo en cuenta su extendido uso) han despertado el interés en investigadores. Algunos de los aportes que se consideran más importantes en la materia se discuten a continuación.

Kewaisy (2001) estudia la respuesta dinámica de mástiles arriostrados sometidos a cargas dinámicas de viento con el objetivo de caracterizar su comportamiento dinámico. El mástil se modela a través de un reticulado de elementos barra y se analizan distintos enfoques para modelar los cables tensos. Para ello realiza la formulación de elementos finitos no lineal de cables y compara sus resultados con elementos tipo barra. El Método de Representación Espectral (Shinozuka and Jan, 1972) es usado para generar las cargas dinámicas de viento.

Shi (2007) estudia la respuesta dinámica de mástiles arriostrados sometidos a cargas

estáticas extremas y cargas de sismo e impacto. Considera el mástil modelado a través de elementos viga con consideración de grandes deformaciones y los cables son modelados a través de elementos barra o cable, con formulaciones no lineales. La no linealidad de los materiales también se discute, encontrando, entre otros resultados, que puede atenuar la respuesta dinámica frente a acciones extremas.

Grey (2006) presenta estudios dinámicos de mástiles arriostrados sometidos a cargas sísmicas. Los modelos son resueltos usando un software comercial. Cuatro mástiles distintos son evaluados frente a distintos registros sísmicos, reales y sintéticos. Los resultados dinámicos obtenidos son discutidos y comparados con los resultados obtenidos al aplicar las metodologías propuestas en reglamentos.

Por otra parte, en Zhu (2007) se presentan resultados de estudios en tunel de viento de un modelo a escala de un mástil arriostrado de 300 m de altura. Los resultados experimentales obtenidos se usan luego para calibrar programas computacionales para resolver estructuras arriostradas. Siguiendo la línea experimental de trabajo, en Saudi (2014) se discute el uso de mediciones in situ de frecuencias naturales para calibrar modelos de elementos finitos de mástiles arriostrados.

Madugula (2002) desarrolla extensamente el estudio de mástiles arriostrados, presentando la formulación de vigas, considerando efectos de segundo orden y cables no lineales. Se analizan, entre una larga variedad de temas, metodologías para análisis estático y dinámico, lineal y no lineal. Además se discute la aplicación de cargas de viento y sismo, y se comentan crítica y comparativamente los procedimientos sugeridos por distintos reglamentos sobre los distintos temas.

Además de tesis y libros respecto del modelado y análisis de la respuesta dinámica de mástiles arriostrados, otros aportes fueron presentados, por ejemplo en Preidikman et al. (2006) y Clobes et al. (2009) donde se analiza la respuesta dinámica de mástiles arriostrados frente a cargas dinámicas por medio de formulaciones de elementos finitos, con modelos simplificados en el primer caso y con un modelo de mástil real con cargas de viento estocásticas en el segundo. De la misma manera que en Preidikman et al. (2006), en Ghafari Oskoei and McClure (2011) se plantean métodos simplificados para evaluar la respuesta dinámica de mástiles arriostrados, en este caso, para aplicarse a mástiles sometidos a cargas sísmicas. Los cables son modelados como apoyos elásticos y se presenta una metodología para encontrar la rigidez dinámica equivalente de dichos

apoyos. Este tipo de simplificaciones es interesante dado el elevado costo computacional que implica evaluar la respuesta dinámica, modelando el sistema completo.

Aún así, el avance de la tecnología y el acceso cada vez más cotidiano a equipos de computación potentes permite modelar cada vez con mayor detalle cada parte de la estructura; en esta línea en Judge et al. (2012) se presenta un modelo de elementos finitos 3D de cables que considera el trenzado de los hilos, el contacto entre éstos y materiales no lineales. Respecto de los modelos unidimensionales, usados frecuentemente en la formulación de programas de elementos finitos o modelos reducidos, en Haluk (1978) y Henohold and Russell (1976) se presentan formulaciones no lineales de elementos finitos para cables tensos.

En Irvine (1981) se ofrece una cobertura muy bien documentada de los desarrollos de cables hasta la fecha de su publicación. Además, se describe la dinámica de cables suspendidos, desde la teoría lineal de vibraciones libres y forzadas hasta teorías no lineales. También se incluyen ejemplos de aplicaciones de cables en estructuras arriostradas.

Leonard (1988) provee una revisión actualizada sobre formulaciones teóricas y numéricas de cables, con un enfoque más amplio que el presentado por Irvine (1981). Su tratamiento del tema hace énfasis en el uso de elementos finitos y formulaciones lineales y no lineales son desarrolladas y discutidas. Además, se introducen algoritmos de integración para resolver las ecuaciones diferenciales no lineales resultantes.

En Gunnar (1999), se resumen las formulaciones más populares de cables y sus respectivas formulaciones en elementos finitos, con aplicaciones a estructuras de cables para techos.

La formulación no lineal de cables tensos que se usará en esta tesis es la propuesta en Rega (2004).

Una alternativa para el modelizado de cables, que busca lograr economía computacional es el uso de modelos reducidos, como por ejemplo puede verse en Escalante et al. (2008), donde se presentan modelos de orden reducido (ROM) de cables 3D por medio de la Descomposición Ortogonal Propia.

El estudio sobre cables no se reduce exclusivamente a su formulación. El análisis de la respuesta dinámica no lineal de cables también es un tópico de interés. En Impollonia et al. (2010) se analiza la respuesta dinámica con cables y aisladores; mientras que en V. Gattulli (2000) se evalúan estrategias de control de vibraciones. En Gattulli

et al. (2004), Georgakis and Taylor (2005b) y Georgakis and Taylor (2005a) se presentan estudios sobre la respuesta dinámica no lineal de cables tensos solicitados con cargas armónicas o sometidos al movimiento (periódico y estocástico) de sus apoyos, usando ROM contruidos a partir aproximaciones de Galerkin y modos normales de vibración como bases. Una revisión de la formulación y aplicación de ROM en estructuras no lineales es llevada adelante en Mignolet et al. (2013), concluyendo que los ROM constituyen alternativas computacionalmente eficientes a modelos completos de elementos finitos, que, aunque más precisos, llegan a ser prohibitivos en algunas aplicaciones. El empleo de modelos simplificados y ROM para estudiar el comportamiento dinámico de estructuras complejas puede encontrarse en Lin et al. (2014), donde sistema tipo columna-cable se estudia a través de un ROM de dos grados de libertad para caracterizar la respuesta dinámica de un puente atirantado. Más aún, en Lenci and Ruzziconi (2009) se utiliza un ROM de un grado de libertad para modelar la dinámica no lineal de una estructura tipo viga-cable, con consideración de no linealidades en la formulación de ambos elementos, encontrando que es capaz de capturar algunos de los complejos fenómenos de la dinámica no lineal del sistema. Otros análisis en sistemas tipo viga-cable, con formulaciones de cables no lineales usando ROM, se tratan en Gattulli et al. (2002), Gattulli et al. (2005), Gattulli and Lepidi (2007) y Wei et al. (2012). En Ballaben et al. (2015), el autor de esta tesis analiza la respuesta dinámica no lineal y propagación de incertidumbre en estructuras arriostradas usando un modelo simplificado tipo viga-cable, representado a través de un ROM de dos grados de libertad.

El estudio de cuantificación y propagación de incertidumbres es una disciplina con gran impulso en la actualidad y sus aplicaciones pueden abarcar desde la medicina, pasando por la biología y la física hasta la ingeniería y la matemática. En Song et al. (2010) se usan herramientas de modelado estocástico para estudiar las bifurcaciones que se producen en la densidades de probabilidad de parámetros asociados a las estructuras de redes celulares. En Buezas et al. (2012), también encuentran fenómenos de bifurcación estocástica (cambios cualitativos en las densidades de distribución) en el tiempo de impacto al considerar estocástica la velocidad de los cuerpos durante el choque. Aplicaciones recientes relacionadas con la ingeniería estructural incluyen la tesis de Barbosa da Cunha (2015), que desarrolla estudios de propagación de incertidumbre en columnas de perforación de pozos petroleros, considerando estocásticos

a los parámetros intervinientes en la interacción dinámica entre la roca y la mecha de perforación, con la finalidad de optimizar el proceso; estudios de optimización basados en desempeño de estructuras de edificios altos (Huang et al., 2012), considerando a propiedades estructurales como la frecuencia natural principal y el amortiguamiento equivalente y la carga de viento como aleatorias. Como última referencia en este tema, se puede incluir el artículo de Negro et al. (2014), donde se modelan turbinas eólicas offshore considerando inciertos parámetros de las fundaciones y de las estructuras de sostén.

## **1.2 Originalidad y aportes.**

La tesis se enfoca en el estudio dinámico no lineal de mástiles arriostrados. Los estudios de sensibilidad paramétrica son novedosos en la literatura para este tipo estructural. Asimismo, el estudio comparativo de los efectos sobre la respuesta estructural y la sensibilidad paramétrica de distintos modelos de carga de viento (determinística y estocástica) resulta un aporte original. La utilización de herramientas modernas de la probabilidad, a través de la cuantificación de incertidumbre en el comportamiento estructural de mástiles arriostrados, constituye otra contribución original muy importante de esta investigación para la ingeniería estructural. Además, se considera que el desarrollo del software ad hoc para encontrar la respuesta estática y dinámica de estructuras arriostradas, es un aporte relevante como herramienta para futuros investigadores en el tema. Este software, luego de mejoras en ciertos ítems en la entrada de datos, puede dar lugar a un programa de uso profesional, útil en el diseño, cálculo y verificación de estructuras arriostradas, como torres de comunicaciones y puentes.

## **1.3 Objetivos.**

Los objetivos globales de esta tesis pueden resumirse en 4 ejes rectores:

- Estudiar la respuesta dinámica no lineal de mástiles arriostrados con cargas dinámicas de viento.
- Analizar la sensibilidad paramétrica de mástiles arriostrados y discutir distintos

enfoques sobre el modelado de cargas dinámicas para simular la acción del viento.

- Investigar la propagación de incertidumbres en los parámetros estructurales y de carga en estructuras arriostradas.
- Desarrollar herramientas computacionales que permitan modelar la respuesta estática y dinámica de estructuras arriostradas.

## **1.4 Organización de la tesis.**

Este documento se organiza como sigue: en el Capítulo 2, se introduce teóricamente y luego desarrolla la implementación del Método de Representación Espectral, para generar registros de cargas de viento. Este tema se discute en primer término porque será usado luego a lo largo de todo el desarrollo de la tesis.

En el Capítulo 3, se realizan estudios paramétricos de mástiles arriostrados sometidos a cargas de viento diseñadas mediante los métodos del Capítulo 2. Se usó el software comercial ALGOR para las simulaciones y la tensión inicial de los cables, la rigidez flexional del mástil y el amortiguamiento equivalente fueron los parámetros variados.

En el Capítulo 4, se introducen métodos energéticos y conceptos sobre minimización de funcionales, para ser aplicados luego a la deducción de ecuaciones diferenciales de cables tensos y vigas. En este Capítulo, también se formula el sistema mixto viga-cable y se desarrolla la formulación débil y modelo reducido de dicho sistema.

En el Capítulo 5, se introducen algunos conceptos de modelado estocástico y el modelo de orden reducido obtenido en el Capítulo 4 es empleado para llevar adelante estudios de cuantificación de incertidumbre (las simulaciones se programaron y realizaron en Matlab), considerando la tensión inicial del cable, la rigidez flexional de la viga y/o la velocidad nominal del viento como parámetros estocásticos. Para estos modelos, también se usaron cargas de viento modeladas como procesos estocásticos.

En el Capítulo 6, se desarrolla la formulación de elementos finitos no lineal para cables tensos. Se discute conceptualmente y se explica la implementación numérica del método iterativo de Newton-Raphson y los integradores de la familia de Newmark. Luego, todos estos desarrollos se combinan para la consecución de un software de elementos finitos no lineal ad hoc para resolver estructuras arriostradas, en el entorno

Matlab.

En el Capítulo 7, se exponen las conclusiones generales y algunas posibles líneas futuras por desarrollar.

La tesis se complementa con un Apéndice, que contiene todos los códigos de Matlab del programa desarrollado en el Capítulo 6.

## Capítulo 2

# Modelado dinámico de las cargas de viento

### 2.1 Introducción.

Las cargas dinámicas naturales (e.g. viento, sismo) que actúan sobre las estructuras, son frecuentemente modeladas como cargas estáticas, a las que se aplican coeficientes de amplificación para incluir el posible fenómeno de amplificación dinámica de la respuesta. Este tipo de simplificaciones son relativamente válidas cuando las frecuencias naturales de las estructuras no se encuentran dentro del rango del espectro de frecuencia de las cargas. En caso contrario, el modelado dinámico de los sistemas estructurales cobra mayor importancia, ya que la respuesta estructural máxima depende de las características dinámicas de la estructura, de la carga y de cómo la estructura interactúa con la carga.

El modelado dinámico de cargas de viento se hace frecuentemente usando su frecuencia principal, adoptando una carga armónica con esta frecuencia y amplitud dependiente de la altura. El viento en la naturaleza, tiene una distribución de velocidades correlacionada y aleatoria, y la mejor descripción disponible es considerarlo como proceso estocástico. Este enfoque difiere ampliamente del modelo de carga armónica, por lo que es esperable que los resultados de una estructura sometida a uno u otro modelo de carga difieran en alguna medida.

En este capítulo se desarrollan los conceptos teóricos y la implementación de una



metodología que permite reproducir registros temporales de viento (los registros obtenidos tienen las mismas características estadísticas que los registros de partida), considerando su aleatoriedad, espectro de frecuencias y correlaciones espaciales y temporales.

## 2.2 Método de Representación Espectral (SRM).

El método usado para simular cargas dinámicas de viento, fue el Método de Representación Espectral (SRM según sus siglas en inglés), desarrollado por Shinozuka and Jan (1972), que permite obtener una simulación de un proceso estocástico, conocidos a priori su espectro de frecuencias y las funciones de correlación espacial. Mediante la aplicación del SRM es posible obtener la componente "fluctuante" o "turbulenta" del viento, que tendrá media cero.

Como se anticipó, el método requiere como elementos de partida el espectro de frecuencias y funciones de coherencia, elegidos de acuerdo con el problema a ser simulado. Luego, se crean las señales aleatorias como una superposición de funciones armónicas con ángulos de fase aleatorios, ponderadas por coeficientes que representan la importancia de la frecuencia de la función dentro del espectro y consideran la correlación espacial. La función de densidad espectral (espectro de frecuencias) es partida en intervalos regulares y las frecuencias a usar en cada función armónica se seleccionan aleatoriamente dentro de cada intervalo, para evitar que la función final resulte periódica. A continuación se introducirá teóricamente el método y luego se describirá su implementación.

### 2.2.1 SRM: Marco teórico.

Siguiendo la metodología desarrollada en Shinozuka and Jan (1972), consideremos primero un conjunto  $m$  de procesos aleatorios gaussianos estacionarios  $f_j^0(t)$ , con índices  $j = 1, 2, \dots, m$ , con media cero  $E[f_j^0(t)] = 0$ , y con una matriz de densidad espectral cruzada  $S^0(w)$  dada por:

$$S^0(w) = \begin{bmatrix} S_{11}^0(w) & S_{12}^0(w) & \cdots & S_{1m}^0(w) \\ S_{21}^0(w) & S_{22}^0(w) & \cdots & S_{2m}^0(w) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1}^0(w) & S_{m2}^0(w) & \cdots & S_{mm}^0(w) \end{bmatrix}, 0 \leq w \leq \infty$$

donde  $S_{jk}^0(w) = F[R_{jk}^0(\tau)]$ .  $F[\ ]$  representa el operador de transformada de Fourier y  $R_{jk}^0(\tau)$  son funciones de correlación si  $j \neq k$  o funciones de autocorrelación si  $j = k$ .

Esta matriz verifica  $S_{jk}^0(w) = \bar{S}_{jk}^0(w)$  porque, para procesos estacionarios, la matriz de correlaciones verifica  $R_{jk}^0(\tau) = R_{jk}^0(-\tau)$ , por lo tanto  $S^0(w)$  es una matriz Hermítica y definida positiva.

Si la matriz triangular inferior  $H(w)$  es definida como una matriz cuya transformada de Fourier existe y satisface la relación

$$S^0(w) = H(w)\bar{H}^T(w) \quad (2.1)$$

donde la barra superior indica complejo conjugado y el superíndice  $T$  indica traspuesto, el proceso  $f_j^0(t)$  puede ser simulado por la siguiente serie (Shinozuka and Jan, 1972):

$$f_j(t) = \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^N |H_{jk}(w_n)| \sqrt{2\Delta w} \cos[\hat{w}_n t + \theta_{jk}(w_n) + \Phi_{kn}] \quad (2.2)$$

donde  $\Delta w$  es el intervalo de frecuencia con el que fue discretizado el espectro de frecuencia,  $w_n = \Delta w(n-1)$ ,  $\hat{w}_n = w_n + \psi_{kn}\Delta w$ ,  $\psi_{kn}$  es un valor aleatorio con distribución uniforme entre 0 y 1,  $N$  es la cantidad de intervalos en que fue discretizado el espectro de frecuencia,  $\Phi_{kn}$  son ángulos de fase aleatorios e independientes uniformemente distribuidos entre 0 y  $2\pi$  y

$$\theta_{jk} = \tan^{-1} \left[ \frac{\Im\{H_{jk}(w_n)\}}{\Re\{H_{jk}(w_n)\}} \right]$$

donde  $\Im\{\}$  y  $\Re\{\}$  son las componentes real e imaginaria respectivamente. Si los valores  $S_{jk}$  son reales,  $\theta_{jk}(w_n)$  es cero. Para hallar la descomposición dada por la Ec. 2.1, pueden usarse varios métodos, como por ejemplo la *descomposición de Cholesky* o el *Método de Descomposición Modal*.

Puede probarse que la media grupal  $E[f_j(t)]$  es cero

$$E[f_j(t)] = 0,$$

y la correlación cruzada  $R_{jk}(\tau)$  está dada por

$$R_{jp}(\tau) = \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^N |H_{jk}(w_n)H_{pk}(w_n)| 2\Delta w \cos[w_n t - \theta_{pk}(w_n) + \theta_{jk}(w_n)].$$

Para  $N \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} R_{jp}(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^N H_{jk}(w_n) \bar{H}_{pk}(w_n) e^{iw_n \tau} \Delta w \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^m H_{jk}(w_n) \bar{H}_{pk}(w_n) e^{iw_n \tau} dw \\ &= \int_0^\infty S_{jp}^0(w) e^{iw_n \tau} dw \\ &= R_{jp}^0(\tau). \end{aligned}$$

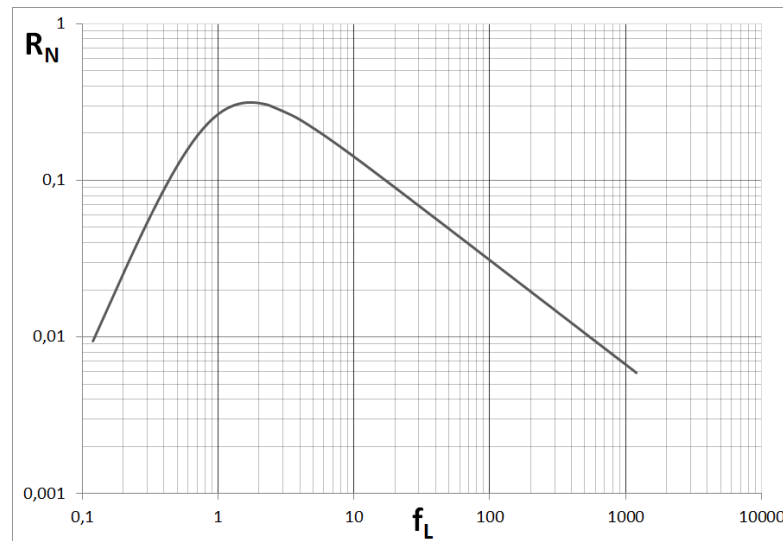
Entonces, el proceso  $f_j(t), j = 1, 2, \dots, m$  simulado por la Ec.2.2 reproduce la función de correlación cruzada,  $R_{jp}^0(\tau)$  y la densidad espectral  $S_{jp}^0(w)$  con respecto a la media grupal.

## 2.2.2 Aplicación del SRM para reproducir el campo de velocidades del viento.

A continuación se desarrollará, paso por paso, la implementación del SRM para simular registros de viento. El primer paso es adoptar una función de densidad espectral (*psdf*, por su siglas en inglés) y una función de coherencia. En este trabajo, se usaron la *psdf* propuesta por Davenport reportada en Dyrbye and Hansen (1994), que se muestra en la Fig. 2.1:

$$R_N(z, w) = \frac{wS(z, w)}{\sigma^2(z)} = 2/3 \frac{f_L^2}{(1 + f_L^2)^{4/3}} \quad (2.3)$$

donde  $w$  es la frecuencia en  $Hz$ ,  $\sigma$  es la desviación estándar y  $f_L$  es la frecuencia adi-



**Figura 2.1:** Espectro de viento propuesto por Davenport

mensional:

$$f_L = w \frac{L_u}{U(z)}, \quad (2.4)$$

siendo  $L_u$  es la longitud de escala de la turbulencia (que para el modelo de Davenport se adopta 1200 m) y  $U(z)$  es la velocidad media del viento, que depende de la altura. La variación con la altura de  $U(z)$  adoptada aquí corresponde con la ley potencial usada en el reglamento CIRSOC-INTI (2005)

$$U(z) = 2.01V(z/z_g)^{2/\alpha}, \quad (2.5)$$

donde  $z$  es la altura respecto del suelo del punto en cuestión,  $V$  es la velocidad del viento, que junto con  $z_g$ , y  $\alpha$  son valores propuestos por el reglamento que dependen de las características de la zona de implantación de la estructura y serán explicados en detalle en la sección 2.3.

La función de coherencia adoptada, propuesta en Dyrbye and Hansen (1994), es

$$Coh(z_i, z_j, w) = \exp \left\{ -2w \frac{C_z |z_i - z_j|}{U(z_i) + U(z_j)} \right\}, \quad (2.6)$$

en la cual  $z_i$  y  $z_j$  son las alturas de dos puntos dados. Luego, cada elemento  $S_{ij}$  de la

matriz  $S(w)$ , para un determinado valor de frecuencia puede ser calculado como:

$$S_{ij}(z_i, z_j, w) = \sqrt{S(z_i, w)S(z_j, w)} \text{Coh}(z_i, z_j, w) \quad (2.7)$$

Siguiendo este procedimiento, se crearán  $N$  matrices, una para cada uno de los valores de frecuencia en que fue discretizada la *psdf*. Luego las  $S(w)$  deben ser transformadas, para obtener las matrices  $H(w)$ . En este trabajo se usó la Transformada de Cholesky.

Una vez que las matrices  $H(w)$  fueron halladas, es posible construir las series temporales de la componente fluctuante (con media cero) de la velocidad del viento  $u(z_j, t)$ , para cada altura  $z_j$  por medio de la ecuación

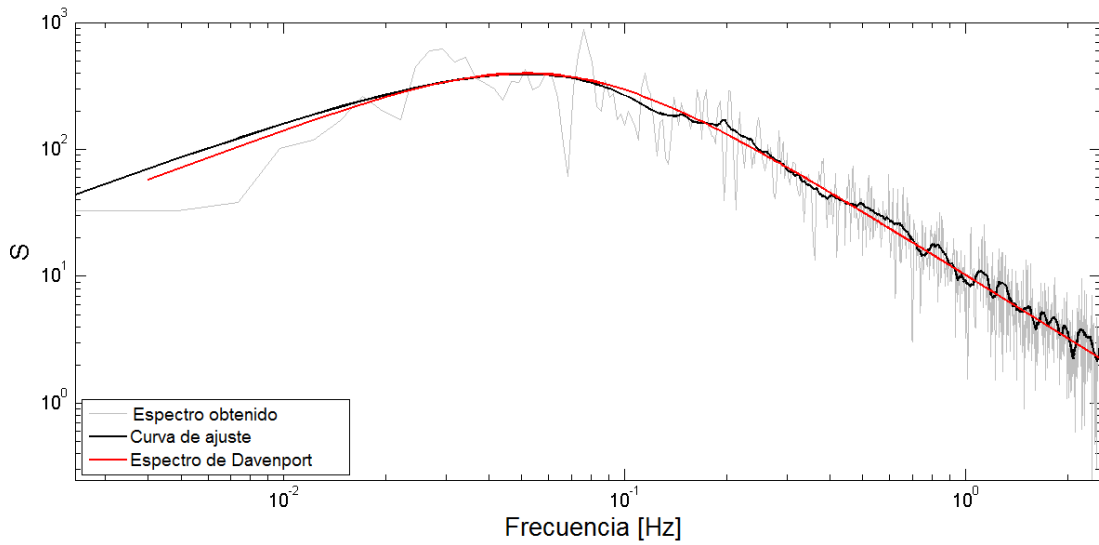
$$u(z_j, t) = \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^N H_{jk}(w_n) \sqrt{2\Delta w} \cos[2\pi\hat{w}_n t + \Phi_{kn}] \quad (2.8)$$

En este desarrollo, se usa  $H_{jk}(w_n)$  en lugar de  $|H_{jk}(w_n)|$  y  $\theta_{jk}(w_n)$  es omitido (es de valor nulo) porque solo es considerada la parte real de *psdf*. La máxima frecuencia del espectro considerado es  $w_c = 2.5$  Hz. Para el intervalo de frecuencia  $\Delta w$  se adoptó un valor de 0.004. Por lo tanto, el intervalo de tiempo para generar la Ec.(2.8) es  $\Delta t \leq 1/2w_c$ . El valor que se adoptó aquí es  $\Delta t = 0.20$  s.

La Tabla 2.1 resume los valores de los parámetros mas relevantes, necesarios para aplicar el método y en la Figura 2.2 se ilustra la correspondencia entre el espectro de viento teórico y el obtenido de las señales generadas usando el SRM.

**Tabla 2.1:** Coeficientes para calcular el campo de velocidades del viento mediante el SRM.

Coeficiente	$\sigma^2$	$L_u$	$C_z$	$w_c$	$\Delta w$	$\Delta t$	N	m
Valor	38.77	1200 m	11.5	2.5 Hz	0.004 Hz	0.2 s	625	12



**Figura 2.2:** Comparación entre el espectro de velocidades de viento teórico de partida y el de las señales generadas numéricamente via SRM.

### 2.3 Construcción de registros temporales de carga de viento.

En la sección anterior se obtuvo la componente "fluctuante" (dependiente del tiempo) de la velocidad del viento. A continuación, se desarrollará el procedimiento para encontrar las cargas dinámicas de viento.

Los desarrollos aquí expuestos son los propuestos por el reglamento Argentino CIRSOC 102 (CIRSOC-INTI, 2005), que especifica los pasos para la construcción de cargas estáticas para simular la acción del viento sobre las estructuras. Se introducirán algunas modificaciones para tener en cuenta la dinámica del viento, modelada con la Ec. 2.8. El código define la carga estática debida al viento como:

$$F = q_z G C_f A_f, \quad (2.9)$$

donde  $F$  es la magnitud de la carga de viento,  $G$  es el coeficiente de ráfaga, que tiene en cuenta los efectos de amplificación dinámica (resonancia) y la falta de correlación de las cargas,  $A_f$  es el área expuesta al viento, proyectada sobre el plano normal a la dirección de las carga y  $C_f$  es un coeficiente que incluye el efecto de la forma de la estructura,

para este caso, tomaremos como ejemplo la columna de un mástil arriostrado:

$$C_f = 3.4\epsilon^2 - 4.7\epsilon + 3.4, \quad (2.10)$$

donde  $\epsilon = A_f/A_t$  y  $A_t$  es el área expuesta sin considerar los huecos.

En la Ec. 2.9  $q_z$  representa la presión del viento y su expresión es:

$$q_z = 0.613k_zk_{zt}k_dV^2I, \quad (2.11)$$

donde  $I$  pondera la categoría de la estructura,  $V$  es la velocidad de referencia, definida para cada región del país (en este caso, se adoptó Bahía Blanca, Argentina),  $k_{zt}$  es el coeficiente topográfico,  $k_d$  es el coeficiente de dirección, que considera la tipología estructural (i.e. torres reticuladas, edificios, etc.) y  $k_z$  es un coeficiente empírico que indica la variación de la velocidad media de viento con la altura:

$$k_z = 2.01(z/z_g)^{2/\alpha} \quad (2.12)$$

Aquí  $z$  es la altura, respecto de tierra, del punto considerado,  $z_g$  y  $\alpha$  son coeficientes que se obtienen en función de los anteriores y se encuentran tabulados en el código.

Como el término  $k_zV$  fue usado en la sección anterior para crear la componente fluctuante del viento (Ec. 2.5), y describe la velocidad para una altura  $z$ , será reemplazado por  $U(z) + u(z, t)$ :

$$\bar{q}_z = 0,613k_{zt}k_dV(U(z) + u(z, t))I \quad (2.13)$$

Reemplazando  $q_z$  por  $\bar{q}_z$  en la Ec. 2.9 resulta

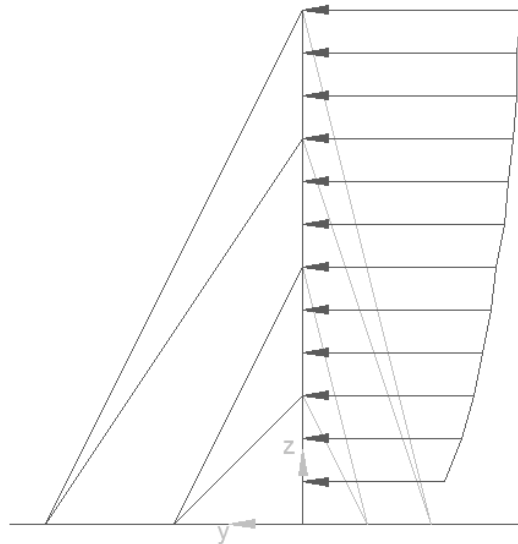
$$F(z, t) = \bar{q}_zGC_fA_f \quad (2.14)$$

En la Tabla 2.2 se resumen los valores adoptados y calculados para los coeficientes.

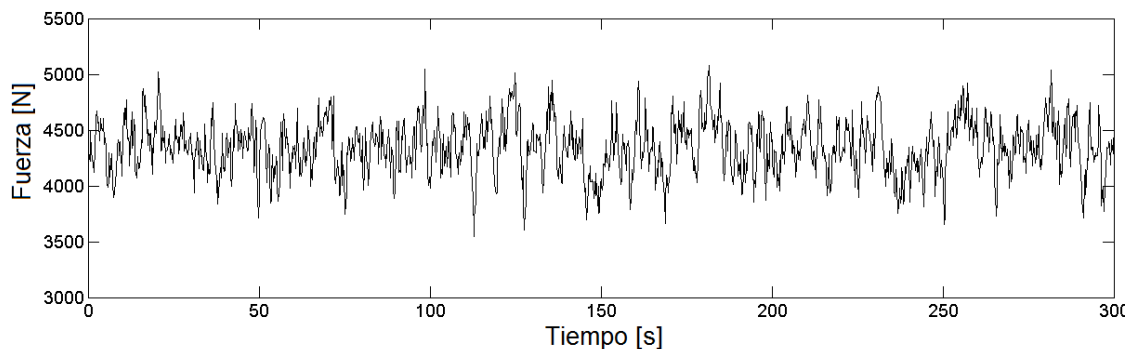
**Tabla 2.2:** Coeficientes para determinar las cargas estáticas de viento sobre estructuras, de acuerdo con CIRSOC-INTI (2005)

Coeficiente	$G$	$A_f$	$A_t$	$C_f$	$I$	$V$	$k_d$	$k_{zt}$
Valor	0.85	0.57 m <sup>2</sup>	9.41 m <sup>2</sup>	3.13	1.00	55 m/s	0.85	1

La Figura 2.3 muestra la variación de la componente media de la carga de viento, sobre un mástil arriostrado y, en la Fig. 2.4, se ilustra la forma de la carga obtenida para un período de tiempo de 300 s.



**Figura 2.3:** Variación del valor medio de la carga de viento con la altura.



**Figura 2.4:** Registro típico de carga de viento en un punto z del mástil.

## 2.4 Comentarios Finales.

En este capítulo se presentó en forma teórica el Método de Representación Espectral (SRM), una herramienta que puede ser usada para construir series de datos estocásticos a partir de su espectro de frecuencias y funciones de correlación. Se ha demostrado que las series generadas por el SRM reproducen con fidelidad los parámetros estadísticos



de partida. El SRM fue aplicado para crear registros de velocidades de viento y luego cargas de viento, a partir del espectro de frecuencias de viento de Davenport y de la metodología propuesta en el reglamento CIRSOC 102. La implementación del SRM para crear registros de carga de viento para aplicar sobre mástiles arriestrados se explica paso por paso y sus resultados fueron contrastados con los datos de partida, encontrándose una muy buena correlación. Esta metodología y sus resultados se presentan en primer término, debido a que serán ampliamente usados en el desarrollo de esta tesis.

## **Capítulo 3**

# **Análisis de mástiles arriostrados via el Método de Elementos Finitos**

### **3.1 Introducción.**

Como primera aproximación a la caracterización del comportamiento dinámico de mástiles arriostrados, en este capítulo se desarrollan análisis dinámicos de mástiles arriostrados por medio de elementos finitos, usando el software comercial ALGOR (ALGOR Inc., 2009). Se considera una estructura tipo: un mástil arriostrado de 120 m de altura y 4 niveles de cables tensos. Como es de práctica común en la profesión, el mástil es modelado con elementos tipo viga, como una viga–columna equivalente. Además de su propio peso, se consideran cargas de viento actuando sobre el mástil (no se incorpora la acción del viento sobre las riendas). Para modelar la dinámica de las cargas de viento se consideran dos enfoques:

1. El procedimiento clásico, que no considera los efectos de la correlación de las cargas (las cargas se aplican en forma simultánea y sincronizada en toda la altura del mástil) y con una variación temporal que surge de una suma de funciones coseno, con frecuencias dentro de la zona pico del espectro de frecuencias de viento.
2. El procedimiento desarrollado en el Capítulo 2, el Método de Representación Espectral, que considera correlaciones espaciales y temporales y donde cada registro

de viento se modela como un proceso estocástico.

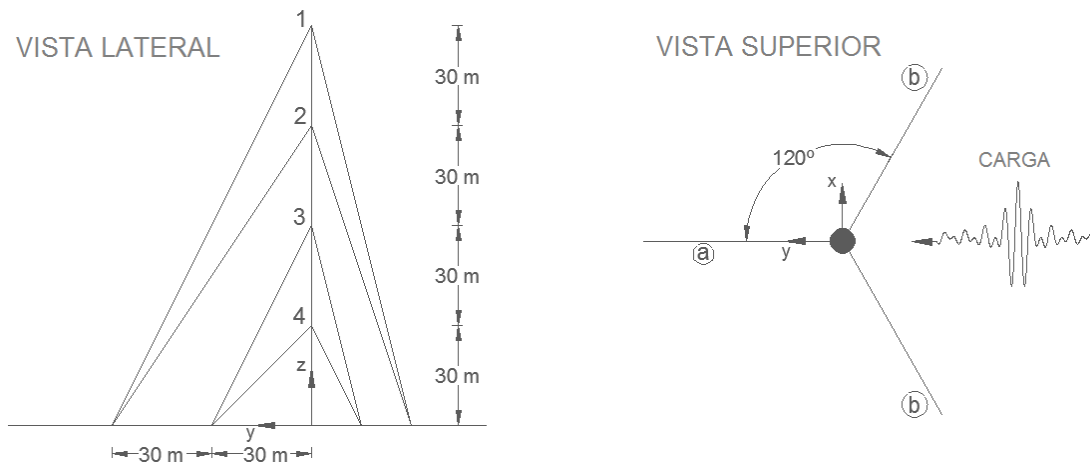
Los resultados obtenidos con ambas metodologías serán discutidos y comparados, a fin de dilucidar cómo afecta a la respuesta dinámica del sistema la consideración de cargas con mayor o menor complejidad. Además se realizan un estudios paramétricos para evaluar la influencia que algunos de los parámetros estructurales más importantes de los mástiles arriostrados, como la rigidez flexional del mástil, el modelado numérico del amortiguamiento o la tensión inicial de las riostras, tienen sobre la respuesta final del sistema.

Se analizan registros dinámicos de desplazamientos del mástil y tensiones de las riendas. La carga de viento modelada mediante el SRM, considerando el mismo espectro de partida y amplitud que la carga tipo coseno usada frecuentemente, tiene una mayor interacción dinámica con la estructura. También se observó que la tensión inicial resulta, en general, el parámetro estructural más influyente.

## 3.2 La estructura y el modelo.

El sistema estructural considerado, corresponde al analizado en Punde (2001) y en Hensley (2005), utilizando como referencia, las mismas propiedades estructurales equivalentes para el mástil. En la Figura 3.1 se muestra el perfil y la planta del mástil, que posee una altura de 120 m y se encuentra estabilizado por cuatro niveles de riostras separadas 30 m entre sí, con tres de ellas por nivel y separadas  $120^\circ$ . El mástil se considera articulado en su base y es modelado como viga–columna equivalente usando 16 elementos tipo viga, mientras que cada riostra es modelada usando 20 elementos tipo barra sin capacidad frente a cargas de compresión. Para el material del mástil se consideró un módulo de elasticidad de 209 GPa, una sección transversal de  $1.98 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  y una masa por unidad de longitud de 61.00 kg/m. Respecto de los cables, se adoptó un módulo de elasticidad de 150 GPa, una sección transversal de  $2.00 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  y una masa por unidad de longitud de 2.55 kg/m. Consideraciones sobre el momento de inercia flexional y la tensión inicial de los cables se realizarán en los apartados siguientes.

El tiempo total de cálculo fue de 400 s y la frecuencia de muestreo fue de 1/10 s. Aunque este parece un valor bajo, debe tenerse en cuenta que el período fundamental



**Figura 3.1:** Geometría del mástil arriostrado

del mástil es 2.66 s y los períodos de las cargas de viento rondan los 7 s, por lo que el valor adoptado, tiene una precisión adecuada para observar la dinámica del problema.

### 3.2.1 Estudios de sensibilidad.

En la etapa de diseño, o en las posteriores readecuaciones de estructuras de mástiles arriostrados, es recurrente encontrarse con incertidumbres sobre algunos de los parámetros del problema dinámico, como por ejemplo la tensión inicial de los cables, el amortiguamiento equivalente o la rigidez del mástil. Con esta motivación y con el objetivo de cuantificar la influencia que esos parámetros tienen sobre la respuesta dinámica del sistema, se realizaron los estudios que se desarrollarán a continuación.

#### Tensión inicial de los cables.

La tensión inicial de las riostras representa la fuerza de tracción (por unidad de área de cable) que es necesario que los cables tengan a fin de garantizar la estabilidad del sistema estructural. Para propósitos de diseño, los códigos ANSI/TIA-222-G (2009) proponen el rango del 7 al 15 % de la tensión de rotura de los cables. Debido a la falta de elementos que permitan medir la tensión que se aplica a los cables en la etapa de ensamblaje de las torres, en muchas oportunidades el valor real no coincide con el valor de diseño e incluso puede encontrarse fuera del rango recomendado. En este trabajo, se pretende cubrir el rango de pretensiones propuesto por los reglamentos. En función

de la sección transversal y material adoptado para los cables, se usarán los siguientes valores de pretensión inicial: 15, 20, 25, 30, 35 kN.

### **Amortiguamiento equivalente de la estructura.**

El amortiguamiento de Rayleigh, es el modelo de amortiguamiento usualmente empleado en estructuras y es proporcional a las matrices de masa y de rigidez, permitiendo el desacoplamiento de la matriz de amortiguamiento. La elección de un valor apropiado es fundamental, debido a que con este parámetro, se pretende modelar el amortiguamiento real de la estructura, que reduce las vibraciones debido a las cargas dinámicas. Gomathinayagam and Lakshmanan (2003) propone, a partir de mediciones directas en mástiles arriostrados valores en el rango del 1 al 3% del amortiguamiento crítico. Por otro lado, algunos reglamentos, como IASS (1991) recomiendan usar el 3% para uniones abulonadas, el CIRSOC-INTI (2008) sugiere usar el 2% y la norma ANSI/TIA-222-G (2009) el 5% para análisis en dominio tiempo. Esta rápida revisión muestra una envolvente de valores que abarca un rango de entre el 1 al 5%. En este trabajo se consideran tres casos distintos para el amortiguamiento Raileigh: 1%, 2% y 3% del amortiguamiento crítico. Las frecuencias naturales del mástil arriostrado fueron determinadas con el módulo de frecuencias naturales (lineal) de ALGOR. Los coeficientes proporcionales para las matrices de masa y rigidez son: 0.118 y 0.00070, 0.237 y 0.00144, y 0.356 y 0.00209, respectivamente.

### **Rigidez flexional del mástil.**

La rigidez flexional (proporcional al segundo momento del área de la sección transversal), es determinada en la etapa de diseño, pero las nuevas condiciones estructurales requeridas por los equipos, en permanente actualización, frecuentemente requieren el refuerzo de la columna. Esta modificación introduce cambios en la rigidez de la torre, que son difíciles de ponderar debido a la gran variedad de mecanismos de refuerzo que pueden encontrarse, incluso, dentro de la misma torre. Para analizar el efecto que la variación de este parámetro tiene sobre la respuesta dinámica se consideraron 3 valores para el segundo momento del área:  $1.80 \times 10^{-3}$ ,  $2.25 \times 10^{-3}$  y  $2.70 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ .

### 3.2.2 Cargas dinámicas.

Dos casos distintos fueron analizados en las cargas dinámicas, para modelar la acción del viento sobre la estructura:

- CASO 1: se emplearon las cargas de viento modeladas usando el Método de Representación Espectral, con el procedimiento desarrollado en el capítulo precedente.
- CASO 2: se usó un enfoque simplificado, considerando la componente fluctuante de la acción del viento como una función periódica compuesta por 10 funciones armónicas con frecuencias obtenidas de la zona pico del espectro de potencia del viento. No se consideran aquí correlaciones espaciales ni temporales.

### 3.2.3 Aplicación de las cargas.

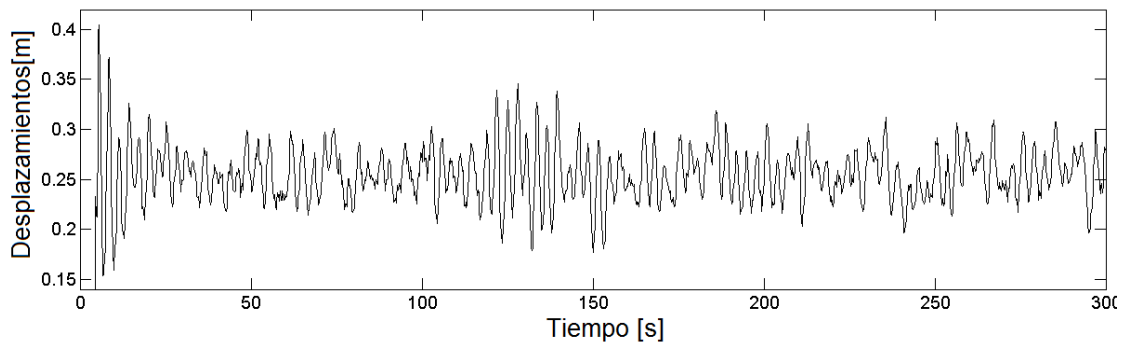
En este estudio, tres cargas fueron consideradas: el peso propio de los componentes estructurales, la tensión inicial de los cables y la excitación externa debido a las cargas de viento. Por restricciones del software, la tensión inicial se aplica bruscamente y al inicio del estudio dinámico. Las cargas gravitatorias se aplican aumentando desde el comienzo del ensayo, siguiendo una ley lineal hasta alcanzar su valor a los 3 s. La cargas de viento se activan a partir del cuarto segundo. Esta aplicación escalonada se realiza para evitar la inestabilidad numérica que puede provocar la aplicación brusca de la tensión inicial.

## 3.3 Resultados de los estudios.

Los estudios de estructuras arriostradas sometidas a cargas de viento, en general, enfocan sus observaciones en dos medidas: los desplazamientos máximos del mástil y las tensiones (máximas y mínimas) de las riostras, por lo que, en este trabajo, se seguirá esta misma premisa.

### 3.3.1 Desplazamientos del mástil arriostrado.

A continuación se desarrollarán los resultados encontrados con el "CASO 1" de carga (viento considerado como un proceso estocástico con consideración de correlaciones espaciales y temporales). Se incluye también una breve comparación con los resultados producto del análisis de la estructura con el "CASO 2" de carga. En la Figura 3.2 se muestra un registro típico de desplazamientos típico. Para todos los análisis siguientes, los primeros 10 s fueron eliminados, para evitar el efecto de la aplicación abrupta de la tensión inicial de los cables. Todos los resultados aquí presentados corresponden con desplazamientos en la dirección "y" (ver Figura 3.1), debido a que corresponde a la dirección de aplicación de las cargas y donde se producen los máximos desplazamientos.



**Figura 3.2:** Registro típico de desplazamientos en el extremo superior del mástil arriostrado.

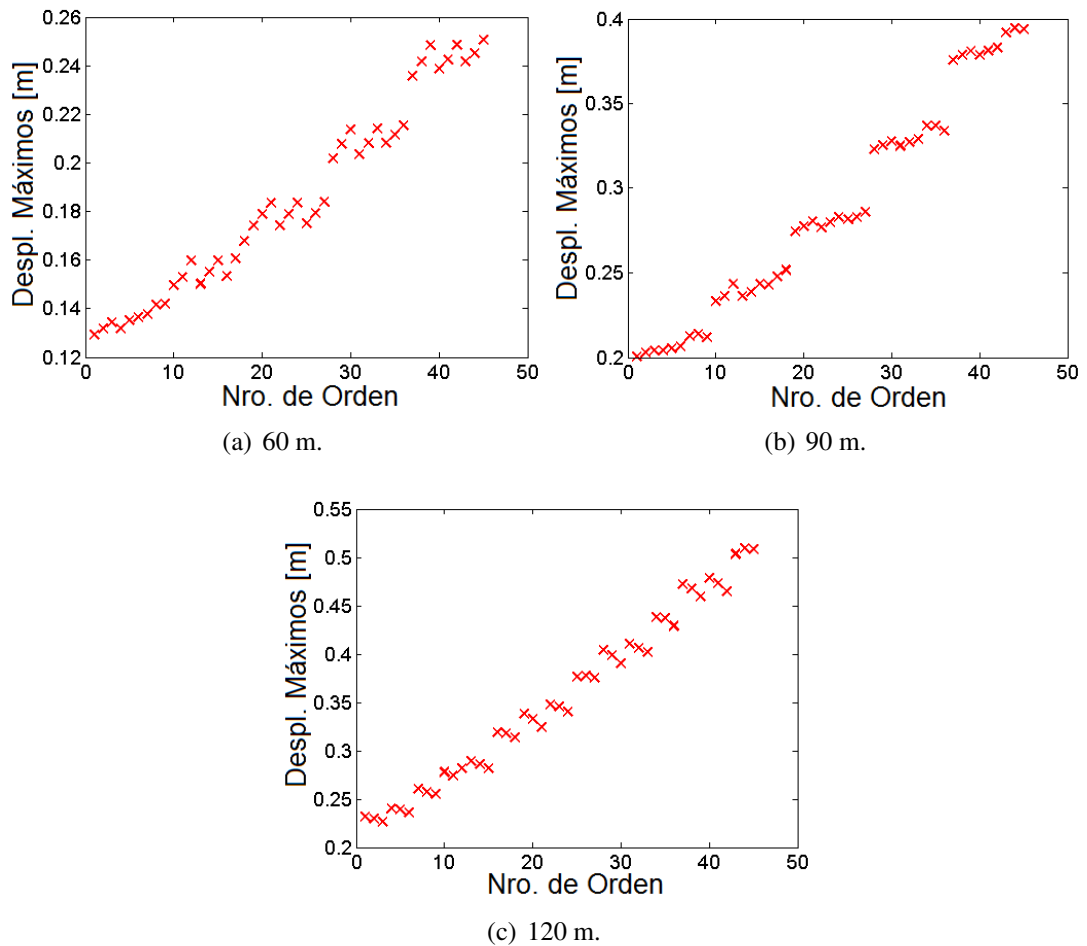
**Tabla 3.1:** Número de orden usado en el análisis de desplazamientos correspondiente a cada combinación de parámetros.

D [%]	3			2			1		
TS [ $\times 10^{-3}m^4$ ] / IP [kN]	2.7	2.25	1.8	2.7	2.25	1.8	2.7	2.25	1.8
35	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	10	11	12	13	14	15	16	17	18
25	19	20	21	22	23	24	25	26	27
20	28	29	30	31	32	33	34	35	36
15	37	38	39	40	41	42	43	44	45

El desplazamiento máximo (*MD*) es una de las variables de diseño mas importantes, en relación directa con las condiciones de uso de los mástiles arriostrados. La transmisión puede disminuir su calidad o incluso verse imposibilitada si ocurren desplazamientos no compatibles con los equipos transmisores. Teniendo en cuenta que las an-

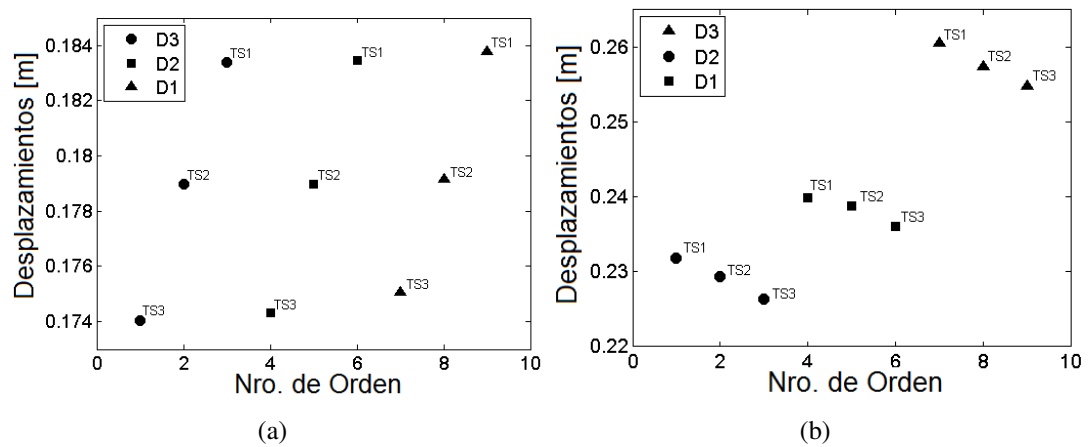
tenas están normalmente localizadas en la zona mas alta de la estructura, se estudiaron los desplazamientos en las siguientes alturas: 60, 70, 80, 90, 100, 110 y 120m (cima del mástil).

La Figura 3.3 ilustra los desplazamientos máximos del mástil, producto del análisis dinámico, para tres alturas. Los otros casos no son incluidos por brevedad, porque representan casos intermedios entre los mostrados. Los resultados fueron ordenados de la siguiente manera: primero por tensión inicial (*IP*), luego por amortiguamiento (*D*) y finalmente por rigidez flexional del mástil (*TS*). Por lo tanto, la primer marca corresponde al caso 35kN-3%-0.00270m<sup>4</sup>, la segunda marca 35kN-3%-0.00225m<sup>4</sup>, la cuarta marca a 35kN-2%-0.00270m<sup>4</sup> y continuando de la misma manera. En la Tabla 3.1 se indica los números de orden correspondientes a cada combinación de parámetros.



**Figura 3.3:** Desplazamientos máximos para todas las combinaciones de parámetros y tres alturas distintas.



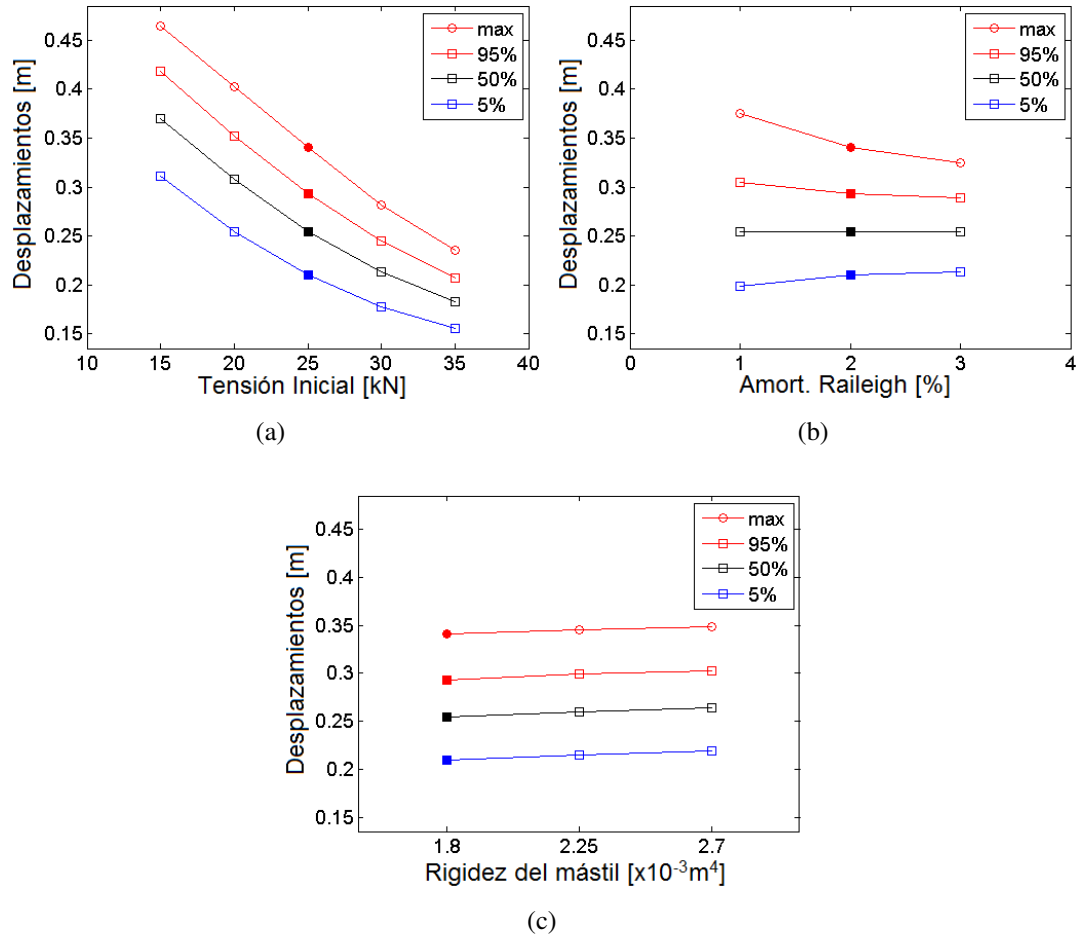


**Figura 3.4:** Desplazamientos máximos para algunas combinaciones de parámetros  $D$  y  $TS$  y para un valor fijo de  $IP = 25$  kN, para dos alturas distintas. (a) 60m, (b) 120m.

Pueden verse, en cada subfigura, distintos tipos de agrupamiento de los valores máximos y que la manera en que se agrupan los valores cambia con la altura. Puede inferirse entonces que la influencia de los parámetros estudiados sobre  $MD$  varía con la altura. En la Figura 3.4 se muestra una ampliación de los grupos observados en las Figuras 3.3(a) y 3.3(b), para un valor fijo de  $H=25$  kN. De la Figura 3.4(a), puede desprenderse que, a 60m la influencia de  $TS$  es mucho mayor que la de  $D$  (dentro del rango de valores estudiados), ya que, al variar  $D$  (cuando se pasa de un cuadrado a un círculo o un triángulo) solo se observan pequeñas variaciones de  $MD$  mientras que, haciendo el mismo análisis,  $TS$  tiene una influencia —relativa— mucho mayor.

En la Figura 3.4(b) puede observarse que, en términos de  $D$  y  $TS$ , la respuesta se ve afectada en mayor medida por  $D$ . Otra manera de estudiar la influencia relativa de los parámetros es fijando dos y variando uno, para ver cómo esta variación afecta la respuesta. En la Figura 3.5 se desarrolla este estudio. El marcador lleno indica el "caso de referencia", que corresponde siempre a la combinación de parámetros  $H-TS-D$  con valores  $25\text{kN}-1.8e^{-4}-2\%$ ; a partir de ésta combinación se fue variando un parámetro y se mantuvieron fijos los otros dos. Puede verse en la Figura 3.5 que las mayores variaciones en la respuesta son obtenidas al variar  $H$ . Es interesante tener en cuenta que, respecto del caso de referencia, los porcentajes de variación de cada uno de los parámetros son similares, pero la respuesta no se ve influenciada en la misma medida al variar cada uno. Este estudio es interesante para cuantificar la influencia relativa de los parámetros,

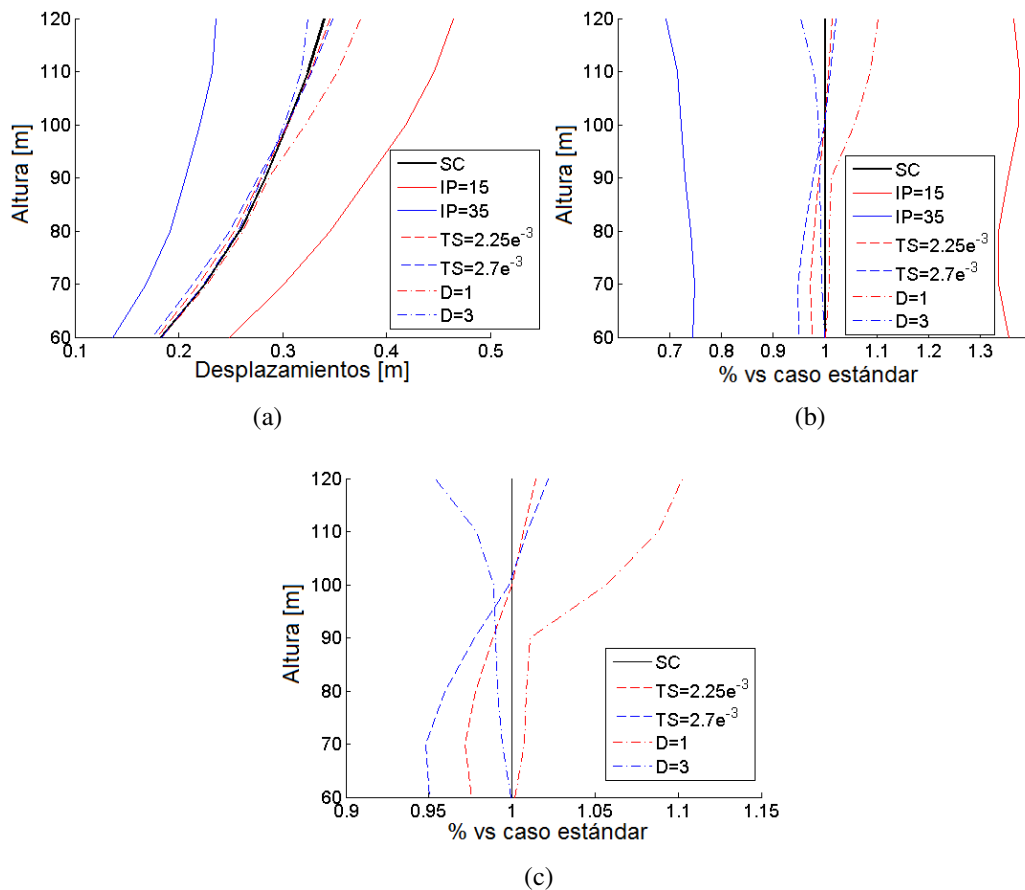
pero no debe perderse la noción de que los parámetros operan en forma conjunta: el valor adoptado para cada uno condiciona (en mayor o menor medida), como responde la estructura ante variación de los demás.



**Figura 3.5:** Desplazamientos máximos para algunas combinaciones de parámetros a 120m.

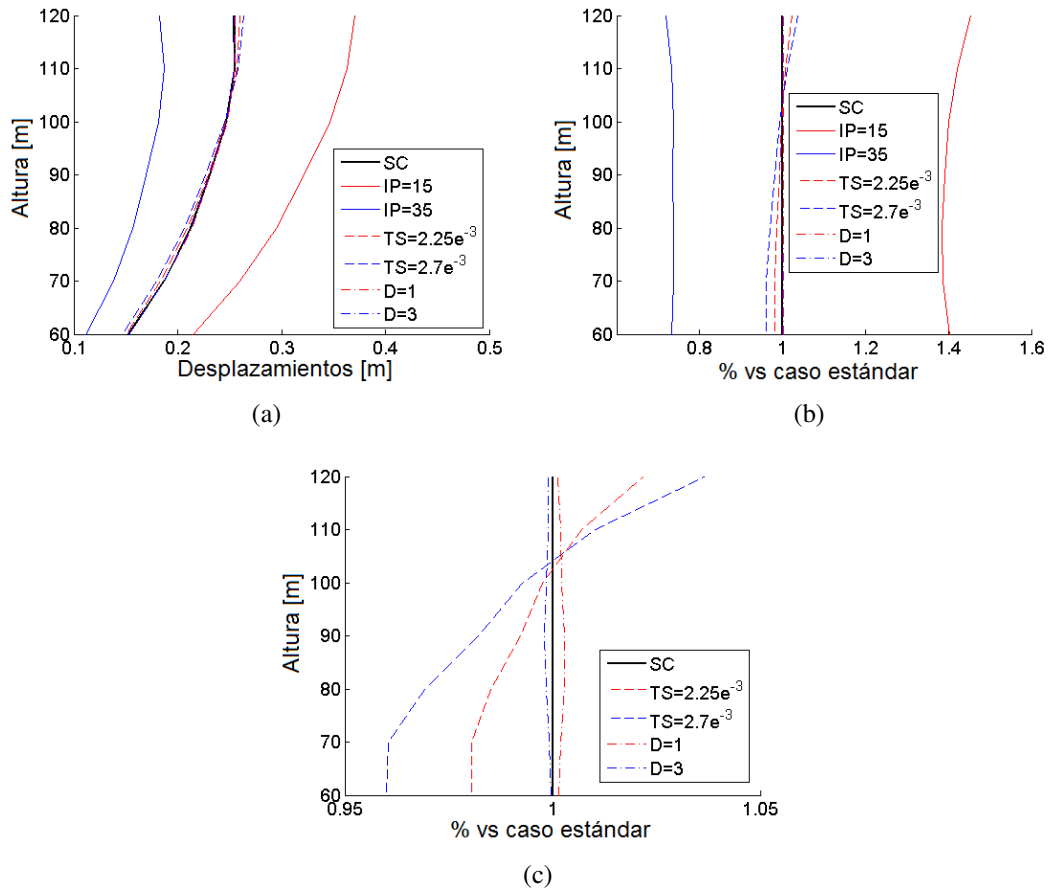
En las Figuras 3.6 y 3.7 se muestran la respuesta máxima y media respectivamente para todas las alturas entre los 120 m y 60 m, para la combinación de parámetros del caso de referencia y además las respuestas obtenidas al variar (de a uno) los parámetros (para el caso de  $H$  se muestran solo los casos extremos). De ambas Figuras 3.6 y 3.7 puede verse que la influencia de  $H$  en ambas medidas es sobradamente mayor y aproximadamente constante con la altura, como puede apreciarse en las Figuras 3.6(b) y 3.7(b). Además, se puede observar que la variación de  $H$  afecta en mayor medida a la respuesta media. Por otra parte, en las Fig. 3.6(c) y 3.7(c), donde se muestra en detalle la

influencia de  $D$  y  $TS$  que el valor adoptado para el parámetro  $D$  no afecta la respuesta media a ninguna altura, aunque sí parece influenciar la respuesta máxima, sobre todo por encima de los 90 m. La rigidez flexional del mástil incide de la misma manera en la respuestas máxima y media dentro del rango de alturas estudiado y puede observarse que para los puntos más altos (zona donde normalmente se ubican las antenas), aumentar  $TS$  tiene una influencia desfavorable sobre los desplazamientos, lo cual es un resultado inesperado, que puede estar asociado a la no linealidad de los cables y/o a la interacción del sistema no lineal con las cargas estocásticas.



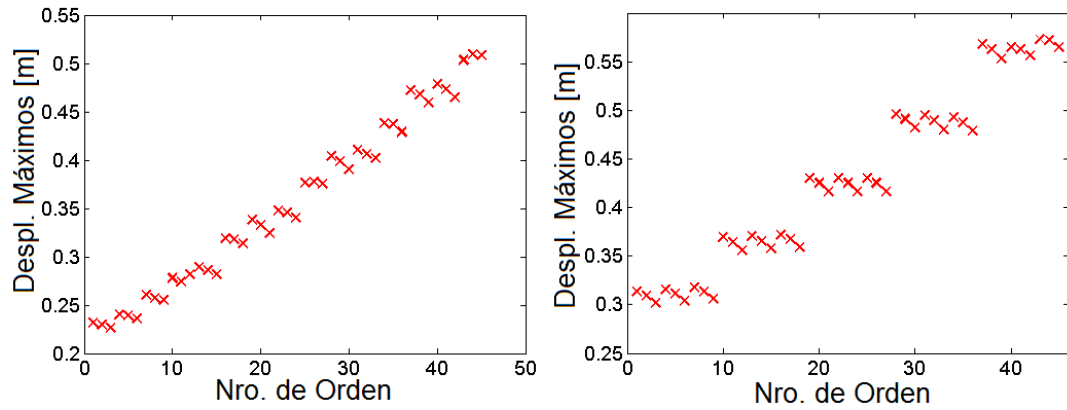
**Figura 3.6:** Influencia de los parámetros sobre los desplazamientos máximos a distintas alturas.

Otro punto interesante de estudio, es determinar cómo los distintos modelos de carga de viento influyen en la respuesta dinámica del mástil arriostrado y cómo afectan la incidencia que tiene en la respuesta, la variación de cada parámetro. La Figura 3.8 muestra los resultados obtenidos de  $MD$  para todas las combinaciones de parámetros y para los



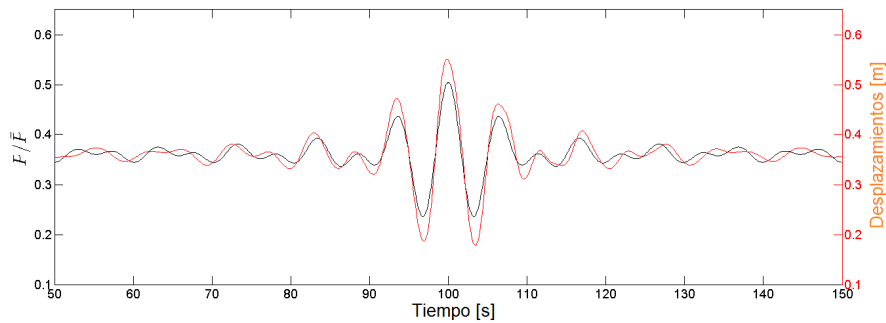
**Figura 3.7:** Influencia de los parámetros sobre los desplazamientos medios a distintas alturas.

dos casos de cargas de viento, a 120m. No se realiza la comparación a distintas alturas porque con cargas periódicas, el estudio arroja siempre los mismos resultados, independientemente de la altura. Éste en sí mismo, constituye un cambio muy importante en el comportamiento de la estructura. En la Figura 3.8(b) puede apreciarse que la influencia de  $D$  resulta despreciable y que la variación  $TS$  siempre incide de la misma manera en la respuesta, independientemente del valor de  $IP$ . Se nota entonces, que bajo cargas periódicas, la influencia de cada parámetro es independiente de la altura y también de los valores de los otros dos. El punto en común entre ambos estudios es que  $IP$  resulta la variable más influyente. Este estudio también permite concluir que usar una carga simplificada para modelar un fenómeno complejo, como el viento, no permite apreciar con detalle la influencia de todos los parámetros, al punto que la incidencia de algunos se pierde completamente.



(a) Carga de viento estocástica, modelada a través del SRM. (b) Carga periódica, con frecuencias dentro de la zona pico del espectro de viento.

**Figura 3.8:** Comparación entre desplazamientos máximos obtenidos para todas las combinaciones de parámetros estudiadas y con distintos enfoques para modelar las cargas.

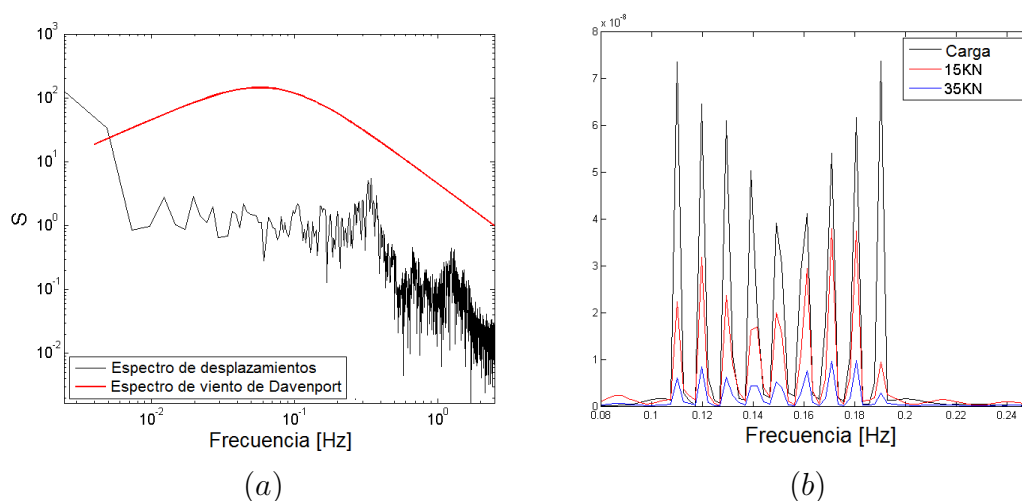


**Figura 3.9:** Registro de desplazamiento típico que se obtiene cuando se usa una carga periódica para simular la dinámica del viento.

El comportamiento estructural obtenido con el CASO 2 de carga, está asociado con la carga. Para construir la carga dinámica, se usó el mismo espectro de frecuencias que para la carga del CASO 1 y también consiste en una sumatoria de funciones armónicas, pero las frecuencias fueron seleccionadas equiespaciadas y en la carga se usaron solo 10 frecuencias. Así, la carga obtenida resultó periódica y su contenido de frecuencias se encuentra dentro de un rango bajo (zona del pico de la *psdf* propuesta por Davenport, ver Fig.2.1) y los registros de desplazamientos, a cualquier altura, prácticamente copian la curva de carga, (como puede observarse en la Figura 3.9) ya que las cargas son cuasiestáticas. El Método de Representación Espectral usa todo el rango de frecuencias del espectro y tiene en cuenta correlaciones espaciales y temporales, logrando modelar

con detalle la dinámica del campo de velocidades de viento, lo que permite un mejor entendimiento del comportamiento estructural dinámico de los mástiles arriostrados

Para completar los estudios dinámicos sobre los desplazamientos, se realizaron estudios de frecuencia, mediante FFT. Para el CASO 1 puede observarse en la Figura 3.10(a) que el espectro de los desplazamientos no se corresponde con el de la carga de viento. Si se analiza el CASO 2 (Figura 3.10(b)), puede verse que el espectro de la respuesta, copia el espectro de las cargas, lo cual es esperable si se observa la Figura 3.9.

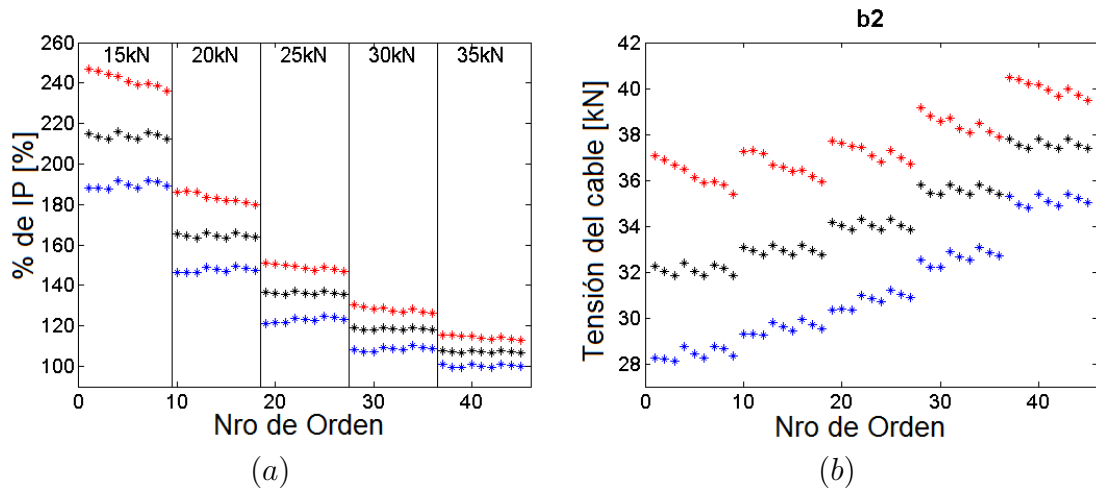


**Figura 3.10:** Comparación de FFTs de desplazamientos provocados por cargas de viento simuladas por medio de (a) un campo de velocidades estocástico (CASO 1) (b) una carga periódica con frecuencias dentro de la zona pico del espectro de viento (CASO 2).

### 3.3.2 Tensión dinámica de las riostras.

La tensión de las riostras es una variable importante de diseño, ya que los puntos de anclaje de los cables en el mástil constituyen puntos que dividen la longitud total del mástil en segmentos menores, para reducir el riesgo de pandeo y dar mayor rigidez a la estructura. Por lo tanto, es importante conocer el comportamiento de la tensión de los cables bajo cargas dinámicas.

La Figura 3.11 muestra los valores de tensión máxima (MA) en rojo, media (ME) en negro y mínima (MI) en azul, el nivel 2 y la dirección "b" (ver Figura 3.1 para referencias). Los valores están ordenados según se indica en la Tabla 3.2 (de menores valores a mayores valores de los parámetros). En la Figura 3.11(a) se muestran los resultados



**Figura 3.11:** Tensiones dinámicas máximas, medias y mínimas para los cables en el nivel 2, y en la dirección "b".

**Tabla 3.2:** Número de orden usado en el análisis de tensiones dinámicas correspondiente a cada combinación de parámetros.

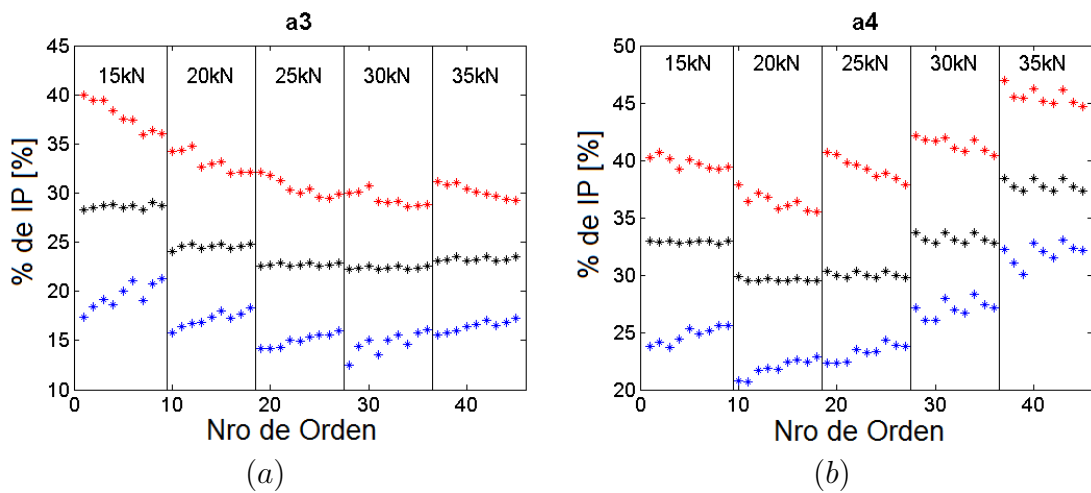
D [ %]	1			2			3		
TS [ $\times 10^{-3}m^4$ ] / IP [kN]	1.8	2.25	2.7	1.8	2.25	2.7	1.8	2.25	2.7
15	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	10	11	12	13	14	15	16	17	18
25	19	20	21	22	23	24	25	26	27
30	28	29	30	31	32	33	34	35	36
35	37	38	39	40	41	42	43	44	45

como porcentajes del valor de tensión inicial y en la 3.11(b) se muestran los valores sin modificación. Los resultados para el cable "b2" se presentan porque corresponden con los valores mayores de MA. Puede observarse que, para el caso menos tenso, la tensión dinámica máxima supera el 240% del valor inicial de  $IP$ . En la Figura 3.11(a) también puede notarse que a medida que la tensión inicial aumenta, todas las medidas presentadas (MA, ME y MI) disminuyen porcentualmente respecto del valor inicial, así como también la 'amplitud'  $MA-MI$ . Esta tendencia sigue una ley pronunciada y no lineal cuando se consideran los valores de  $IP$  desde 15 a 25 kN para luego volverse más suave y lineal entre 25 y 35 kN.

La Figura 3.11 (b) muestra los valores de MA, ME y MI de tensión de los cables, y puede verse que las tres medidas estadísticas (MA, ME y MI) aumentan en la medida que la tensión inicial aumenta, pero a partir de la Fig. 3.11 (a) se observa que el incremento

respecto de la tensión  $IP$  se vuelve cada vez menor en la medida que  $IP$  aumenta. Los niveles "b1", "b3" y "b4" no se ilustran por observarse el mismo comportamiento.

Así como es necesario estudiar los valores máximos de tensión, para asegurar que no exceden el valor límite que los cables pueden soportar, cuando se analizan mástiles arriostrados también es importante estudiar los valores mínimos, ya que una tensión mínima es necesaria para garantizar la estabilidad de la estructura. En la Figura 3.12 se muestran las tensiones MA, ME y MI como porcentajes de  $IP$  para los cables en los niveles 3 y 4 en la dirección 'a' que presentan los valores mínimos de tensión que se obtuvieron del estudio dinámico. De un análisis rápido de la Figura 3.12, puede concluirse que, aunque los cables pierden mucha tensión, en ningún momento resultaron completamente descargados. En las Figuras 3.12(a) y 3.12(b) puede verse que la influencia de  $IP$  es diversa según el nivel de cables que se estudie y que, además casi no afecta la amplitud MA–MI.



**Figura 3.12:** Tensiones dinámicas máximas, medias y mínimas para los cables en el nivel 1, y en la dirección "a".

En referencia a los distintos enfoques que se usaron para modelar las cargas de viento, se encontraron comportamientos similares para las variables estudiadas MA, ME y MI. Usando la carga del CASO 1, se puede observar que los parámetros TS y D tienen una mayor influencia en la tensión de los cables que cuando se usa la carga del CASO 2. Estas influencias no son estudiadas en detalle, ya que, para los cables de mástiles arriostrados, no son variables de interés (si la tensión del cable excede un valor límite determinado, el criterio indica que se debe cambiar la sección o el material del



cable y no tratar de rigidizar el mástil).

### 3.4 Comentarios Finales.

En esta sección se analizó la respuesta dinámica un mástil arriostrado de 120 m de altura y cuatro niveles de cables, mediante el uso de el software comercial ALGOR. Se usaron dos enfoques distintos para modelar las cargas de viento. Por un lado se empleó el Método de Representación Espectral presentado en el Capítulo 2 y por otro lado se usaron funciones armónicas para dar la variación temporal (determinística) a la carga. Se ha verificado que el uso de una carga que modela con mayor precisión la dinámica estocástica del viento, permite capturar con mejor detalle la influencia que los parámetros estructurales tienen en la respuesta dinámica del mástil. Se realizaron también estudios paramétricos, que permitieron conocer en qué medida la variación de parámetros estructurales como la tensión inicial, la rigidez flexional del mástil y el amortiguamiento tienen sobre la respuesta dinámica de la estructura, en términos de desplazamientos del mástil y tensiones de las riendas. Se observó que el parámetro más importante fue la tensión inicial y que su influencia prácticamente no cambia con la altura. Se encontró también que el aumento de la rigidez flexional incide negativamente en la respuesta dinámica (se producen desplazamientos mayores) en la zona próxima al extremo superior. El análisis de la tensión dinámica de los cables mostró que, en ningún momento, los cables perdieron la totalidad de la tensión inicial (la mínima tensión observada es del orden del 12% de  $IP$ ) y que a mayor  $IP$  menor es la amplitud entre valores máximos y mínimos de tensión dinámica.

Los estudios realizados y sus resultados, permitieron caracterizar la respuesta dinámica de mástiles arriostrados y evaluar la sensibilidad que presentan ante parámetros estructurales y de carga. La no linealidad del sistema, proveniente de los cables, sumada a la sensibilidad paramétrica y la real incertidumbre en los valores de los parámetros estructurales, sugieren la necesidad de estudios de cuantificación y propagación de incertidumbre. Para ello, en el Capítulo 4 se desarrolla el marco teórico para formular modelos reducidos, necesarios para el modelado de incertidumbre. En el Capítulo 5 se presentan estudios de propagación de incertidumbre en modelos reducidos de estructuras arriostradas.

## **Capítulo 4**

# **Derivación de ecuaciones cable–viga y construcción de modelos reducidos**

### **4.1 Introducción.**

Este capítulo contiene todas las deducciones teóricas de las ecuaciones gobernantes de vigas, columnas y cables tensos que se usarán para los estudios posteriores. Además se incluye la derivación de la forma débil de las ecuaciones y formulación de modelos reducidos, que se emplearán en el capítulo siguiente para realizar estudios de cuantificación de incertidumbre. Se presentan primero los principios energéticos para la derivación de las ecuaciones, seguidos por algunas nociones matemáticas sobre variación y minimización de funcionales. Luego se emplean los conceptos anteriores para deducir las ecuaciones que gobiernan la respuesta dinámica de vigas y cables tensos. Finalmente, se realiza la formulación de modelos reducidos de sistemas tipo cable-viga o cable-columna.

## 4.2 Herramientas para la deducción de las ecuaciones diferenciales de vigas y cables.

### 4.2.1 Principio de Hamilton. Concepto general.

El principio de Hamilton es una generalización del principio de desplazamientos virtuales a problemas dinámicos (Reddy, 2006). Se asume que el sistema que se pretende modelar es gobernado por dos energías: la energía cinética  $K$  y la energía potencial  $\Pi$ . A continuación se reproduce la deducción del principio de Hamilton propuesta en Reddy (2006), partiendo de la segunda ley de Newton.

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0, \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{a}$  es el vector de las aceleraciones,  $\mathbf{F}$  es el vector de fuerza resultante de todas las fuerzas actuantes sobre el cuerpo. A continuación se considera un desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{u}$  (consistente con las condiciones de borde esenciales) del camino que recorre una partícula material que ocupa la posición  $\mathbf{x}$  en el cuerpo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , a  $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ . Se supone que el camino  $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$  es distinto de  $\mathbf{u}$ , excepto en los instantes inicial  $t_i$  y final  $t_{i+1}$ . Un desplazamiento virtual admisible  $\delta\mathbf{u}$  satisface las siguientes condiciones:

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_u \forall t, \quad (4.2a)$$

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{u}, t_i) = \delta\mathbf{u}(\mathbf{u}, t_{i+1}) = \mathbf{0} \forall t, \quad (4.2b)$$

donde  $\Gamma_u$  es la porción del borde del cuerpo donde  $\mathbf{u}$  es impuesto. El trabajo sobre el cuerpo en el instante  $t$  por la fuerza resultante  $\mathbf{F}$ , debido al desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{u}$  es dado por:

$$\int_V \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} dS - \int_V \sigma : \delta\varepsilon dV, \quad (4.3)$$

siendo  $\mathbf{f}$  las fuerzas de volumen ( $V$ ),  $\hat{\mathbf{t}}$  las tracciones en la superficie  $S$  del borde  $\Gamma_\sigma$  del cuerpo donde no existen restricciones para  $\mathbf{u}$ ,  $\sigma$  y  $\varepsilon$  los tensores de tensión y deformación específica, el producto  $\sigma : \delta\varepsilon = \sigma_{ij}\varepsilon_{ji}$  y el último sumando de la Ec. 4.3 representa el

trabajo virtual de las fuerzas internas. El trabajo hecho por las fuerzas inerciales  $m\mathbf{a}$  resulta:

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} dV, \quad (4.4)$$

donde  $\rho$  representa la masa por unidad de volumen. Integrando por partes la Ec. 4.4, considerando la Ec. 4.2 y reemplazando todo en la Ec. 4.1 resulta:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \int_V \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_V (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS \right] dt = 0, \quad (4.5)$$

que es la formulación del principio de Hamilton para un medio continuo general (que puede ser o no conservativo y/o elástico). Para un cuerpo ideal elástico,  $\mathbf{f}$  y  $\hat{\mathbf{t}}$  son fuerzas conservativas,

$$\delta V = - \left( \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS \right), \quad (4.6)$$

y asumiendo que existe una función de densidad de deformaciones específicas  $U_0 = U_0(\varepsilon_{ij})$  tal que

$$\delta U_0(\varepsilon_{ij}) = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (4.7)$$

y además

$$K = \int_V \frac{\rho}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} dV, \quad U = \int_V U_0 dV, \quad (4.8)$$

se obtiene la ecuación 4.9, que es el postulado del principio de Hamilton para un cuerpo elástico.

$$\delta \int_{t_i}^{t_{i+1}} [K - (V + U)] dt = 0, \quad (4.9)$$

donde  $K$  y  $U$  representan los términos de energía cinética y de deformación específica.

### 4.2.2 Conceptos sobre cálculo de variaciones y minimización de funcionales.

Para deducir las ecuaciones de vigas y cables a partir del principio de Hamilton, es necesario utilizar conceptos de variación de funcionales. En esta sección se tratan dichos conceptos. Los desarrollos de esta sección pueden ampliarse consultando las referencias Reddy (2006) y Fung (1991).

El cálculo de variaciones trata con la minimización de funcionales. Si  $u(x)$  es una función de  $x$  en un intervalo  $(a, b)$  y si  $I$  es una cantidad definida por la integral

$$I = \int_a^b [u(x)]^2 dx, \quad (4.10)$$

entonces  $I$  depende de  $u(x)$ . Se puede indicar esta dependencia como  $I[u(x)]$ . La cantidad  $I$  puede decirse que es un funcional de  $u(x)$ .

El problema básico del cálculo de variaciones puede ilustrarse por medio de un ejemplo. Consideremos un funcional  $J[u]$  definido como

$$J[u] = \int_a^b F(x, u, u') dx. \quad (4.11)$$

Se debe prestar atención a todas las funciones  $u(x)$  que sean continuas y diferenciables, con derivadas continuas  $u'(x)$  y  $u''(x)$  en el intervalo  $a \leq x \leq b$  y que satisfacen las condiciones de borde  $u(a) = u_0$ ,  $u(b) = u_1$ , con  $u_0$  y  $u_1$  son valores conocidos. Se asume también que la función  $F(x, u, u')$  es continua y diferenciable respecto de  $x$ ,  $u$  y  $u'$  hasta derivadas parciales de segundo orden, que son también continuas. De todas las funciones  $u(x)$  que satisfacen todas las condiciones, se trata de encontrar la función  $u(x) = y(x)$  para la cual  $J[u]$  es mínimo cuando  $u(x) = y(x)$  con respecto a una vecindad suficientemente pequeña de  $y(x)$ . Se entiende que  $u(x)$  está en una vecindad  $h$  de  $y(x)$  si se verifica

$$|y(x) - u(x)| < h, \quad \forall x \in (a, b). \quad (4.12)$$

Suponiendo que el problema propuesto tiene solución, entonces existe una función  $y(x)$  tal que

$$J[y] \leq J[u] \quad (4.13)$$

se verifica para todas las funciones  $u(x)$  en una vecindad  $h$  suficientemente pequeña de  $y(x)$ . A continuación se considera una función  $\eta(x)$ , que junto con sus derivadas  $\eta'(x)$  y  $\eta''(x)$  son continuas en  $x \in [a, b]$  y, además

$$\eta(a) = \eta(b) = 0. \quad (4.14)$$

Por lo tanto, la función

$$u(x) = y(x) + \epsilon\eta(x) \quad (4.15)$$

satisface todas las condiciones de borde y continuidad especificadas al comienzo. Para un valor suficientemente chico de  $\delta > 0$ ,  $u(x)$  así definida pertenece para todos los valores de  $\epsilon$  con  $|\epsilon| < \delta$ , a una vecindad  $h$  de  $y(x)$ . Se puede entonces definir la función

$$\phi(\epsilon) = J[y + \epsilon\eta] = \int_a^b F[x, y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta'(x)] dx, \quad (4.16)$$

y ya que  $y(x)$  se considera conocida,  $\phi(\epsilon)$  es una función de  $\epsilon$  para cualquier  $\eta(x)$  dado. De acuerdo con la Ec. 4.13 se tiene entonces que

$$\phi(0) \leq \phi(\epsilon), \quad \forall |\epsilon| < \delta \quad (4.17)$$

por lo que  $\phi(\epsilon)$  tiene un mínimo en  $\epsilon = 0$ . Como la función  $\phi(\epsilon)$  es diferenciable respecto de  $\epsilon$ , debe verificarse

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial u'} \eta'(x) \right] dx. \quad (4.18)$$

Tomando  $\partial F/\partial u = F_u$ ,  $\partial F/\partial u' = F_{u'}$ , integrando por partes y considerando las condiciones Ec. 4.14 se tiene:

$$\int_a^b \left( F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} \right) \eta(x) dx = 0. \quad (4.19)$$

Tomando ahora  $\epsilon = 0$  se tiene que

$$0 = \phi'(0) = \int_a^b \left[ F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') \right] \eta(x) dx, \quad (4.20)$$

y aplicando el lema fundamental del cálculo (siendo que  $\eta$  fue formulada explícitamente

para satisfacer las condiciones requeridas por dicho lema) que indica que para que la integral de la Ec. 4.20 sea cero,  $\eta$  y/o el término entre corchetes deben ser cero. Como  $\eta$  puede ser cualquier función (no necesariamente cero), entonces el término entre corchetes de la Ec. 4.20 debe necesariamente anularse, por lo tanto se llega a que

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0 \quad (4.21)$$

es la condición que se debe cumplir para que  $F$  sea mínimo y que es conocida como la *ecuación diferencial de Euler*.

Es común en la notación llamar a  $\epsilon\eta(x)$  como la variación de  $u(x)$  y escribir  $\epsilon\eta(x) = \delta u(x)$ . También es común definir la primera variación del funcional  $J[u]$  como  $\delta J = \epsilon\phi'(\epsilon)$ , multiplicando a ambos lados por  $\epsilon$  y por lo tanto la variación del funcional  $J[u]$  puede escribirse como

$$\delta J = \int_a^b [F_u(x, u, u')\delta u + F_{u'}(x, u, u')\delta u'] dx, \quad (4.22)$$

o bien, integrando por partes el segundo sumando:

$$\delta J = \int_a^b \left[ F_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} F_{u'}(x, u, u') \right] \delta u(x) dx + F_{u'}(x, u, u') \delta u(x) \Big|_a^b. \quad (4.23)$$

Una propiedad interesante del operador variacional  $\delta$  es que es intercambiable con los operadores diferencial e integral:

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{d}{dx}(\epsilon\eta) = \epsilon \frac{d\eta}{dx} = \epsilon\eta' = \delta u' = \delta \left( \frac{du}{dx} \right), \quad (4.24a)$$

$$\delta J = \delta \int_a^b F(x, u, u') dx = \int_a^b \delta F(x, u, u') dx. \quad (4.24b)$$

Usando la Ec. 4.24b puede entonces escribirse:

$$\delta F(x, u, u') = F_u(x, u, u')\delta u + F_{u'}(x, u, u')\delta u'. \quad (4.25)$$

A partir de la Ec. 4.25 puede hacerse una analogía entre la variación y el diferencial

total de  $F(x, u, u')$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du'; \quad (4.26)$$

como  $x$  no es variado en la variación de  $u$  a  $u + \delta u$ ,  $dx = 0$ , con lo que la analogía se vuelve evidente, por lo que  $\delta$  funciona como un operador diferencial con respecto a las variables dependientes

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u'. \quad (4.27)$$

Considerando la Ec. 4.27, resulta sencillo expandir la definición para la variación de funcionales con más variables dependientes, independientes y derivadas de orden superior.

Además, puede verificarse que las leyes de variaciones para sumas, productos, cocientes, potencias, etc, son análogas a las correspondientes a la diferenciación, por ejemplo, considerando  $F_1(u)$  y  $F_2(u)$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \delta(F_1 \pm F_2) &= \delta F_1 + \delta F_2, \\ \delta(F_1 F_2) &= \delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2, \\ \delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) &= \frac{\delta F_1 F_2 - F_1 \delta F_2}{F_2^2}, \\ \delta(F_1)^n &= n(F_1)^{n-1} \delta F_1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Otra propiedad es que si  $G = G(u, v, w)$  es una función con varias variables dependientes  $u, v$  y  $w$  (y sus derivadas), la variación total es la suma de las variaciones parciales:

$$\delta G = \delta_u G + \delta_v G + \delta_w G. \quad (4.29)$$

## 4.3 Deducción de las ecuaciones diferenciales de vigas y cables tensos.

### 4.3.1 Ecuaciones diferenciales de vigas Euler-Bernoulli.

Se considera a continuación la deducción de las ecuaciones de vigas, considerando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, asumiendo los siguientes postulados:

1. La viga es considerada como un continuo unidimensional elástico y homogéneo,



que obedece relaciones de tensión-deformación lineales.

2. Las deformaciones por corte y torsión se consideran despreciables.
3. Se tiene en cuenta el efecto de segundo orden (pérdida de rigidez del elemento debido a la presencia carga normal).

La deducción de las ecuaciones se realiza usando el principio de Hamilton, por lo que a partir de la ecuación 4.9:

$$\delta \int_{t_i}^{t_{i+1}} [K - (V + U)] dt = 0, \quad (4.30)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [\delta K - (\delta V + \delta U)] dt = 0, \quad (4.31)$$

se deben definir los términos de energía potencial elástica  $U$  y energía cinética  $K$ . La energía cinética debida a la traslación  $K$  (despreciando la inercia rotacional) de cualquier punto de la viga se define como (Wei et al., 2012)

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l m(\dot{v}^2 + \dot{u}^2) dx \quad (4.32)$$

donde  $\dot{(*)} = d(*)/dt$ ,  $m$  es la masa de la viga,  $l$  es la longitud de la viga y  $u$  y  $v$  son los desplazamientos en la dirección axial y perpendicular al eje de la viga, respectivamente. La energía potencial elástica, combinando las componentes por deformaciones flexionales, axiales y por efecto de segundo orden tiene la forma :

$$U = \int_0^l \left[ \frac{1}{2} EI(v'')^2 + \frac{1}{2} EA(u')^2 + \frac{1}{2} N(v')^2 \right] dx, \quad (4.33)$$

donde  $(*)' = d(*)/dx$ ,  $E$  es el módulo de Young,  $I$  es la inercia flexional,  $A$  es la sección transversal de la viga y  $N$  es el esfuerzo normal actuante en la viga (independiente de  $v$ ). Los sumandos dentro de la integral de la Ec. 4.33 corresponden con las energías potenciales elásticas debidas a la flexión, deformación axial y efecto de segundo orden, respectivamente.

La energía potencial de las cargas externas puede escribirse como (Fung, 1991):

$$\begin{aligned}
 V = & - \int_0^l [q(x)v(x) + p(x)u(x)] dx + \\
 & + M_0v'_0 - M_lv'_l - Q_0v_0 + Q_lv_l + P_0u_0 - P_lu_l,
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

siendo  $q(x)$  y  $p(x)$  cargas distribuidas en el sentido axial y transversal a la viga,  $M_i$ ,  $Q_i$  y  $P_i$  los momentos flectores, esfuerzos en las direcciones transversal y axial respectivamente en los extremos inicial ( $i = 0$ ) y final ( $i = l$ ) de la viga, siendo  $u_i$ ,  $v_i$  y  $v'_i$  los desplazamientos y giros respectivos.

Se introducen a continuación las expresiones de las integrales en el tiempo de las variaciones de las energías Ec. 4.32, 4.33 y 4.34 usando los conceptos y propiedades de la sección 4.2.2:

$$\delta K = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^l m(\dot{v}\delta\dot{v} + \dot{u}\delta\dot{u}) dx dt \tag{4.35}$$

$$\delta U = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^l [EIv''\delta v'' + EAu'\delta u' + Nv'\delta v'] dx dt, \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
 \delta V = & \int_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^l [q\delta v + p\delta u] dx + M_0\delta v'_0 - M_l\delta v'_l \\
 & - Q_0\delta v_0 + Q_l\delta v_l + P_0\delta u_0 - P_l\delta u_l dt,
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

A continuación se integra por partes (respecto de  $t$  en la Ec. 4.35 y respecto de  $x$  en la Ec. 4.36 y 4.37) tantas veces como sea necesario para rescatar los valores de  $\delta u$  y  $\delta v$  sin derivadas:

$$\delta K = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^l m(\ddot{v}\delta v + \ddot{u}\delta u) dx dt, \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
 \delta U = & \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^l [EIv''''\delta v - EAu''\delta u - Nv''\delta v] dx \\
 & + \left[ - [EIv''\delta v']_0^l + [EIv'''\delta v_0]_0^l + [EAu'\delta u]_0^l + [Nv'\delta v]_0^l \right] dt,
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
 \delta V = & \int_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^l [q\delta v + p\delta u] dx + \\
 & \left[ M_0\delta v'_0 - M_l\delta v'_l - Q_0\delta v_0 + Q_l\delta v_l - P_0\delta u_0 + P_l\delta u_l \right] dt,
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Introduciendo las Ec. 4.38, 4.39 y 4.40 en la 4.31 y coleccionando los términos que contienen  $\delta u$  y  $\delta v$  dentro de las integrales se encuentran las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} v : m\ddot{v} + EIV'''' - Nv'' &= q, \\ u : m\ddot{u} - EAu'' &= p. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Mientras que si se evalúan los términos dentro de corchetes, se extraen las condiciones de borde:

$$EIV_l'' - M_l = 0 \quad \text{ó} \quad \delta v_l' = 0. \tag{4.42a}$$

$$EIV_0'' - M_0 = 0 \quad \text{ó} \quad \delta v_0' = 0. \tag{4.42b}$$

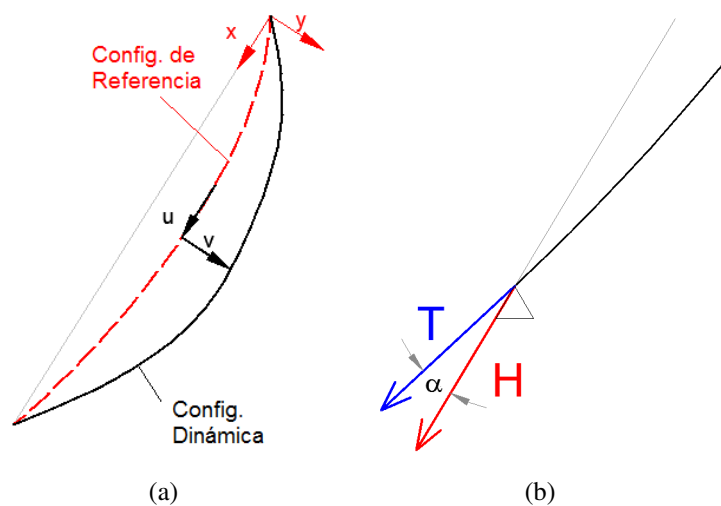
$$EIV_l''' + Nv_l' - Q_l = 0 \quad \text{ó} \quad \delta v_l = 0. \tag{4.42c}$$

$$EIV_0''' + Nv_0' - Q_0 = 0 \quad \text{ó} \quad \delta v_0 = 0. \tag{4.42d}$$

$$EAu_l' - P_l = 0 \quad \text{ó} \quad \delta u_l = 0. \tag{4.42e}$$

$$EAu_0' - P_0 = 0 \quad \text{ó} \quad \delta u_0 = 0. \tag{4.42f}$$

### 4.3.2 Ecuaciones diferenciales de cables tensos.



**Figura 4.1:** Formulación de cables tensos: a) Detalle de configuración de referencia ; b) Componentes de tensión inicial.

La configuración actual dinámica de cables planos, (ver Fig. 4.1) es descripta con referencia a la configuración de equilibrio estático, a través de las componentes de desplazamiento del cable  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$  sobre la abscisa  $x$ . En esta formulación, se asumieron las siguientes hipótesis:

1. El cable es considerado como un continuo unidimensional elástico y homogéneo, que obedece a relaciones de tensión-deformación lineales.
2. La configuración de equilibrio estático usada como referencia para el cable puede ser descripta por medio de una parábola cuadrática (considerando que se modelan cables tensos, cuya relación entre flecha y cuerda es pequeña).
3. Las deformaciones axiales del cable son descriptas por medio de las deformaciones Lagrangianas referidas al baricentro de la sección del cable.
4. Las rigideces flexional y torsional del cable son despreciables.

La formulación del sistema de ecuaciones que gobiernan la dinámica de cables tensos con una inclinación arbitraria se realiza por medio del principio de Hamilton (Ec. 4.31). Las componentes de energía cinética  $K$ , potencial elástica  $U$  y potencial de las cargas  $V$  son (Wei et al., 2012):

$$K = 1/2 \int_0^l m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) ds_0, \quad (4.43)$$

$$U = 1/2 \int_0^l \left[ EA\varepsilon^2 ds_0 + H \frac{ds_0}{dx} \varepsilon \right] ds_0, \quad (4.44)$$

$$V = - \int_0^l [q(x)v(x) + p(x)u(x)] ds_0 - Q_0v_0 + Q_lv_l + P_0u_0 - P_lu_l, \quad (4.45)$$

donde  $(*)' = d(*)/dx$  y  $\dot{(*)} = d(*)/dt$ .  $m$  representa la masa por unidad de longitud,  $q(x)$  y  $p(x)$  cargas distribuidas en el sentido axial y transversal al cable,  $Q_i$  y  $P_i$  los esfuerzos en las direcciones transversal y axial respectivamente en los extremos inicial ( $i = 0$ ) y final ( $i = l$ ) del cable, siendo  $u_i$  y  $v_i$  los desplazamientos respectivos,  $T$  es la tensión inicial del cable, en la dirección del cable,  $H$  es la componente de la tensión del

cable en la dirección de la cuerda (por tratarse de cables tensos y con poca flecha, aquí se la considera aproximadamente igual a  $T$ ),  $E$  es el módulo de Young y  $A$  la sección transversal.  $Y(x) = 4D(x/l - (x/l)^2)$  describe la configuración de referencia del cable, donde  $D$  es la flecha y  $\varepsilon$  es la deformación específica del cable, obtenida por medio de una expansión de Taylor de 3er orden como:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{ds - ds_0}{ds_0} \\ &= \frac{du}{ds_0} \frac{dx}{ds_0} + \frac{dY}{ds_0} \frac{dv}{ds_0} - \frac{dx dY du dv}{ds_0^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{ds_0^2} - \frac{dY^2}{ds_0^2} \right) dv^2 \\ &\quad + (\dots) du^2 + \mathcal{O}(3), \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde:

$$ds_0^2 = dx^2 + dY^2 \quad (4.47a)$$

$$ds^2 = (dx + du)^2 + (dY + dv)^2 \quad (4.47b)$$

Siendo  $dY \ll 1$ , entonces  $ds_0 \approx dx$ , y  $du \ll 1$  (se trabaja bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos) por lo tanto, los términos que contienen  $du^2$ ,  $dY^2$  y  $du dY$  son eliminados de la Eq.4.46, y la deformación específica del cable resulta:

$$\varepsilon \approx \frac{du}{ds_0} + \frac{dY}{ds_0} \frac{dv}{ds_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{ds_0} \right)^2 = u' + Y'v' + \frac{1}{2}v'^2 \quad (4.48)$$

Contemplando otra medida de deformación específica

$$\varepsilon = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2ds_0^2}, \quad (4.49)$$

y empleando similares consideraciones, es posible llegar a la misma expresión para la deformación específica del cable, sin la necesidad de emplear la expansión de Taylor.

Teniendo en cuenta que  $Y \ll 1$ ,  $\alpha \approx 0 \rightarrow \frac{ds_0}{dx} \approx 1$  (ver Fig.4.1(a)), entonces  $T = \frac{ds_0}{dx} H \approx H$ .

Se introducen a continuación las expresiones de las integrales en el tiempo de las variaciones de las energías Ec. 4.43, 4.44 y 4.45 usando los conceptos y propiedades de la sección 4.2.2:

$$\delta K = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^l m(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v})dx dt, \quad (4.50)$$

$$\delta U = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^l [EA\varepsilon\delta\varepsilon + H\delta\varepsilon] dx dt, \quad (4.51)$$

$$\delta V = \int_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^l [q\delta v + p\delta u] dx + \left[ -Q_0\delta v_0 + Q_l\delta v_l - P_0\delta u_0 + P_l\delta u_l \right], \quad (4.52)$$

Donde

$$\delta\varepsilon = \delta u' + Y'\delta v' + v'\delta v'. \quad (4.53)$$

A continuación se integra por partes (respecto de  $t$  en la Ec. 4.50 y respecto de  $x$  en la Ec. 4.51 y 4.52) tantas veces como sea necesario para rescatar los valores de  $\delta u$  y  $\delta v$  sin derivadas:

$$\delta K = - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^l m(\ddot{v}\delta v + \ddot{u}\delta u)dx dt, \quad (4.54)$$

$$\delta U = - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^l \left[ EA\varepsilon'\delta u + [(Y' + v')\varepsilon]'\delta v + Hv''\delta v \right] dx + \left[ [EA\delta\varepsilon]_0^l + [Hv']_0^l \right] dt, \quad (4.55)$$

$$\delta V = \int_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^l (q\delta v + p\delta u)dx + \left[ -Q_0\delta v_0 + Q_l\delta v_l - P_0\delta u_0 + P_l\delta u_l \right] dt, \quad (4.56)$$

Introduciendo las Ec. 4.54, 4.55 y 4.56 en la 4.31 y coleccionando los términos que contienen  $\delta u$  y  $\delta v$  dentro de las integrales se encuentran las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento dinámico de cables tenso:

$$\begin{aligned} v : m\ddot{v} - [Hv' + EA(Y' + v')\varepsilon]' &= q_v(t, x) \\ u : m\ddot{u} - [EA\varepsilon]' &= q_u(t, x) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Mientras que si se evalúan los términos entre corchetes (agrupando los términos  $\delta u$  y  $\delta v$ ), fuera de las integrales, se obtienen las condiciones de borde:

$$EA(Y' + v')_l + Hv'_l - Q_l = 0 \quad \text{ó} \quad \delta v_l = 0. \quad (4.58a)$$

$$EA(Y' + v')_0 + Hv'_0 - Q_0 = 0 \quad \text{ó} \quad \delta v_0 = 0. \quad (4.58b)$$

$$EAu'_l - P_l = 0 \quad \text{ó} \quad \delta u_l = 0. \quad (4.58c)$$

$$EAu'_0 - P_0 = 0 \quad \text{ó} \quad \delta u_0 = 0. \quad (4.58d)$$

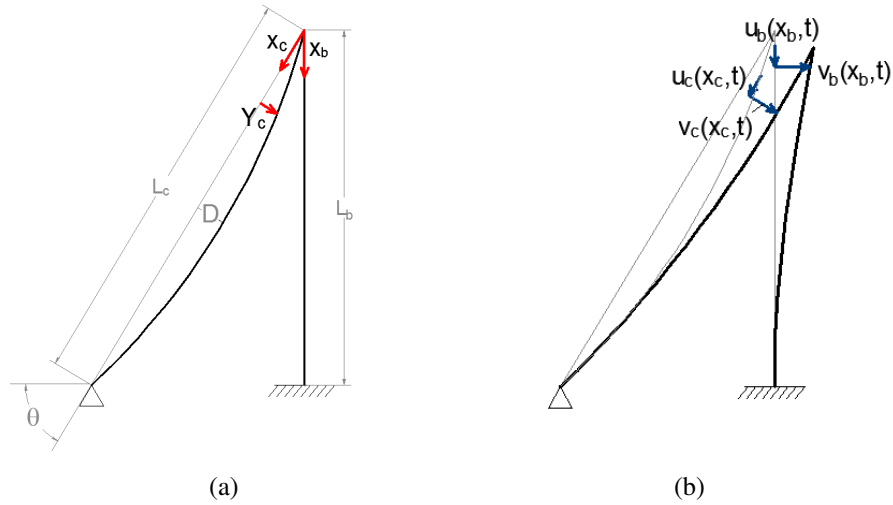
## 4.4 Sistema compuesto viga/columna-cable y modelos reducidos.

### 4.4.1 Planteo del problema.

Esta sección tiene como objetivo introducir sistemas tipo viga-cable o columna-cable en el plano, utilizando las ecuaciones deducidas precedentemente y formular los modelos reducidos que serán usados en el capítulo siguiente, para estudios de cuantificación de incertidumbres. El sistema que se pretende estudiar, presentado en la Fig. 4.2, consiste en una simplificación de un mástil arriostrado. El uso de simplificaciones del sistema completo y modelos reducidos es necesario para estudios de cuantificación de incertidumbre dada la gran cantidad de simulaciones que es necesario llevar adelante.

A partir de las Ec. 4.41, 4.57 4.42 y 4.58 se puede formular el sistema Ec. 4.59 que gobierna la dinámica del problema compuesto y sus respectivas condiciones de borde (Ec. 4.60).

$$\begin{cases} v_b : m_b \ddot{v}_b + c_b \dot{v}_b + EI v_b'''' + P_H v_b'' = F_{v_b}(t, x_b), \\ u_b : m_b \ddot{u}_b + c_b \dot{u}_b + EA_b u_b'' = F_{u_b}(t, x_b), \\ v_c : m_c \ddot{v}_c + c_c \dot{v}_c - [Hv'_c + EA_c(Y'_c + v'_c)\varepsilon_c]' = F_{v_c}(t, x_c), \\ u_c : m_c \ddot{u}_c - [EA_c \varepsilon_c]' = F_{u_c}(t, x_c), \end{cases} \quad (4.59)$$



**Figura 4.2:** Configuraciones del mástil arriostrado: a) estática; b) dinámica.

$$u_c(l_c) = v_c(l_c) = 0 \quad (4.60a)$$

$$v_b(l_b) = v'_b(l_b) = u_b(l_b) = 0 \quad (4.60b)$$

$$v_b(0) = -u_c(0) \cos \theta + v_c(0) \sin \theta \quad (4.60c)$$

$$u_b(0) = u_c(0) \sin \theta + v_c(0) \cos \theta \quad (4.60d)$$

$$EIv''_b(0) = 0 \quad (4.60e)$$

$$EIv'''_b(0) + (EA_c \varepsilon_c + H) \cos \theta + [EA_c \varepsilon_c (Y'_c(0) + v'_c(0)) + H v'_c(0)] \sin \theta = 0 \quad (4.60f)$$

Donde el subíndice  $b$  (beam) indica que el argumento corresponde a la viga y el subíndice  $c$  (cable) al cable. Las variables  $u$  y  $v$  corresponden a los desplazamientos en las direcciones axial y transversal a los distintos elementos estructurales, respectivamente.  $E$  es el módulo de elasticidad,  $I$  el momento de segundo orden,  $A$  representa la sección transversal,  $H$  la tensión inicial del cable, y  $F$  son las cargas distribuidas en la viga y cable, en las direcciones correspondientes a los desplazamientos  $u$  y  $v$  (indicados también como subíndices). La reducción de rigidez de la columna debido a la fuerza axial ( $N$ ) generada por la tensión del cable aquí se aproxima utilizando el valor constante  $P_H$ , que es la proyección de  $H$  en la dirección de la columna. Como, en general, los mate-



riales que conforman las estructuras arriostradas pueden tener distinto comportamiento respecto del amortiguamiento que inducen a la estructura, se ha tenido en cuenta los aportes de amortiguamiento de cada material en forma separada, por medio de los coeficientes  $c$ . El amortiguamiento inducido se ha introducido, inicialmente, a través del coeficiente convencionalmente usado  $c_i = 0.01(2m_i\omega_i)$ , con  $i = c, b$  y  $\omega_i$  es alguna frecuencia natural del sistema (Wei et al., 2012; Gattulli et al., 2002; Lenci and Ruzziconi, 2009)). Posteriormente,  $c_i$  es utilizado como variable de ajuste del modelo; adoptando  $c_i = 0.0085(2m_i\omega_i)$ , los resultados representan adecuadamente la forma, amplitud y frecuencia de los desplazamientos. En los desarrollos posteriores,  $\omega_i$  se elige por observación de las formas modales usadas en la aproximación; por ejemplo, si la forma modal seleccionada es un modo de cable, entonces, la correspondiente frecuencia se usa para el término de amortiguamiento del cable.

## 4.5 Formulación variacional.

Para introducir la formulación variacional del sistema Ec.4.59, primero se definirá a  $\mathcal{V}$  como el conjunto de funciones de base y a  $\Phi$  como el conjunto de funciones de peso. Estos conjuntos deben elegirse dentro del espacio de funciones con derivadas parciales de cuadrado integrable, que satisfagan las condiciones de borde esenciales (Ecs.4.60(a-f)). La formulación débil consiste, conceptualmente, en la proyección del espacio de funciones  $\mathcal{V}$  (que son soluciones del sistema Ec.5.8) sobre el el espacio de funciones  $\Phi$ . Matemáticamente, esto se realiza multiplicando las funciones que forman los conjuntos  $\mathcal{V}$  y  $\Phi$  e integrando sobre la coordenada espacial (Rektorys, 1977).

Procediendo de la manera descrita, se puede arribar a un sistema de la forma

$$\mathcal{M}(\phi, \ddot{v}) + \mathcal{C}(\phi, \dot{v}) + \mathcal{K}_L(\phi, v) + \mathcal{K}_{NL}(\phi, v) = \mathcal{F}(\phi, v), \quad (4.61)$$

donde  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}$  son los operadores de masa, amortiguamiento y fuerzas externas, respectivamente;  $\mathcal{K}_L$  y  $\mathcal{K}_{NL}$  son los operadores de rigidez lineal y no lineal respectivamente. El sistema de la Ec. 4.61 en conjunto con las condiciones iniciales y de contorno ( $\mathcal{BC}$ ), constituyen la formulación débil o variacional del sistema de las Ec. 4.59.  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{K}_L$ ,  $\mathcal{K}_{NL}$  y  $\mathcal{BC}$  se definen en las Ec. 4.62.

### 4.5.1 Proyección de Bubnov-Galerkin y modelo de orden reducido (ROM).

Una vez establecida la formulación débil o variacional Ec. 4.61 del sistema Ecs. 4.59, se desarrolló un modelo reducido (ROM, según su sigla en inglés) a través de una aproximación de Bubnov-Galerkin. Se usaron modos normales de vibración (encontrados por medio de una programación en elementos finitos ad hoc en Matlab, considerando elementos viga y elementos barra tensos de tres nodos) como funciones de forma para construir la aproximación del sistema de las Ecs. 4.59. Luego de varias pruebas, se concluyó que un modelo de dos grados de libertad (2GL) es el que mejor responde a las necesidades del análisis, considerando que será implementado para estudios de incertidumbre: la respuesta dinámica se predice correctamente dentro los márgenes aceptables para un modelo reducido y el tiempo requerido para la simulación (usando herramientas de paralelización de Matlab (Mathworks, 2011)) se mantiene suficientemente acotado.

$$\mathcal{M}(\phi, \ddot{v}) = \int_0^{l_b} \phi_b m_b (\ddot{v}_b + \ddot{u}_b) dx_b + \int_0^{l_c} \phi_c m_c (\ddot{v}_c + \ddot{u}_c) dx_c, \quad (4.62a)$$

$$\mathcal{C}(\phi, \dot{v}) = \int_0^{l_b} \phi_b c_b (\dot{v}_b + \dot{u}_b) dx_b + \int_0^{l_c} \phi_c c_c (\dot{v}_c + \dot{u}_c) dx_c, \quad (4.62b)$$

$$\mathcal{F}(\phi, v) = \int_0^{l_b} \phi_b (F_{u_b} + F_{v_b}) dx_b + \int_0^{l_c} \phi_c (F_{v_c} + F_{u_c}) dx_c, \quad (4.62c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_L(\phi, v) = & \int_0^{l_b} (EI_b v_b'' \phi_b'' - P_H v_b' \phi_b' + EA_b u_b' \phi_b') dx_b + \\ & + \int_0^{l_c} \phi_c' (H v_c' + EA_c u_c') dx_c, \end{aligned} \quad (4.62d)$$

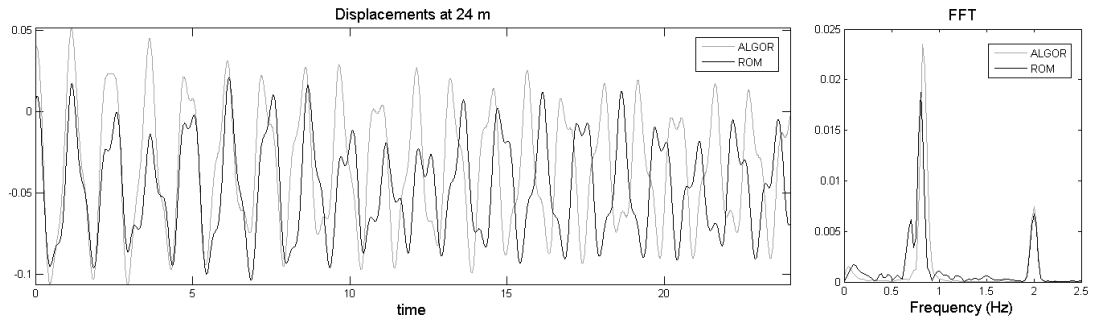
$$\mathcal{K}_{NL}(\phi, v) = \int_0^{l_c} \phi_c' EA_c [(Y_c' + v_c')(u_c' + Y_c' v_c' + \frac{v_c'^2}{2}) + (Y_c' v_c' + \frac{v_c'^2}{2})] dx_c, \quad (4.62e)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{BC} = & [H v_c' + EA_c (Y_c' + v_c')(u_c' + Y_c' v_c' + v_c'^2/2)] \phi_c|_0^{l_c} + \\ & + EA_c (u_c' + Y_c' v_c' + v_c'^2/2) \phi_c|_0^{l_c} + EI_b v_b''' \phi_b|_0^{l_b} - EI_b v_b'' \phi_b'|_0^{l_b} + \\ & + P_H v_b' \phi_b|_0^{l_b} + EA_b u_b' \phi_b|_0^{l_b} \end{aligned} \quad (4.62f)$$

Para la formulación del ROM de 2GL, los desplazamientos se expresaron en el espacio modal como  $v = \Psi q$  y, siguiendo el procedimiento de Bubnov-Galerkin, se adoptó al conjunto de funciones de base  $\Psi = \Phi$ . El vector de los desplazamientos se ordenó de la siguiente manera  $v = \{v_b(x_b, t), u_b(x_b, t), v_c(x_c, t), u_c(x_c, t)\}^T$ , la matriz modal  $\Phi = [\phi_1 | \phi_2]$  está compuesta por las autofunciones (formas modales)  $\phi_i = \{\phi_{b_v i}(x_b), \phi_{b_u i}(x_b), \phi_{v_c i}(x_c), \phi_{u_c i}(x_c)\}^T$  y el vector de amplitud modal es  $q = \{q_1(t), q_2(t)\}^T$ . El sistema no lineal de ecuaciones de 2 GL, en función de las coordenadas generalizadas  $q_1$  y  $q_2$  es obtenido imponiendo el estado estacionario del Hamiltoniano asociado, llegando al sistema

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{q}_1 + a_1 \dot{q}_1 + c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_{12} q_1 q_2 + c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2 + c_{211} q_1^2 q_2 + \\
 + c_{122} q_1 q_2^2 + c_{111} q_1^3 + c_{222} q_2^3 = p_1(t) \\
 m_2 \ddot{q}_2 + a_2 \dot{q}_2 + d_1 q_1 + d_2 q_2 + d_{12} q_1 q_2 + d_{11} q_1^2 + d_{22} q_2^2 + d_{211} q_1^2 q_2 + \\
 + d_{122} q_1 q_2^2 + d_{111} q_1^3 + d_{222} q_2^3 = p_2(t)
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

El sistema de las Ecs.4.63, de dos ecuaciones no lineales acopladas y derivadas en el tiempo se programó en Matlab y se resolvió usando integradores Runge-Kutta que provee el software. Se testeó un amplio rango de combinaciones de modos normales para construir el ROM. Los mejores resultados se encontraron cuando se usaron los dos primeros modos normales, logrando reproducir adecuadamente amplitudes, formas y frecuencias de los registros temporales de desplazamientos. La verificación se realizó contrastando los resultados obtenidos con el ROM contra los obtenidos por medio de un software comercial de elementos finitos.



**Figura 4.3:** Verificación del modelo de orden reducido. Desplazamientos en el extremo usando los dos primeros modos normales en ROM vs resultados obtenidos de un software comercial de elementos finitos.

En la Fig.4.3 se muestran los resultados de los desplazamientos en el extremo arriostrado de la columna, usando un software comercial (ALGOR) y el ROM propuesto. Como puede observarse existe una buena correspondencia entre los resultados obtenidos por uno y otro método. Las diferencias (del orden el 1%) en la frecuencia principal, (descontando el hecho obvio de que se está comparando un modelo reducido de dos grados de libertad contra un modelo de elementos finitos de 60 grados de libertad), se estima se encuentran relacionadas con las diferencias en el modelado del amortiguamiento entre el ROM propuesto y el software comercial. El pico de 2 Hz en la FFT de la Fig.4.3 corresponde con la frecuencia de la carga armónica usada para excitar el sistema durante las pruebas.

$$\begin{aligned}
 m_i &= m_b \int_0^{L_b} (\phi_{b_v i}^{\prime 2} + \phi_{b_u i}^{\prime 2}) dx_b + m_c \int_0^{L_c} (\phi_{c_v i}^{\prime 2} + \phi_{c_u i}^{\prime 2}) dx_c \\
 a_i &= c_b \int_0^{L_b} (\phi_{b_v i}^{\prime 2} + \phi_{b_u i}^{\prime 2}) dx_b + c_c \int_0^{L_c} (\phi_{c_v i}^{\prime 2} + \phi_{c_u i}^{\prime 2}) dx_c \\
 p_i &= \int_0^{L_b} (P_{b_v i} \phi_{b_v i} + P_{b_u i} \phi_{b_u i}) dx_b + \int_0^{L_c} (P_{c_v i} \phi_{c_v i} + P_{c_u i} \phi_{c_u i}) dx_c \\
 L^1 &= c, L^2 = d \\
 L_{kkk}^i &= \frac{1}{2} EA_c \int_0^{L_c} \phi_{c_v k}^{\prime 3} \phi_{c_v i}^{\prime} dx_c \\
 L_{jjk}^i &= \frac{3}{2} EA_c \int_0^{L_c} \phi_{c_v k}^{\prime 2} \phi_{c_v j}^{\prime 2} \phi_{c_v i}^{\prime} dx_c \\
 L_i^i &= \int_0^{L_b} (EI \phi_{b_v i}^{\prime \prime 2} + EA_b \phi_{b_u i}^{\prime 2}) dx_b + \int_0^{L_c} (H \phi_{c_v i}^{\prime 2} + EA_c \phi_{c_u i}^{\prime 2} + \\
 &\quad + 2EA_c Y_c' \phi_{c_u i}^{\prime} \phi_{c_v i}^{\prime} + 2EA_c Y_c^{\prime 2} \phi_{c_v i}^{\prime 2}) dx_c \\
 L_j^i &= \int_0^{L_c} EA_c (Y_c' \phi_{c_u j}^{\prime} \phi_{c_v i}^{\prime} + Y_c^{\prime 2} \phi_{c_v j}^{\prime} \phi_{c_v i}^{\prime} + \phi_{c_v j}^{\prime} \phi_{c_u i}^{\prime}) dx_c \\
 L_{12}^i &= \int_0^{L_c} [EA_c (3Y_c' \phi_{c_v 1}^{\prime} \phi_{c_v 2}^{\prime} \phi_{c_v i}^{\prime} + \phi_{c_u 1}^{\prime} \phi_{c_v 2}^{\prime} \phi_{c_v i}^{\prime} + \phi_{c_u 2}^{\prime} \phi_{c_v 1}^{\prime} \phi_{c_v i}^{\prime} + \\
 &\quad + Y_c' \phi_{c_v 1}^{\prime} \phi_{c_v 2}^{\prime} \phi_{c_u i}^{\prime})] dx_c \\
 L_{jj}^i &= \int_0^{L_c} EA_c \left( \frac{3}{2} Y_c' \phi_{c_v j}^{\prime 2} \phi_{c_v i}^{\prime} + \phi_{c_v j}^{\prime} \phi_{c_u j}^{\prime} \phi_{c_v i}^{\prime} + \frac{1}{2} \phi_{c_v j}^{\prime 2} \phi_{c_u i}^{\prime} \right) dx_c
 \end{aligned}$$

con  $i, j, k = 1, 2$ .

(4.64)

Los coeficientes de las Ec. 4.63 se listan en las Ec. 4.64. Por brevedad, se introdujo una notación compacta. Por ejemplo, si se quiere calcular  $d_{211}$ , primero se verifica en la cuarta línea que  $L^2 = d$ ; luego, en la sexta línea, se tiene  $L_{jkk}^i$  donde con  $i = 2, j = 2$  y  $k = 1$  se obtiene  $L_{211}^2 = d_{211}$ .

## 4.6 Comentarios Finales.

En este capítulo se introdujeron los conceptos matemáticos y físicos necesarios para deducir las ecuaciones en dos dimensiones de vigas y cables tensos. Las formulaciones en tres dimensiones son conceptualmente iguales y se considera que solo aportan complejidad matemática: ése es el motivo por el cual no se han incluido. Luego de introducidos los conceptos, se realizaron paso a paso las deducciones de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la respuesta dinámica de cables tensos y vigas y a continuación se introdujo la formulación conjunta del sistema columna-cable. Finalmente se desarrolló la formulación débil de dicho sistema y se implementó para la construcción de modelos de dos grados de libertad. El buen desempeño de los modelos reducidos fue verificado contrastando la respuesta dinámica del ROM con la obtenida usando un software comercial, obteniéndose buena correspondencia en amplitudes, formas y frecuencias de los registros temporales de desplazamientos.

## Capítulo 5

# Análisis de propagación de incertidumbre en modelos reducidos de mástiles arriostrados

### 5.1 Introducción.

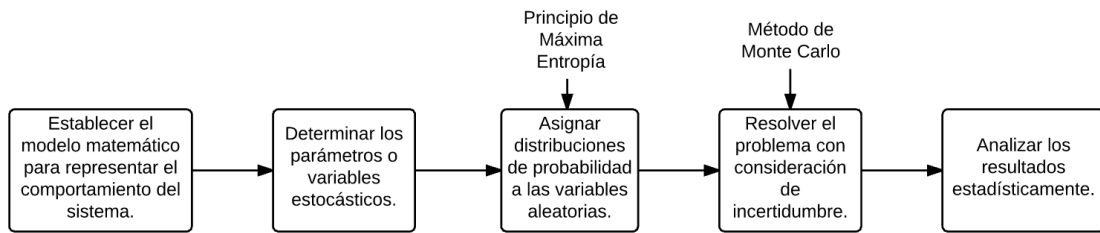
En esta sección se presentan estudios de incertidumbre en modelos reducidos de mástiles arriostrados. Primeramente se introducen algunos conceptos y procedimientos inherentes a estudios de cuantificación de incertidumbres. Luego se presentan dos estudios de incertidumbre sobre modelos reducidos de estructuras arriostradas. El primer modelo consiste en un sistema viga-cable con una carga distribuida aplicada sobre la viga, de valor uniforme en la longitud de la viga y variable en el tiempo con una función coseno; en este caso se considera incertidumbre en la tensión inicial del cable. El segundo modelo, buscando aproximar mejor el comportamiento de mástil arriostrado, consiste un sistema columna-cable, que tiene consideración de efecto de segundo orden en la columna (disminución de la rigidez flexional de la columna por esfuerzos axiales), debido a la componente  $\sigma$  de la tensión del cable (en la dirección longitudinal al mástil). En este segundo modelo se considera una carga de viento actuando en la columna modelada como un proceso estocástico e incertidumbres en la tensión inicial del cable, en la rigidez flexional de la viga y en la velocidad nominal del viento. Para llevar adelante las simulaciones estocásticas, se usó el Método de Monte Carlo y

para seleccionar las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias se utilizó el Principio de Máxima Entropía (Shannon, 1948). Para complementar el análisis de propagación de incertidumbre, también se incluyen resultados sobre la evaluación de la respuesta dinámica no lineal de los distintos modelos.

## 5.2 Modelado y cuantificación de incertidumbres.

La filosofía del modelado de incertidumbres consiste en asumir que algunas variables o parámetros de un modelo puramente determinístico no pueden ser cantidades definidas porque existe algún tipo de incertidumbre en su valor. El origen de la incertidumbre puede ser múltiple: posibles errores en la determinación (o en la medición) de los valores, las variaciones que las cantidades puedan existir a lo largo de la vida útil de la estructura o simplemente la imposibilidad de determinar con certeza una cantidad, cuyo valor se asume en base a ciertos criterios. La evaluación de una estructura con consideración de incertidumbres es, por lo tanto, una forma de estudio más realista. Si se estudia una estructura modelando sus incertidumbres, se proponen distribuciones de probabilidad para los parámetros que se consideran inciertos y, a su vez, los resultados (i.e. los desplazamientos en un punto) vienen expresados en forma de distribuciones de probabilidad, a partir de las cuales puede extraerse información como la probabilidad de ocurrencia de un evento determinado, los valores extremos que puede asumir la variable que se estudia o cómo la variabilidad de los parámetros afecta a la respuesta estructural, entre muchas otras posibilidades. Como contraparte, los estudios de incertidumbre involucran, en sistemas complejos, la solución del problema un gran número de veces, lo cual implica un gasto computacional grande. Es por esto que los análisis de cuantificación y propagación de incertidumbres se realizan con modelos reducidos de la estructura; modelos que se espera ofrezcan resultados que sean representativos del comportamiento del sistema completo, pero con muchos menos grados de libertad, de manera de ser lo más económicos -computacionalmente- que sea posible.

En la Figura 5.1 se presenta un diagrama de flujo del proceso general de un estudio de modelado y propagación de incertidumbre.



**Figura 5.1:** Diagrama de flujo de estudio de cuantificación de incertidumbre.

### Variable aleatoria vs variable determinística.

Conviene antes de continuar, establecer claramente la diferencia entre una variable determinística y una variable aleatoria o estocástica. Una variable determinística es aquella cuyo valor es único y perfectamente conocido. Una variable aleatoria es aquella cuyo valor no es único: su definición no está circunscripta a los valores que puede adoptar sino a la distribución de probabilidad que la describe. Por este motivo, en los estudios de propagación de incertidumbre no es de interés conocer los resultados característicos de cada realización (determinísticos), sino la estadística que los describe.

#### 5.2.1 El método de Monte Carlo.

En esta tesis se emplea el método de Monte Carlo para el análisis y cuantificación de incertidumbre. El método de Monte Carlo consiste en realizar un gran número de simulaciones determinísticas del problema variando uno o más parámetros. La cantidad de simulaciones necesarias se establece en base a algún criterio de convergencia. Los valores de los parámetros son elegidos aleatoriamente desde una distribución de probabilidad. La elección de la distribución de probabilidad correspondiente a cada parámetro no es un problema trivial y varios autores han propuesto métodos a fin de lograr determinar, en base a la información que se tiene respecto de los parámetros, que distribución es la que mejor represente, desde el punto de vista estadístico, la distribución real (cuando no se cuenta con ensayos experimentales suficientes como para estimarla).

Todo estudio de propagación de incertidumbre por el método de Monte Carlo puede ser estructurado en varios pasos:

1. Desarrollar un modelo computacional del sistema que se desea evaluar.



2. Identificar los parametros sobre los cuales se considerará incertidumbre.
3. Establecer las distribuciones de probabilidad de los parámetros.
4. Seleccionar aleatoriamente (siguiendo las distribuciones de probabilidad que se establecieron en el punto anterior) los valores de los parámetros.
5. Realizar simulaciones del sistema determinístico a estudiar usando los valores que se encontraron en el punto anterior (la cantidad necesaria se determinará usando algún criterio estadístico).
6. Determinar las medidas sobre las cuales se desea conocer la propagación de incertidumbre y realizar estudios estadísticos sobre los resultados obtenidos para esas variables.

### 5.2.2 El Principio de Máxima Entropía (PME).

Para la realización de los subsiguientes estudios, se ha empleado para hallar las distribuciones de los parámetros, el Principio de Máxima Entropía (Shannon, 1948). El PME establece que, sujeta a restricciones preestablecidas, la función de distribución de probabilidad (PDF) que mejor representa el estado actual del conocimiento es aquella con la mayor incertidumbre o entropía. La aplicación del PME permite hallar una PDF que se ajusta a las restricciones, sin introducir información adicional o superflua. La medida de la incertidumbre de una variable aleatoria  $X$  se define a través de la siguiente expresión:

$$S(f_X) = - \int_D f_X(X) \log(f_X(X)) dX, \quad (5.1)$$

donde  $f_X$  y  $D$  son la PDF y el dominio de  $X$ , respectivamente. Algunos ejemplos de restricciones y las PDF resultantes de la aplicación del PME bajo esas condiciones son:

1. Si solo se conoce el rango de valores que puede adoptar la variable aleatoria, el PME devuelve una distribución uniforme. La distribución Uniforme (Ec. 5.2) con parámetros  $a$  y  $b$ , que corresponden con los valores extremos que puede tomar la

variable aleatoria, viene dada por la expresión:

$$f(x|a, b) = \begin{cases} \frac{1}{a-b} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (5.2)$$

2. Si además del rango de valores que puede adoptar la variable aleatoria, se conoce la esperanza, o valor medio, el PME devuelve una distribución Exponencial Truncada (Ec. 5.3):

$$f(x|\alpha) = \begin{cases} C_\alpha e^{\alpha x} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases} \quad (5.3)$$

con parámetros  $\alpha$ ,  $a$  y  $b$  y donde  $C_\alpha = \alpha/(e^{\alpha b} - e^{\alpha a})$  y  $\mu = (be^{\alpha b} - ae^{\alpha a})/(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}) - 1/\alpha$ .

3. La aplicación del PME bajo las hipótesis de variable aleatoria positiva y segundo momento de valor acotado devuelve una distribución Gamma (Ec. 5.4) con parámetros  $a$  y  $b$ , donde  $E(X) = ab$ ;  $\sigma_X^2 = ab^2$ .

$$f(x|a, b) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}. \quad (5.4)$$

### 5.2.3 Parámetros estocásticos.

En los estudios que se presentan a continuación se consideran estocásticos los siguientes parámetros: la tensión inicial del cable (H), la rigidez flexional de la viga (EI) y/o la velocidad nominal del viento  $V_n$  (que es uno de los parámetros fundamentales usados para elaborar modelos de viento). A continuación se describe brevemente la motivación sobre su elección.

#### Tensión inicial del cable.

La tensión inicial del cable es el primer parámetro que naturalmente surge como candidato a ser considerado estocástico por varios motivos. El primero de ellos (y probablemente el más importante) es que en nuestro país no se utilizan comúnmente dispositivos que permitan medir apropiadamente la tensión de las riendas en estructuras arriostradas. El montaje de estructuras arriostradas, como las torres de telecomunicaciones y, conse-

cuentemente, la tensión de los cables queda en manos de la experticia del montador, que utiliza su propia experiencia para lograr la tensión de diseño. Por otra parte, esta tensión inicial puede variar con el tiempo debido a fenómenos de relajación propios del acero del cable, a los cambios de temperatura, etc. Por lo tanto, estudios de la propagación de incertidumbre de este parámetro sobre la respuesta dinámica del sistema resulta un tópico de importancia.

### **Rigidez flexional de la viga.**

La rigidez flexional de la viga está directamente relacionada con la sección transversal de la misma, que idealmente se mantiene constante a lo largo de la vida útil de la estructura. Pero detalles como las eventuales diferencias entre el valor de diseño y el valor real de la estructura, sumado a la alta posibilidad de necesidad de refuerzo del mástil (dada la constante actualización de los equipos de comunicaciones que éste sostiene, que requieren estructuras cada vez más rígidas) o el natural degradamiento de los componentes del mástil por distintos mecanismos (por ej. la falta de mantenimiento) sugieren que estudios de propagación de incertidumbre sobre esta variable no son solo apropiados, sino también necesarios.

### **Velocidad nominal de viento.**

La velocidad nominal del viento es la velocidad media extrema, determinada a través del estudio estadístico de las medias (sobre intervalos de tiempo definidos en las normas) de registros de viento de varios años. Como la naturaleza misma de la velocidad del viento, el valor de la velocidad nominal es una variable estocástica que puede variar de un evento a otro, o bien dentro de un mismo evento. Por este motivo, también será considerada como un parámetro estocástico en los estudios.

## **5.2.4 Obtención de funciones de distribución de probabilidad de los resultados.**

El análisis de propagación de incertidumbre se realiza estudiando, entre otras cosas, las funciones de distribución de probabilidad (PDF) de variables o parámetros de interés. Siendo que el análisis que se realiza es numérico, los resultados son valores

discretos y, por lo tanto, no puede hallarse una expresión analítica de la PDF, y debe aproximarse. Algunos autores construyen histogramas y aproximan la forma de la PDF interpolando los valores de cada barra. Otra forma sería realizando test de hipótesis. Para los resultados que se presentan en estos estudios, las PDF se construyeron usando la función `ksdensity` del paquete de estadística de Matlab (Mathworks, 2011), que utiliza el método de estimación de densidad *kernel* (KDE), también conocido como *Parzen-Rosenblatt window method* (Rosenblatt, 1955; Parzen, 1962; Epanechnikov, 1968), para estimar la PDF de los resultados a partir de datos discretos. La función `ksdensity` usa como función kernel una PDF normal y asigna automáticamente el ancho de banda, que resulta óptimo cuando la PDF objetivo es normal. Como en los casos que ocupan los estudios que se desarrollan a continuación se desconoce a priori qué tipo de PDF tendrán los resultados, esta optimización puede conducir a resultados erróneos, por lo que, en cada caso, se hicieron varias pruebas a fin de encontrar un ancho de banda que permita obtener PDF suaves y, al mismo tiempo, observar las multimodalidades (si las hubiere) que se encuentren suficientemente separadas como para ser de interés ingenieril, en función de los valores obtenidos.

### 5.3 Modelo viga-cable con carga armónica.

#### 5.3.1 Descripción del Modelo.

Como primera etapa, se estudió el comportamiento dinámico y propagación de incertidumbres en un modelo consistente en una viga horizontal empotrada en un extremo y arriostrada por medio de un cable en el otro, que se ilustra en la Figura 5.2. Para el estudio de propagación de incertidumbres se consideró como variable aleatoria a la tensión inicial del cable ( $H$ ).

**Tabla 5.1:** Valores de las constantes para el problema viga-cable.

$L_b$	$E_b$	$I_b$	$A_b$	$m_b$	$L_c$	$E_c$	$A_c$	$m_c$	$H$
10	210	$3e^{-6}$	$5e^{-3}$	39.25	11.66	150	$3.44e^{-5}$	0.25	2800-6300
m	GPa	$m^4$	$m^2$	kg	m	GPa	$m^2$	kg	N

La respuesta dinámica del modelo es hallada por medio del sistema Ecs. 5.5 y sus correspondientes condiciones de borde (Ecs. 5.6)

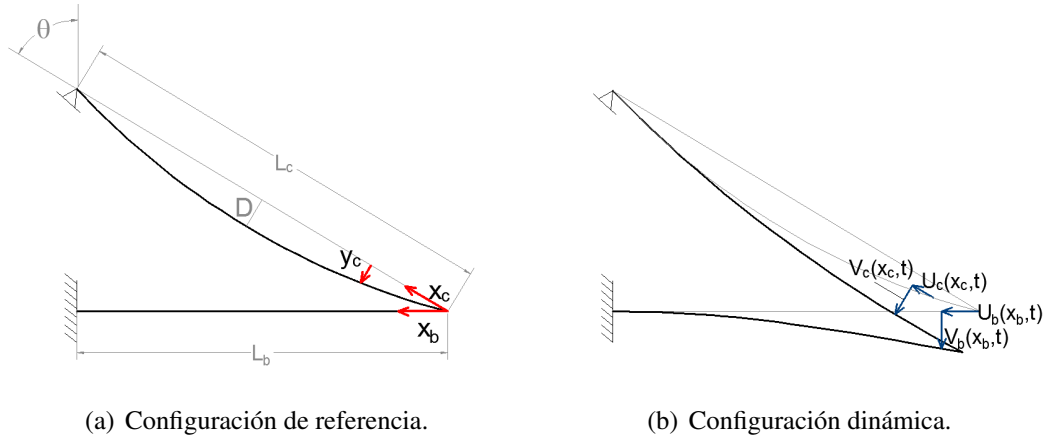


Figura 5.2: Sistema viga-cable.

$$\begin{cases} v_b : m_b \ddot{v}_b + c_b \dot{v}_b + EI v_b'''' = F_{v_b}(t, x_b) \\ u_b : m_b \ddot{u}_b + c_b \dot{u}_b + EA_b u_b'' = F_{u_b}(t, x_b) \\ v_c : m_c \ddot{v}_c + c_c \dot{v}_c - [H v_c' + EA_c (y_c' + v_c') \epsilon_c]' = F_{v_c}(t, x_c) \\ u_c : m_c \ddot{u}_c + [EA_c \epsilon_c]' = F_{u_c}(t, x_c) \end{cases} \quad (5.5)$$

$$u_c(l_c) = v_c(l_c) = 0 \quad (5.6a)$$

$$v_b(l_b) = v_b'(l_b) = u_b(l_b) = 0 \quad (5.6b)$$

$$v_b(0) = -u_c(0) \cos \theta + v_c(0) \sin \theta \quad (5.6c)$$

$$u_b(0) = u_c(0) \sin \theta + v_c(0) \cos \theta \quad (5.6d)$$

$$EI v_b''(0) = 0 \quad (5.6e)$$

$$EI v_b'''(0) + (EA_c \epsilon_c + H) \cos \theta + [EA_c \epsilon_c (y_c'(0) + v_c'(0)) + H v_c'(0)] \sin \theta = 0 \quad (5.6f)$$

### 5.3.2 Definición de la variable aleatoria.

En los estudios que se presentan a continuación, se considera a la tensión inicial  $H$  como una variable aleatoria, con distribución Gamma y se analizaron cinco situaciones. En cada uno de ellas, se definió un valor fijo para la esperanza (valor medio)

$H_m = E(H)$  dentro del rango de valores de tensión inicial recomendados por los reglamentos ANSI-TIA ANSI/TIA-222-G (2009) y CIRSOC 306 CIRSOC-INTI (1995) y para la desviación estándar se adoptó el valor  $\sigma_H = E(H)/5$ ; con estos dos valores definidos, es posible hallar los parámetros de la distribución Gamma, como se indica en el apartado 5.2.2. El valor de desviación estándar adoptado es un valor conservador y usado frecuentemente por otros autores como por ejemplo en Buezas et al. (2012). El menor valor de  $H_m=2800$  N corresponde al sugerido por el reglamento argentino CIRSOC 306 CIRSOC-INTI (1995). Los restantes casos de  $H_m$  fueron seleccionados dentro del rango propuesto por la norma ANSI-TIA ANSI/TIA-222-G (2009), que indica que debe emplearse un valor dentro del rango del 8% al 15% de la tensión última ( $\sigma_R = 1.2$  GPa) del cable. En este estudio se emplearon los valores 8%, 10%, 12% y 14% de  $\sigma_R$  que, luego de ser multiplicados por el la sección transversal del cable, resultan en los valores de 3300 N, 4130 N, 4950 N, y 5780 N, respectivamente.

### 5.3.3 Cargas y duración del ensayo.

Las cargas aplicadas en este estudio fueron las siguientes:

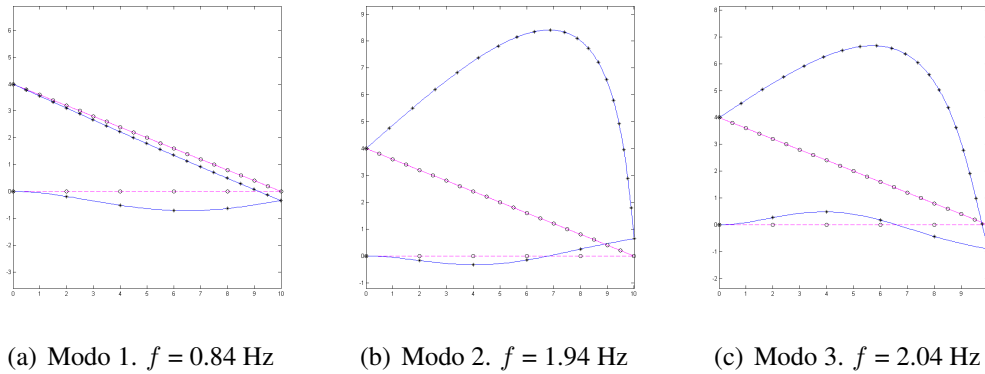
1. Peso propio de los componentes cable y viga.
2. Carga dinámica trasnversal, uniformemente distribuida sobre la viga, de valor medio  $\bar{F}_{v_b} = 1700$  N, con una variación en el tiempo dada por una función coseno a una frecuencia  $\omega = 2$  Hz y una amplitud de oscilación de  $0.4\bar{F}_{v_b}$ .

El valor máximo dinámico de la carga se eligió de manera que los desplazamientos máximos logrados sean compatibles con la teoría de vigas usada.

La duración total del ensayo fue de 30 s.

### 5.3.4 Modelo reducido.

Para estudiar la propagación de incertidumbre en la tensión inicial sobre la respuesta dinámica del sistema continuo de las Ecs. 5.5, se utilizó un modelo reducido de dos grados de libertad. Para su construcción se utilizaron los dos primeros modos normales, (Figuras 5.3 (a) y (b)), hallados por medio de una formulación ad hoc de elementos



**Figura 5.3:** Representación de los tres primeros modos normales del sistema viga-cable estudiado.

finitos. Como se verifica en el apartado 4.5.1, esta aproximación permite representar con aceptable precisión forma, amplitud y frecuencia de los registros de desplazamiento de la viga (que serán el objeto de análisis de este capítulo).

En la Figura 5.3 se indican los tres primeros modos resultantes del análisis modal y sus correspondientes frecuencias. Puede observarse en la Figura 5.3 y en la Tabla 5.1 que el modelo incorpora una viga muy flexible. Esto se hizo con el objetivo de encontrar, dentro de los primeros modos del sistema, modos locales de viga o modos globales viga-cable y con esto, introducir información sobre los dos componentes (viga y cable) en el sistema reducido. La elección también se realizó teniendo en cuenta que una característica de los mástiles arriostrados es la esbeltez y flexibilidad de la torre.

El sistema diferencial reducido de dos grados de libertad en las variables globales  $q_1$  y  $q_2$ , se define como:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + a_1 \dot{q}_1 + c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_{12} q_1 q_2 + c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2 + c_{211} q_1^2 q_2 + \\ \quad + c_{122} q_1 q_2^2 + c_{111} q_1^3 + c_{222} q_2^3 = p_1(t) \\ m_2 \ddot{q}_2 + a_2 \dot{q}_2 + d_1 q_1 + d_2 q_2 + d_{12} q_1 q_2 + d_{11} q_1^2 + d_{22} q_2^2 + d_{211} q_1^2 q_2 + \\ \quad + d_{122} q_1 q_2^2 + d_{111} q_1^3 + d_{222} q_2^3 = p_2(t) \end{cases} \quad (5.7)$$

Los coeficientes de las Ec. 5.7 se listan en las Ec. 4.64.

### 5.3.5 Resultados.

A continuación se presentarán los resultados del estudio de propagación de incertidumbre, considerando la tensión inicial del cable ( $H$ ) como variable aleatoria, con distribución Gamma. Los resultados presentados corresponden a los desplazamientos transversales de la viga, correspondientes al punto  $x_b = 4$  m (ver Fig. 5.2), por ser el punto donde se esperan los desplazamientos máximos.

En la Figura 5.4(a) se ilustra una muestra de 10 s de historias de desplazamientos para los casos extremos máximo y mínimo de  $H$  estudiados. A primera vista se podría encontrar un patrón periódico en la Figura 5.4(a), (hay un "bloque" patrón de período 4 que parece repetirse) pero, si bien existe una frecuencia principal fácilmente distinguible que coincide con la frecuencia de la carga (2 Hz), la amplitud de oscilación no se mantiene constante al pasar de un "bloque" a otro. En la Fig.5.4(b) se muestra el resultado del análisis a través de una transformada rápida de Fourier (FFT) de los desplazamientos ilustrados en la Fig.5.4(a). Los dos casos de  $H$  ilustrados en la Fig.5.4 (y todos los casos intermedios) tienen una forma similar, mostrando un pico correspondiente a la frecuencia de la carga (2 Hz) y otro alrededor de los 0.80 Hz.

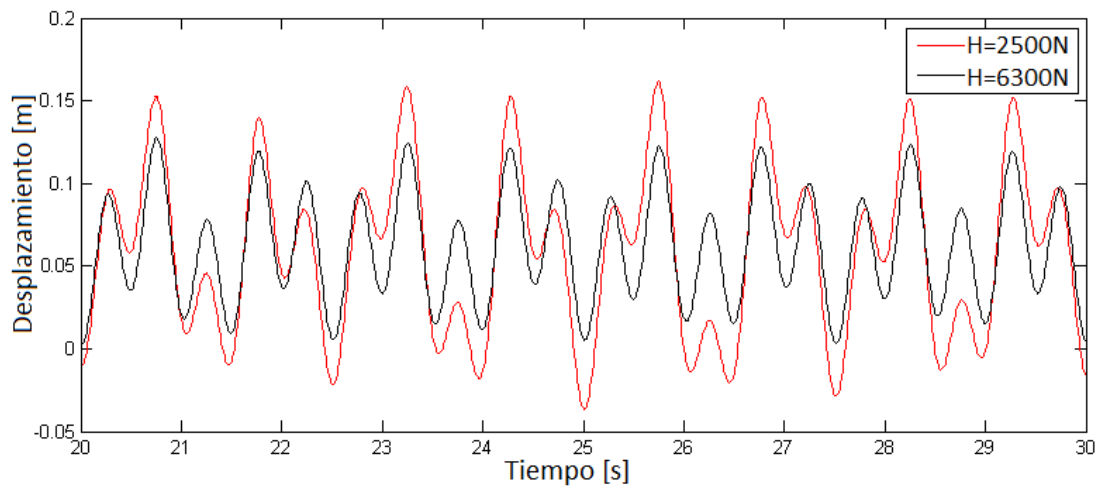
Como se indicó antes, en todo estudio de cuantificación de incertidumbre, es necesario determinar la cantidad mínima de realizaciones necesarias para lograr la convergencia de alguna medida estadística. En este caso la medida elegida es la desviación estándar. En la Figura 5.5 se muestra un resultado típico de un estudio de convergencia, donde se puede observar que, para este problema, son necesarias, como mínimo 2000 realizaciones, para lograr la convergencia de la desviación estándar.

#### Estadísticas de desplazamientos máximos absolutos.

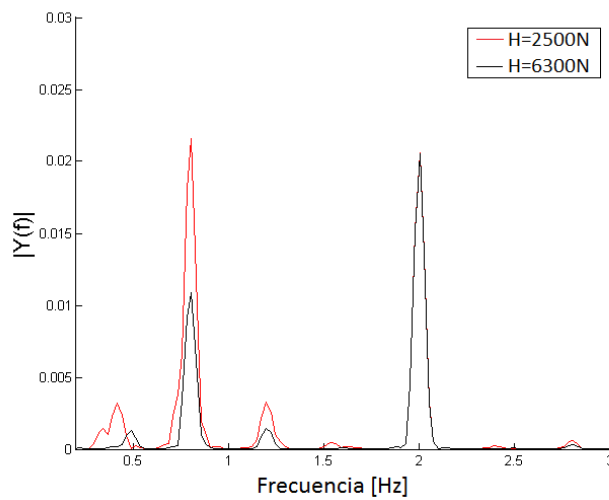
Primeramente se analizó la propagación de incertidumbre los valores máximos absolutos de desplazamiento transversal (DMA) en el punto  $x_b = 4$  m, a través de funciones de densidad de probabilidad (PDF). Los desplazamientos máximos de un sistema son valores extremos que no necesariamente representan el comportamiento global de la estructura, pero no por eso dejan de ser una medida que es necesario conocer y analizar en la respuesta dinámica.

Las PDF de los DMA para los cinco casos estudiados se representan en la Figura



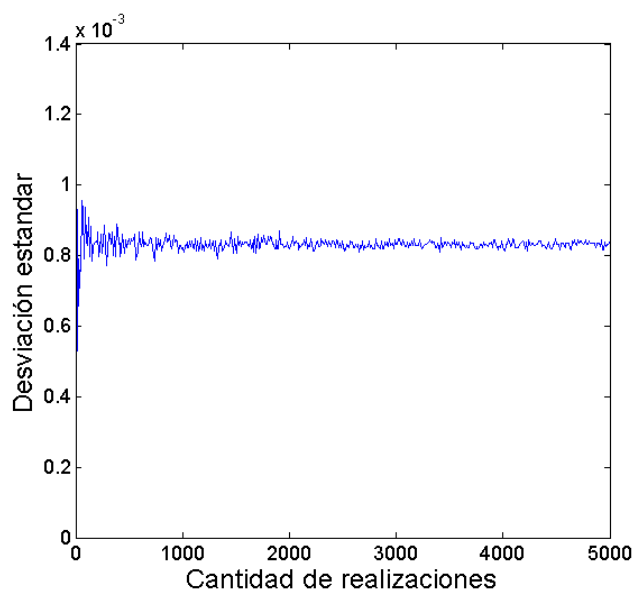


(a)



(b)

**Figura 5.4:** Desplazamientos transversales en  $x_b = 4\text{m}$  usando el modelo de orden reducido (análisis determinístico) y para los casos extremos de  $H$ . a) historia de desplazamientos; b) FFT.

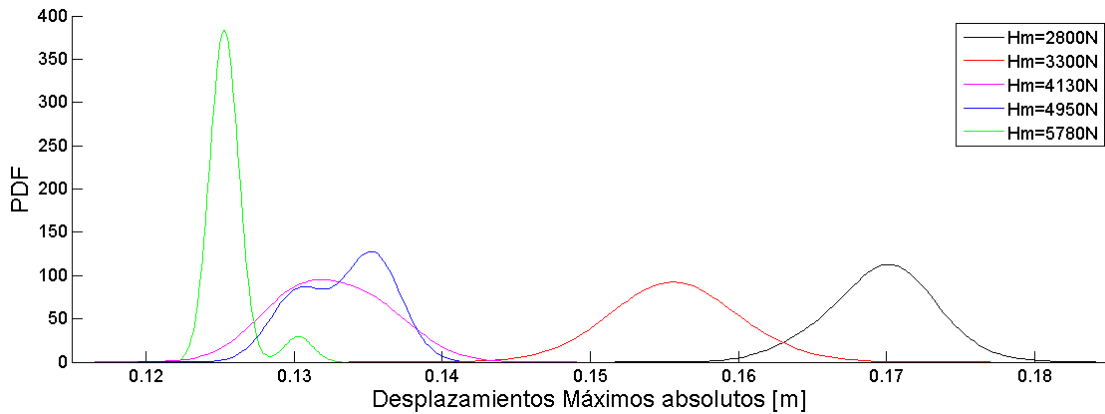


**Figura 5.5:** Convergencia de la desviación estándar en simulaciones Monte Carlo.

5.6. Se puede observar que para los tres casos de menor  $H_m$  las PDF tienen formas similares y presentan aproximadamente la misma dispersión, variando, como es de esperar, la ubicación de la moda de los DMA. Un detalle que llama la atención en la figura (considerando que el incremento de  $E(H)$  siempre es un  $2\% \sigma_R$ ) es que las modas correspondientes a los casos de  $H_m = 3300$  N (en rojo) y  $4130$  N (en magenta) se hallan particularmente separadas. Conforme se continúa aumentando el valor de  $H_m$ , puede observarse que para los dos casos de valores más altos, la forma de la PDF cambia: se observan multimodalidades aunque el corrimiento de las modas, con el aumento de  $H_m$  es mucho menor. El brusco cambio que se observa entre los casos en rojo y azul, indica una clara bifurcación (cambio cualitativo) del comportamiento estadístico de los DMA. Por último, aunque en el gráfico no es posible apreciarlo, se verificó que la desviación estándar de los resultados es, en promedio, diez veces mayor a la asignada a la variable aleatoria, en todos los casos.

### **Análisis de desplazamientos pico y sus estadísticas.**

A continuación se analizó el comportamiento de los valores pico (máximos locales) de desplazamiento al variar determinísticamente  $H$ . El análisis de los picos de desplazamiento permite obtener una visión global del comportamiento estructural a lo largo de

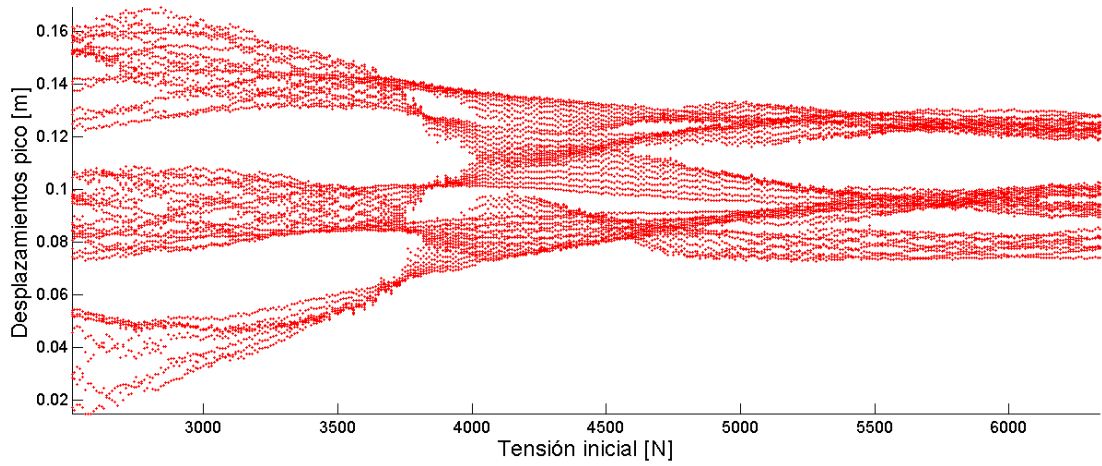


**Figura 5.6:** PDF de los desplazamientos máximos absolutos de la viga, en  $x_b = 4$  m, considerando a  $H$  como variable estocástica, para todos los casos de  $H_m$ .

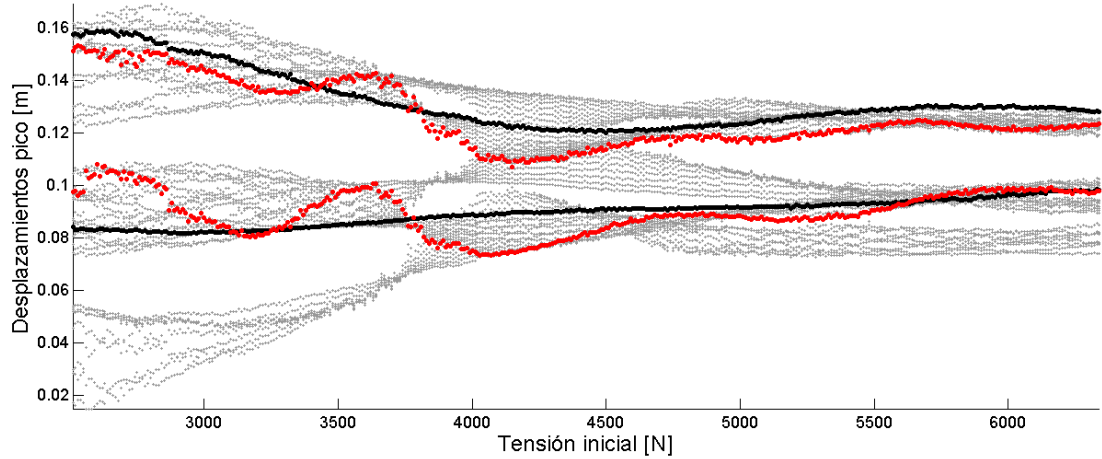
todo el evento dinámico.

Se muestran en la Figura 5.7(a) los valores de todos los picos de cada realización para cada valor de  $H$ . La Figura presenta 5.7(a) tres zonas de  $H$  donde el comportamiento de los picos es claramente distinto: desde  $H = 2500$  N hasta aproximadamente 3800 N se observan tres ramas bien definidas y de valores dispersos; de 3800 N a aproximadamente 5500 N se distingue una zona de transición, con una o dos ramas de valores con gran dispersión y a partir de 5500 N se observan nuevamente 3 ramas muy compactas con escasa dispersión. En la Figura 5.7(b), se destaca la evolución de la amplitud de 4 picos específicos. Los coloreados en negro corresponden con picos que ocurren dentro de los primeros segundos (luego de pasado el transitorio inicial) y los coloreados en rojo a picos que ocurren sobre el final del tiempo total de cálculo. Rápidamente puede observarse que los picos que ocurren en los primeros segundos modifican muy poco o bien muy suavemente su amplitud en la medida que se aumenta  $H$ , en cambio, los que ocurren sobre el final del tiempo de cálculo se ven fuertemente influenciados por  $H$ , sobre todo para valores bajos de  $H$ .

La particular disposición de los resultados en la Figura 5.7(a) permite inferir cómo serán los resultados de la estadística. Para los valores de  $H_m = 2800$  N y 3300 N deberían observarse 3 modas muy marcadas y un soporte amplio de la PDF. Para el caso de  $H_m = 4130$  N, que cae dentro de la zona de transición, sería esperable ver una PDF sin una moda definida, algo similar a una distribución uniforme y para los dos valores más altos, deberían observarse nuevamente dos o tres modas bien marcadas, acompañadas



(a)

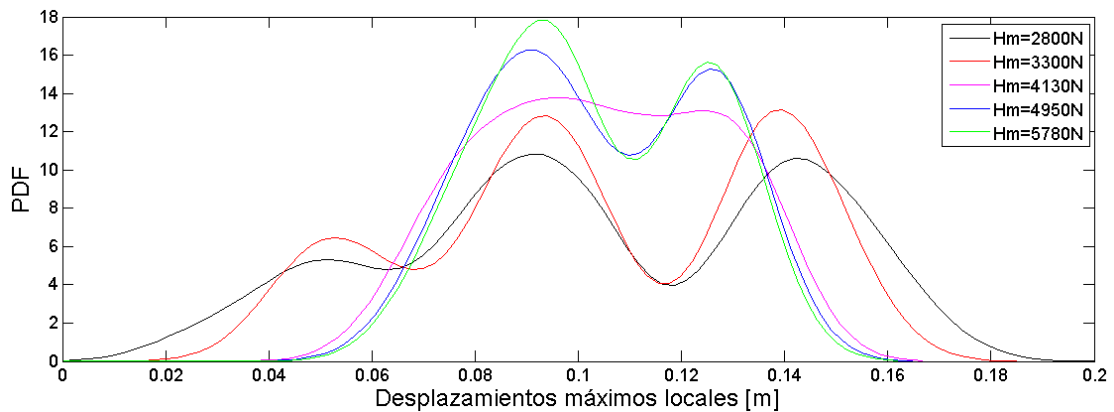


(b)

**Figura 5.7:** Modelo determinístico. Valores pico de desplazamiento en  $x_b = 4$  m vs.  $H$ .

de un soporte bastante más acotado. Todas estas observaciones pueden ser verificadas en la Figura 5.8, donde se grafican las PDF de los desplazamientos pico para todos los casos de  $H_m$  estudiados.

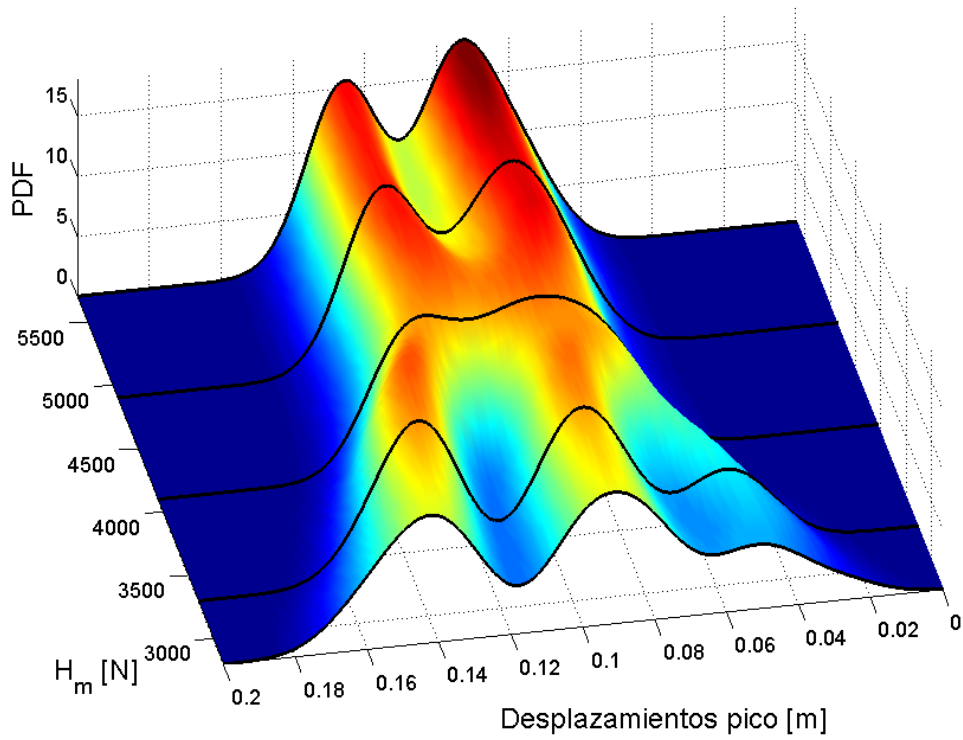
En vista de las importantes diferencias cualitativas que se observaron en las PDF de los desplazamientos pico para los distintas  $H_m$  se decidió extender el estudio y se realizó un barrido de valores de  $H_m$  entre los dos valores extremos estudiados. En la Figura 5.9(a) se representan los resultados de todas las PDF que resultaron de variar casi continuamente el valor de  $H_m$ , ordenadas una a continuación de la otra, conformando una superficie. En negro se indicaron, para mejor comprensión del gráfico, las PDF ilustradas en la Figura 5.8. Los colores cálidos indican mayor probabilidad, mientras



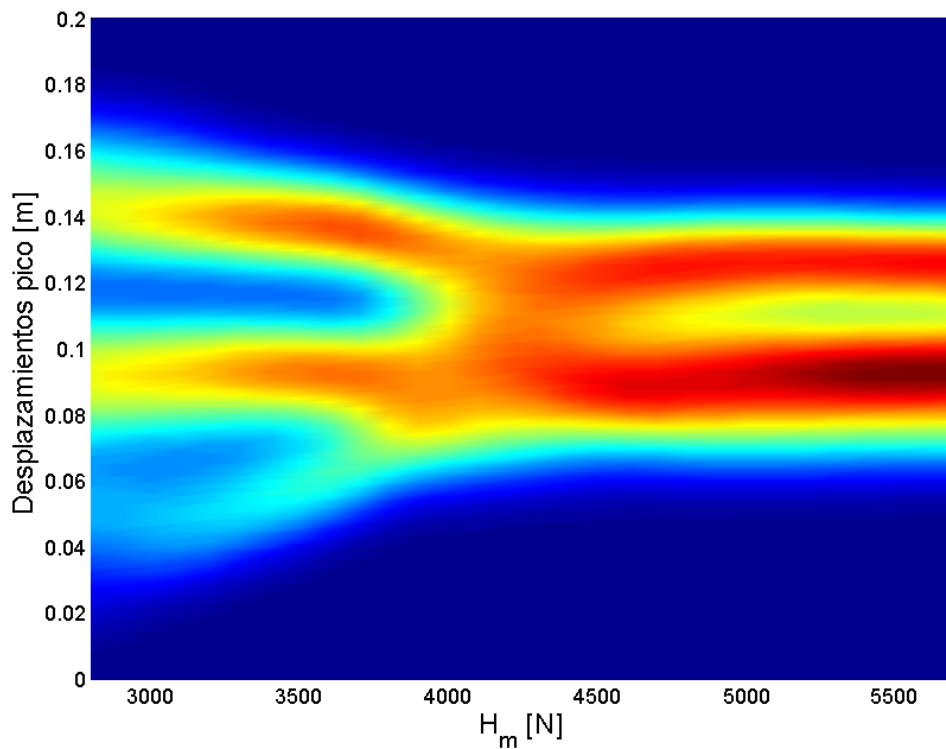
**Figura 5.8:** Modelo estocástico. PDF de valores pico de desplazamiento en  $x_b = 4$  m.

que los fríos lo opuesto. La Figura 5.9(b) muestra una vista superior de la Figura 5.9(a) que permite analizar con mejor detalle la evolución de las PDF al variar  $H_m$ . Para los sistemas con menor  $H_m$  puede verse que la respuesta es dispersa y se presentan dos modas bien marcadas y una tercera de menor importancia aparece cuando se aumenta  $H_m$ . Cuando  $H_m$  alcanza aproximadamente los 4100 N se produce un cambio cualitativo en el comportamiento estadístico y las PDF adquieren una forma más aplanada y menos dispersa, donde todos los valores tienen aproximadamente la mismas probabilidades de ocurrencia, por lo que constituye en el rango con mayor incertidumbre (aunque el soporte de las PDF sea más acotado que para valores más bajos). Cuando  $H_m$  supera los 4600 N nuevamente se produce un cambio en la forma de la PDF de los valores pico, volviéndose claramente bimodal, y con una tendencia a asignar mayor probabilidad a la moda correspondiente al los valores pico más bajos. El resultado de este estudio, además, sirve para destacar la importancia de los estudios de incertidumbre: un estudio de incertidumbre devuelve los resultados para un conjunto de casos, procesados y analizados estadísticamente y con una gran cantidad de información ordenada, que permiten una rápida y eficaz evaluación del comportamiento del sistema.

El sistema estudiado presenta un claro caso de bifurcación estocástica, que se encuentra estrechamente relacionada con la bifurcación determinística observada en la Figura 5.7, cuando se considera la tensión inicial como variable estocástica. Otros ejemplos de bifurcación estocástica pueden encontrarse en las referencias Buezas et al. (2012) y Song et al. (2010).



(a) Vista 3d con indicación (en negro) de los cinco casos de  $H_m$  estudiados previamente.



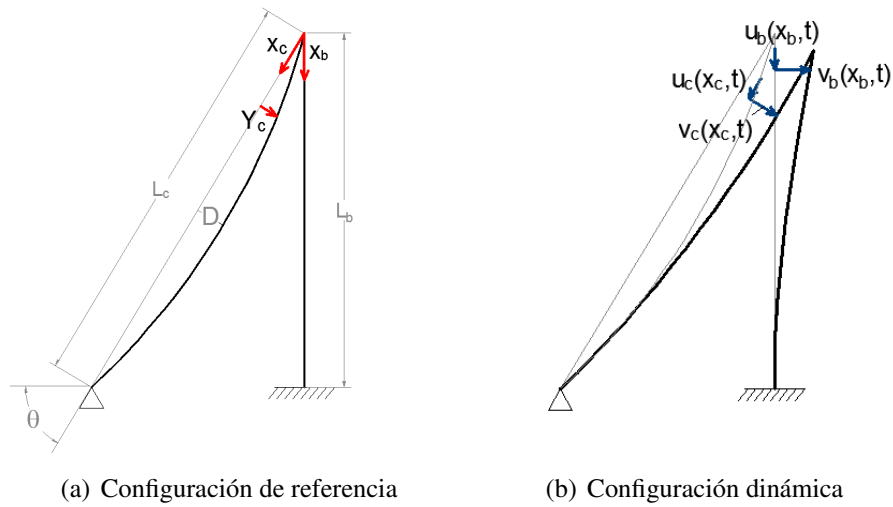
(b) Vista superior.

**Figura 5.9:** PDF 3d de los desplazamientos pico para  $H_m$  dentro del rango 2800-5780N.

## 5.4 Modelo columna-cable con cargas estocásticas.

### 5.4.1 Descripción del modelo.

El modelo estudiado en esta sección consiste en una columna empotrada en su extremo inferior y arriostrada mediante un cable en su extremo superior. Los datos de las constantes usadas se resumen en la Tabla 5.2 y la descripción del modelo se muestra en la Figura 5.10. En la formulación de la viga-columna se tiene en cuenta el efecto de disminución de rigidez producto de la carga producida por la componente tensión del cable, normal a la viga-columna (efecto de segundo orden). Como simplificación, se consideró esta carga como de valor constante, igual a la tensión inicial e independiente de la deformación de la columna. Las ecuaciones que gobiernan la respuesta dinámica del modelo estudiado en esta sección se indican en la Ec. 5.8 con sus correspondientes condiciones de borde detalladas en las Ec. 5.9.



**Figura 5.10:** Sistema columna-cable

**Tabla 5.2:** Valores de las constantes para las Eqs. (5.8-5.9)

$l_b$	$E_b$	$I_b$	$A_b$	$m_b$	$l_c$	$E_c$	$A_c$	$m_c$	$H$
30	210	$8.33e^{-4}$	0.04	314	32.31	150	$7.854e^{-5}$	0.61	7000-14000
m	GPa	$m^4$	$m^2$	kg	m	GPa	$m^2$	kg	N

$$\begin{cases} v_b : m_b \ddot{v}_b + c_b \dot{v}_b + EI v_b'''' + P_H v_b'' = F_{v_b}(t, x_b) \\ u_b : m_b \ddot{u}_b + c_b \dot{u}_b + EA_b u_b'' = F_{u_b}(t, x_b) \\ v_c : m_c \ddot{v}_c + c_c \dot{v}_c - [H v_c' + EA_c (Y_c' + v_c') \epsilon_c]' = F_{v_c}(t, x_c) \\ u_c : m_c \ddot{u}_c + [EA_c \epsilon_c]' = F_{u_c}(t, x_c) \end{cases} \quad (5.8)$$

$$u_c(l_c) = v_c(l_c) = 0 \quad (5.9a)$$

$$v_b(l_b) = v_b'(l_b) = u_b(l_b) = 0 \quad (5.9b)$$

$$v_b(0) = -u_c(0) \cos \theta + v_c(0) \sin \theta \quad (5.9c)$$

$$u_b(0) = u_c(0) \sin \theta + v_c(0) \cos \theta \quad (5.9d)$$

$$EI v_b''(0) = 0 \quad (5.9e)$$

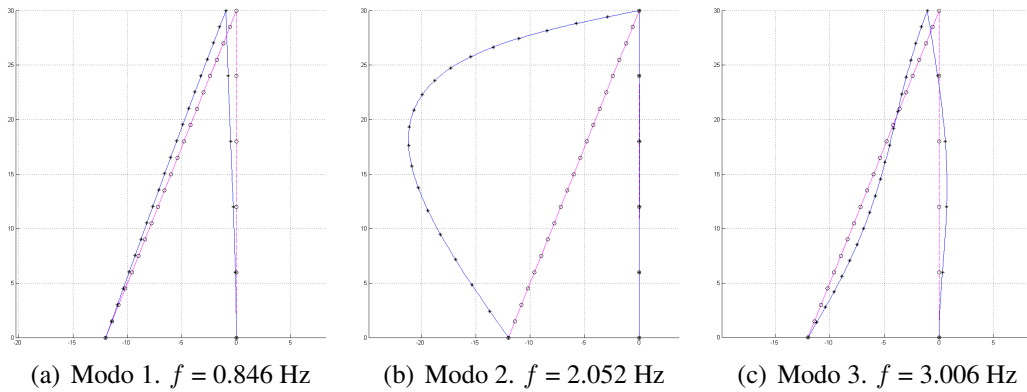
$$EI v_b'''(0) + (EA_c \epsilon_c + H) \cos \theta + [EA_c \epsilon_c (y_c'(0) + v_c'(0)) + H v_c'(0)] \sin \theta = 0 \quad (5.9f)$$

### 5.4.2 Modelo reducido.

Para estudiar la propagación de incertidumbre en la tensión inicial del cable, la rigidez flexional de la viga y la velocidad nominal del viento (o combinaciones de pares de esos parámetros) sobre la respuesta dinámica del sistema continuo de las Ecs. 5.8, se utilizó, nuevamente, un modelo reducido de dos grados de libertad formulado a partir de los dos primeros modos normales del sistema (Fig 5.11 (a) y (b)). En la Figura 5.11 se indican los tres primeros modos resultantes del análisis modal por medio de elementos finitos y sus correspondientes frecuencias.

El sistema diferencial reducido de dos grados de libertad en las variables globales  $q_1$  y  $q_2$  queda definido como se indica en la Ec. 5.10 y los valores de los coeficientes pueden hallarse a través de las ecuaciones 4.64.





**Figura 5.11:** Representación de los tres primeros modos normales del sistema columna-cable estudiado.

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{q}_1 + a_1 \dot{q}_1 + c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_{12} q_1 q_2 + c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2 + c_{211} q_1^2 q_2 + \\ \qquad \qquad \qquad + c_{122} q_1 q_2^2 + c_{111} q_1^3 + c_{222} q_2^3 = p_1(t) \\ m_2 \ddot{q}_2 + a_2 \dot{q}_2 + d_1 q_1 + d_2 q_2 + d_{12} q_1 q_2 + d_{11} q_1^2 + d_{22} q_2^2 + d_{211} q_1^2 q_2 + \\ \qquad \qquad \qquad + d_{122} q_1 q_2^2 + d_{111} q_1^3 + d_{222} q_2^3 = p_2(t) \end{array} \right. \quad (5.10)$$

### 5.4.3 Cargas y duración del ensayo.

Las cargas aplicadas en este estudio fueron las siguientes:

1. Peso propio de los componentes cable y columna.
2. Carga de viento, aplicada sobre la viga-columna. Los registros de cargas de viento estocásticos fueron creados usando el Método de Representación Espectral (para más información ver el Capítulo 2 o la referencia Shinozuka and Jan (1972)) en 6 puntos discretos de la altura de la columna. A continuación se construyeron los perfiles de viento para cada instante de tiempo interpolando mediante una spline todos los puntos (en altura) para los cuales se hallaron los registros. De esta manera, se construye una carga distribuida de viento sobre la columna, variable en el tiempo y el espacio, con consideración de correlaciones espaciales y temporales.

La duración total del ensayo fue de 180 s.

#### 5.4.4 Parámetros estocásticos y distribuciones de probabilidad.

El estudio de cuantificación de incertidumbre de esta sección se realizó contemplando tres parámetros como variables aleatorias, en forma independiente y en forma conjunta (de a pares). Los parámetros seleccionados fueron la tensión inicial del cable ( $H$ ), la rigidez flexional del mástil ( $EI$ ) y la velocidad nominal ( $V_n$ ) de viento (que se usa para construir las cargas estocásticas). Respecto de  $H$  y  $EI$ , se supusieron tres casos de distribuciones estableciendo, en cada caso, que se conoce: solo los valores extremos, los valores extremos y el valor medio o el valor medio y asumiendo que tiene una dispersión acotada. Aplicando el PME, se llega a 1) una PDF Uniforme (Ec. 5.2), 2) una PDF Exponencial (Ec. 5.3) y 3) una PDF Gamma (Ec. 5.4), respectivamente. Para el caso de  $V_n$ , se seleccionaron dos distribuciones típicas de valores extremos de viento: una distribución Gumbel (Ec. 5.11) y una distribución Fréchet 5.12, que se describen a través de sus funciones de distribución de probabilidad acumulada (CDF).

La expresión de la CDF de Gumbel viene dada por la expresión Ec. 5.11 y tiene los parámetros  $M$  (que corresponde con la mediana de la distribución) y  $\beta = \frac{(m-M)}{\ln[-\ln(0.5)]}$  donde  $m$  es la moda de la distribución.

$$G(v) = e^{e^{-\frac{v-M}{\beta}}}. \quad (5.11)$$

La CDF de Fréchet se indica en la Ecuación 5.12 y tiene los parámetros  $\beta$  (velocidad de referencia en la ubicación a estudiar) y  $\gamma = 7.14$ . El valor de  $\beta$  adoptado, de 55 m/s para ciudad de Bahía Blanca (Argentina) y el valor de  $\gamma$  son los sugeridos por el reglamento CIRSOC 102 CIRSOC-INTI (2005).

$$F(v) = e^{-\left(\frac{v}{\beta}\right)^\gamma}. \quad (5.12)$$

#### 5.4.5 Sobre los resultados.

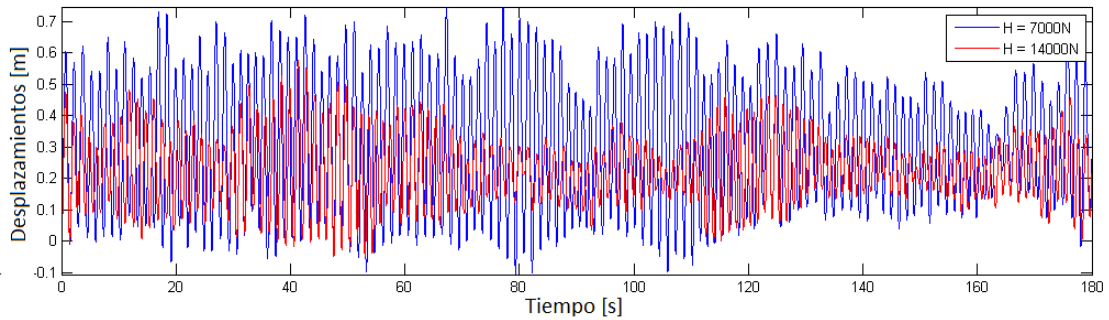
En las secciones siguientes, se presentan los resultados de los estudios de propagación de incertidumbre de los parámetros  $H$ ,  $EI$  y  $V_n$ , considerados estocásticos individualmente o de a pares, en la respuesta dinámica de la torre. Dada la variedad de combinaciones estudiadas, los resultados se agruparon en distintas secciones. El caso 1, se presentan los resultados considerando la estructura determinística y la carga es-

tocástica (pero sin variar  $V_n$ ). En el caso 2, se considera, además, a  $V_n$  como una variable aleatoria. En los casos 3 a 7 el enfoque fue dado a la aleatoriedad en los parámetros estructurales (además de la carga estocástica de viento, que se mantiene en todos los estudios).

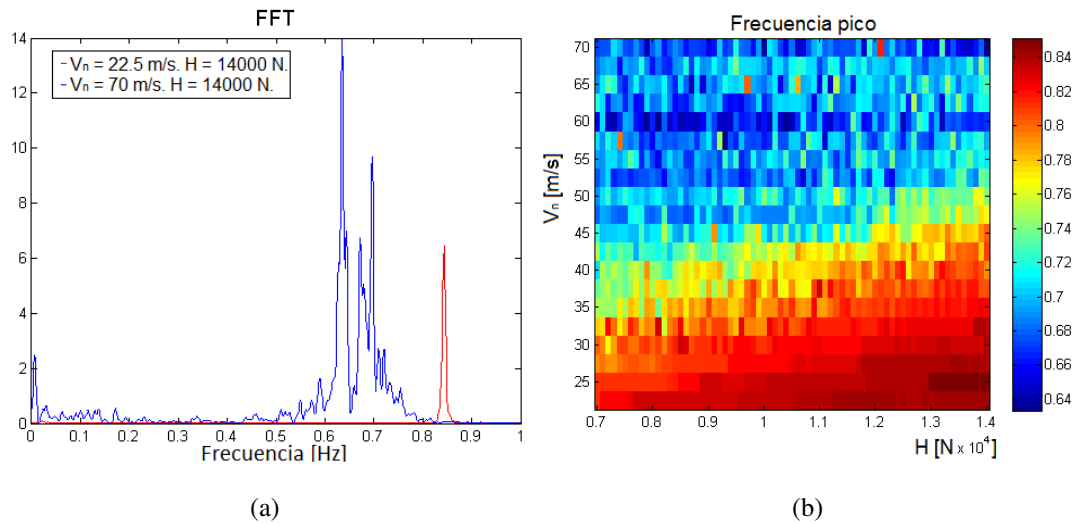
Los resultados analizados corresponden a los desplazamientos transversales del extremo superior de la columna.

#### **5.4.6 CASO 1. Carga de viento estocástica. $H$ , $EI$ y $V_n$ determinísticos.**

En cualquier estudio de dinámica de estructuras, y como primera aproximación a los resultados, siempre resulta enriquecedor observar algunas historias temporales de la variable a analizar. En la Figura 5.12, se ilustran dos muestras de registros de desplazamientos transversales de la torre en su extremo superior, para valores fijos de  $EI$  y  $V_n$  y para los dos valores extremos de  $H$  que alcanzó este estudio. Como es esperable, a mayor tensión inicial, menor es la amplitud de oscilación, aunque la forma de la oscilación también resultó bastante diferente. La variación en la forma de la historia temporal de los resultados (siendo que la estructura se ha sometido a idénticas cargas en ambos casos), puede venir dada por varios factores a saber: (1) la no linealidad intrínseca del modelo; (2) el contenido de frecuencia de la carga o (3) el carácter estocástico de la carga. En principio, y por comparación con la Figura 5.4, parece ser que los puntos (2) y (3) son de mayor relevancia, aunque la interacción de los tres puntos, es con mayor certeza, la causa de los cambios observados en la Figura 5.12. Además, en la Figura 5.12 puede distinguirse una frecuencia de oscilación principal en cada registro, y que las amplitudes varían en forma no periódica en toda la longitud del estudio. Por último, es interesante aclarar que si bien en la Figura 5.12 se presentan dos casos extremos, las observaciones realizadas aplican a cualquier otro par o grupo de resultados que se quiera analizar.



**Figura 5.12:** Registro de desplazamientos transversales de la viga–columna en el extremo del mástil, encontrado con el modelo de orden reducido, determinístico, para los casos extremos de  $H$ .

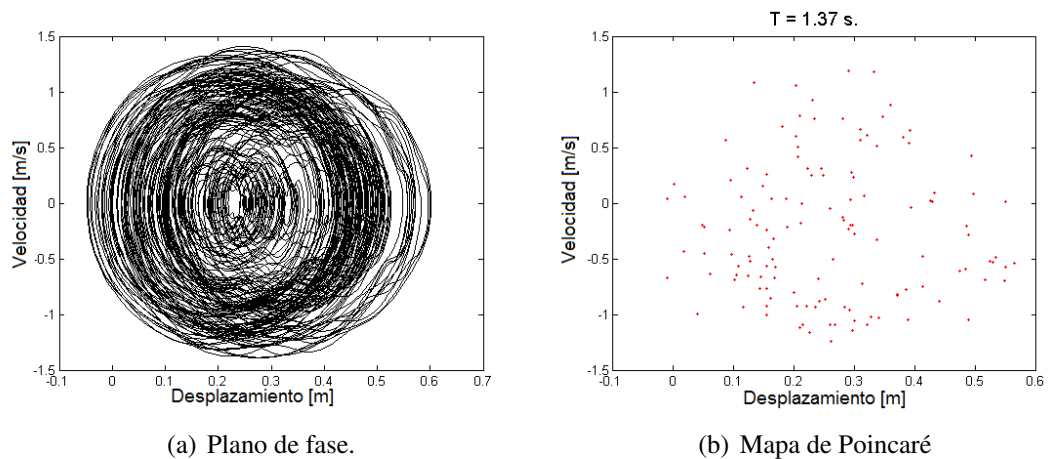


**Figura 5.13:** Análisis de la frecuencia fundamental de vibración de los desplazamientos transversales de la viga–columna, en el extremo superior del mástil, encontrados con el modelo determinístico, para todas las combinaciones de  $V_n$  y  $H$ , y bajo cargas estocásticas de viento. a) Dos FFT típicas; b) Mosaico de frecuencia principal  $V_n$  vs  $H$ .

Por otra parte, se realizaron estudios de contenido de frecuencia en los registros de desplazamientos, variando paramétricamente  $H$  y  $V_n$ ; no se incluyen los resultados obtenidos variando también  $EI$ , porque presentan una influencia muy leve en los resultados. En la Figura 5.13, se presentan dos análisis: en la Figura 5.13(a) se muestra un análisis de frecuencia por medio de una transformada rápida de Fourier (FFT) para los dos casos extremos de  $V_n$ , donde puede observarse que velocidades nominales más altas producen varios picos de frecuencias y una mayor energía. El caso con la velocidad nominal menor presenta un solo pico (aunque en estos y en todos los casos intermedios

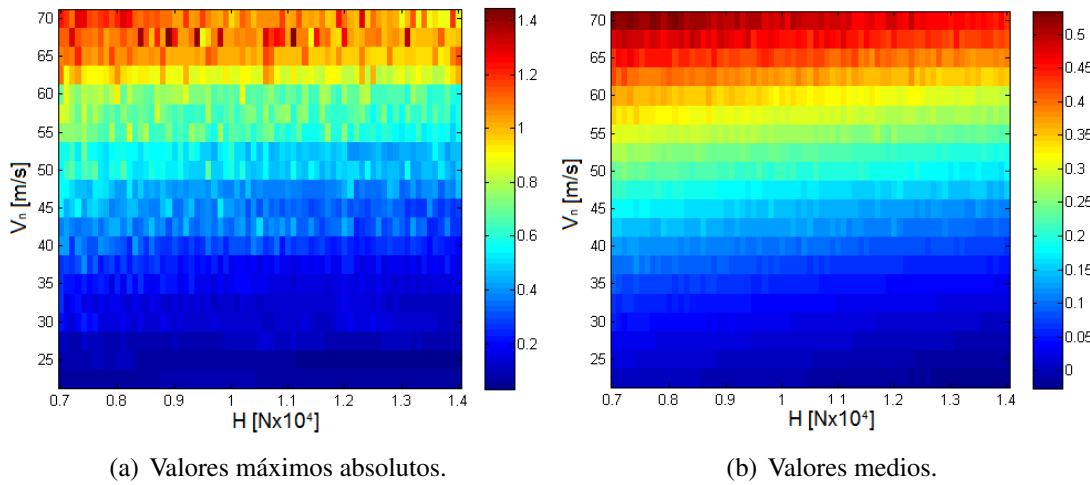
la respuesta no es periódica) más cercano a la frecuencia natural del primer modo usado en la aproximación. En la Figura 5.13(b) se muestra cómo varía la frecuencia principal cuando los valores de  $H$  y  $V_n$  son variados paramétricamente en forma conjunta, donde el parámetro  $V_n$  exhibe una influencia mayor. La no linealidad del problema sumado a la carga estocástica explican por qué la Figura 5.13(b) tiene zonas donde los resultados parecen caóticos (no hay transiciones suaves al pasar de un par de valores de  $V_n$  y  $H$  a otro), sobre todo en la zona de velocidades nominales más altas, donde ambos efectos se potencian.

Por medio del análisis de los planos de fase y mapas de Poincaré (haciendo el muestreo con los valores más importantes del análisis de frecuencia) de los registros de resultados, se confirmó el carácter no periódico de los resultados. Una muestra de un resultado típico de estos estudios se incluye en la Figura 5.14.



**Figura 5.14:** Plano de fase y mapa de Poincaré típicos, de los desplazamientos transversales de la viga columna, en su extremo superior, encontrados con el modelo reducido en análisis determinísticos. (Este caso corresponde a  $H = 10400$  N y  $V_n = 55$  m/s)

Para finalizar con los estudios de carácter paramétrico, se presenta en la Figura 5.15 cómo varían los valores medio y máximo absoluto de la respuesta, en función de los parámetros  $H$  y  $V_n$ . Como en el estudio de frecuencias pico, puede verse que aunque la velocidad nominal de viento ejerce una mayor influencia en los resultados, la tensión inicial también afecta la respuesta sobre todo para los valores del rango bajo y medio alcanzados por el estudio. El aspecto de los dos gráficos presentados en la Figura 5.15 es muy similar, lo que indica que el comportamiento de los valores máximos absolutos, es muy similar al de los valores medios. Teniendo en cuenta que un valor máximo

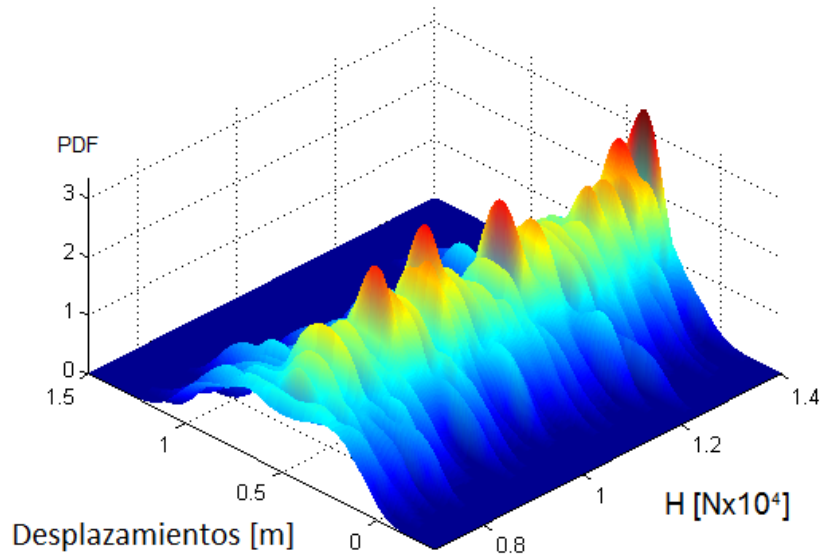


**Figura 5.15:** Desplazamientos transversales de la viga–columna, en el extremo superior del mástil, encontrados con el modelo determinístico, para todas las combinaciones de  $V_n$  y  $H$ , y bajo cargas estocásticas de viento.

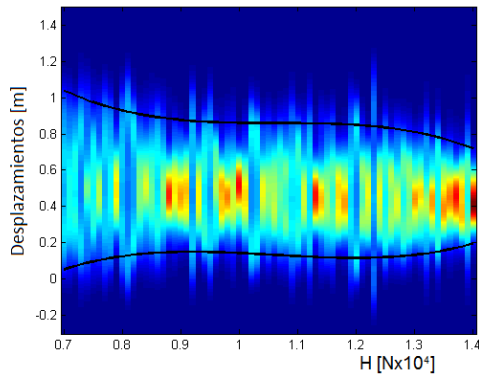
es una medida extrema, que el modelo es no lineal y que la carga es estocástica, la similitud entre ambos mosaicos es un resultado muy interesante, porque podría existir algún tipo de correlación entre ambos resultados. Para el caso de los valores máximos, además, puede observarse una gran variabilidad en los resultados incluso para pequeños incrementos de  $H$ .

**Propagación de incertidumbre.**

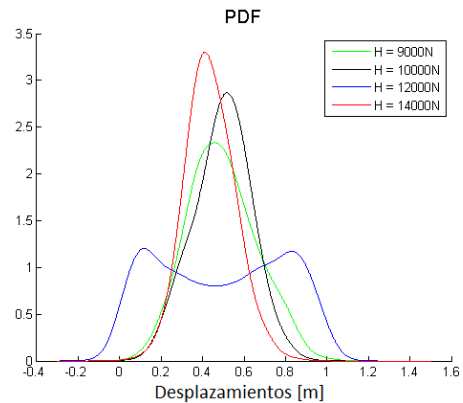
Considerando que la carga de viento fue modelada como un proceso estocástico y que la respuesta en el tiempo de la estructura evoluciona en forma no periódica, cada registro de desplazamientos puede considerarse como un proceso estocástico. Como antes, se estudian los desplazamientos transversales a la columna, en el extremo superior del mástil. En la Figura 5.16(a), puede observarse una superficie 3D que muestra la evolución de la PDF de cada registro de desplazamiento, para cada valor de  $H$  del rango estudiado y para  $V_n = 70$  m/s y  $EI=1.75 \times 10^8$  Nm<sup>2</sup>. En la Figura 5.16(b), se muestra una vista superior de la Figura 5.16(a) (este tipo de representación se usará frecuentemente en los estudios posteriores) junto con las bandas de confiabilidad del 5% y 95% (construidas mediante una interpolación cúbica de los valores correspondientes) de los resultados.



(a)



(b)



(c)

**Figura 5.16:** Evolución de la PDF de los desplazamientos transversales de la viga–columna, en el extremo superior del mástil, variando  $H$  y para  $V_n = 70$  m/s. (a) Imagen 3D de desplazamientos vs  $H$  vs PDF; (b) Vista superior de la imagen (a); (c) algunos cortes de la imagen (a)

En la Figura 5.16(c), se incluyen algunos PDF para valores específicos de  $H$ , para ilustrar la variedad de casos que pueden encontrarse. De la Figuras 5.16(b), puede observarse que, para todos los valores de  $H$ , el valor medio se mantiene aproximadamente constante, con pequeñas desviaciones (el mismo resultado puede obtenerse de la Figura 5.15(b)), y que el ancho de los valores contenidos dentro de las bandas de confiabilidad

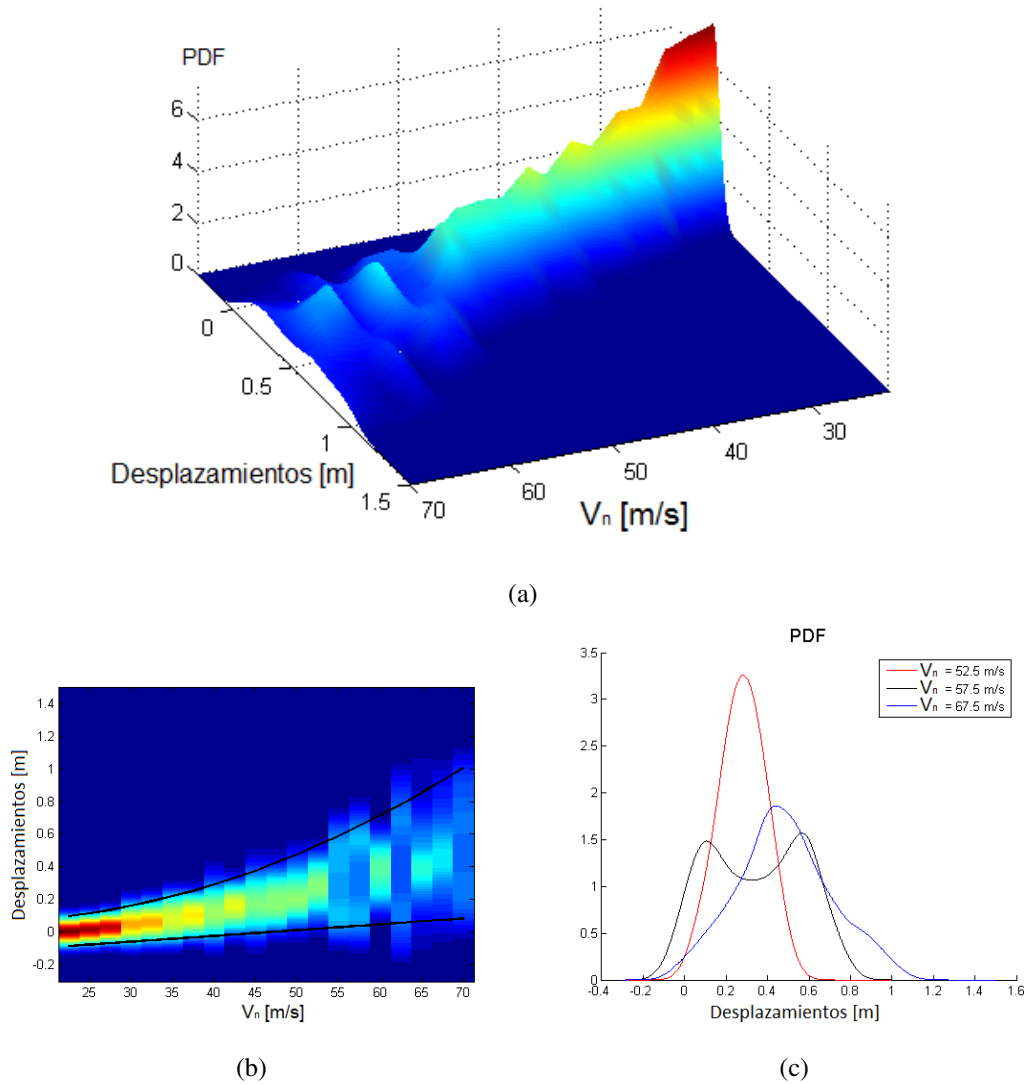
se vuelve menor, conforme se aumenta el valor de  $H$ . También se encontraron casos con multimodalidades muy marcadas, como en el caso de la bimodalidad de curva azul en la Figura 5.16(c). Del estudio de las tres Figuras, se extrae que la forma de la PDF de los registros de desplazamientos resulta muy variable (incluso entre valores dentro de un rango pequeño) con el parámetro  $H$ , pasando de formas aguzadas y centradas con poca desviación a casos de distribuciones más uniformes con soporte ancho o incluso multimodales.

Los mismos estudios, pero ahora fijando los valores de  $H = 7000 \text{ N}$  y  $EI = 1.75 \times 10^8 \text{ Nm}^2$  y analizando como cambia la PDF de los desplazamientos variando paramétricamente  $V_n$  se presentan en la Figura 5.17. El valor medio y el ancho de la zona comprendida entre las bandas de confiabilidad crecen conforme aumenta  $V_n$ ; esto implica desplazamientos de mayor magnitud y con creciente dispersión -y por lo tanto menos predecibles- para valores altos de  $V_n$ . También en este estudio puede apreciarse la presencia de bifurcaciones en el comportamiento estadístico, ya que no solo el soporte de las PDF se ensancha al aumentar el valor de  $V_n$  sino que también se observan cambios bruscos en la forma de la PDF, sobre todo en el tercio que comprende las mayores velocidades. En este caso, dichas bifurcaciones no pueden relacionarse con una bifurcación determinística, por lo que se está en presencia de bifurcaciones fenomenológicas.

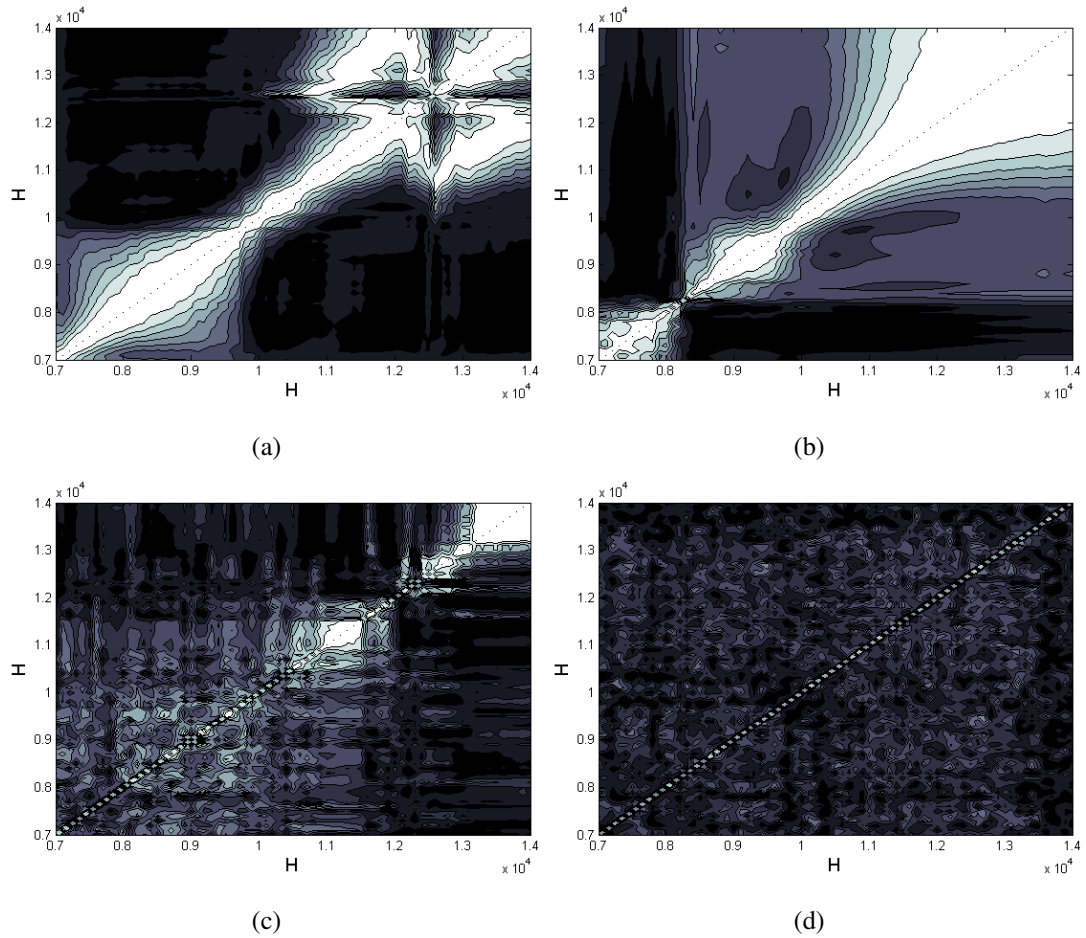
En la Figura 5.18 se muestran algunos diagramas de correlación entre los registros temporales de resultados, para todos los casos de tensión inicial y para cuatro casos seleccionados de  $V_n$ . Con blanco, se indica correlación total y con negro correlación cero (no se observaron anticorrelaciones). En la Figura 5.18(a), se puede observar alguna zona de buena correlación alrededor de la diagonal, que se amplía en las regiones que abarcan aproximadamente el 30% de los valores más bajos y más altos de  $H$ . En la Figura 5.18(b), pueden encontrarse tres zonas de buena correlación, aunque las correspondientes a los valores más bajos de  $H$  son bastante acotadas. En las Figuras 5.18 (c) y (d), se ve poca o nula correlación entre los resultados, incluso aquellos cercanos a la diagonal (en la diagonal necesariamente debe haber una correlación perfecta, porque se compara un caso consigo mismo). Si se analizaran los resultados fijando  $H$  y comparando las respuestas para todos los valores de  $V_n$ , se encuentran figuras de la misma forma que la 5.18(d). A partir del análisis de correlación de los registros temporales de resultados puede afirmarse que, para valores medios y altos de  $V_n$ , la forma de los registros



es muy sensible al valor de  $H$  o  $V_n$  y dos registros, aunque se comparen resultados de dos pares valores muy próximos de  $H$  y  $V_n$ , no tienen ningún tipo de relación lineal.



**Figura 5.17:** Evolución de la PDF de los desplazamientos transversales de la viga–columna, en el extremo superior del mástil, variando  $V_n$  y para  $H = 7000\text{N}$ . (a) imagen 3D de desplazamientos vs  $V_n$  vs PDF; (b) Vista superior de la imagen (a); (c) algunos cortes de la imagen (a)

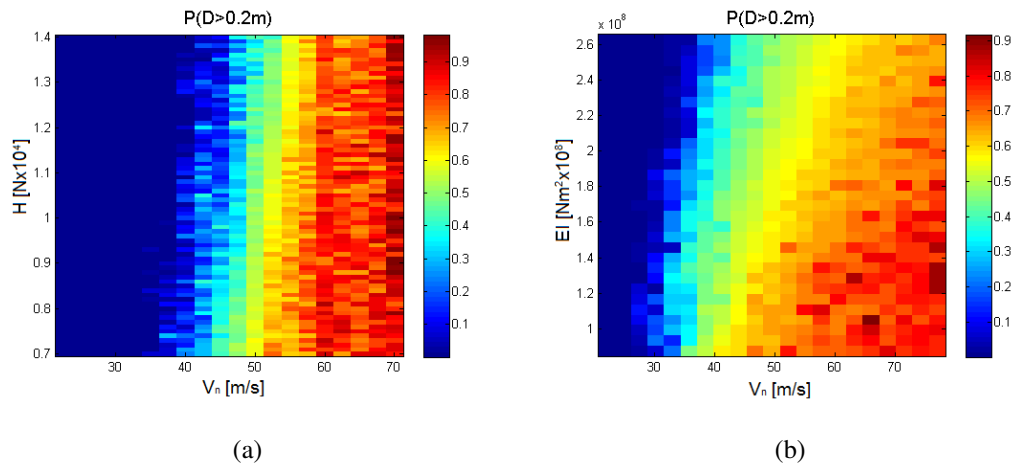


**Figura 5.18:** Correlación de los desplazamientos transversales de la viga–columna, encontrados con el modelo de orden reducido determinístico, para todas las combinaciones de  $H$  y cuatro casos de  $V_n$ : a)  $V_n = 22.5$  m/s , b)  $V_n = 25$  m/s , c)  $V_n = 32.5$  m/s , d)  $V_n = 55$  m/s.

**Probabilidad de excedencia de un valor límite.**

El último resultado que se presenta dentro del CASO 1 es el estudio de la probabilidad de excedencia de los desplazamientos (en el extremo superior de la columna) de un valor límite, fijado arbitrariamente en  $D_{lim} = 0.2$  m (que podría ser, por ejemplo, un límite operacional). Como cada realización es además un proceso temporal, la probabilidad de excedencia también puede ser interpretada como el porcentaje de tiempo (sobre el tiempo total de cálculo) que los desplazamientos dinámicos de la estructura superan ese límite. En este estudio, los parámetros  $V_n$ ,  $H$  y  $EI$  no se consideran estocásticos todavía, pero se analizan los resultados para todos los valores de los parámetros que alcanzó este estudio. En la Figura 5.19, se muestran dos imágenes, comparando los

resultados entre  $V_n$  y  $H$  (para un valor fijo de  $EI = 1.75 \times 10^8 \text{ Nm}^2$ ) y  $V_n$  y  $EI$  (para un valor fijo de  $H = 10500 \text{ N}$ ). Para entender que tanto influye un parámetro respecto de los otros, basta con seguir una línea (por ejemplo horizontal, si se busca conocer el desempeño de  $V_n$ , para algún valor fijo de  $H$  o  $EI$ ) y evaluar qué tanto varía la probabilidad de excedencia a lo largo de ella. Para una horizontal de cualquiera de los dos gráficos mostrados en la Figura 5.19, se produce un cambio desde 0% hasta aproximadamente 90%, y la diferencia entre esos extremos se definirá como *radio de influencia*. Por lo tanto, el radio de influencia de  $V_n$  dentro de los valores estudiados es, en promedio 90%, con un máximo de 98%.



**Figura 5.19:** Probabilidad de excedencia de un valor límite de 0.2m en el extremo del mástil, de los desplazamientos transversales en el extremo de la viga–columna. (a) para todas las combinaciones de  $H$  y  $V_n$ , (b) para todas las combinaciones de  $H$  y  $EI$ .

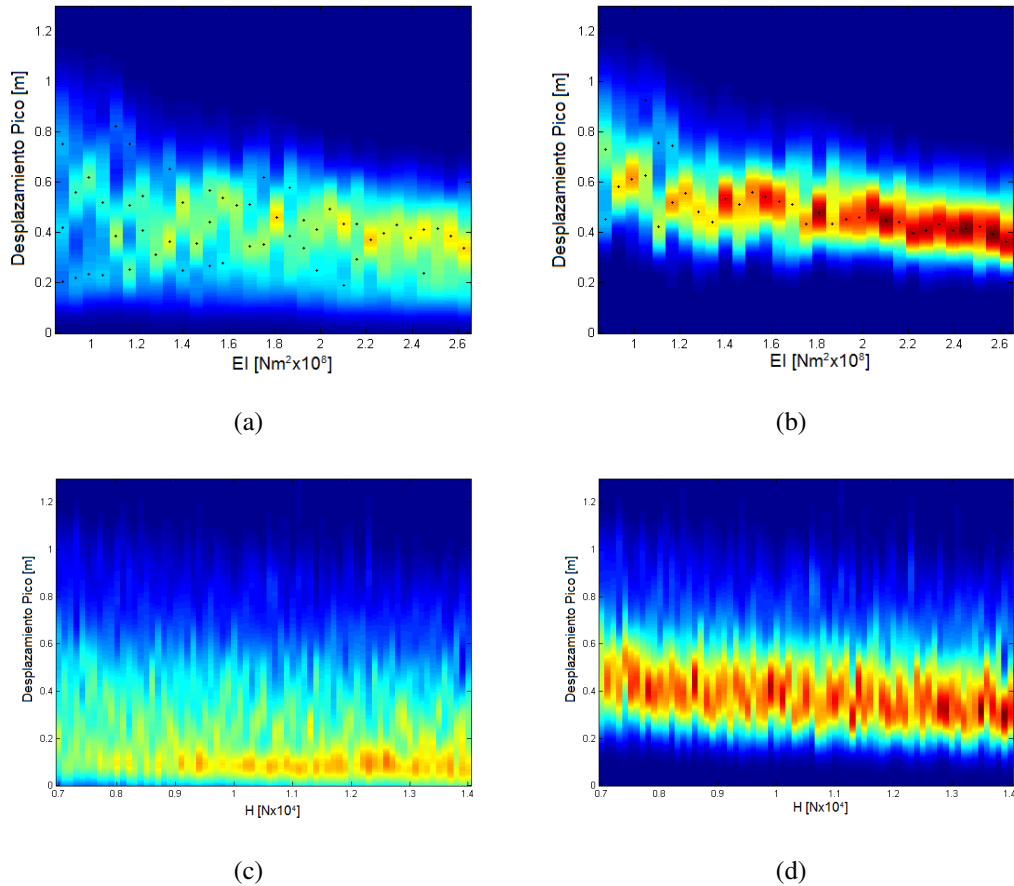
Analizando secciones verticales, rápidamente puede verse que ni  $H$  ni  $EI$  superan un valor máximo de radio de influencia de 50%; es decir, que la máxima variación que puede obtenerse en la probabilidad de excedencia, variando los parámetros dentro de los rangos estudiados, es del 50%. Dando cuenta del radio de influencia promedio, para  $H$  es de aproximadamente el 30% y ronda el 40% para  $EI$  (se descartaron los casos de radio de influencia nulo, o donde el parámetro no produce variación alguna). De esta forma, queda claramente establecido qué parámetro presenta mayor influencia sobre la probabilidad de excedencia y en qué medida. Como es de esperarse, la velocidad nominal del viento es el parámetro más influyente y para valores bajos la respuesta nunca supera  $D_{lim}$ . A partir de  $V_n = 30 \text{ m/s}$  (Fig. 5.19(b)) o  $40 \text{ m/s}$  (Fig. 5.19(a)) se observa

un rápido incremento en la probabilidad de excedencia (o porcentaje de tiempo que se excede  $D_{lim}$ ), teniendo para  $V_n = 55$  m/s aproximadamente un 60 % de probabilidad de excedencia en ambas figuras (a) y (b).

#### 5.4.7 CASO 2. Carga de viento estocástica. $V_n$ como variable estocástica. $H$ y $EI$ determinísticos.

En este caso, se considera a la velocidad nominal de viento  $V_n$  como una variable estocástica. Se consideraron dos distribuciones típicamente usadas para modelar vientos extremos: una distribución Gumbel y una distribución Fréchet. Los parámetros  $H$  y  $EI$  también fueron tenidos en consideración, ya que las estadísticas de los resultados considerando a  $V_n$  como variable estocástica fueron evaluadas variando paramétricamente  $H$  y fijando el valor de  $EI$  o viceversa. En la Figura 5.20, se muestran las vistas superiores de las superficies que describen la evolución de las PDF de los resultados (gráficos como estos ya fueron presentados antes, en las figuras 5.16(b) y 5.16(b)). En este caso se evaluaron los desplazamientos pico (máximos locales) de los registros de desplazamientos en el extremo superior de la torre. Los colores cálidos representan valores mayores mientras que los fríos lo inverso y una banda vertical que corresponde a cada valor de  $H$  o  $EI$  representa la vista superior de la PDF de los desplazamientos pico, considerando  $V_n$  como un parámetro estocástico. Las Figuras 5.20 (a) y (b) muestran los resultados variando paramétricamente  $EI$  y tomando un valor fijo de  $H = 10500$  N. Las diferencias en los resultados debidas al uso de distribuciones Gumbel o Fréchet para  $V_n$  resultan evidentes. Cuando se usó una distribución Gumbel, los resultados son notoriamente más dispersos y frecuentemente pueden encontrarse multimodalidades (en particular para los valores correspondientes al primer tercio de valores de  $EI$ ). Cuando se usó una distribución Fréchet, las PDF resultantes son más compactas y su forma se asemeja a una PDF Gamma; las modas y el soporte de las PDF se hallan ubicados en la zona de desplazamientos pico más altos, de acuerdo con la distribución Fréchet, que otorga mayor probabilidad a valores más altos de  $V_n$ . De todas maneras, cuando se usó una PDF Gumbel, las mismas modas fueron encontradas, aunque en el contexto de distribuciones con soporte más ancho y, en muchos casos, acompañadas por otras modas de menor valor. Por lo tanto, la predicción de los desplazamientos más peligrosos se

logra independientemente de qué tipo de PDF se asigne a  $V_n$ . La diferencia radica en que usando una PDF Gumbel los resultados son más dispersos.



**Figura 5.20:** Vista superior de las PDFs de los desplazamientos pico usando  $V_n$  con distribuciones Gumbel y Fréchet. (a) Variación con  $EI$  y  $V_n$  representada por medio de una distribución Gumbel y  $H=10500$  N. (b) Variación con  $EI$  y  $V_n$  representada por medio de una distribución Fréchet y  $H=10500$  N. (c) Variación con  $H$  y  $V_n$  representada por medio de una distribución Gumbel y  $EI=1.75 \times 10^8$   $Nm^2$ . (d) Variación con  $H$  y  $V_n$  representada por medio de una distribución Fréchet y  $EI=1.75 \times 10^8$   $Nm^2$ .

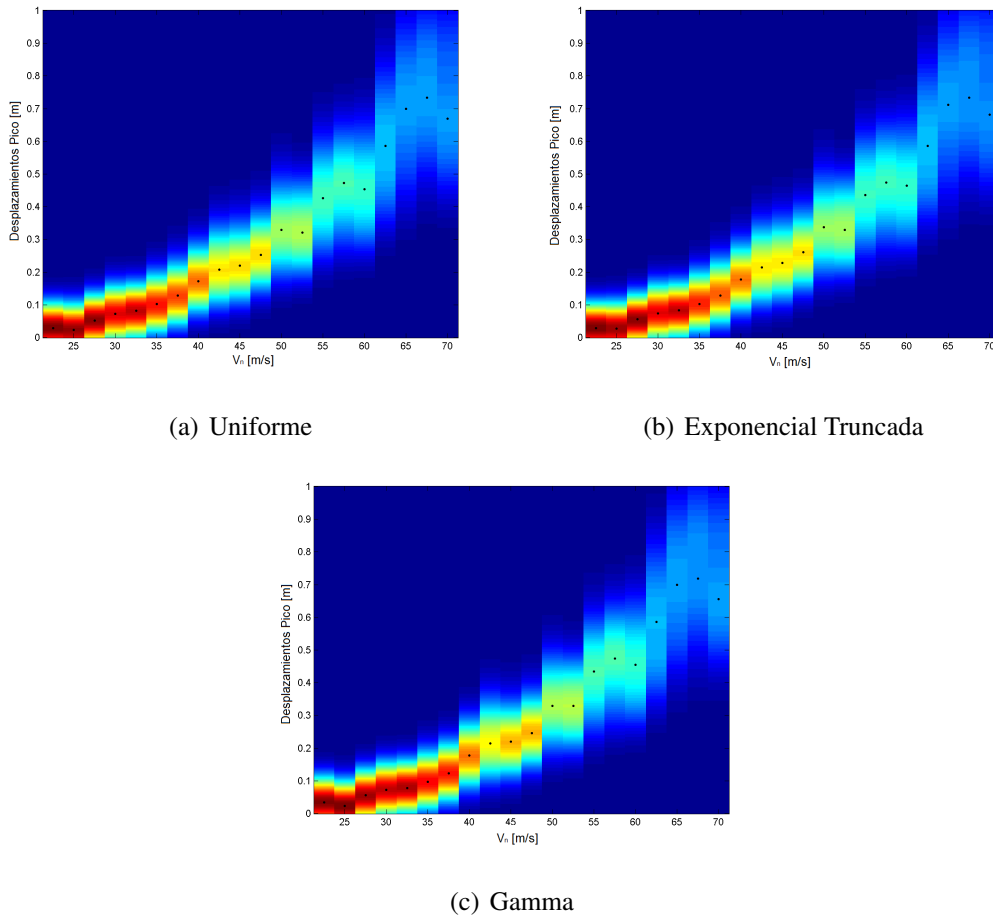
El parámetro  $EI$  afecta el valor medio y la dispersión fuertemente en el primer tercio, a continuación, si bien se puede observar algún tipo de influencia, ésta se ve reducida. Las Figuras 5.20 (c) y (d) contienen gráficos similares, pero fijando  $EI = 1.75 \times 10^8$   $Nm^2$  y variando paramétricamente  $H$ . Puede verse que distintos tipos de PDF son obtenidas en los resultados, según sea el tipo de PDF elegida para  $V_n$ . Distribuciones tipo Exponencial Truncada se logran cuando se utiliza una distribución Gumbel (Figura 5.20(c)) y distribuciones tipo Gamma son el resultado cuando se usa una distribución

Fréchet. En este caso también se observa una gran variación en la dispersión, siendo más acotada cuando se usó una PDF Fréchet. Los casos multimodales (usando una distribución Gumbel) no son tan frecuentes ni tan marcados como en el caso en que se fijó  $H$  y se varió paramétricamente  $EI$ . En la Figura 5.20(d) además, puede verse que  $H$  muestra alguna influencia, muy variable sobre la moda, con una tendencia promedio a disminuirla.

#### 5.4.8 CASO 3. Carga de viento estocástica. $H$ como variable estocástica. $EI$ y $V_n$ determinísticos.

A continuación se discutirán los resultados considerando a la tensión inicial como variable aleatoria. Como no se cuenta con una estadística confiable sobre la distribución que potencialmente podría tener este parámetro, se estudiaron tres casos, asumiendo en cada uno que se conoce cierta información al respecto de la variable y por medio del PME se determinó la PDF a usar. Las PDF empleadas son Uniforme, Exponencial Truncada y Gamma.

En la Figura 5.21, se muestra una vista superior de la superficie que muestra la evolución de las PDF de los desplazamientos pico en el extremo superior de la torre, para un valor fijo de  $EI=1.75 \times 10^8 \text{ Nm}^2$ ,  $E(H)=7500\text{N}$ ,  $\sigma_H = E(H)/5$ , y variando paramétricamente  $V_n$ , para cada caso de PDF asignado a  $H$ . Puede verse que la velocidad nominal de viento afecta de manera no lineal a la moda y que se distinguen por lo menos tres zonas bien diferenciables donde los resultados son: muy poco dispersos (primer tercio de valores de  $V_n$ ), medianamente dispersos (tercio central de valores de  $V_n$ ) y muy dispersos (tercio final de valores de  $V_n$ ). Esto explica cómo es el comportamiento de la estructura para distintas velocidades nominales de viento y una tensión inicial estocástica de la siguiente manera: para velocidades nominales de viento bajas (dentro del primer tercio de los valores estudiados) la respuesta de la estructura en términos de desplazamientos pico es baja y la incertidumbre en la tensión inicial afecta poco la respuesta, ya que las PDF de los resultados tienen un soporte muy acotado (del orden de los 0.15 m) y una dispersión muy acotada, por lo que los valores tienden a encontrarse muy próximos al valor medio, que coincide con la moda.



**Figura 5.21:** Vista superior de las PDFs desplazamientos picos para cada valor de  $V_n$ , con  $EI=1.75 \times 10^8 \text{ Nm}^2$  y tensión inicial del cable  $H$  estocástica con distribuciones: Uniforme (a), Exponencial Truncada (b) y Gamma (c).

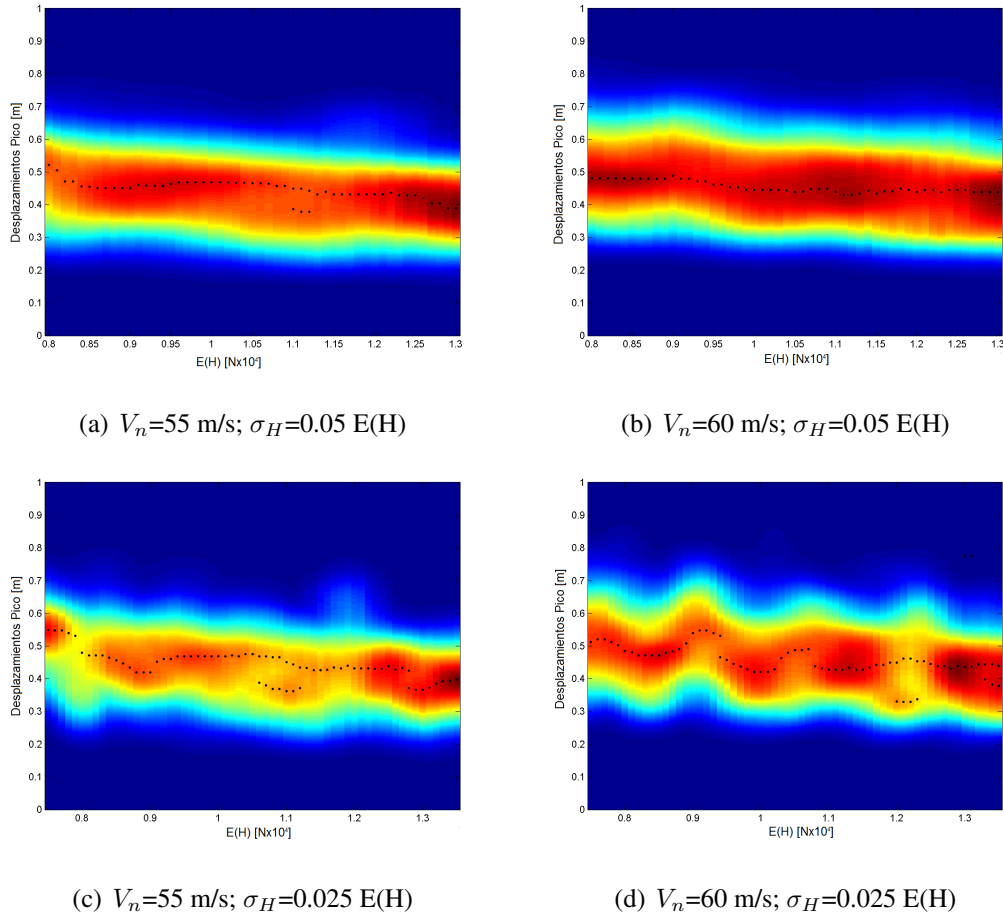
Para velocidades nominales de viento intermedias a altas (dentro del tercio medio de valores adoptados para  $V_n$ ), se observa un crecimiento tanto en el soporte como en la dispersión de las PDF de los resultados, lo que se traduce en mayor incertidumbre en la respuesta que implica que el problema se vuelve sensible a la consideración de incerteza sobre el parámetro  $H$ . Cuando se consideran velocidades altas a muy altas (último tercio de valores de  $V_n$  estudiados), el soporte de las PDF de los resultados sigue al tendencia de crecimiento y la dispersión aumenta a un paso todavía mayor. De todas maneras, aunque el modelo se muestra claramente sensible a la incertidumbre en la tensión inicial, sobre todo para valores medios a muy altos de velocidad nominal de viento, el tipo de PDF usada para modelar la variable no parece afectar el comportamiento estadístico de la respuesta; esto se puede ver en el hecho de que las Figuras 5.21 (a), (b) y (c)

son prácticamente iguales. Esto indica claramente que la otra fuente de incertidumbre del sistema (la carga de viento estocástica) tiene una influencia mucho más marcada sobre la respuesta estadística. Siendo que los resultados usando distintas PDF para la variable son similares, en los estudios que siguen, se usó una PDF Gamma para modelar la tensión inicial.

En la Figura 5.22, se pueden ver los resultados obtenidos, cuando el valor medio de la PDF Gamma es variado continuamente, y para dos valores de velocidad nominal de viento y dos valores distintos de desviación estándar. El objetivo es evaluar cómo es la respuesta estadística de los desplazamientos máximos locales si se consideran distintos valores medios para las distribuciones de la tensión inicial, cómo afecta a esta respuesta usar distintos valores de dispersión para la tensión inicial y ver qué diferencias hay entre estos resultados para distintos casos de velocidad nominal de viento. Los valores medios ( $E(H)$ ) para las funciones Gamma se encuentran en el rango 8000-13000 N, las velocidades nominales seleccionadas son 55 m/s (velocidad de referencia de Bahía Blanca) y 60 m/s y los valores de desviación estándar ( $\sigma_H$ ) se fijaron en  $0.05E(H)$  y  $0.025E(H)$ . Además, en el gráfico 5.22 se marcó con puntos la posición de las modas. En las Figuras 5.22 (a) y (b), donde  $\sigma_H = 0.05E(H)$ , puede verse que la moda, la forma, el soporte y la dispersión de las PDF de los resultados no se ven afectados en gran medida por el valor de  $E(H)$  que se adopte. Una sección vertical en cualquier valor de  $E(H)$  de las Figuras 5.22 (a) o (b) resulta en una distribución tipo Gamma, donde el soporte y la dispersión son un poco mayores para  $V_n = 60$  m/s (Fig. 5.22(b)). Las Figuras 5.22 (c) y (d), muestran los resultados con  $\sigma_H = 0.025E(H)$ , donde las formas de las PDF de los resultados son variadas y la posición de las modas depende en forma no lineal de  $E(H)$ ; estos efectos se ven amplificados en gran medida cuando  $V_n$  aumenta, incluso tan poco como 5 m/s. El resultado observado al variar la dispersión de la PDF asignada a la tensión inicial resulta llamativo, ya que lo esperable es que las PDF de los resultados fuesen más compactas cuanto menos dispersa fuera la PDF de entrada. Una explicación sobre este efecto es la gran variabilidad (en forma, cantidad de modas, dispersión y, en algunos pocos casos en el soporte) que existe en las PDF de los valores pico de los registros, incluso para valores muy próximos de tensión inicial. Estas diferencias son mínimas o inexistentes cuando se consideran velocidades nominales de viento menores a 45 m/s. Cuando  $V_n$  supera los 45 m/s las diferencias se vuelven notorias y se acentúan



rápida conforme aumenta  $V_n$ . Esta variabilidad, a su vez, puede relacionarse con la carga estocástica y su interacción con la estructura no lineal.



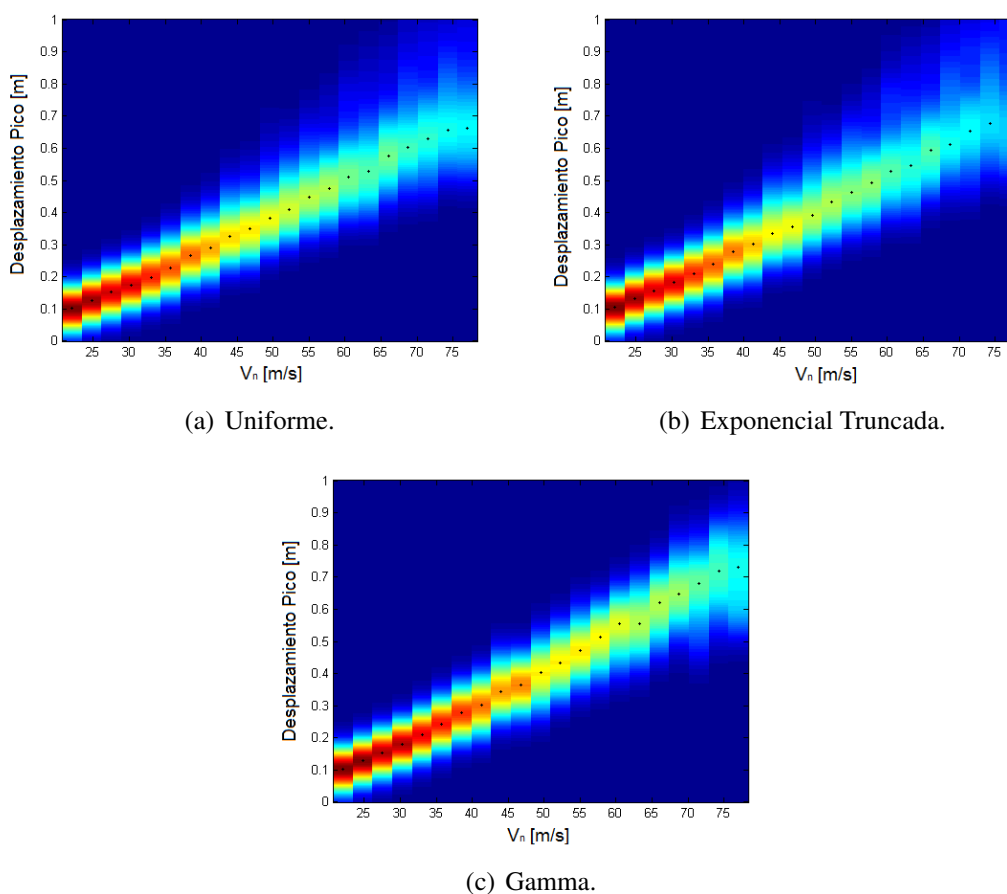
**Figura 5.22:** Vista superior de las PDF de desplazamientos pico encontrados con  $H$  (con distribución Gamma) para distintos casos de velocidades nominales de viento y desviaciones estándar para la distribución Gamma.

### 5.4.9 CASO 4. Carga de viento estocástica. $EI$ estocástico. $H$ y $V_n$ determinísticos.

En este caso, se considera a la rigidez flexional de la columna ( $EI$ ) como un parámetro estocástico y la tensión inicial y la velocidad nominal de viento son tratados como parámetros determinísticos. Se analizaron la respuesta estadística de la estructura usando tres PDF distintas para el parámetro estocástico: Uniforme, Exponencial Truncada y Gamma y los resultados analizados son los desplazamientos transversales pico en el

extremo superior de la torre.

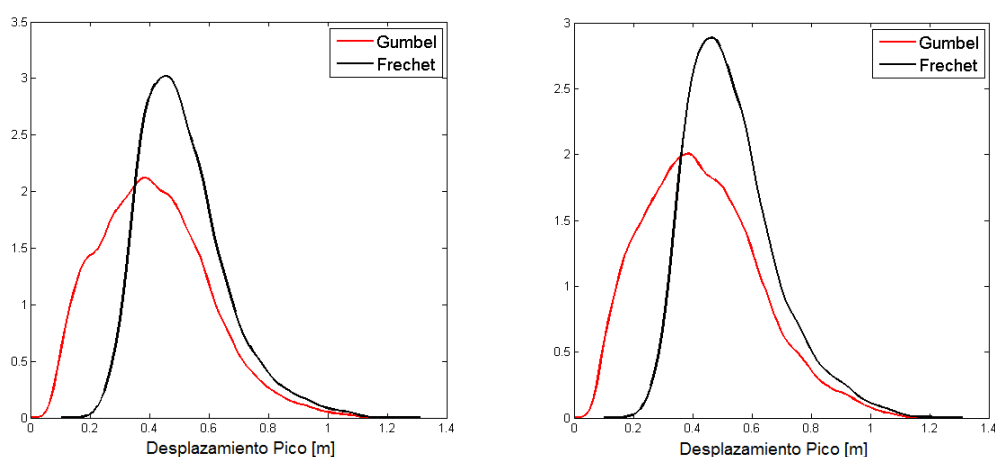
La Figura 5.23 presenta la vista superior de la superficie formada por las PDF de los resultados, para cada PDF usada para la variable aleatoria y para cada valor de  $V_n$ . Como en el caso anterior, la PDF usada para la variable aleatoria influye de manera muy sutil en las estadísticas de los resultados, aunque en este caso, el soporte y la dispersión de las PDF se ve reducido cuando se usa una PDF Gamma. La velocidad nominal del viento muestra una influencia lineal sobre la moda y la dispersión de las PDF de los resultados que, en todos los casos, fueron tipo Gamma.



**Figura 5.23:** Vista superior de las PDFs de desplazamientos picos para cada valor de  $V_n$ , usando la rigidez del mástil  $EI$  como variable estocástica con distribuciones: Uniforme (a), Exponencial Truncada (b), Gamma (c).

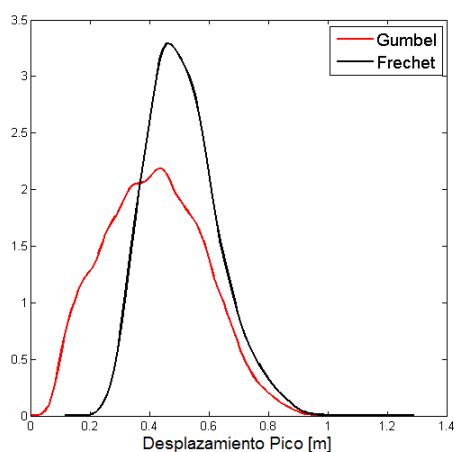
### 5.4.10 CASO 5. Carga de viento estocástica. $V_n$ y $EI$ conjuntamente estocásticos. $H$ determinístico.

A continuación se considera a la rigidez flexional del mástil y a la velocidad nominal del viento como variables conjuntamente estocásticas, independientes y usando las mismas PDF que antes. Los resultados analizados son los desplazamientos transversales máximos locales en el extremo superior de la torre. Las PDF de los resultados se muestran, para todas las combinaciones de PDF de las variables en la Figura 5.24.



(a) Uniforme.

(b) Exponencial Truncada.



(c) Gamma

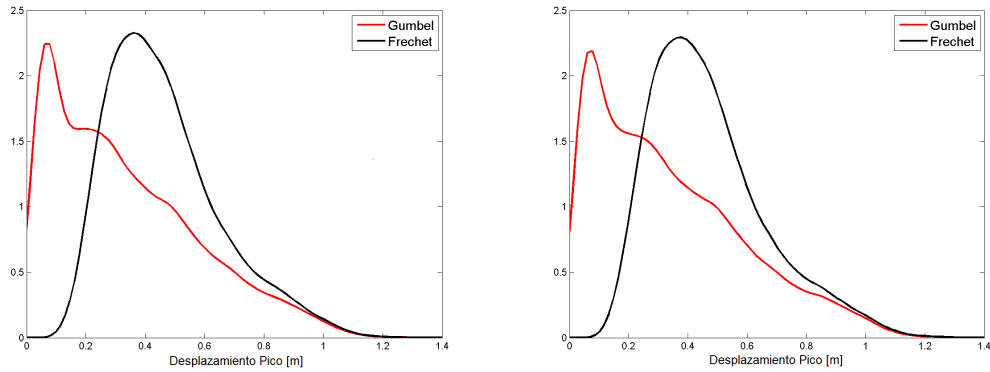
**Figura 5.24:** PDFs de desplazamientos picos usando  $EI$  y  $V_n$  como variables conjuntamente estocásticas. Cada figura muestra los casos usando distribuciones Gumbel y Fréchet para  $V_n$ . Las distribuciones de  $EI$  son: Uniforme (a), Exponencial Truncada (b), Gamma (c).

Los resultados son coherentes con los hallados en las secciones precedentes: la distribución que se le dé al parámetro  $EI$  afecta muy poco la respuesta estadística de los valores pico, los resultados usando una PDF Fréchet para  $V_n$  ofrecen PDFs menos dispersas, con soporte más acotado y con una moda de valor más alto que cuando se usa una distribución Gumbel. En todos los casos, las PDF resultantes fueron tipo Gamma.

#### 5.4.11 CASO 6. Carga de viento estocástica. $V_n$ y $H$ conjuntamente estocásticos. $EI$ determinístico.

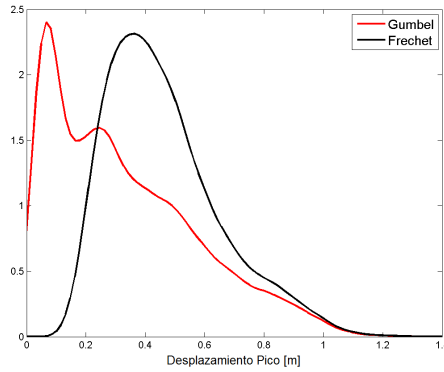
En esta última sección de resultados, la tensión inicial del cable y la velocidad nominal del viento son consideradas variables conjuntamente estocásticas, independientes y con las mismas distribuciones usadas en los anteriores apartados. Los resultados analizados son los desplazamientos transversales máximos locales en el extremo superior de la torre. Las PDF de los resultados se muestran, para todas las combinaciones de PDF de las variables en la Figura 5.25. Los resultados son coherentes con los hallados en las secciones precedentes: la distribución que se le dé al parámetro  $EI$  afecta muy poco la respuesta estadística de los valores pico, los resultados usando una PDF Fréchet para  $V_n$  ofrecen PDFs menos dispersas, con soporte más acotado y con una moda de valor más alto que cuando se usa una distribución Gumbel. En este caso, también se diferencian por el tipo de PDF de los resultados, mientras cuando se usa una distribución Fréchet para  $V_n$  los resultados continúan siendo tipo Gamma, cuando se usa una PDF Gumbel la forma de la PDF de los resultados se asemeja una PDF Exponencial Truncada.

Aunque el tipo de PDF que se asigne a  $EI$  o  $H$  parece tener un efecto poco significativo en la respuesta estadística de los valores pico, como puede verse en las Figuras 5.24 y 5.25, la elección de qué parámetro considerar estocástico sí resulta relevante cuando se usa una PDF Gumbel (que es la PDF adoptada en la mayoría de las normas) para modelar la velocidad nominal de viento. Según sea el caso, distintas PDF se obtienen para los resultados. En cambio, cuando se considera una distribución Fréchet para  $V_n$ , las PDF permanecen iguales indistintamente de que la tensión inicial o la rigidez flexional del mástil se consideren aleatorios.



(a) Uniforme.

(b) Exponencial Truncada.



(c) Gamma.

**Figura 5.25:** PDFs de desplazamientos picos usando  $H$  y  $V_n$  como variables conjuntamente estocásticas. Cada figura muestra los casos usando distribuciones Gumbel y Fréchet para  $V_n$ . Las distribuciones de  $H$  son: Uniforme (a), Exponencial Truncada (b), Gamma (c).

## 5.5 Comentarios Finales.

En este capítulo se introdujeron brevemente, en las primeras secciones, conceptos de modelado estocástico y cuantificación de incertidumbres. En particular, se desarrollaron los procedimientos del método de Monte Carlo para el modelado de incertidumbre y del Principio de Maxima Entropía, que es una herramienta para encontrar las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias, en base a la información disponible.

Luego se presentaron dos estudios de propagación de incertidumbres sobre estructuras arriostradas, donde parámetros como la tensión inicial del cable, la rigidez flexional de la viga y/o parámetros de la carga aplicada, son considerados variables aleatorias.

Los modelos reducidos del sistema no lineal de ecuaciones se construyeron a través de una aproximación de Galerkin, usando los dos primeros modos normales de vibración (obtenidos por medio de un análisis de elementos finitos previo), resultando en un modelo de orden reducido (ROM) de dos grados de libertad.

El primer estudio se trató sobre un sistema constituido por una viga horizontal y un cable, con una carga dinámica uniformemente distribuida aplicada sobre la viga, con una variación temporal dada por una función armónica y considerando la tensión inicial del cable ( $H$ ) como un parámetro aleatorio, con distribución Gamma. Se presentaron resultados de análisis determinísticos de la respuesta dinámica no lineal del problema y estadísticos, de propagación de incertidumbres en los desplazamientos transversales de la viga, considerando los valores máximos absolutos y los máximos locales. Respecto del análisis determinístico, se verificó que, pese al tipo de carga, el resultado no parece tender a un atractor periódico. Se encontró también que la respuesta dinámica es altamente sensible a cambios en  $H$ , incluso dentro de rangos muy pequeños de variación. Al analizar los desplazamientos máximos locales, se encontró que pueden diferenciarse tres rangos o zonas de tensión inicial donde el comportamiento de la respuesta es cualitativamente distinto. Estas observaciones respecto del comportamiento de los valores pico tienen importancia porque toda la variabilidad de resultados encontrados ocurre para valores de tensión inicial que se encuentran dentro de los rangos propuestos en los reglamentos. Los resultados de los estudios de incertidumbre presentaron algunas características similares a las observadas en los estudios determinísticos. Al estudiar la estadística de los valores máximos absolutos de desplazamiento se observaron algunos cambios cualitativos en la forma y soporte de las PDF de los resultados y las variaciones se producen cuando el valor de  $E(H)=H_m$  pasa de una zona a otra de  $H$  de las observadas en los resultados en los análisis determinísticos previos. Se observó también que para tensiones muy altas, el comportamiento de los máximos no se ve afectado por la incertidumbre en la tensión inicial: es prácticamente determinístico. Al analizar las estadísticas para los desplazamientos máximos locales se observan, nuevamente, tres tipos de PDF, en general multimodales y con soporte mayor. Otra vez, los cambios cualitativos de comportamiento que fueron observados en el estudio determinístico también se ven reflejados en el análisis de incertidumbre, produciendo bifurcaciones en las características de las PDF de los resultados, como puede apreciarse con más detalle cuando

se analizan los resultados obtenidos al variar de forma continua  $H_m$ .

Como segundo modelo estructural se analizó un sistema formado por una viga-columna y un cable, con una carga transversal de viento, modelada como un proceso estocástico con consideración de correlaciones espaciales y temporales (haciendo uso de las herramientas del Capítulo 2), adoptando como variables estocásticas la velocidad nominal del viento ( $V_n$ ), la rigidez flexional de la viga-columna ( $EI$ ) o la tensión inicial del cable ( $H$ ) tanto en forma aislada como conjunta. Para los parámetros  $H$  y  $EI$ , se analizaron los resultados con distribuciones Uniforme, Exponencial Truncada y Gamma. Para  $V_n$  se usaron distribuciones Gumbel y Fréchet. Los resultados analizados corresponden a los desplazamientos de la viga-columna en su extremo superior. Los resultados obtenidos indican que, si bien la consideración de  $H$  y  $EI$  como parámetros estocásticos es importante, la elección de la PDF (dentro de las tres estudiadas) no afecta en forma significativa las estadísticas de los resultados, lo que indica que la aleatoriedad de la carga de viento tiene una influencia mucho más fuerte sobre la respuesta estadística del sistema que la incertidumbre de  $H$  o  $EI$ . Respecto a las PDF elegidas para  $V_n$ , los resultados obtenidos con una PDF Fréchet son siempre tipo Gamma, con la moda en la zona de desplazamientos más altos, mientras que usando una PDF Gumbel, las estadísticas de los resultados son más dispersas, con un soporte mayor y son tipo Gamma o Exponencial Truncada, según si  $V_n$  se considera estocástica conjuntamente con  $EI$  o  $H$ , respectivamente. Como en el caso anterior, también se realizaron estudios determinísticos para evaluar la influencia que  $V_n$ ,  $H$  y  $EI$  tienen sobre la respuesta dinámica no lineal (en términos de los desplazamientos de la viga-columna). No se encontraron atractores periódicos, probablemente debido al carácter estocástico de la carga. Un análisis de correlación de los registros temporales de desplazamientos mostró que existe poca o nula correlación entre registros, incluso entre aquellos con valores de parámetros muy próximos entre sí, lo que muestra que los resultados son altamente sensibles a la combinación de parámetros que se elija. Al considerar cada registro de desplazamientos como un proceso estocástico, y variando paramétricamente  $H$  ( $V_n$  y  $EI$  fijos), se obtuvieron gran variedad de PDF de los resultados y una gran variabilidad entre valores próximos de  $H$ , pasando de distribuciones tipo Gamma con poca desviación a distribuciones bimodales y más dispersas. El valor medio de los resultados se mantuvo constante y el ancho de las bandas de confiabilidad fue reduciéndose al aumentar  $H$ . Al

considerar  $V_n$  variando paramétricamente y fijando  $H$  y  $EI$ , las PDF de los registros se vuelven cada vez más dispersos al aumentar  $V_n$  y se pueden encontrar multimodalidades para algunos de los valores más altos. La media y el ancho de la zona entre las bandas de confiabilidad se ven afectadas de una manera no lineal por  $V_n$ . Al estudiar las estadísticas de los desplazamientos máximos locales para las distintas combinaciones de parámetros considerados estocásticos, se encontró que  $V_n$  afecta en forma no lineal la media y la dispersión de las PDF de los resultados cuando se considera a  $H$  como única variable estocástica, en cambio, cuando  $EI$  es considerada como única variable estadística, la incidencia de  $V_n$  es lineal tanto para la media como para la dispersión. Cuando  $V_n$  es considerada como única variable estocástica, y se varió paramétricamente  $EI$ , se observó una gran variabilidad de las PDF de los resultados, sobre todo para valores de  $EI$  bajos. En general, se encontraron PDFs más compactas y tipo Gamma al usar distribuciones Fréchet para  $V_n$ , ubicadas en la zona de desplazamientos mayores, mientras que al usar una PDF Gumbel, los resultados son más dispersos y otorgan algo más de importancia a los desplazamientos pico de menor valor. Se realizó también un estudio, considerando solo a  $H$  como variable aleatoria y variando la desviación estándar usada en la PDF donde se observó que a menor dispersión, más variables resultan las PDF de los resultados y que este fenómeno es especialmente remarcable para  $V_n > 45$  m/s. Se cree que esto podría deberse a la no linealidad del sistema sumada a la carga estocástica, que produce una alta sensibilidad de la respuesta a la variación de los parámetros. Usar una dispersión "grande" podría originar que, en promedio, el efecto de esta sensibilidad se diluya.



## **Capítulo 6**

# **Modelo de elementos finitos no lineal ad hoc para cálculo y verificación de Mástiles Arriostrados**

### **6.1 Introducción.**

Este capítulo propone, como epílogo de los desarrollos presentados en este documento, el que fuera uno de los temas motivadores de la presente tesis: el desarrollo de una herramienta numérica que permita evaluar la respuesta no lineal mástiles arriostrados. La idea es presentar una herramienta que, aunque con rigurosidad científica en su desarrollo, trascienda la barrera puramente académica y permita hacer análisis estáticos para el cálculo o verificación de estructuras nuevas o existentes y análisis dinámicos, para el estudio de estructuras particularmente sensibles o de gran envergadura, que por su importancia, requieran estudios más detallados o para análisis académicos de problemáticas relacionadas con la tipología estructural como la propagación de incertidumbre de alguno de sus parámetros, la evaluación de la respuesta frente a cargas estocásticas de viento o sismo o frente a la rotura de alguna de sus riendas.

Se presentarán en detalle desarrollos de elementos finitos aplicados a problemas no lineales, para resolver las ecuaciones de los cables, dado que no se encuentran frecuentemente en la literatura. Se discutirá la implementación de elementos de dos y tres nodos, aunque para la aplicación, por cuestiones de practicidad, se usarán elementos cable de

dos nodos. No se presentan en esta tesis los desarrollos sobre elementos tipo "Frame" usados para modelar el mástil, que pueden ser encontrados en cualquier libro de introducción al método de los elementos finitos. Para resolver el equilibrio de las ecuaciones no lineales, se emplea el método iterativo de Newton-Raphson. Un punto fundamental en todo problema de elementos finitos es el mallado, que aquí se resuelve utilizando la interfaz GiD (CIMNE, 2015), de acceso libre, para la cual se programaron scripts específico, en lenguaje TCL, que permiten tomar la información de la malla generada, de manera que pueda ser procesada en MATLAB y sirva al programa de elementos finitos. Los elementos cable usados son de dos nodos debido a una limitación de GiD a usar un solo tipo de elemento (no es posible mezclar una malla con elementos de dos y tres nodos).

La interfaz del programa final obtenido puede aún mejorarse, sobre todo en lo respectivo a la forma de introducción de las cargas. Aún así, en lo que respecta a definición de la geometría, mallado, solución del problema no lineal, representación gráfica de la deformada y resultados de esfuerzos el programa se encuentra prácticamente terminado, lo que representa un gran progreso sobre el estado actual del arte en materia de programas específicos (y de producción nacional) para resolver y/o estudiar este tipo de estructura, tan frecuente en el suelo Argentino.

## **6.2 Formulación de elementos finitos no lineal de cables en tres dimensiones.**

### **6.2.1 Ecuaciones diferenciales de cables tensos en tres dimensiones.**

Existen publicadas numerosas revisiones sobre distintas formulaciones de cables, como por ejemplo, la Tesis de Gunnar (1999), el artículo de Rega (2004) o los libros de Irvine (1981) y Leonard (1988). En esta tesis se utiliza la formulación propuesta por V. Gattulli (2000). La deducción del sistema de ecuaciones que gobierna la dinámica de cables tensos se explicita en el Capítulo 4 para sistemas planos. Adicionando los términos correspondientes a los corrimientos en la 3ra coordenada y siguiendo el mismo procedimiento pueden hallarse las ecuaciones para el sistema en tres dimensiones, que se presentan en la Ec. 6.1:

$$\begin{cases} u : m\ddot{u} + c\dot{u} - EA\epsilon' = p_u, \\ v : m\ddot{v} + c\dot{v} - [Hv' + EA(y' + v')\epsilon]' = p_v, \\ w : m\ddot{w} + c\dot{w} - [Hw' + EAw'\epsilon]' = p_w. \end{cases} \quad (6.1)$$

Donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  son los corrimientos respecto de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente,  $(*)' = d(*)/dx$  y  $(\dot{*}) = d(*)/dt$ . Como antes,  $m$  es la masa por unidad de longitud del cable,  $c$  el coeficiente de amortiguamiento,  $E$  es el módulo de elasticidad del cable,  $A$  la sección transversal y  $H$  la tensión del cable en la dirección horizontal local del cable.  $y$  es la configuración de referencia del cable. La extensibilidad  $\epsilon$  del cable, deducida para el caso plano en el Capítulo 4, para el caso de tres dimensiones tiene la forma:

$$\epsilon = u' + y'v' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2). \quad (6.2)$$

### 6.2.2 Forma débil de las ecuaciones diferenciales de cables.

El sistema 6.1 puede ser escrito en forma general de la siguiente manera:

$$M\{\ddot{U}\} + C\{\dot{U}\} + F(\{U\}) = \{P\}, \quad (6.3)$$

donde  $\{U\} = [u, v, w]^T$ ,  $\{P\} = [p_u, p_v, p_w]^T$  y

$$F(\{U\}) = \begin{pmatrix} EA\epsilon' \\ [Hv' + EA(y' + v')\epsilon]' \\ [Hw' + EAw'\epsilon]' \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

La forma débil del sistema Ec. 6.1 se obtiene proyectando el conjunto de funciones  $\mathcal{U}$  que son solución de dicho sistema, sobre el conjunto de funciones de peso  $\Phi$ . Los conjuntos  $\mathcal{U}$  y  $\Phi$  deben elegirse dentro del espacio de funciones con derivadas parciales cuadrado integrables, que satisfagan las condiciones de borde esenciales. De esta manera, el sistema Ec. 6.3, en su forma débil, queda expresado de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}(\phi, \ddot{U}) + \mathcal{C}(\phi, \dot{U}) + \mathcal{F}(\phi, U) + \mathcal{BC} = \mathcal{P}(\phi, U), \quad (6.5)$$

donde  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}$  son los operadores de masa, amortiguamiento y fuerzas externas,

respectivamente.  $\mathcal{F}$  es el operador de rigidez (no lineal) y  $\mathcal{BC}$  son las condiciones de borde.

$$\mathcal{M}(\phi, \ddot{U}) = \int_0^l m(\phi\ddot{u} + \phi\ddot{v} + \phi\ddot{w})dx, \quad (6.6a)$$

$$\mathcal{C}(\phi, \dot{U}) = \int_0^l c(\phi\dot{u} + \phi\dot{v} + \phi\dot{w})dx, \quad (6.6b)$$

$$\mathcal{P}(\phi, U) = \int_0^l (\phi p_u + \phi p_v + \phi p_w)dx, \quad (6.6c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi, U) = & \int_0^l EA\epsilon\phi'dx + \\ & + \int_0^l (Hv'\phi' + EAy'\epsilon\phi' + EAv'\epsilon\phi')dx + \\ & + \int_0^l (Hw'\phi' + EAw'\epsilon\phi')dx, \end{aligned} \quad (6.6d)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{BC} = & [EA\epsilon\phi]_0^l + \\ & + [Hv'\phi + EA(y' + v')\epsilon\phi]_0^l + \\ & + [Hw'\phi + EAw'\epsilon\phi]_0^l. \end{aligned} \quad (6.6e)$$

### 6.2.3 Formulación de elementos finitos no lineal para cables tensos en tres dimensiones.

Cualquier formulación estándar de elementos finitos consiste en los mismos pasos:

1. Particionar el dominio continuo del problema en subdominios menores (o "elementos"), dentro de los cuales la respuesta pueda ser evaluada con funciones -relativamente- sencillas.
2. Definir la ubicación de los nodos (lugares donde la ecuación se resuelve) dentro los subdominios previamente establecidos.
3. Establecer las funciones de aproximación o interpolación de la funciones objetivo (que en este caso son los desplazamientos  $U$ ).
4. A partir de los elecciones de los pasos anteriores, formular (si es posible, matricialmente) las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un elemento.

Como queda claro en el ítem 2, mediante la técnica de elementos finitos, un sistema continuo se reduce a un sistema discreto; las ecuaciones solo se resuelven realmente en los nodos y la respuesta entre los nodos es aproximada por medio de las funciones de interpolación.

En los siguientes desarrollos, se presenta la formulación de cables considerando elementos de dos y tres nodos. Existe una gran variedad de funciones para usar como interpolantes, aunque para problemas unidimensionales como el que se está tratando, lo más frecuente es usar conjuntos de polinomios completos. En este caso, el grado máximo del polinomio depende de la cantidad de nodos que tenga el elemento, por lo tanto, para un elemento cable de dos nodos, se usarán polinomios de primer grado (funciones lineales) y para el caso de tres nodos se usarán polinomios de segundo grado (funciones cuadráticas), para interpolar cada uno de los tres grados de libertad (desplazamientos en las tres direcciones coordenadas) que tiene cada nodo. Como simplificación adicional, se considera que los desplazamientos, que dependen del tiempo y de la posición, pueden expresarse como el producto de una componente que depende solo del tiempo y una componente que depende solo de la coordenada espacial:

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) q_i^e(t); \quad e = 1, 2, 3. \quad (6.7)$$

En la descomposición anterior, las funciones  $\beta_i$  representan las funciones de interpolación (que serán conocidas). Los coeficientes  $q$  se ordenan de la siguiente manera  $q_i^1 = u_i$ ,  $q_i^2 = v_i$ ,  $q_i^3 = w_i$  (nótese que  $u = f(x, t)$  es el desplazamiento de un punto cualquiera del elemento de cable en la dirección axial y  $u_i = f(t)$  es el coeficiente de la descomposición de la Ec. 6.7, que luego se verá que coincide con el desplazamiento en el nodo  $i$ ). A continuación, se introduce la Ec. 6.7 en la Ec. 6.5 y se adopta  $\beta = \phi$ . Para evitar confusiones a estas funciones se las llamará  $\xi$ .

$$\xi = \beta = \phi \quad (6.8)$$

Podrían usarse funciones distintas  $\beta$  y  $\phi$  (o sea, las funciones de interpolación  $\beta$  podrían ser distintas de las funciones de peso  $\phi$ ) pero en general se eligen siguiendo el criterio de Bubnov-Galerkin, que propone que ambos conjuntos de funciones sean iguales. Esta elección aporta simplicidad en los desarrollos de elementos finitos, pero

también resulta interesante cuando las funciones del conjunto  $\Phi$  funciones son ortonormales entre sí (como es el caso de los modos normales de vibración), porque diagonalizan las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez y es éste el motivo original para hacer esta elección.

Teniendo en cuenta las Ec. 6.7 y 6.8, la Ec. 6.5 se escribe como:

$$\mathbf{M}(\xi, \ddot{q}) + \mathbf{C}(\xi, \dot{q}) + \mathbf{F}(\xi, q) = \mathbf{P}(\xi, q), \quad (6.9)$$

(los índices se han omitido para evitar sobrenotación).

Donde:

$$\mathbf{M}(\xi, \ddot{q}) = \int_0^l m \left( \sum_{i=1}^n (\ddot{u}_i \xi_i) \xi_j + \sum_{i=1}^n (\ddot{v}_i \xi_i) \xi_j + \sum_{i=1}^n (\ddot{w}_i \xi_i) \xi_j \right) dx, \quad (6.10a)$$

$$\mathbf{C}(\xi, \dot{q}) = \int_0^l c \left( \sum_{i=1}^n (\dot{u}_i \xi_i) \xi_j + \sum_{i=1}^n (\dot{v}_i \xi_i) \xi_j + \sum_{i=1}^n (\dot{w}_i \xi_i) \xi_j \right) dx, \quad (6.10b)$$

$$\mathbf{P}(\xi, q) = \int_0^l (p_u \xi_j + p_v \xi_j + p_w \xi_j) dx, \quad (6.10c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\xi, q) = & \int_0^l EA \varepsilon \xi_j' dx + \\ & + \int_0^l \left( H \sum_{i=1}^n (v_i \xi_i') \xi_j' + EA \varepsilon \sum_{i=1}^n (\xi_i') \xi_j' + EA \varepsilon \sum_{i=1}^n (v_i \xi_i') \xi_j' \right) dx + \\ & + \int_0^l \left( H \sum_{i=1}^n (w_i \xi_i') \xi_j' + EA \varepsilon \sum_{i=1}^n (w_i \xi_i') \xi_j' \right) dx, \end{aligned} \quad (6.10d)$$

e  $y' = \sum_{i=1}^n (\xi_i')$ . Por otra parte,  $\epsilon$  ha sido sustituido por  $\varepsilon$  que tiene la forma:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n (u_i \xi_i') + \sum_{i=1}^n (\xi_i') \sum_{i=1}^n (v_i \xi_i') + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (v_i \xi_i') \right)^2. \quad (6.11)$$

La aparente dificultad de las ecuaciones 6.10 se despeja cuando se desarrollan las sumas, se reparten las integrales en los sumandos y se extraen de las integrales los términos del conjunto  $q$  que solo dependen del tiempo (las integrales son sobre la coordenada  $x$ ). Como ya se indicó antes, las funciones de interpolación  $\xi$  se elegirán como

polinomios de primero y segundo grado (según se trabaje con elementos de dos o tres nodos, respectivamente), por lo que las integrales resultantes, serán sencillas integrales de polinomios.

### Funciones de interpolación.

Antes de introducir las funciones de interpolación a usar, es conveniente presentar las condiciones que deben cumplir, de manera que el resultado sea una función convergente a la solución real al aumentar el número de elementos. Los requisitos son (Reddy, 2006):

1. Deben ser funciones continuas y diferenciables en el dominio del elemento como es requerido por la forma débil.
2. Las funciones formadas por polinomios deben incluir todos sus términos (deben ser polinomios completos).
3. Deben ser interpolantes de las variables primarias en los nodos del elemento finito, de manera que pueda imponerse la continuidad de la solución entre los nodos/bordes de elementos adyacentes.

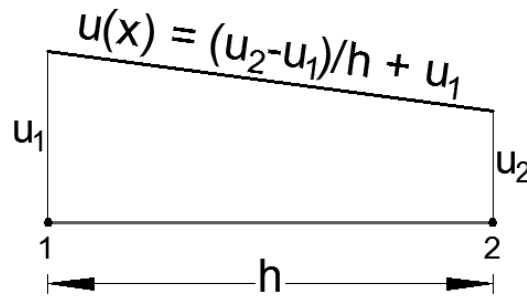
**Elementos de dos nodos.** Para el caso de elementos de dos nodos, se eligen funciones de interpolación lineales, es decir polinomios completos de primer orden. Se eligen funciones lineales, porque la cantidad de nodos coincide con la cantidad de incógnitas de la función de interpolación: el elemento es de dos nodos y las incógnitas son la pendiente y la ordenada al origen de la función lineal. Como el sistema de ecuaciones resultante devuelve los desplazamientos en los nodos, para encontrar la ecuación de la función de interpolación (ver Fig 6.1) se procede de la siguiente manera:

$$u(x) = ax + b,$$

$$u(0) = u_1; u(h) = u_2; \quad \therefore \quad a = \frac{u_2 - u_1}{h}; b = u_1,$$

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{h}x + u_1 = u_2 \frac{x}{h} - u_1 \frac{x}{h} + u_1;$$

$$u(x) = u_1 \left(1 - \frac{x}{h}\right) + u_2 \frac{x}{h} = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$



**Figura 6.1:** Desplazamientos de nodos y función de interpolación lineal.

Por lo que las funciones de interpolación resultan ser:

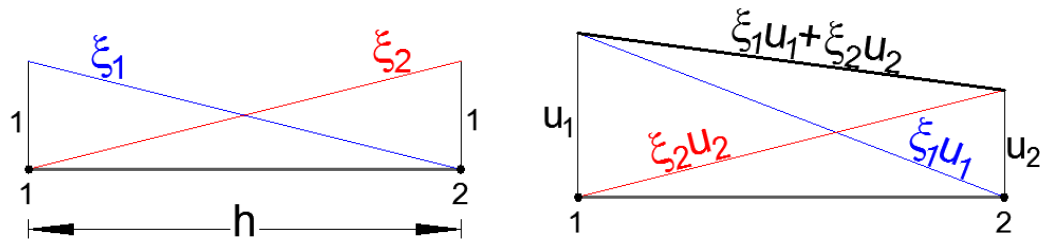
$$\xi_1 = \left(1 - \frac{x}{h}\right); \quad \xi_2 = \frac{x}{h}. \quad (6.12)$$

Como puede verse, las funciones de interpolación  $\xi_i$  también pueden construirse encontrando las funciones resultantes de dar un desplazamiento unitario en un nodo y nulo en el otro. En cada caso, la función  $\xi_1$  que multiplica al desplazamiento  $u_1$  es aquella obtenida al hacer unitario el desplazamiento del nodo 1 y cero los desplazamientos de todos los demás. Esta propiedad de las funciones de interpolación se conoce como partición de la unidad, que puede expresarse matemáticamente a través de las expresiones de las Ec. 6.13 y 6.14.

$$\xi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (6.13)$$

$$\sum_{i=1}^n \xi_i(x) = 1 \quad (6.14)$$





(a) Uso de la propiedad de partición de la unidad para encontrar las funciones de interpolación. (b) Aproximación de la función objetivo en el dominio del elemento.

**Figura 6.2:** Funciones de interpolación lineales.

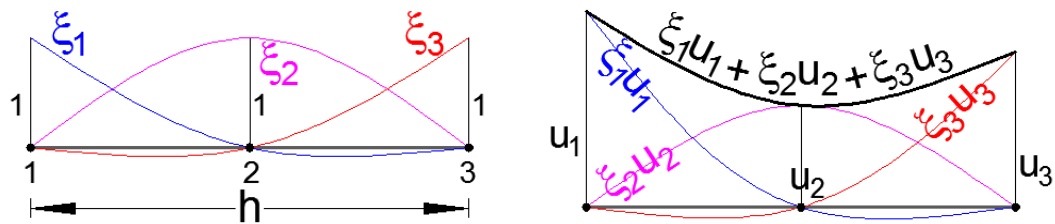
Cuando las funciones de interpolación solo interpolan los valores de la función objetivo, se conocen como *funciones de interpolación de Lagrange*. En caso de interpolar -además- sus derivadas, se las conocen como *funciones de Hermite*, que se usan, por ejemplo, en la formulación de elementos tipo viga (Reddy, 2006).

**Elementos de tres nodos.** Para encontrar las funciones de interpolación para elementos de tres nodos, puede procederse de la misma manera que para dos nodos. En este caso, se hará uso de la propiedad de partición de la unidad (Ec. 6.13 y 6.14). Como el elemento tiene tres nodos, se deberán utilizar los polinomios de segundo grado completos de la Ec. 6.15.

$$\xi_1 = \left(1 - \frac{x}{h}\right) \left(1 - \frac{2x}{h}\right); \quad \xi_2 = 4\frac{x}{h} \left(1 - \frac{x}{h}\right); \quad \xi_3 = -\frac{x}{h} \left(1 - \frac{2x}{h}\right). \quad (6.15)$$

La figura 6.3 muestra gráficamente en qué consiste el proceso de encontrar las funciones de interpolación usando la propiedad de partición de la unidad (Fig. 6.3(a)) y la aproximación de la función objetivo (Fig. 6.3(b)) para elementos de tres nodos.

Una vez definidas las funciones de interpolación, la formulación de elementos finitos, consiste en reemplazar las Ec. 6.15 o 6.12 (según si se elige usar elementos de tres o dos nodos respectivamente) en las integrales Ec. 6.10 para encontrar los operadores de masa, amortiguamiento, fuerza y rigidez de la Ec. 6.9. El sistema de ecuaciones resultante es no lineal (en principio, por parte de la rigidez), por lo que no existe una forma matricial de expresarlo. Debido a la complejidad de la formulación final,



(a) Uso de la propiedad de partición de la unidad (b) Aproximación de la función objetivo en el dominio del elemento. para encontrar las funciones de interpolación.

**Figura 6.3:** Funciones de interpolación cuadráticas.

la misma no se incluye en este documento, pero se adjunta el código de programación de Matlab (Mathworks, 2011) usado para encontrarla. Si bien Matlab no ofrece el entorno de programación más amigable para trabajar en forma simbólica, los desarrollos necesarios son bastante sencillos y, como puede observarse se pueden realizar sin complicaciones. Además la herramienta `matlabFunction`, permite convertir el sistema no lineal simbólico resultante en una función de Matlab, a través de transformar las variables simbólicas en variables adicionales de la función. Así es posible usar el sistema no lineal del elemento a través de una función.

**Código 6.1:** Código de Matlab para generar las matrices y funciones de elementos finitos no lineal para cables

```

1  % Formulacion no-lineal de elementos finitos para cables tensos 3D.
2
3  % Tambien calcula el jacobiano.
4
5  % x = variable,
6  % ui,vi,wi = desplazamientos de los nodos,
7  % E = modulo de elasticidad,
8  % A = area del cable,
9  % H = tension inicial del cable en la direccion de la sog,
10 % fi = qi = fuerzas distribuidas en las direcciones u v w,
11 % L = longitud de la cuerda del cable.
12
13 clc
14 clear all
    
```

```
15
16 syms x u1 u2 u3 v1 v2 v3 w1 w2 w3 y1 y2 y3 E A H le fu fv fw D L
17
18 flag = 2; % elijo entre funciones de interpolacion cuadraticas ...
    (1) o lineales (else)
19
20 if flag ==1 % Funciones de interpolacion cuadraticas (reddy pag ...
    117 ecs 3.2.27)
21
22     phi1 = (1-x/le)*(1-2*x/le);
23     phi2 = 4*x/le*(1-x/le);
24     phi3 = -x/le*(1-2*x/le);
25
26     phi = [phi1;phi2;phi3];
27     phip = diff(phi);
28
29     alfa1 = phi1;
30     alfa2 = phi2;
31     alfa3 = phi3;
32
33     alfa = [alfa1;alfa2;alfa3];
34     alfap = diff(alfa);
35
36     xi1 = phi1;
37     xi2 = phi2;
38     xi3 = phi3;
39
40     xi = [xi1;xi2;xi3];
41     xip = diff(xi);
42
43     U = [u1;u2;u3];
44     V = [v1;v2;v3];
45     W = [w1;w2;w3];
46     Y = [y1;y2;y3];
47
48 else % Funciones de interpolacion lineales (reddy pag 115 ecs ...
    3.2.19)
49     phi1 = 1-x/le;
```

```
50     phi2 = x/le;
51     phi = [phi1;phi2];
52     phip = diff(phi);
53
54     alfa1 = 1-x/le;
55     alfa2 = x/le;
56     alfa = [alfa1;alfa2];
57     alfap = diff(alfa);
58
59     xi1 = phi1;
60     xi2 = phi2;
61
62     xi = [xi1;xi2];
63     xip = diff(xi);
64
65     U = [u1;u2];
66     V = [v1;v2];
67     W = [w1;w2];
68     Y = [y1;y2];
69     end
70
71     % Aproximacion de los desplazamientos por separacion de variables
72     o = ones(1,size(phi));
73
74     Ualfa = U.*alfa;
75     Ualfap = U.*alfap;
76
77     Wxi = W.*xi;
78     Wxip = W.*xip;
79
80     Vphi = V.*phi;
81     Vphip = V.*phip;
82     Yphip = Y.*phip;
83
84     u = o*Ualfa;
85     up = o*Ualfap;
86
87     w = o*Wxi;
```

```

88 wp = o*Wxip;
89
90 v = o*Vphi;
91 vp = o*Vphip;
92 yp = o*Yphip;
93
94 Fu = fu*alfa;
95 Fv = fv*phi;
96 Fw = fw*xi;
97
98 %Expresion de la deformacion especifica
99 epsilon = up + yp*vp + 1/2*(vp^2+wp^2);
100
101 % Sistema de ecuaciones no lineal del elemento (forma debil)
102 for i=1:length(phi)
103     % -- TERMINOS DE RIGIDEZ --
104     % int_0^le EA*epsilon*alfa' dx
105     ki = E*A*epsilon*alfap(i);
106     K(1+3*(i-1),1) = int(ki,x,0,le);
107
108     % int_0^le (H*v'+EA(y'+v')*epsilon)*phi' dx
109     ki = ( H*vp + E*A*(yp+vp)*epsilon ) *phip(i);
110     K(2+3*(i-1),1) = int(ki,x,0,le);
111
112     % int_0^le (H*w' + EA*w'*epsilon)*xi' dx
113     ki = (H*wp + E*A*wp*epsilon)*xip(i);
114     K(3*i,1) = int(ki,x,0,le);
115
116     % -- TERMINOS DE FUERZA --
117     F(1+3*(i-1),1) = int(Fu(i),x,0,le);
118     F(2+3*(i-1),1) = int(Fv(i),x,0,le);
119     F(3*i,1) = int(Fw(i),x,0,le);
120 end
121
122
123 UVW = [U(1);V(1);W(1);U(2);V(2);W(2)]; %dos nodos
124 if length(U)>2 % tres nodos
125     UVW=[UVW;U(3);V(3);W(3)];

```

```
126 else
127 end
128
129 % Jacobiano de K
130 for i=1:length(UVW)
131     for j=1:length(K)
132         JAC(j,i) = diff(K(j),UVW(i));
133     end
134 end
135
136 %% genero los scripts de funcion a partir de las funciones ...
137     simbolicas
137 matlabFunction(JAC,'file','Ke3d')
138 matlabFunction(K,'file','PU3d')
139 matlabFunction(F,'file','FF3d')
140 matlabFunction(epsilon,'file','epsilon')
```

#### 6.2.4 Solución de ecuaciones de elementos finitos no lineales.

En esta sección se discutirán las técnicas de solución de las formulaciones de elementos finitos no lineales planteadas precedentemente. No se aborda aquí un desarrollo extenso de todas las técnicas disponibles ni su discusión, pues no es el objetivo de este capítulo comparar los distintos métodos disponibles, sino más bien desarrollar la implementación de algunos de los métodos clásicos recomendados en la literatura. Para el caso de problemas estáticos, se emplea el método de Newton-Raphson, mientras que para problemas dinámicos se formularán los métodos de la familia de Newmark. En ambos casos, se hará una introducción conceptual y luego se describirá la implementación, que son los dos puntos que el autor considera que se encuentran presentes en menor medida en la literatura. Discusiones formales cada uno de los métodos y su aplicabilidad pueden encontrarse en cualquier de libro de elementos finitos con aplicación a problemas no lineales, como por ejemplo en las referencias Reddy (2005), Wriggers (2006), Belytschko et al. (2000) y de Borst et al. (2013).

**Problemas estáticos. Método de Newton-Raphson.**

Los problemas de elementos finitos *lineales* se reducen, en su formulación a una forma matricial, que, superadas las etapas de optimización de las matrices para hacer el proceso de resolución más eficiente, no tienen mayores dificultades en su solución. Por otra parte, los problemas no lineales, no poseen esta característica, pues la formulación resulta en un sistema no lineal de ecuaciones, que no puede ser expresado en forma matricial y, dado el tamaño del sistema (que puede consistir en cientos de ecuaciones) una solución exacta no es, en general, posible. Por otra parte, si fuese posible encontrar de forma más o menos programática soluciones exactas para todos los problemas, el método de elementos finitos no sería necesario. En esta tesis, se usó el método de Newton-Raphson para encontrar la solución aproximada de sistemas de ecuaciones no lineales.

**Ideas detrás de la formulación del método de Newton-Raphson.** Para introducir el método de Newton-Raphson, es bueno comenzar con un ejemplo simple, que consiste en responder a la pregunta: ¿qué deformación  $x$  es necesaria aplicar a un resorte  $R$  para equilibrar una fuerza  $P$ ? (Figura 6.4). Si el problema es lineal, la relación entre fuerza y deformación del resorte responde a una ley lineal (Fig. 6.5(a)) del tipo

$$P = Kx. \quad (6.16)$$

Como  $K$  es una constante, la respuesta al problema es directamente

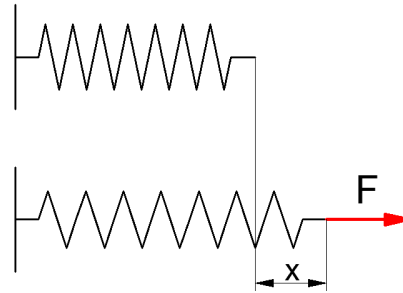
$$x = P/K. \quad (6.17)$$

El inconveniente de los problemas no lineales es que la relación entre  $P$  y  $x$  responde a una forma del tipo

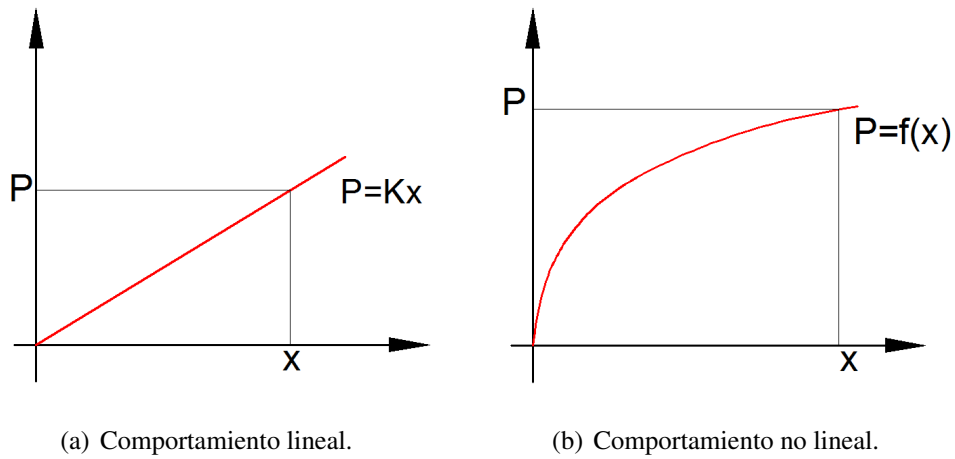
$$P = f(x), \quad (6.18)$$

donde  $f(x)$  no representa una ley de variación lineal (Fig. 6.5(b)), por lo que la solución, en general, debe responder a algún tipo de proceso iterativo.

El método de Newton-Raphson consiste en aproximar  $G = P - f(x) = 0$  a través



**Figura 6.4:** Situación resorte-fuerza-desplazamiento para ejemplificar el método de Newton-Raphson.



**Figura 6.5:** Posibilidades de respuesta del resorte.

de un desarrollo de Taylor de primer grado:

$$T[G(x^\xi)] = G(x^\xi) + \frac{dG(x^\xi)}{dx} \delta x^\xi = 0, \quad (6.19)$$

$$\frac{dG(x^\xi)}{dx} \delta x^\xi = -G(x^\xi), \quad (6.20)$$

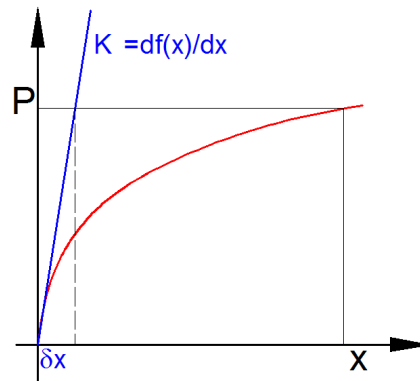
donde  $\frac{dG(x^\xi)}{dx} = \frac{df(x^\xi)}{dx} = K$  es la pendiente de la función (asumiendo que la carga  $P$  no depende de la deformación del  $x^\xi$  del resorte) y  $x^\xi$  es el punto respecto del cual se hace el desarrollo de Taylor. Por lo tanto, esta formulación se reduce a aproximar la función  $f(x)$  a través de su tangente, para hallar el valor de  $x^{\xi+1} = x^\xi + \delta x^\xi$  que satisface la Ecuación 6.18:



$$K^\xi \delta x^\xi = f(x^\xi) - P, \quad (6.21)$$

con lo cual, el problema no lineal inicial se ha reducido a un problema lineal que puede ser resuelto sin problemas.

Como en general la solución  $x^{\xi+1}$  obtenida de la Ec. 6.21 no verifica la Ec. 6.18 (como se muestra en la Fig. 6.6, pero de alguna manera se "acerca" más a la solución real que el valor inicial  $x^\xi$ , el valor hallado  $x^{\xi+1}$  se toma como la nueva referencia, desde donde se vuelve a escribir el desarrollo de Taylor y repetir todo el proceso.



**Figura 6.6:** Aplicación del método de Newton-Raphson (una sola iteración).

El proceso, que se ilustra en la Fig. 6.7(a), se resume de la siguiente manera:

1. Escribir el sistema no lineal en la forma:  $G = P - f(x) = 0$ .
2. Hallar  $K^\xi = \frac{f(x^\xi)}{dx}$  (el superíndice indica el número de la iteración).
3. Resolver  $K^\xi \delta x^\xi = -G(x^\xi)$  para hallar  $\delta x^\xi$ .
4. Hallar la aproximación de  $x$  como  $x^{\xi+1} = x^\xi + \delta x^\xi$ .
5. Verificar que  $G(x^{\xi+1}) = f(x^{\xi+1}) - P < \eta$  donde  $\eta$  es el valor de tolerancia admitido.
6. En caso de que no se cumpla con la tolerancia repetir los pasos 2 a 5 iniciando el proceso con la aproximación  $x^{\xi+1}$  encontrada en el paso 4.

Si el cómputo de  $K$  es complejo y computacionalmente costoso, se puede hacer una modificación al algoritmo, de manera que  $K$  se calcule periódicamente, en lugar de hacerlo en cada iteración. La idea detrás de este algoritmo modificado se ilustra en la Fig. 6.7(b).

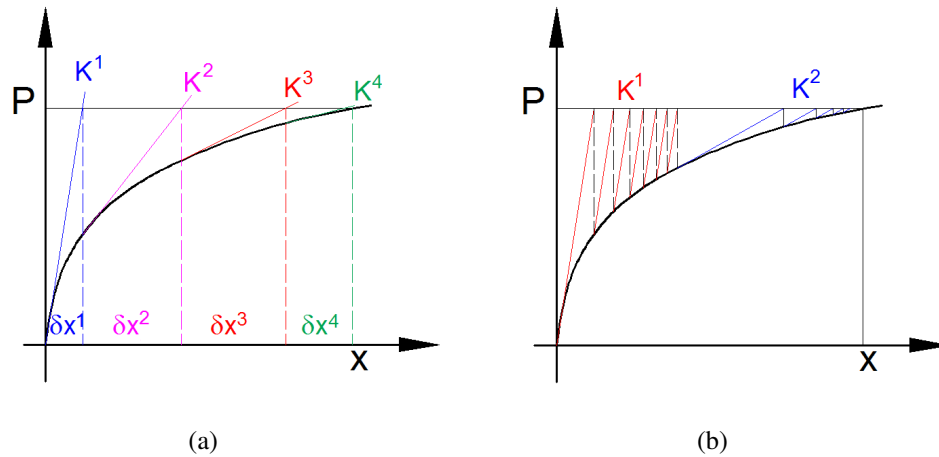


Figura 6.7: Aplicación del método de Newton-Raphson (varias iteraciones).

**Aplicación a problemas de elementos finitos no lineales.** Una vez comprendida conceptualmente la formulación del método, la aplicación a problemas de elementos finitos consiste en extender su formulación a sistemas de ecuaciones de la forma:

$$P = f(\mathbf{X}), \tag{6.22}$$

donde  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$  y  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Para sistemas de ecuaciones,  $K$  deja de ser el valor de la pendiente de la curva  $f(x)$  y se convierte en el jacobiano del sistema  $f(\mathbf{X})$  (en negrita se indican las variables vectoriales) y se denomina *matriz tangente*. En los problemas de elementos finitos, no se conoce la forma final del sistema  $f(\mathbf{X})$  pero se conoce a priori la formulación de los elementos por lo que  $\mathbf{P}$ ,  $f(\mathbf{X})$  y la matriz tangente  $K$  se calculan a nivel elemental, luego se ensamblan y se procede a la solución. Por ejemplo, la formulación de elementos finitos no lineal del sistema Ec. 6.1 en dos dimensiones y para elementos de dos nodos es:

$$f(\mathbf{X}) = f(U_1, V_1, U_2, V_2) = \begin{cases} \int_0^h EA\varepsilon\alpha'_1 dx = \int_0^h F_u\alpha_1 dx, \\ \int_0^h (HV_i\psi'_i + EA\psi'_i\varepsilon + EAV_i\psi'_i\varepsilon) \psi'_1 dx = \int_0^h F_v\psi_1 dx, \\ \int_0^h EA\varepsilon\alpha'_2 dx = \int_0^h F_u\alpha_2 dx, \\ \int_0^h (HV_i\psi'_i + EA\psi'_i\varepsilon + EAV_i\psi'_i\varepsilon) \psi'_2 dx = \int_0^h F_v\psi_2 dx. \end{cases} \quad (6.23)$$

En la Ec. 6.23, los  $U_i$  y  $V_i$  representan los desplazamientos horizontales y verticales respectivamente, de cada nodo  $i$  del elemento. Las sumas se han escrito en notación reducida donde, por ejemplo  $\sum_{i=1}^n V_i\psi_i = V_i\psi_i$ ,  $\sum_{i=1}^n \psi_i = \psi_i$ ,  $\sum_{i=1}^n V_i\psi'_i = V_i\psi'_i$ , etc. Las funciones  $\psi_i$  y  $\alpha_i$  son funciones de interpolación lineales estándar para elementos de dos nodos (corresponden a las Ec. 6.12). La elongación del elemento tiene la forma  $\varepsilon = U_i\alpha_i + \psi'_i(V_i\psi'_i) + \frac{1}{2}(V_i\psi'_i)^2$ .

Como la formulación de las Ec.6.23 consiste en un sistema no lineal en las variables  $\mathbf{X} = [U_1, V_1, U_2, V_2]$ , se puede usar el método de Newton-Raphson para resolver el sistema de ecuaciones resultante. Como antes, el método de Newton-Raphson consiste en reescribir el sistema  $\mathbf{P} = f(\mathbf{X})$  de la forma  $G(\mathbf{X}) = \mathbf{P} - f(\mathbf{X})$  y expandir  $G(\mathbf{X})$  mediante una serie de Taylor y considerar que la solución puede aproximarse despreciando los términos de orden superior de la serie:

$$G(\mathbf{X}^\xi) = \mathbf{P} - f(\mathbf{X}^\xi) = 0. \quad (6.24)$$

$$T[G(\mathbf{X}^\xi)] \approx G(\mathbf{X}^\xi) + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X}. \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{X}^\xi)}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} = G(\mathbf{X}^\xi), \quad K(\mathbf{X}^\xi) \Delta \mathbf{X} = G(\mathbf{X}^\xi) \quad \rightarrow \quad \Delta \mathbf{X} = K^{-1}G(\mathbf{X}^\xi) \quad (6.26)$$

Conocido un estado inicial (o previo)  $\mathbf{X}^\xi$  del sistema, es posible aproximar el estado final del sistema  $\mathbf{X}^{\xi+1} = \mathbf{X}^\xi + \Delta \mathbf{X}$  mediante una linealización del sistema de ecuaciones no lineal original. A continuación debe verificarse  $G(\mathbf{X}^{\xi+1}) = \mathbf{G}^{\xi+1} < \xi$ , con el margen de error que se quiera (una forma estándar es usar la norma dos  $\|(\mathbf{G}^{\xi+1})\| < \xi$ ), en caso

contrario, la solución  $X^{\xi+1}$  se usa para iterar el procedimiento hasta tanto  $G^{\xi+1}$  (el residuo) sea menor que un valor dado. Como el problema es geoméricamente no lineal, la matriz tangente  $K$  no es constante (la rigidez linealizada depende de la configuración actual  $X^\xi$ ) y debe calcularse en cada iteración.

$K$  puede calcularse como:

$$K(U_1, V_1, U_2, V_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \frac{\partial f_1}{\partial V_1} & \frac{\partial f_1}{\partial U_2} & \frac{\partial f_1}{\partial V_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial U_1} & \frac{\partial f_2}{\partial V_1} & \frac{\partial f_2}{\partial U_2} & \frac{\partial f_2}{\partial V_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial U_1} & \frac{\partial f_3}{\partial V_1} & \frac{\partial f_3}{\partial U_2} & \frac{\partial f_3}{\partial V_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial U_1} & \frac{\partial f_4}{\partial V_1} & \frac{\partial f_4}{\partial U_2} & \frac{\partial f_4}{\partial V_2} \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

donde  $f_i$  corresponde a la fila  $i$  de  $f(\mathbf{X})$  (Ec. 6.23) y se considera que  $P$  no depende de  $\mathbf{X}$ . La marcha del cálculo para problemas de elementos finitos no lineales usando el procedimiento iterativo de Newton-Raphson es la siguiente:

1. Entrada de datos y constantes del problema (E, A, H, condiciones de borde, cargas, geometría, mallado, etc) así como tolerancias y número máximo de iteraciones admitidas.
2. Armado del sistema de ecuaciones no lineal del elemento  $\hat{f}(\mathbf{X}) = \hat{f}((\hat{*})$  (indica que el argumento corresponde al elemento) y de la matriz tangente del elemento  $\hat{K}(\mathbf{X}) = \hat{K}$ . En este paso, se definen la cantidad de nodos y funciones de interpolación del elemento, para luego construir  $\hat{f}$  y  $\hat{K}$ .
3. Ensamblado del vector solución global del sistema no lineal para los valores  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^\xi$  de la iteración actual (calcular  $\hat{f}^\xi$  y ensamblarlo en el vector global  $f^\xi$ ).
4. Hallar el vector residuo para la iteración actual  $G^\xi = P - f^\xi$ .
5. Ensamblado del sistema linealizado (calcular la matriz  $\hat{K}^\xi$  de cada elemento y ensamblar la matriz global  $K^\xi$ ).
6. Resolver el sistema lineal  $K^\xi \Delta \mathbf{X} = -G^\xi$ .
7. Hallar el valor de  $\mathbf{X}^{\xi+1}$  de la iteración actual como  $\mathbf{X}^{\xi+1} = \mathbf{X}^\xi + \Delta \mathbf{X}$ .

8. Ensamblado del vector solución global del sistema no lineal para  $\mathbf{X}^{\xi+1}$  (calcular  $\hat{\mathbf{f}}^{\xi+1}$  y ensamblarlo en el vector global  $\mathbf{f}^{\xi+1}$ ).
9. Verificar que el residuo es menor que el valor de tolerancia  $\eta$  elegido, a través de la norma dos  $\|\mathbf{P} - \mathbf{f}^{\xi+1}\| = \|\mathbf{G}^{\xi+1}\| < \eta$  y entonces:
  - (a) Si  $\|\mathbf{G}^{\xi+1}\| > \eta$  se establece  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\xi+1}$  y se reinicia el proceso desde el paso 3.
  - (b) Si  $\|\mathbf{G}^{\xi+1}\| < \eta$  entonces  $\mathbf{X}^{\xi+1}$  es la solución del sistema.

### Problemas dinámicos. Métodos de la familia de Newmark.

Dentro de la variedad de opciones disponibles para integrar en el dominio tiempo las ecuaciones resultantes de la formulación de elementos finitos no lineal, en esta instancia se ha resuelto utilizar uno de los métodos más difundidos, estudiados y recomendados en la literatura: el método de Newmark. No se hará énfasis en un estudio pormenorizado de la metodología, porque como antes, se considera que redundaría en la repetición de conceptos larga y profundamente explicados en todos los libros de elementos finitos con aplicación tanto a problemas lineales como no lineales. A tal fin, pueden consultarse tanto las referencias citadas precedentemente como las siguientes: Bathe (1996), Reddy (2006) y Zienkiewicz and Taylor (1965). Se procederá primero a un desarrollo de carácter conceptual, para fundamentar la idea del método y luego se presentará su implementación para problemas de elementos finitos no lineales.

**Ideas detrás de la formulación del método de Newmark.** El método de Newmark puede considerarse una generalización del método de aceleración constante promedio (en términos de mayor generalidad, el método de aceleración constante promedio es un caso particular del método de Newmark) que se usará a continuación para entender el origen de las fórmulas de aplicación del método de Newmark.

Para empezar, se está buscando la solución de una ecuación de la forma:

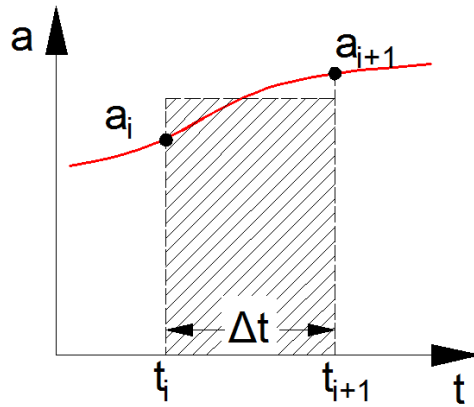
$$m\ddot{d} + c\dot{d} + f(d) = P(t), \quad (6.28)$$

es decir, una ecuación que contiene derivadas segundas en la variable independiente

(en este caso, el tiempo). Donde  $m$  es la masa,  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso y  $f(d)$  es una función, en general no lineal, de la variable dependiente (en este caso los desplazamientos). Para mayor comodidad, se usará  $\dot{d} = v$ ,  $\ddot{d} = a$ .

$$ma + cv + f(d) = P(t), \quad (6.29)$$

El método de aceleración constante promedio, consiste en considerar que la aceleración varía suficientemente poco entre pasos de tiempo como para considerarla constante entre dos instantes de tiempo (Figura 6.8). De esta manera la integral de la aceleración, la velocidad, puede desarrollarse como en la Ec. 6.30.



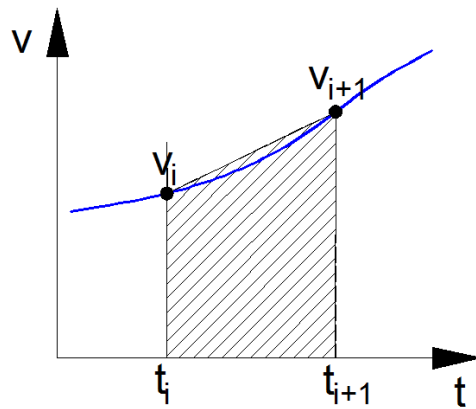
$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} a dt = A_1 \approx \frac{(a_{i+1} + a_i)}{2} \Delta t,$$

$$v_{i+1} = v_i + A_1.$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{\Delta t}{2}(a_{i+1} + a_i). \quad (6.30)$$

**Figura 6.8:** Aproximación de la integral de la aceleración, usando el valor medio.

Considerando la aceleración como constante dentro del intervalo de tiempo, la velocidad deberá responder a una ecuación lineal, por lo que su integral, el desplazamiento, corresponde al área del trapecio  $t_i - v_i - v_{i+1} - t_{i+1}$  de la Figura 6.9. De esta forma, el desplazamiento para un instante de tiempo  $i$  dado, puede aproximarse a través de la Ec. 6.31.



$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} v dt = A_2 \approx \frac{\Delta t}{2} (v_{i+1} + v_i).$$

$$d_{i+1} = d_i + A_2.$$

$$d_{i+1} = d_i + \Delta t v_i + \frac{\Delta t^2}{4} (a_{i+1} + a_i). \quad (6.31)$$

**Figura 6.9:** Aproximación de la integral de la velocidad, usando un trapecio.

Reemplazando las Ec. 6.30 y 6.31 en la 6.29 el sistema diferencial original se convierte en un sistema algebraico cuya única variable es la aceleración  $a_{i+1}$  en el siguiente instante de tiempo, conocidos los valores de  $d_i$ ,  $v_i$  y  $a_i$ :

$$\left( m + c \frac{\Delta t}{2} \right) a_i + G(a_{i+1}; d_i, v_i, a_i) = P(t_i), \quad (6.32)$$

con  $G(a_{i+1}; d_i, v_i, a_i)$  una función en general no lineal con parámetros  $d_i$ ,  $v_i$  y  $a_i$  y variable dependiente  $a_{i+1}$ , que puede resolverse sin problemas.

En el método de Newmark, no se calcula la aceleración constante usando un promedio estándar: se generaliza el problema introduciendo un parámetro  $\gamma$  y considerando un promedio pesado por ese parámetro, con el que se mide la influencia del valor de aceleración del paso de tiempo anterior  $t_i$  sobre los cálculos para el paso de tiempo actual  $t_{i+1}$ . La Ec. 6.30 se reescribe entonces como

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t ((1 - \gamma) a_i + \gamma a_{i+1}). \quad (6.33)$$

Introduciendo ahora la Ec. 6.33 en la 6.31 se tiene

$$d_{i+1} = d_i + \Delta t v_i + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta) a_i + 2\beta a_{i+1}), \quad (6.34)$$

donde  $\beta = \gamma/2$ , pero en la formulación formal del método se mantiene como un parámetro independiente (aunque para lograr estabilidad y convergencia hay ciertas reglas que relacionan  $\beta$  con  $\gamma$ ). Introduciendo ahora las Ec. 6.33 y 6.34 en la 6.29 se

obtiene nuevamente un sistema de la forma de la Ec. 6.32, del cual se resuelve a cada paso de tiempo las aceleraciones  $a_{i+1}$  y luego con las Ec. 6.33 y 6.34 se encuentran las velocidades y desplazamientos respectivamente.

Otra forma de formular el método comúnmente empleada consiste en dejar las aceleraciones y las velocidades en función de los desplazamientos, despejando  $a_{i+1}$  de la Ec. 6.34:

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= \alpha_1(d_{i+1} - d_i) + \alpha_2v_i - \alpha_3a_i, \\ v_{i+1} &= \alpha_4(d_{i+1} - d_i) + \alpha_5v_i + \alpha_6a_i. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}, \quad \alpha_3 = \frac{1-2\beta}{2\beta}, \\ \alpha_4 &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, \quad \alpha_5 = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right), \quad \alpha_6 = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Introduciendo las Ec. 6.35 en la 6.29 se llega al sistema:

$$\begin{aligned} G(d_{i+1}) &= m(\alpha_1(d_{i+1} - d_i) + \alpha_2v_i - \alpha_3a_i) + \\ &+ c(\alpha_4(d_{i+1} - d_i) + \alpha_5v_i + \alpha_6a_i) + \\ &+ f(d_{i+1}) - P_i = 0. \end{aligned} \quad (6.37)$$

La Ec. 6.37 es un sistema algebraico no lineal en la variable dependiente  $d_i$  que puede resolverse, en particular usando el método de Newton-Raphson que se presentó en la sección anterior, desarrollando  $G(d_i)$  en su serie de Taylor y conservando hasta el término lineal de la serie:

$$\begin{aligned} [\alpha_1m + \alpha_4c + K(d_i^\xi)]\Delta d_i^\xi &= -G(d_i^\xi), \\ d_i^{\xi+1} &= d_i^\xi + \Delta d_i^\xi, \end{aligned} \quad (6.38)$$

donde el superíndice  $\xi$  indica la iteración actual, el subíndice  $i$  el paso de tiempo actual y la matriz tangente  $K$  se halla como:

$$K(d_i^\xi) = \frac{\partial G(d_i^\xi)}{\partial d_i}. \quad (6.39)$$

De esta forma queda claro que para problemas dinámicos no lineales, para la inte-



gración en cada paso de tiempo se debe iterar la solución hasta lograr que el residuo sea menor que un valor límite previamente establecido. Luego se calculan las componentes de aceleración y velocidad que producen un desbalance en la ecuación dinámica del paso de tiempo actual respecto al anterior, lo que produce que el problema evolucione con el tiempo (descontando que la carga también puede variar con el tiempo).

**Aplicación a problemas de elementos finitos no lineales.** Las Ec. 6.37 y 6.38 pueden reescribirse en forma vectorial y matricial respectivamente, quedando de la forma:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{X}_i) = & M(\alpha_1(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i) + \alpha_2\dot{\mathbf{X}}_i - \alpha_3\ddot{\mathbf{X}}_i) + \\ & + C(\alpha_4(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i) + \alpha_5\dot{\mathbf{X}}_i + \alpha_6\ddot{\mathbf{X}}_{i-1}) + \\ & + f(\mathbf{X}_{i+1}) - \mathbf{P}_i = 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} [\alpha_1 M_e + \alpha_4 C_e + K(\mathbf{X}_i^\xi)] \Delta \mathbf{X}_i^\xi &= -G(\mathbf{X}_i^\xi), \\ \mathbf{X}_i^{\xi+1} &= \mathbf{X}_i^\xi + \Delta \mathbf{X}_i^\xi, \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}_{t+1} &= \alpha_1(\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_t) + \alpha_2\dot{\mathbf{X}}_t - \alpha_3\ddot{\mathbf{X}}_t, \\ \dot{\mathbf{X}}_{t+1} &= \alpha_4(\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_t) + \alpha_5\dot{\mathbf{X}}_t + \alpha_6\ddot{\mathbf{X}}_t. \end{aligned} \quad (6.42)$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$  son los mismos indicados en las Ec. 6.36, y para un elemento en el plano de dos nodos  $\mathbf{X} = (U_1, V_1, U_2, V_2)^T$ ,  $f(\mathbf{X})$  responde a la Ec.6.23, y como antes  $(\dot{*}) = d(*)/dt$ .  $M_e$  es la matriz de masa y  $C_e$  es la matriz de amortiguamiento de los elementos (que para las formulaciones de esta tesis no dependen de  $U$  ni de  $t$  y por lo tanto son constantes). La marcha del cálculo para problemas de elementos finitos no lineales usando el integrador de Newmark combinado con el proceso iterativo de Newton-Raphson es la siguiente:

1. Entrada de datos y constantes del problema (E, A, H, condiciones de borde, cargas, geometría, mallado, etc).
2. Entrada de los parámetros del integrador  $\gamma$  y  $\beta$ , así como tolerancias y número máximo de iteraciones admitidas y cálculo de los parámetros  $\alpha_i$  de la Ec. 6.36.
3. Armado del sistema de ecuaciones no lineal del elemento  $\hat{G}(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{G}}$  (Ec. 6.40) ( $(\hat{*})$  indica que el argumento corresponde al elemento), la matriz tangente del

elemento  $\hat{K}(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{K}}$  (Ec. 6.41) y las matrices  $\hat{M}$  y  $\hat{C}$ .

4. Para cada paso de tiempo:

- (a) Ensamblado del vector solución global del sistema no lineal para los valores iniciales  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_t^\xi$  (calcular  $\hat{\mathbf{G}}_t^\xi$  y ensamblarlo en el vector global  $\mathbf{G}_t^\xi$ ).
- (b) Ensamblado del sistema linealizado (calcular la matriz  $\hat{\mathbf{K}}_t^\xi$  de cada elemento y construcción la matriz elemental  $\hat{\mathbf{S}}_t^\xi = \alpha_1 \hat{M} + \alpha_4 \hat{C} + \hat{\mathbf{K}}_t^\xi$  y luego ensamblado en la matriz global  $\mathbf{S}_t^\xi$ ).
- (c) Resolver el sistema lineal  $\mathbf{S}_t^\xi \Delta \mathbf{X} = \mathbf{G}_t^\xi$ .
- (d) Hallar el valor de  $\mathbf{X}_t^{\xi+1}$  de la iteración actual como  $\mathbf{X}_t^{\xi+1} = \mathbf{X}_t^\xi + \Delta \mathbf{X}$ .
- (e) Ensamblado del vector solución global del sistema no lineal para  $\mathbf{X}_t^{\xi+1}$  (calcular  $\hat{\mathbf{G}}_t^{\xi+1}$  y ensamblarlo en el vector global  $\mathbf{G}_t^{\xi+1}$ ).
- (f) Verificar que el residuo es menor que el valor de tolerancia  $\eta$  elegido:
  - i. Si  $\|\mathbf{G}_t^{\xi+1}\| > \eta$  se reinicia el proceso desde el paso 4a con  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_t^{\xi+1}$
  - ii. Si  $\|\mathbf{G}_t^{\xi+1}\| < \eta$  entonces  $\mathbf{X}_t^{\xi+1} = \mathbf{X}_{t+1}$  es la solución del sistema para el paso de tiempo actual. Una vez lograda la convergencia de los desplazamientos, se calculan las componentes de aceleración y velocidad con las Ec. 6.42 y se reinicia el procedimiento para el siguiente paso de tiempo.

### 6.2.5 Verificación del modelo.

#### Comportamiento estático.

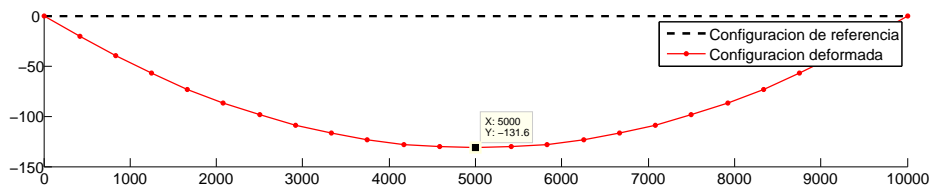
Para verificar el comportamiento estático del modelo de elementos finitos presentado, se utiliza como referencia el trabajo de Ozdemir Haluk (1978), donde se hace un desarrollo de elementos finitos para elementos cable el cual incorpora la interpolación independiente de la longitud de arco, que permite evitar que los movimientos de los nodos que no generan deformaciones en el cable induzcan componentes de tensión. El problema consiste en un cable horizontal de 10000 pulgadas de longitud sometido a su propio peso. La configuración de referencia, así también como la configuración inicial

L	E	A	$\rho$	H	q	n <sub>elementos</sub>
10000	$20e^6$	0.065	$7.96e^{-4}$	$20e^3$	0.02	12
pulg	lb/pulg <sup>2</sup>	pulg <sup>2</sup>	lb.s/pulg <sup>4</sup>	lb/pulg <sup>2</sup>	lb/pulg	

**Tabla 6.1:** Valores de para verificación de elementos cable (Haluk, 1978).

se consideran rectas. Los datos del problema tomado como referencia se detallan en la Tabla 6.1.

Usando 12 elementos de tres nodos, el desplazamiento en el centro de la luz, de 131.6 pulgadas (Fig. 6.10) coincide exactamente con el valor reportado en el artículo. Otras pruebas permitieron observar que se requieren como mínimo 4 elementos de tres nodos o 18 elementos de dos nodos para obtener el valor de desplazamiento máximo en forma exacta.

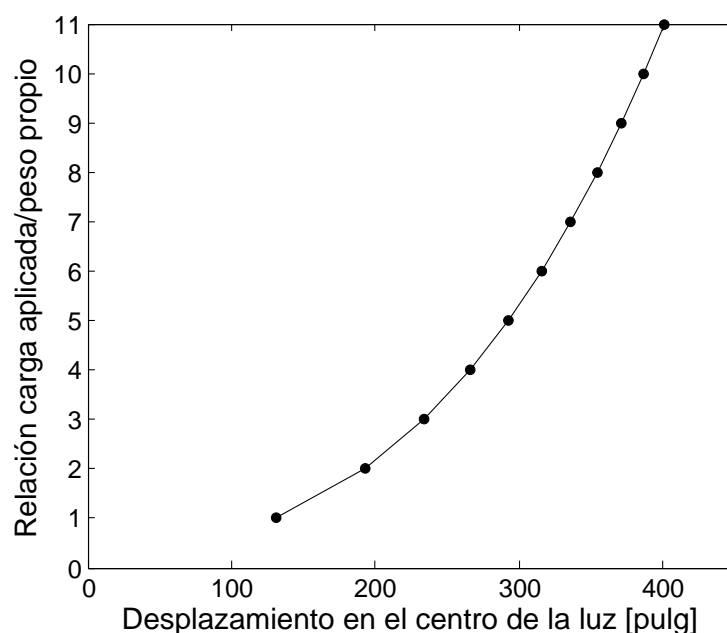


**Figura 6.10:** Resultado de estudio estático de cables de tres nodos

En la Figura 6.11 se muestra el resultado de un estudio adicional, variando el valor de la carga distribuida sobre el cable. El resultado no puede ser comparado cuantitativamente porque en el artículo de referencia no se ofrece la tabla de valores. De todas maneras, cualitativamente (y cuantitativamente, dentro de las posibilidades que el gráfico publicado ofrece para medir los resultados) la reproducción del comportamiento con el modelo de elementos finitos planteado es muy precisa. Por otra parte, la Fig. 6.11 permite observar el comportamiento no lineal de la formulación.

**Comportamiento dinámico.**

El comportamiento dinámico del modelo de elementos finitos no lineal y el integrador de Newmark ad hoc programado para estos desarrollos, se verificó realizando una comparativa de resultados, con los obtenidos con FlexPDE (SoilVision Systems Ltd., 2015). El modelo usado para contrastar los resultados es un cable inicialmente horizontal, que se deja deformar bajo su propio peso. A continuación una carga distribuida es aplicada en forma súbita y se mantiene. Los estudios tuvieron una duración



**Figura 6.11:** Desplazamientos en el centro de la luz del cable, para distintos valores de carga distribuida.

de 1 s, tiempo suficiente para observar el desarrollo de varios ciclos de vibración. Las constantes usadas para los experimentos se listan en la Tabla 6.2.

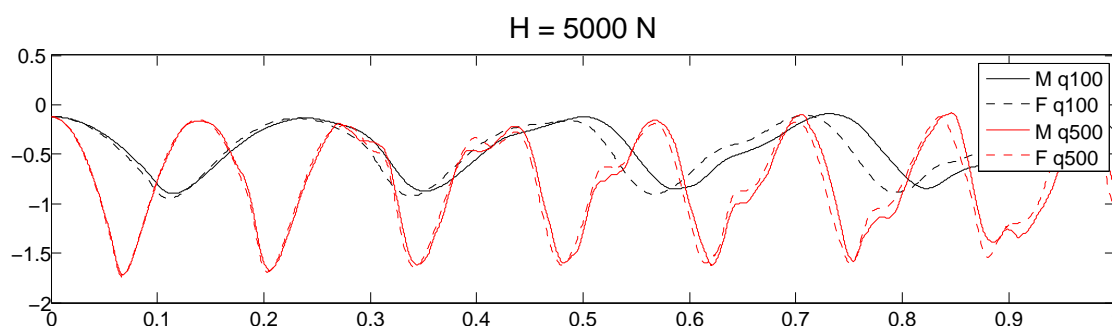
En Figuras 6.12 y 6.13 se presentan comparativas entre los resultados obtenidos en los programas desarrollados en para esta tesis y los resultados del software FlexPDE. En ambas figuras puede observarse que la forma y amplitud de vibración se reproduce correctamente. En la Figura 6.12 se observa que el integrador programado elonga el periodo, respecto de los resultados de FlexPDE, para frecuencias de vibración bajas. Este comportamiento es esperable de un integrador de Newmark sin optimizaciones y se encuentra dentro de límites razonables y reportados en la literatura (manteniendo el paso de tiempo dentro de límites razonablemente pequeños respecto del periodo de vibración, como en cualquier método implícito condicionalmente estable), por ejemplo en Zienkiewicz and Taylor (1965) y Bathe (1996).

La tendencia a la elongación del período se reduce al aumentar la carga y/o la tensión inicial, como se puede ver en la Figura 6.13. Una desventaja del algoritmo implementado es que, al no estar optimizado, debe darse un paso relativamente pequeño, respecto del paso de tiempo promedio de FlexPDE (que optimiza el paso de tiempo), lo que

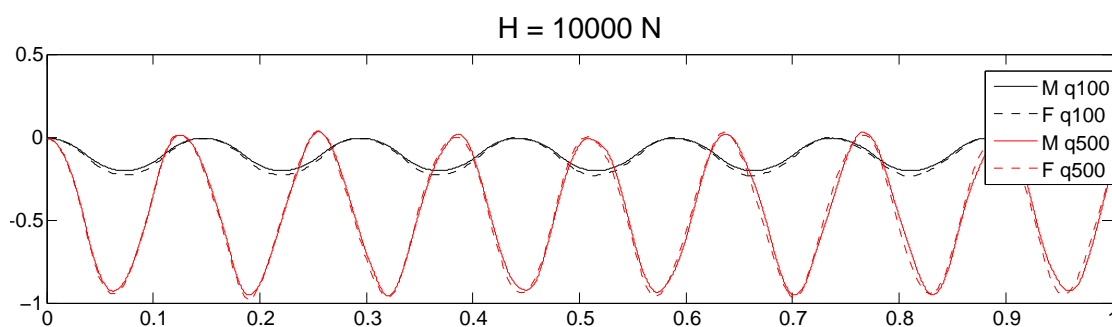
L	E	A	m	H	q	n <sub>elementos</sub>
30	210	$7.85e^{-5}$	7850	1000-100000	100-500	12
m	GPa	m <sup>2</sup>	kg/m <sup>3</sup>	N	N/m	

**Tabla 6.2:** Valores usados para verificación de la respuesta dinámica del modelo de cables e integrador propuestos.

implica que el tiempo de cálculo se ve comprometido para lograr buenos resultados. El tiempo de cómputo de los algoritmos usados fue de aproximadamente dos minutos, para todos los casos analizados, mientras que FlexPDE resolvió los problemas en unos diez segundos.



**Figura 6.12:** Verificación de comportamiento dinámico de modelo FEM no lineal de cables con una tensión inicial de 5000 N. Referencias: M=Modelo desarrollado en esta tesis; F=solución de FlexPDE; q100 = modelo con sobrecarga de 100 N; q500 = modelo con sobrecarga de 500 N.



**Figura 6.13:** Verificación de comportamiento dinámico de modelo FEM no lineal de cables con una tensión inicial de 10000 N. Referencias: M=Modelo desarrollado en esta tesis; F=solución de FlexPDE; q100 = modelo con sobrecarga de 100 N; q500 = modelo con sobrecarga de 500 N.

## 6.3 Programa adhoc para el cálculo de estructuras arriostradas por medio de elementos finitos.

### 6.3.1 Elementos viga 3D.

Para modelar el mástil, se usan elementos tipo "frame". La deducción de su formulación (que se repite en las Ec. 6.43) puede encontrarse en cualquier libro de elementos finitos como por ejemplo en Reddy (2006), Bathe (1996) o Zienkiewicz and Taylor (1965), por lo que no se repetirá aquí para no exceder redundantemente la longitud de esta tesis. Los corrimientos  $u$  y los giros  $\theta$  en la dirección  $\hat{i}$  se aproximan usando funciones de interpolación lineales, mientras que para los desplazamientos  $v$  y  $w$  se usan polinomios de Hermite.

$$\begin{aligned}\hat{i} : m\ddot{u} - EAu'' &= p; \quad GI_x\theta'' + M_t = 0, \\ \hat{j} : m\ddot{v} + EI_zv'''' - Nv'' &= q_v, \\ \hat{w} : m\ddot{w} + EI_yw'''' - Nw'' &= q_w.\end{aligned}\tag{6.43}$$

La matriz de rigidez de elementos frame en tres dimensiones se indica en la Ec. 6.44, mientras que la matriz que debe adicionarse para tener en cuenta el efecto de 2do orden se indica en la Ec. 6.45.  $E$  corresponde al módulo de elasticidad,  $A$  al área de la viga,  $I_z$  e  $I_y$  son los momentos de segundo orden en las dos direcciones transversales al eje de la viga y  $I_x$  es el momento polar de inercia.  $m$  es la masa de la viga y  $N$  es el esfuerzo en normal en la viga.  $q_z$ ,  $q_y$  y  $p$  son cargas distribuidas en las direcciones transversales y axial respectivamente y  $M_t$  es el momento torsor distribuido, con eje en la dirección  $\hat{i}$ .

$$K = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & b_z & 0 & 0 & 0 & -c_z & 0 & -b_z & 0 & 0 & 0 & c_z \\ & & b_y & 0 & c_y & 0 & 0 & 0 & -b_y & 0 & -c_y & 0 \\ & & & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 & 0 \\ & & & & e_y & 0 & 0 & 0 & f_y & 0 & g_y & 0 \\ & & & & & e_z & 0 & -f_z & 0 & 0 & 0 & g_z \\ & & & & & & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & b_z & 0 & 0 & 0 & -c_z \\ & & & & & & & & b_y & 0 & c_y & 0 \\ & & & \text{Sim.} & & & & & & d & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & e_y & 0 \\ & & & & & & & & & & & e_z \end{pmatrix}, \quad (6.44)$$

con  $a = \frac{EA}{h}$ ,  $b_z = \frac{12EI_z}{h^3}$ ,  $c_z = \frac{6EI_z}{h^2}$ ,  $b_y = \frac{12EI_y}{h^3}$ ,  $c_y = \frac{6EI_y}{h^2}$ ,  $d = \frac{GJ}{h}$ ,  $e_y = \frac{4EI_y}{h}$ ,  $f_y = \frac{6EI_y}{h^2}$ ,  $g_y = \frac{2EI_y}{h}$ ,  $e_z = \frac{4EI_z}{h}$ ,  $f_z = \frac{6EI_z}{h^2}$ ,  $g_z = \frac{2EI_z}{h}$ , y siendo  $h$  la longitud del elemento.

$$\frac{N}{10h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & -h & 0 \\ & 12 & 0 & -h & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & -h & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{4h^2}{3} & 0 & 0 & 0 & h & -\frac{h^2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4h^2}{3} & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{3} & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 12 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \\ & & & & & & & 12 & 0 & h & 0 & 0 \\ & & & \text{Sim.} & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{4h^2}{3} \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

### 6.3.2 Mallado.

El mallado es una disciplina en sí misma dentro de la formulación de problemas en elementos finitos. Para simplificar la tarea de mallado, se programó un set de scripts ad hoc para lograr la interacción del programa GiD (CIMNE, 2015), que permite realizar el mallado por medio de una interfaz gráfica, con MATLAB. Los scripts se anexan a este capítulo. Dentro de GiD, se definirá la geometría del mástil, las condiciones de borde y se realizará el mallado. A continuación se exporta el archivo de cálculo, que contendrá la numeración y coordenadas de los nodos, numeración y conectividades de los elementos y condiciones de borde, la clasificación del tipo de elemento y la individualización de cada una de las partes correspondientes.

### 6.3.3 Algoritmos de ensamblado.

A partir de los datos de mallado obtenidos de GiD, se construyen las matrices (ejemplos de cada una de ellas se proveen en el desarrollo de la aplicación que se presenta en el siguiente apartado):

- **NodDof**, que contiene la numeración (global) de los grados de libertad (GL) asignados a cada nodo. Para esto, primero se establece si el nodo pertenece a elementos viga o cable. En el caso de ser un nodo de un elemento tipo viga, se le asignan correlativamente números para los seis GL (correspondiendo los tres primeros a los desplazamientos y los siguientes, a los giros); en caso de ser un nodo de un elemento cable (exclusivamente, si el nodo es compartido por cables y vigas, se le consideran los seis GL del elemento viga) se le asignan los tres GL de los desplazamientos y se deja en cero los GL correspondientes a los giros. De esta forma se tendrá una matriz de seis filas (correspondientes a cada GL) y tantas columnas como nodos.
- **IEN**, que contiene los GL asignados a cada elemento. Se elabora a partir de la matriz **EINod** que proviene de GiD y contiene los nodos asignados a cada elemento y la matriz **NodDof**. Se logra entonces una matriz de doce filas y tantas columnas como elementos.



Para el ensamblado de los vectores de fuerzas externas, fuerzas internas, residuo y matrices de rigidez en el sistema global, se implementó la metodología propuesta en Hughes (1987), que consiste en la construcción de la matriz **LM** (*location matrix*). El método consiste básicamente en reenumerar los grados de libertad asignados a cada elemento, asignando los últimos números a los grados de libertad restringidos, de manera de poder eliminar los GL restringidos fácilmente. La matriz LM es similar a la matriz IEN en el sentido de que contiene todas las conectividades entre los GL de cada nodo de cada elemento, pero la numeración de los GL ha sido alterada para simplificar la construcción de las matrices globales.

### 6.3.4 Ejemplo de aplicación.

A continuación se desarrolla un ejemplo sencillo para demostrar el funcionamiento del programa implementado para resolver estructuras arriostradas. Se explicarán los pasos necesarios para describir la geometría mediante GiD, se mostrarán las matrices que devuelve GiD y las que se construye con Matlab para lograr el ensamblado del problema. Luego se mostrarán algunos resultados. Para lograr un cálculo, el usuario debe describir la geometría en GiD y luego completar los datos del problema, del integrador y las cargas en un script de Matlab. Al ejecutar dicho script, se construyen todas las matrices necesarias para realizar el ensamblado, se realiza un análisis estático previo, para establecer una configuración de equilibrio estática y luego se procede al cálculo dinámico, si corresponde.

El ejemplo a analizar, consiste en un mástil arriostrado de 20 m de altura, con un nivel de tres riendas ancladas en el extremo superior de la columna y con sus bases distribuidas radialmente a  $120^\circ$  y a 10 m de distancia de la base de la columna. Se aplicará, además del peso propio de los elementos estructurales, una carga dinámica, uniformemente distribuida sobre el mástil de 200 N/m de amplitud, en la dirección  $x$  y variando temporalmente según la función  $f = 0.5\cos(0.2\pi t) + 1.2$ . Una descripción gráfica del mástil a estudiar y las coordenadas de los nodos se presentan en la Fig. 6.14. Las propiedades necesarias para introducir al programa se listan en la Tabla 6.3. La tolerancia admisible es 0.01m y se admiten como máximo 5 iteraciones.

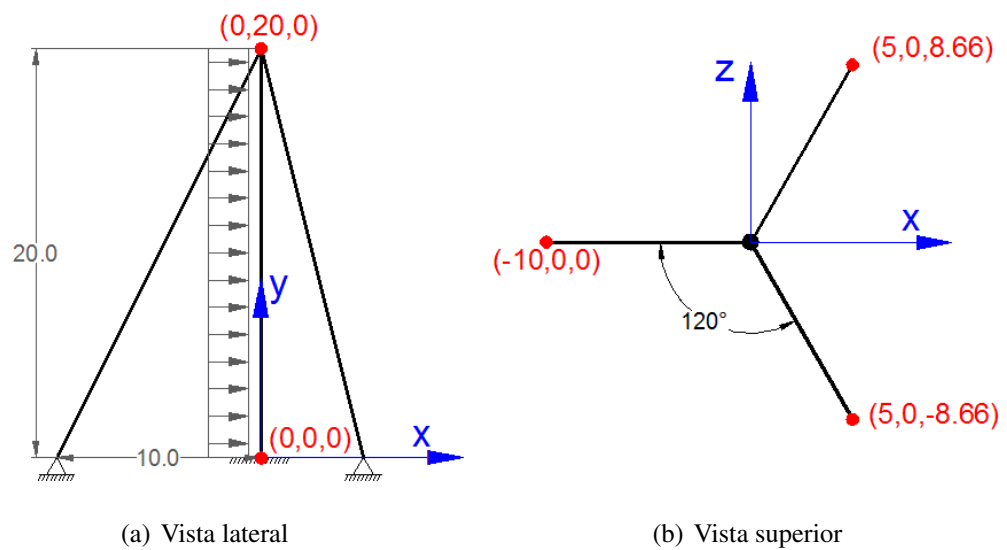


Figura 6.14: Detalle de mástil arriostrado para ejemplificar uso del programa FEM ad hoc.

E	$I_z$	$I_y$	$I_x$	$A_b$	$A_c$	H	$\gamma$	$\beta$
210	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$7.85 \cdot 10^{-5}$	3000	0.5	0.25
GPa	$m^4$	$m^4$	$m^4$	$m^2$	$m^2$	N		

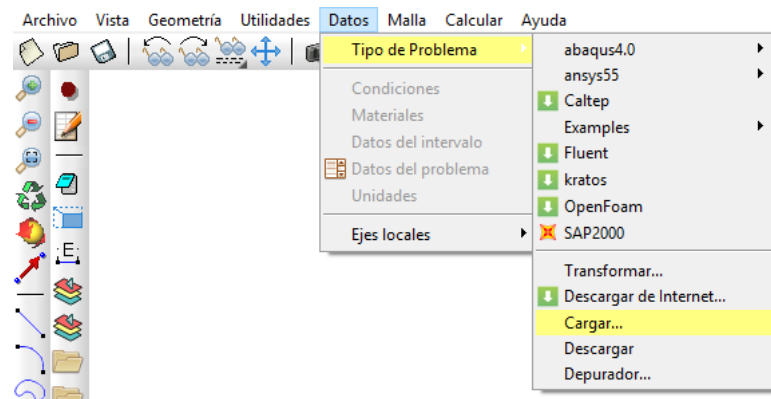
Tabla 6.3: Parámetros para ejemplo de aplicación de programa FEM

### Geometría con GiD.

Se eligió GiD por tratarse de un software con una interfaz de usuario simple y porque cuenta con una versión gratuita, que resulta más que suficiente para los fines para los que se lo utilizará. La única limitación que presenta es que no admite elementos con distinta cantidad de nodos, por lo que los elementos cable deben formularse con funciones de aproximación lineales.

El primer paso, luego de iniciado el programa es cargar el *Tipo de Problema*, lo que se realiza ingresando en el menú: Datos/Tipo de Problema/Cargar... (ver Fig. 6.15). Como se ha anticipado, para que los resultados extraídos de GiD puedan ser procesados en Matlab, se debe programar un *Tipo de Problema*, en lenguaje TCL, y para esta tesis se ha construido uno ad hoc, que se adjunta en el anexo.

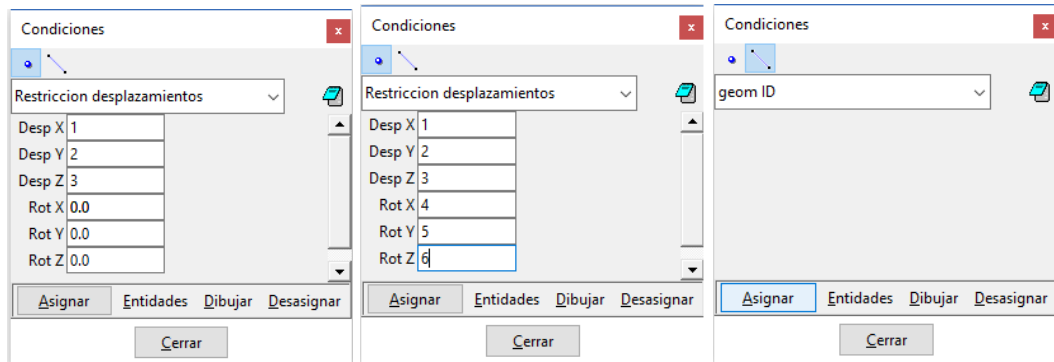
Luego seleccionado el tipo de problema, se "dibuja" el mástil arriostrado con la herramienta *línea*. Los puntos inicial y final de cada línea se introducen por medio de coordenadas. Se sugiere que si una línea empieza o termina en un punto que ya ha sido



**Figura 6.15:** Definición de tipo de problema en GiD.

creado, se utilice la herramienta "juntar" (Ctrl+a ó clic derecho/contextual/juntar) para vincular la nueva línea con el punto existente, para evitar que se creen dos nodos en el mismo punto. Las coordenadas de los cinco puntos necesarios para definir la columna y los tres cables pueden verse en la Fig. 6.14. A continuación, se asignan las condiciones de borde. Para esto se accede en Datos/Condiciones. En el menú que se despliega, se deben completar con el número correspondiente al grado de libertad que se quiere restringir y dejar en cero los demás, ejemplos para la condición de nudo articulado y nudo empotrado se muestran en la Fig. 6.16. Una vez determinado el tipo de condición, se asignan los nodos a los cuales se desea aplicar las condiciones y se termina con la tecla ESC. Como puede verse en las Fig. 6.16, debajo del título del cuadro hay dos botones, uno indicando puntos y otro indicado líneas, siendo el botón de puntos el activo por defecto. A continuación, se hace clic en el botón que indica línea y se notará que el campo que antes indicaba "Restriccion desplazamientos" ahora se lee "geom ID". A continuación deben seleccionarse todas las líneas creadas y aplicar esta condición. La condición "geom ID" permite que durante el mallado, se identifiquen qué elementos pertenecen a cada línea (cada línea representa una parte discreta del modelo), lo cual resulta fundamental para posteriormente poder realizar gráficos, análisis de esfuerzos, etc.

Luego se asignarán los materiales. Para hacerlo se accede a Datos/Materiales, y se desplegará un cuadro de diálogo como el indicado en la Fig. 6.17. Se han programado varias instancias de aceros para cables y para el mástil. En esta instancia también pueden ingresarse las propiedades más importantes para cada tipo de elemento. (pueden ingre-



(a) Condiciones para nodo articulado. (b) Condiciones para nodo empotrado. (c) Condición geom ID usada para identificar los elementos pertenecientes a cada parte del problema.

**Figura 6.16:** Cuadro de diálogo para indicar condiciones de borde.

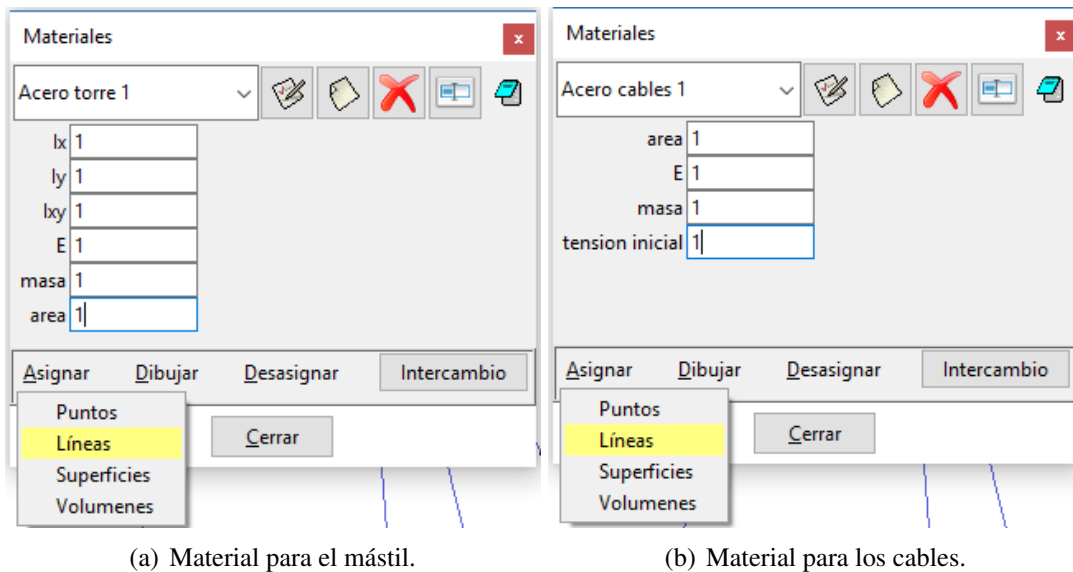
sarse por ejemplo cables con distintos diámetros o pretensiones, etc.). En la etapa de desarrollo en la que se encuentra el programa, estos datos aún no se usan. De todas maneras es importante asignar los materiales (primero a la viga y a continuación a los cables), ya que el tipo de material es incorporado a la información de mallado que se extrae de GiD y permite que el programa de Matlab interprete la cantidad de GL que le corresponde a cada uno (viga(6) o cable(3)). Para asignar los materiales, dentro del cuadro de diálogo se selecciona Asignar/Líneas y se seleccionan las líneas correspondientes a la viga, luego se da ESC, se selecciona el material Acero Cables y se repite el procedimiento, seleccionando ahora las líneas correspondientes a los cables.

A continuación se genera la malla. Para esto se accede al menú Malla/Generar Malla. En este caso se asignó un tamaño de elemento de 1 m. En la Fig. 6.18(b) se muestra el resultado del mallado. Si los números de nodos y elementos no se muestran, se pueden activar yendo primero a Vista/Modo/Malla y luego a Vista/Etiquetas/Todo.

Solo resta exportar la información generada. Para eso se accede a Archivo/Exportar/Archivo de Cálculo y guardar el archivo generado en la misma carpeta donde se almacenan los scripts de Matlab y con extensión ".m" (nombre\_archivo.m).

El archivo generado, para este problema contiene las siguientes matrices de datos:

1) La matriz **EINod** que asigna la numeración a los elementos, determina el tipo de elemento, la parte a la cual los elementos están asociados y los nodos de cada elemento.



(a) Material para el mástil.

(b) Material para los cables.

**Figura 6.17:** Cuadro de diálogo de asignación de materiales.

$$\mathbf{ElNod} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 21 & 22 & \dots & 58 & 59 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & \dots \\ 11 & 12 & 14 & \dots & 87 & 83 & \dots & 30 & 33 & \dots \\ 12 & 14 & 15 & \dots & 83 & 77 & \dots & 33 & 37 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 2 & \dots & 3 & 3 & \dots \end{pmatrix}^T$$

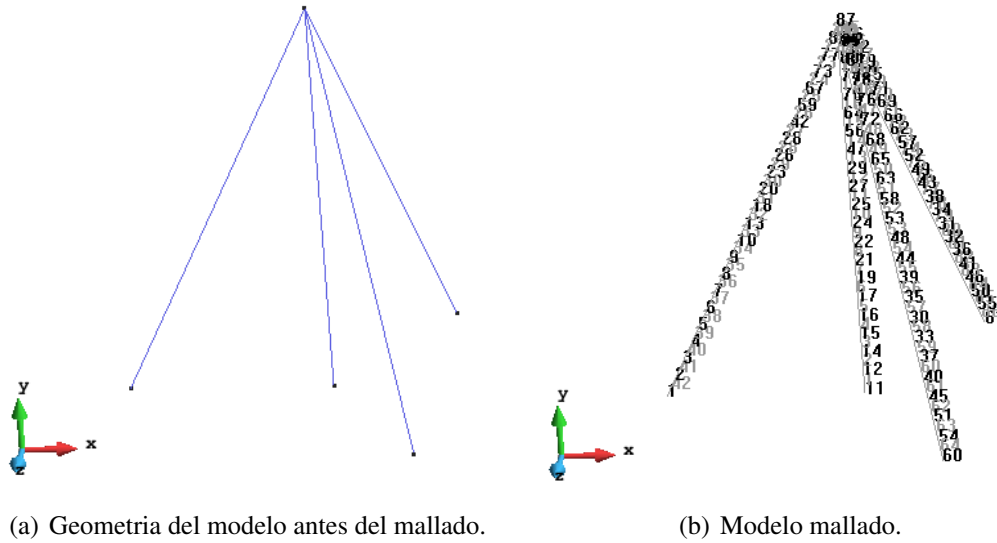
$\leftarrow$  N° de elemento  
 $\leftarrow$  Tipo de elemento  
 $\leftarrow$  Nodo 1  
 $\leftarrow$  Nodo 2  
 $\leftarrow$  N° de Parte

2) La matriz **Coord**, que indica las coordenadas (en el sistema global) de cada nodo. El numero de la columna corresponde al numero del nodo (por ejemplo, la columna 45 presenta las coordenadas del nodo nro. 45).

$$\mathbf{Coord} = \begin{pmatrix} -10 & -9.54 & -9.09 & -8.63 & \dots \\ 0 & 0.91 & 1.82 & 2.73 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$  Coord x global del nodo  
 $\leftarrow$  Coord y global del nodo  
 $\leftarrow$  Coord z global del nodo

3) La matriz **cbi**, que contiene los nodos restringidos (en su primera columna) y qué grados de libertad son restrictos (en las siguientes seis columnas). Los grados de



**Figura 6.18:** Geometría de modelo de mástil arriostrado en GiD y resultado de mallado.

libertad se indican en forma local (es decir con una numeración del uno al seis). En el proceso posterior se obtienen los GL restringidos del sistema global. Esto se realiza de esta manera porque, en esta instancia, los GL globales aún no han sido numerados.

$$\mathbf{c}_{bi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 60 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 61 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejecución del programa de elementos finitos.**

Antes de iniciar el cálculo, deben ingresarse otros datos al programa. Para esto, debe accederse al archivo DATA.m, que sirve para ejecutar el programa de cálculo y donde además se deben ingresar los parámetros del problema: módulo de elasticidad de los distintos componentes, secciones transversales, momentos de segundo orden, tensiones iniciales, densidad de los materiales, etc. Además se debe ingresar el tiempo total de cálculo (para estudios dinámicos), el paso de tiempo, el máximo número de iteraciones y la tolerancia admisible, los parámetros  $\gamma$  y  $\beta$  para el integrador de Newmark y las cargas (de peso propio y adicionales) además de su ley de variación si son dinámicas. También pueden introducirse vectores de deformadas, velocidades y aceleraciones ini-

ciales, que en caso de no especificarse, se inicializan en cero. En la celda "MALLADO GiD-MATLAB" debe introducirse (sin extensión) el nombre del archivo de salida que se solicitó a GiD. El programa por defecto hace un análisis estático con las cargas de peso propio para determinar la configuración de equilibrio inicial y a continuación realiza el análisis dinámico correspondiente. Al ejecutar el script DATA.m, el programa primero solicita que el usuario indique el tipo de análisis (estático o dinámico), luego carga los datos introducidos y llama al archivo de datos de GiD y al script "mallado.m", que completa el procedimiento de mallado, creando las matrices NodDof (donde cada columna contiene los GL globales asignados a cada nodo), IEN (donde cada columna contiene los GL globales de cada elemento), ID (que es un vector con los GL globales reenumerados de manera que los GL restringidos tengan los últimos números) y LM (que tiene el mismo significado que la matriz IEN, pero con la numeración modificada del vector ID), necesarias para el ensamblado.

$$\mathbf{NodDof} = \begin{pmatrix} 157 & 160 & \dots & 139 & 472 & \dots \\ 158 & 161 & \dots & 140 & 473 & \dots \\ 159 & 162 & \dots & 141 & 474 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 142 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 143 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 144 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Despl. en la dirección x global} \\ \leftarrow \text{Despl. en la dirección y global} \\ \leftarrow \text{Despl. en la dirección z global} \\ \leftarrow \text{Rot. en la dirección x global} \\ \leftarrow \text{Rot. en la dirección y global} \\ \leftarrow \text{Rot. en la dirección z global} \end{array}$$

$$\mathbf{IEN} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & \dots & 433 & 424 & \dots \\ 2 & 8 & \dots & 434 & 425 & \dots \\ 3 & 9 & \dots & 435 & 426 & \dots \\ 4 & 10 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 5 & 11 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 6 & 12 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 7 & 13 & \dots & 424 & 418 & \dots \\ 8 & 14 & \dots & 425 & 419 & \dots \\ 9 & 15 & \dots & 426 & 420 & \dots \\ 10 & 16 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 11 & 17 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 12 & 18 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Despl. en x (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Despl. en y (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Despl. en z (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Rot. en x (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Rot. en y (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Rot. en z (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Despl. en x (global) del nodo 2} \\ \leftarrow \text{Despl. en y (global) del nodo 2} \\ \leftarrow \text{Despl. en z (global) del nodo 2} \\ \leftarrow \text{Rot. en x (global) del nodo 2} \\ \leftarrow \text{Rot. en y (global) del nodo 2} \\ \leftarrow \text{Rot. en z (global) del nodo 2} \end{array}$$

$$\mathbf{LM} = \begin{pmatrix} 487 & 1 & \dots & 400 & 355 & \dots \\ 488 & 2 & \dots & 401 & 356 & \dots \\ 489 & 3 & \dots & 402 & 357 & \dots \\ 490 & 4 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 491 & 5 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 492 & 6 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 7 & \dots & 355 & 349 & \dots \\ 2 & 8 & \dots & 356 & 350 & \dots \\ 3 & 9 & \dots & 357 & 351 & \dots \\ 4 & 10 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 5 & 11 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 6 & 12 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Despl. en x (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Despl. en y (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Despl. en z (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Rot. en x (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Rot. en y (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Rot. en z (global) del nodo 1} \\ \leftarrow \text{Despl. en x (global) del nodo 2} \\ \leftarrow \text{Despl. en y (global) del nodo 2} \\ \leftarrow \text{Despl. en z (global) del nodo 2} \\ \leftarrow \text{Rot. en x (global) del nodo 2} \\ \leftarrow \text{Rot. en y (global) del nodo 2} \\ \leftarrow \text{Rot. en z (global) del nodo 2} \end{array}$$

Como antes, aquellos nodos/elementos que tengan GL con numeración en cero corresponden a elementos tipo cable (no tienen GL asignados a las rotaciones). Una vez finalizada la ejecución del script "mallado.m", ya se cuenta con todas los datos necesarios para hacer el ensamblado de las matrices globales de elementos finitos y resolver los



'Nodo'	'Rx'	'Ry'	'Rz'	'Mx'	'My'	'Mz'
[ 1]	[-1.1012e+03]	[-2.0963e+03]	[ 61.0000]	[ 0]	[ 0]	[ 0]
[ 11]	[-2.4049e+03]	[ 3.2996e+03]	[ 61.0000]	[-1.1012e+03]	[ 0]	[1.0327e+04]
[ 60]	[ -174.9474]	[ 864.6406]	[-259.7265]	[ 0]	[ 0]	[ 0]
[ 61]	[ -174.9474]	[ 864.6406]	[ 381.7265]	[ 0]	[ 0]	[ 0]

**Figura 6.19:** Reacciones de vínculo obtenidas de la solución del problema estático.

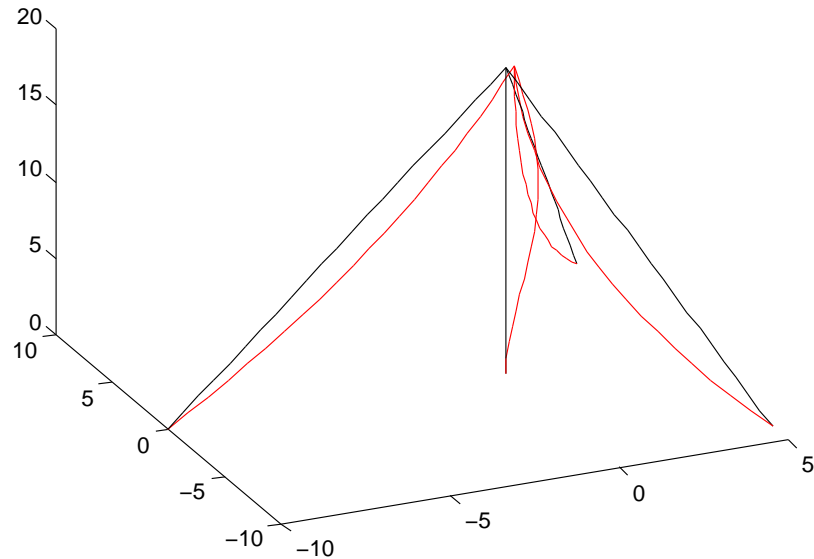
problemas estático y/o dinámico, según corresponda. La rutina para iniciar el cálculo está incluida en el archivo DATA.m por lo que, al ejecutarlo, éste computa todas las matrices antes descritas y a continuación inicia los algoritmos de resolución, usando el método iterativo de Newton-Raphson y el integrador de Newmark.

## Resultados.

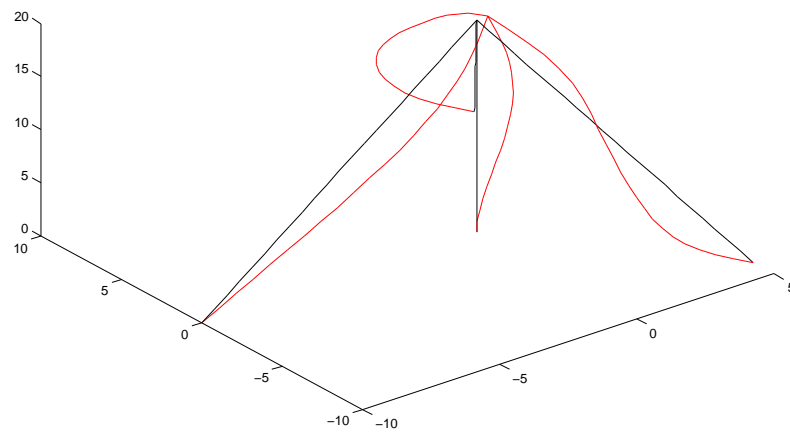
**Análisis estáticos.** A continuación se mostrarán algunos ejemplos de los resultados que pueden ser obtenidos con el software desarrollado. Primero se ejecuta un análisis estático, con todos los elementos sometidos a su propio peso y con una sobrecarga uniformemente distribuida de 200 N/m aplicada sobre la columna, en la dirección global x. Al finalizar la ejecución, el programa muestra las reacciones de vínculo en la ventana de comando (ver Fig. 6.19). Debe tenerse en cuenta que las reacciones de vínculo de cables no tienen en cuenta la tensión inicial H.

Luego se despliega una imagen de la deformada, ampliada con un factor de escala de 30 que se presenta en la Fig. 6.20. Y por último, el programa crea los archivos "Desplazamientos.xls", "Esfuerzos.xls" y "Reacciones.xls", donde se almacena la información acerca de los desplazamientos y esfuerzos internos de los elementos del mástil arriostrado y también el archivo "Reacciones.xls" que contiene la tabla de la Fig. 6.19. Estos tres archivos de excel sintetizan la información necesaria para realizar cálculos o verificaciones de mástiles arriostrados. El tiempo total invertido en el cálculo y creación de los archivos de datos es del orden de los 4 s.

**Análisis dinámicos.** Para este estudio se considera que la sobrecarga de 200 N/m aplicada en el estudio estático ahora tiene una variación de temporal dada por la función  $f = 0.5\cos(0.2\pi t) + 1.2$ . El tiempo total de cálculo se fija en 5 s, mientras que el paso de tiempo es 1/200 s. Para este estudio, el programa, por defecto, primero determina la configuración de equilibrio estática y luego procede a realizar el cálculo dinámico.



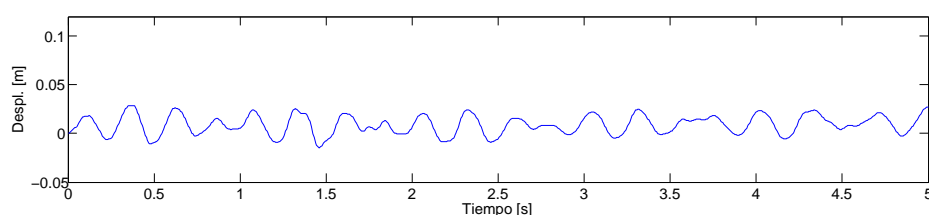
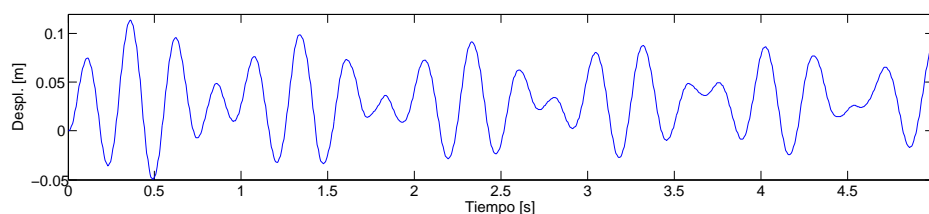
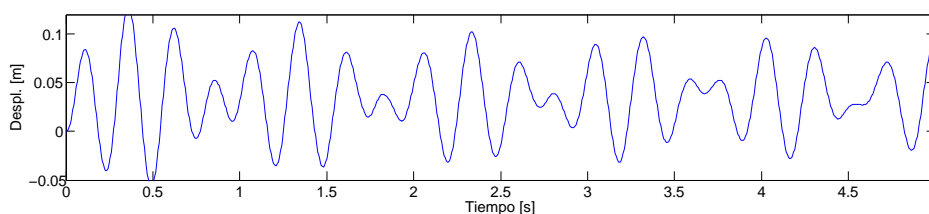
**Figura 6.20:** Configuración deformada que devuelve el algoritmo de solución para problemas estáticos. En negro se ilustra la configuración inicial, en rojo, la deformada.



**Figura 6.21:** Configuración deformada que devuelve el algoritmo de solución para problemas dinámicos. En negro se ilustra la configuración inicial, en rojo, la deformada para  $t = 4.40$  s.

El programa solicitará información de qué paso de tiempo se desea extraer la in-

formación para crear los archivos de desplazamientos y esfuerzos internos, que, para el caso dinámico se nombran "Desplazamientos\_t.xls", "Esfuerzos\_t.xls". El archivo de reacciones de vínculo (en excel) no se crea por defecto. Aunque los archivos guardados corresponden a un instante de tiempo particular, el programa almacena la información de desplazamientos (que después puede usarse para calcular los esfuerzos internos) de todos los pasos de tiempo en la variable "resultados.pos". El tiempo total requerido para llevar adelante todas las operaciones fue de aproximadamente 4 minutos. En la Fig. 6.21 se muestra la representación de la deformada dinámica del sistema para  $t = 4,40$  s. Finalmente, en la Fig. 6.22 se muestran las historias temporales de desplazamientos en la dirección global x de varios puntos de la columna, donde se pone en evidencia la influencia de la formulación no lineal de los cables en la respuesta dinámica del sistema.

(a) Nodo 87.  $h = 20$  m.(b) Nodo 64.  $h = 15$  m.(c) Nodo 27.  $h = 11$  m.

**Figura 6.22:** Registros de desplazamientos en la dirección global x a distintas alturas  $h$  de la columna

## 6.4 Comentarios Finales.

En este capítulo se han desarrollado 3 tópicos importantes:

1. Se ha deducido la formulación de elementos finitos no lineal para cables tensos en tres dimensiones, a partir de la formulación fuerte de las ecuaciones de equilibrio dinámico, cuya deducción se presenta en el Capítulo 4. Se han propuesto elementos de dos y tres nodos y su funcionamiento se ha verificado usando datos publicados en artículos científicos y otros softwares de elementos finitos.
2. Se han presentado conceptualmente y se ha discutido la implementación computacional de algunos de los métodos más difundidos para resolver iterativamente ecuaciones diferenciales no lineales (método de Newton-Raphson) y para integrar ecuaciones diferenciales (método de Newmark); cuyo buen desempeño se verificó paralelamente al de los elementos cable.
3. Con los algoritmos desarrollados previamente y sumando la ampliamente conocida formulación de elementos finitos de vigas Bernoulli en tres dimensiones (a la cual se han incorporado las componentes correspondientes de efecto de segundo orden) se programó un software de elementos finitos que permite encontrar la respuesta estática y dinámica de estructuras arriostradas. Un objetivo importante de dicho desarrollo es que trascienda el ámbito académico y sea también de utilidad a profesionales, por lo que se ha puesto énfasis en que la interfaz sea lo más limpia y sencilla posible en su uso. Se han escrito códigos específicos para permitir la integración entre Matlab (usado aquí para programar elementos finitos) y GiD (un reconocido software para pre/post proceso de elementos finitos). La interfaz de GiD, simple e intuitiva permite ingresar la geometría de la estructura y llevar adelante el mallado en unos pocos pasos. Luego, los algoritmos programados en Matlab resuelven la estructura planteada y devuelven información relevante sobre los resultados con una mínima intervención del usuario. Se ha ejemplificado el funcionamiento de la herramienta desarrollada con un mástil arriostrado simple, pero, dentro de los límites de aplicación de las teorías usadas, puede usarse para resolver cualquier tipo de estructura arriostrada. Por supuesto, existen puntos a mejorar, sobre todo en dos aspectos referentes a las cargas: la introducción de las

sobrecargas, si éstas presentan alguna complejidad, todavía debe realizarse modificando el código de programación y las componentes de tensión inicial de los cables deben incorporarse manualmente tanto, a reacciones de vínculo como a la unión viga/cables. Otras mejoras que podrían adicionarse, que se hallan fuera de los objetivos previstos son: la optimización y/o paralelización de las operaciones del algoritmo integrador y el uso de desarrollos más avanzados respecto de la formulación de vigas y cables (por ejemplo incorporando la consideración de grandes deformaciones), aunque, probablemente, esto último tenga mayor impacto en el ámbito académico que en el profesional.

Se considera que, como corolario de esta tesis, la herramienta desarrollada cumple con los principales objetivos planteados. Más aún teniendo en cuenta la implementación de la etapa de preproceso y mallado, que simplifica considerablemente la construcción de los modelos. De esta forma se constituye en un instrumento suficientemente simple como para ser usado por profesionales sin formación en métodos numéricos, para calcular y/o verificar estructuras arriostradas, pero suficientemente riguroso y flexible como para ser empleado en tareas académicas y de investigación.

## Capítulo 7

# Conclusiones y Sugerencias de Trabajo Futuro

### 7.1 Resumen.

A lo largo del desarrollo de esta tesis se han abordado el análisis de la respuesta dinámica no lineal, estudios de sensibilidad paramétrica y estudios de propagación de incertidumbre en mástiles arriostrados sometidos a cargas de viento. En primer término se usaron softwares comerciales de elementos finitos, luego se desarrollaron programas específicos para resolver modelos reducidos y finalmente y como corolario se produjo un programa de elementos finitos ad hoc para resolver mástiles u otras estructuras arriostradas.

Siendo el modelado de las cargas de viento un aspecto fundamental para los análisis propuestos, en primer término se introdujo teóricamente el Método de Representación Espectral (Shinozuka and Jan, 1972) (SRM), como una herramienta para construir registros correlacionados de velocidades de viento, que reproduzcan con la mayor fidelidad posible las características estocásticas del viento (representadas matemáticamente a través de parámetros estadísticos), a fin de lograr modelar con la mayor precisión las cargas dinámicas de viento sobre mástiles arriostrados. Como se hizo con todos los conceptos introducidos en esta tesis, los desarrollos teóricos del SRM fueron acompañados con su implementación práctica.

Una vez definida la estrategia para el modelado de cargas de viento estocásticas,

se realizaron estudios paramétricos en mástiles arriostrados considerando parámetros estructurales como la tensión inicial de las riendas y la rigidez flexional del mástil o parámetros de modelado computacional como el amortiguamiento estructural. Los rangos de valores de los parámetros fueron seleccionados dentro los sugeridos por las normas o valores usuales en la práctica profesional. La estructura modelada consistió en un mástil arriostrado tipo, de 120 m de altura y cuatro niveles de cables tenso. Estos primeros estudios se realizaron usando el software de elementos finitos comercial ALGOR Inc. (2009), modelando el mástil por medio de elementos viga y a los cables, con elementos barra. Además, se estudió la influencia que el tipo de modelado de carga tiene sobre la respuesta, ya que se desarrollaron los mismos estudios, considerando la carga de viento como una carga de tipo periódica, construida a partir de una superposición de funciones armónicas, con frecuencias en la zona del pico de frecuencias del espectro de viento.

A continuación, los estudios paramétricos fueron extendidos a estudios de cuantificación de incertidumbre, considerando como parámetros estocásticos la tensión inicial del cable, la rigidez flexional de la viga y/o la velocidad nominal del viento. Como el modelo completo de elementos finitos usado previamente resultó muy costoso computacionalmente, se usaron sistemas simplificados, tipo viga-cable o columna-cable que fueron modelados a través de modelos reducidos de dos grados de libertad. Todos los pasos, desde la deducción teórica de las ecuaciones de equilibrio dinámico para vigas, columnas y cables tenso, hasta la obtención de los modelos reducidos fueron incluidos. La implementación numérica se realizó completamente con Matlab (Mathworks, 2011). Como primera aproximación, se presentan estudios de propagación de incertidumbre sobre la respuesta dinámica de un modelo tipo viga-cable, donde solo la tensión inicial del cable se considera como variable estocástica. Luego se considera un sistema más complejo, consistente en una columna (con inclusión de efecto de segundo orden) y un cable, sometido (el mástil) a cargas estocásticas dinámicas de viento y considerando como variables aleatorias la tensión inicial del cable, la rigidez flexional de la columna y a la velocidad nominal del viento, en forma aislada o conjunta (de a dos variables). De ambos modelos se analiza la respuesta dinámica, en términos de desplazamientos, tanto en forma determinística como estadística.

Finalmente, dada la escasa o nula oferta de programas específicos para el cálculo y

verificación de mástiles arriostrados y considerando que se trata de una estructura ampliamente usada en el territorio argentino y sus países limítrofes, el último aporte de esta tesis es la implementación completa de una herramienta computacional para encontrar la respuesta, tanto estática como dinámica de estructuras arriostradas, que considera la formulación no lineal para cables tensos, elementos tipo "frame" con incorporación de efecto de segundo orden y una interfaz amigable que facilita la introducción de la geometría y el mallado.

## **7.2 Aportes y Conclusiones.**

En esta sección se sintetizan las observaciones y aportes realizados en los principales tópicos tratados en este documento.

### **7.2.1 Modelos dinámicos de cargas de viento.**

Usualmente se modelan las cargas dinámicas debidas al viento mediante una aproximación estática o usando una variación dinámica dada por funciones armónicas. En esta tesis, se expuso la teoría y se desarrolló la aplicación práctica (numérica, por medio de Matlab) del Método de Representación Espectral para crear registros de velocidades de viento. Luego, los registros de velocidades de viento y una forma modificada de los procedimientos del reglamento argentino CIRSOC 102 CIRSOC-INTI (2005) fueron combinados para crear registros de cargas dinámicas de viento, que representan, además de la intensidad, las características estadísticas y aleatorias del viento natural.

### **7.2.2 Estudios paramétricos de mástiles arriostrados.**

Se analizó la respuesta dinámica un mástil arriostrado tipo, de 120 m de altura y cuatro niveles de cables, considerándose dos enfoques para modelar las cargas de viento dinámicas: el Método de Representación Espectral y funciones armónicas. Se concluyó que el uso de una carga que modela con mayor precisión la dinámica estocástica del viento, permite describir con mejor detalle la respuesta dinámica no lineal de la estructura y la influencia que los parámetros estructurales tienen sobre esa respuesta.



Para los estudios paramétricos se consideraron parámetros de interés a la tensión inicial de los cables, la rigidez flexional del mástil y el amortiguamiento estructural equivalente. Se evaluó la respuesta dinámica en términos de desplazamientos del mástil y tensiones de las riendas. Se observó que el parámetro que más afecta la respuesta estructural fue la tensión inicial y que su influencia prácticamente no cambia con la altura. Además se determinó que aumento de la rigidez flexional incide negativamente en la respuesta dinámica (se producen desplazamientos mayores) en la zona próxima al extremo superior, que es la zona donde habitualmente se ubican los equipos. Éste es un detalle importante, teniendo en cuenta la tendencia actual que consiste en reforzar la estructura del mástil para mejorar su desempeño.

Los estudios realizados y sus resultados permitieron caracterizar la respuesta dinámica de mástiles arriostrados y evaluar su sensibilidad ante parámetros estructurales y de carga. La no linealidad del sistema, la sensibilidad paramétrica observada y la real incertidumbre en los valores de los parámetros estructurales (en particular la tensión inicial de los cables, para la cual no es común contar con dispositivos que permitan su verificación) sugieren la necesidad de realizar estudios de cuantificación y propagación de incertidumbre en este tipo de estructuras.

### **7.2.3 Modelos reducidos y estudios de propagación de incertidumbre.**

Se introdujeron conceptos básicos de métodos energéticos y minimización de funcionales, que luego fueron aplicados para encontrar las ecuaciones diferenciales de equilibrio dinámico de cables tensos y vigas. A continuación, a partir de las ecuaciones halladas previamente, se expuso la formulación de un sistema mixto tipo viga-cable. Se describió luego la metodología para encontrar la forma débil del sistema viga-cable y, por medio de una aproximación de Galerkin y modos de vibración se construyeron modelos reducidos. Todos los pasos, desde la deducción teórica de las ecuaciones diferenciales hasta la obtención de los modelos reducidos fueron descriptos en detalle.

Para el modelado y propagación de incertidumbre, se expusieron brevemente conceptos de modelado estocástico y cuantificación de incertidumbres. En particular, se desarrollaron los procedimientos del método de Monte Carlo, para el modelado de in-

certidumbre y del Principio de Maxima Entropía, como una herramienta para encontrar funciones de densidad de probabilidad de variables aleatorias, en base a la información o restricciones conocidas.

Se desarrollaron dos estudios de propagación de incertidumbre en modelos reducidos de estructuras arriostradas, donde parámetros como la tensión inicial del cable, la rigidez flexional de la viga y/o parámetros de la carga aplicada, son considerados variables aleatorias. Estudios de cuantificación y propagación de incertidumbres paramétricas en estructuras no lineales, teniendo en cuenta la cantidad de parámetros considerados estocásticos, el amplio rango de valores de los parámetros observado y la profundidad de los estudios presentados, constituyen un importante aporte de esta tesis. El segundo estudio incorpora, como novedad, el uso una carga dinámica estocástica. Estudios de incertidumbre de esta complejidad aún son poco frecuentes.

El primer estudio se trató sobre un sistema viga-cable, con una carga dinámica uniformemente distribuida aplicada sobre la viga, con una variación temporal dada por una función armónica y considerando la tensión inicial del cable ( $H$ ) como un parámetro aleatorio, con distribución Gamma. Se verificó que, pese al tipo de carga, el resultado no parece tender a un atractor periódico. Se encontró también que la respuesta dinámica es altamente sensible a cambios en  $H$ , incluso dentro de rangos muy pequeños de variación. Al analizar los desplazamientos máximos locales, se encontró que pueden diferenciarse rangos para valores de tensión inicial donde el comportamiento de la respuesta es cualitativamente distinto. Estas observaciones respecto del comportamiento de los valores pico tienen importancia porque toda la variabilidad de resultados encontrados ocurre para valores de tensión inicial que se encuentran dentro de los rangos propuestos en los reglamentos. Al estudiar la estadística de los valores máximos absolutos de desplazamiento se observaron algunos cambios cualitativos en la forma y soporte de las PDF de los resultados y las variaciones se producen cuando el valor de  $E(H)=H_m$  pasa de una zona a otra de  $H$  de las observadas en los resultados en los análisis determinísticos previos. Se observó también que, para tensiones muy altas, el comportamiento de los máximos no se ve afectado por la incertidumbre en la tensión inicial: es prácticamente determinístico. Al analizar las estadísticas para los desplazamientos máximos locales se observan, nuevamente, tres tipos de PDF siguiendo la tendencia observada para los máximos absolutos y en general, multimodales.

En el segundo estudio se analizó un sistema formado por una viga-columna y un cable, con una carga transversal de viento estocástica, adoptando como variables aleatorias la velocidad nominal del viento ( $V_n$ ), la rigidez flexional de la viga-columna ( $EI$ ) o la tensión inicial del cable ( $H$ ) tanto en forma independiente como conjunta. Se analizaron los desplazamientos en el extremo superior de la columna. Para los parámetros  $H$  y  $EI$  analizaron los resultados de emplear distribuciones Uniforme, Exponencial Truncada o Gamma. Para  $V_n$  se usaron distribuciones Gumbel y Fréchet. Se encontró que la elección de la PDF usada para modelar  $EI$  y  $H$  (dentro de las tres estudiadas) no afecta significativamente las estadísticas de los resultados. Respecto a las PDF elegidas para  $V_n$ , los resultados obtenidos con una PDF Fréchet son siempre tipo Gamma, con la moda en la zona de desplazamientos más altos, mientras que usando una PDF Gumbel, las estadísticas de los resultados son más dispersas, con un soporte mayor. El parámetro con más influencia sobre la respuesta estadística, considerado aisladamente o en combinación con otro, es la velocidad nominal del viento, lo que puede asociarse a la característica estocástica de los registros de viento. Al estudiar estadísticas variando paramétricamente  $V_n$  se observó que afecta tanto el soporte como la forma de las PDF resultantes. Se realizó también un estudio, considerando solo a  $H$  como variable aleatoria y variando la desviación estándar usada en la PDF; se encontró que a menor dispersión, más variables resultan las PDF de los resultados y que este fenómeno es especialmente remarcable para  $V_n > 45$  m/s. Se cree que esto podría deberse a la no linealidad del sistema sumada a la carga estocástica, que produce una alta sensibilidad de la respuesta a la variación de los parámetros. Usar una dispersión "grande" podría originar que, en promedio, el efecto de esta sensibilidad se diluya.

#### **7.2.4 Desarrollo de herramientas específicas para cálculo y verificación de estructuras arriostradas.**

Los aportes en este tópico pueden ordenarse como sigue:

- Se presentó la formulación de elementos finitos no lineal para cables tensos en tres dimensiones para elementos de dos y tres nodos.
- Se expusieron conceptualmente y se discutió la implementación numérica de algunos de los métodos más difundidos para resolver iterativamente ecuaciones

diferenciales no lineales (método de Newton-Raphson) y para integrar ecuaciones diferenciales (método de Newmark).

- Se programó en Matlab un software de elementos finitos que permite encontrar la respuesta estática y dinámica de estructuras arriostradas.
- A través de rutinas ad hoc en lenguaje TCL se logró la interacción entre Matlab y GiD (un reconocido software para pre/post proceso de elementos finitos, que además tiene una distribución gratuita), cuya interfaz simplifica enormemente las tareas de definición de geometría, condiciones de borde y mallado.
- Se incorporó además, un módulo de posproceso, que grafica (si el estudio es estático) o anima (si el estudio es dinámico) la configuración deformada y devuelve información ordenada respecto de desplazamientos, esfuerzos y reacciones de vínculo de la estructura.
- Con todos los avances realizados, se logró poner en práctica un instrumento simple, que puede ser usado por profesionales sin formación en métodos numéricos, para calcular y/o verificar estructuras arriostradas, pero suficientemente riguroso y flexible como para ser empleado en tareas académicas y de investigación.

### **7.3 Sugerencias de trabajos futuros.**

#### **Sobre modelos dinámicos de cargas de viento.**

- La comparación de los resultados de análisis estructurales utilizando distintos espectros de velocidades de viento. Distintos investigadores y reglamentos sugieren espectros con características específicas, algunos de ellos, muy similares entre si. Sería interesante identificar qué características de los espectros y en qué medida afectan la respuesta estructural.
- La implementación del Método de Representación Espectral u otro método para modelar cargas de viento como procesos no estacionarios.
- El desarrollo e implementación de alguna metodología que permita modelar vientos extremos.

**Sobre el estudio de la respuesta dinámica no lineal de mástiles arriostrados.**

- Análisis de la respuesta dinámica no lineal de mástiles arriostrados incorporando cargas de viento estocásticas actuando sobre las riendas.
- Estudio de la respuesta dinámica frente a la rotura de una rienda.
- Análisis de fatiga en mástiles arriostrados frente a solicitaciones de vientos regulares y/o vientos extremos a lo largo de la vida útil del mástil.
- Modelado de las uniones atornilladas y determinación del amortiguamiento que introducen en la estructura.
- Modelado de mecanismos de refuerzo de la columna y determinación de su eficiencia y eficacia.

**Sobre modelos reducidos y estudios de propagación de incertidumbre en estructuras arriostradas.**

- Comparación con los resultados obtenidos usando otras funciones para generar los modelos reducidos, como por ejemplo, las bases de Karhunen-Loève.
- Podrían generalizarse los resultados utilizando modelos adimensionales.
- Estudios de incertidumbre en modelos de mástiles arriostrados más complejos, por ejemplo: un modelo espacial con tres cables, asumiendo que la tensión inicial de cada cable es un parámetro estocástico.

**Sobre el desarrollo de herramientas específicas para cálculo y verificación de estructuras arriostradas.**

En base a los desarrollos propuestos en esta tesis, algunas posibilidades pueden ser:

- Optimización y/o paralelización de las operaciones de los algoritmos iterador e integrador.
- Implementación de algoritmos integradores más avanzados o eficientes e incorporación de paso de tiempo adaptivo.

- Formulación e implementación de elementos más avanzados para vigas y cables (por ejemplo incorporando la consideración de grandes deformaciones y/o materiales no lineales).

# Bibliografía

ALGOR Inc. (2009). *ALGOR V23.01. Professional MES*.

ANSI/TIA-222-G (2009). *Structural Standard for Antenna Supporting Structures and Antennas, ANSI/TIA-222-G*. Telecommunications Industry Association.

Ballaben, J., Rosales, M., and Sampaio, R. (2016). Stochastic dynamics of a non-linear cable-beam system. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38:307–316.

Barbosa da Cunha, A. (2015). *Modeling and Uncertainty Quantification in the Nonlinear Stochastic Dynamics of Horizontal Drillstrings*. PhD thesis, Pontificia Universidade Catolica do Rio de Janeiro, Brasil.

Bathe, K.-J. (1996). *Finite Elements Procedures*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1a. edition.

Belytschko, T., Liu, W., and Moran, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley.

Buezas, F. S., Rosales, M. B., and Sampaio, R. (2012). Stochastic bifurcation on the impact problem. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 31:2685–2708.

CIMNE (2015). *GiD 12.0.7*.

CIRSOC-INTI (1995). *Reglamento CIRSOC 306. Estructuras de acero para antenas*. INTI, Buenos Aires, Argentina.

CIRSOC-INTI (2005). *Reglamento CIRSOC 102. Acción del viento sobre las construcciones*. INTI, Buenos Aires, Argentina.

- CIRSOC-INTI (2008). *Proyecto de Reglamento Argentino para Construcciones Sismorresistentes Parte 1. Construcciones en General*. INTI, Buenos Aires, Argentina.
- Clobes, M., A., W., and Peil, U. (2009). A refined analysis of guyed masts in turbulent wind. In *EACWE 2009*.
- de Borst, R., Crisfield, M., Remmers, J., and Verhoosel, C. (2013). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Wiley.
- Dyrbye, C. and Hansen, S. (1994). *Wind Loads On Structures*. John Willey and Sons, West Sussex, England, 1 edition.
- Epanechnikov, V. a. (1968). Non-parametric estimation of a multivariate probability density. *Theory of Probability & Its Applications*, 14(1):153–158.
- Escalante, M., Sampaio, R., Rosales, M., and Ritto, T. (2008). A reduced order model of a 3d cable using orthogonal decomposition. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 30:1143–1158.
- Fung, Y. C. (1991). *Foundations of Solid Mechanics*, volume II. McGraw Hill.
- Gattulli, V. and Lepidi, M. (2007). Localization and veering in the dynamics of cable-stayed bridges. *Computers & Structures*, 85:1661–1678.
- Gattulli, V., Lepidi, M., Macdonald, J. H. G., and Taylor (2005). One-to-two global-local interaction in a cable-stayed beam observed through analytical, finite element and experimental models. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40:571–588.
- Gattulli, V., Martinelli, L., Perotti, F., and Vestroni, F. (2004). Nonlinear oscillations of cables under harmonic loading using analytical and finite element models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(1-2):69–85.
- Gattulli, V., Paolone, A., and D'amore, G. (2002). Nonlinear quadratic interactions in cable-stayed beams. In *15th Engineering Mechanics Conference*, pages 1–7.



- Georgakis, C. T. and Taylor, C. a. (2005a). Nonlinear dynamics of cable stays. Part 1: sinusoidal cable support excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 281(3-5):537–564.
- Georgakis, C. T. and Taylor, C. a. (2005b). Nonlinear dynamics of cable stays. Part 2: Stochastic cable support excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 281(3-5):565–591.
- Ghafari Oskoei, S. A. and McClure, G. (2011). A novel approach to evaluate the equivalent dynamic stiffness of guy clusters in telecommunication masts under ground motion. *Engineering Structures*, 33:1764–1772.
- Gomathinayagam, P. H. A. A. S. and Lakshmanan, N. (2003). Full scale measurements of the structural response of a 50 m guyed mast under wind loading. *Engineering Structures*, 25:859–867.
- Grey, M. (2006). *Finite Element Seismic Analysis of Guyed Masts*. PhD thesis, University of Oxford.
- Gunnar, T. (1999). Numerical analyses of cable roof structures.
- Haluk, O. (1978). A finite element approach for cable problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15:427–437.
- Henohold, W. and Russell, J. (1976). Equilibrium and natural frequencies of cable structures (a nonlinear finite element approach). *Computers & Structures*, 6(4-5):267–271.
- Hensley, G. M. (2005). Finite element analysis of the seismic behavior of guyed masts.
- Huang, M., Chan, C., and Lou, W. (2012). Optimal performance-based design of wind sensitive tall buildings considering uncertainties. *Computers & Structures*, 98-99:7–16.
- Hughes, T. J. (1987). *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewoods Cliffs , New Jersey.

- IASS (1991). *International Association for Shell and Spatial Structures*. IASS, Madrid, España.
- Impollonia, N., Ricciardi, G., and Saitta, F. (2010). Dynamic Behavior of Stay Cables with Rotational Dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, 136(6):697–709.
- Irvine, M. (1981). *Cable Structures*. MIT Press, 1st. edition.
- Judge, R., Yang, Z., Jones, S. W., and Beattie, G. (2012). Full 3D finite element modelling of spiral strand cables. *Construction and Building Materials*, 35:452–459.
- Kewaisy, T. H. (2001). *Nonlinear Dynamic Interaction between Cables and Mast of Guyed-Tower Systems Subjected To Wind-Induced Forces*. PhD thesis, Texas Tech University.
- Lenci, S. and Ruzziconi, L. (2009). Nonlinear phenomena in the single mode dynamics of a cable-supported beam . *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 19:923–945.
- Leonard, J. (1988). *Tension Structures*. McGraw-Hill, 1st. edition.
- Lin, K., Zou, D., and Wei, M. (2014). Nonlinear Analysis of Cable Vibration of a Multispan Cable-Stayed Bridge under Transverse Excitation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014:1–13.
- Madugula, M. (2002). *Dynamic response of lattice towers and guyed masts*. American Society of Civil Engineers (ASCE).
- Mathworks (2011). *MATLAB R2011b*.
- Mignolet, M. P., Przekop, A., Rizzi, S. a., and Spottswood, S. M. (2013). A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10):2437–2460.
- Negro, V., López-Gutiérrez, J.-S., Esteban, M. D., and Matutano, C. (2014). Uncertainties in the design of support structures and foundations for offshore wind turbines. *Renewable Energy*, 63:125–132.

- Parzen, E. (1962). On Estimation of a Probability Density Function and Mode. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(3):1065–1076.
- Preidikman, S., Massa, J., and Rocca, B. (2006). Análisis dinámico de mástiles arriostrados. *Rev. Int. de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 6(1):85–102.
- Punde, Y. D. S. (2001). Simple model for dynamic analysis of cable supported structures. *Engineering Structures*, 23:271–279.
- Reddy, J. (2005). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Methods*. Oxford University Press.
- Reddy, J. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, 3d. edition.
- Rega, G. (2004). Nonlinear vibrations of suspended cables - part i: Modeling and analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 57:443–478.
- Rektorys, K. (1977). *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*. D. Reidel Publishing Company.
- Rosenblatt, M. (1955). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *The Annals of Mathematical Statistics*, 27(3):832–837.
- Saudi, G. (2014). Structural assessment of a guyed mast through measurement of natural frequencies. *Engineering Structures*, 59:104–112.
- Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell Technical Journal*, 27:379–423.
- Shi, H. (2007). *Nonlinear Finite Element Modeling and Characterization of Guyed Towers Under Severe Loading*. PhD thesis, University of Missouri, Columbia.
- Shinozuka, M. and Jan, C. (1972). Digital simulation of random processes and its applications. *Journal of Sound and Vibration*, 25(1):111–128.
- SoilVision Systems Ltd. (2015). *FlexPDE 6*.

- Song, C., Phenix, H., Abedi, V., Scott, M., Ingalls, B. P., Kaern, M., and Perkins, T. J. (2010). Estimating the stochastic bifurcation structure of cellular networks. *PLoS Comput Biol*, 6(3):e1000699.
- V. Gattulli, F. V. (2000). Nonlinear strategies for longitudinal control in the stabilization of an oscillating suspended cable. *Dynamics and Control*, 10:359–374.
- Wei, M. H., Xiao, Y. Q., and Liu, H. T. (2012). Bifurcation and chaos of a cable-beam coupled system under simultaneous internal and external resonances. *Nonlinear Dynamics*, 67:1969–1984.
- Wriggers, P. (2006). *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer.
- Zhu, N. (2007). Wind tunnel test for guyed masts dynamic characteristics under wind loads.
- Zienkiewicz, O. and Taylor, R. (1965). *The finite element method*. Prentice Hall, Inc.

# Apéndice A

## Apéndice: Códigos de Matlab y GiD.

A continuación se incluyen los códigos de programación de GiD y Matlab para del Software de elementos finitos programado.

Para crear el "tipo de problema" usado en GiD, debe crearse una carpeta, nombrarse como fem3d.gid y en su interior colocar los siguientes archivos (todos se pueden hacer con cualquier procesador básico de texto, como el block de notas de windows y se les debe luego asignar la extensión que se indica).

**Código A.1:** archivo fem3d.bas

```
1      *gendata(Nombre_del_problema)
2
3      % Numero de elementos
4      ne = *nelem;
5      % Listado de elementos
6      % Elemento Material nodo1 nodo2 nodo3
7
8      ElNod = [
9      *set cond geom_ID *elems *CanRepeat
10     *loop elems *OnlyInCond
11     *format " %6i %6i %6i %6i %6i "
12     *elemsnum *elemsmat *ElementsConec *Cond(Num_Entity,int)
13     *end elems
14     ];
15
16     % Nodos #####
17     % Numero de nodos
18     no = *npoin;
19     % Listado de coordenadas
20     %   x y z ...
```

```

21   Coord = [
22   *loop nodes
23   *format " %15.5f %15.5f %15.5f"
24   *NodesCoord(1) *NodesCoord(2) *NodesCoord(3)
25   *end nodes
26   ]';
27
28
29   % Condiciones de Borde #####
30   % Listado de condiciones
31   *Set Cond Restriccion_desplazamientos *nodes
32   % Nodo Dx Dy Dz Rx Ry Rz
33   cbi = [
34   *loop nodes *OnlyInCond
35   *NodesNum *cond(Desp_X,real) *cond(Desp_Y,real) ...
36           *cond(Desp_Z,real) *cond(Rot_X,real) *cond(Rot_Y,real) ...
37           *cond(Rot_Z,real)
38   *end nodes
39   ];

```

**Código A.2:** archivo fem3d.cnd

```

1   number: 1 condition: Restriccion_desplazamientos
2   condtype: over points
3   condmeshtype: over nodes
4   question: Desp_X
5   value: 0.0
6   question: Desp_Y
7   value: 0.0
8   question: Desp_Z
9   value: 0.0
10  question: Rot_X
11  value: 0.0
12  question: Rot_Y
13  value: 0.0
14  question: Rot_Z
15  value: 0.0
16  end condition
17
18  number: 2 condition: geom_ID
19  condtype: over lines
20  question: Num_Entity#FUNC#(NumEntity)
21  value: 0.0
22  state: hidden
23  end condition

```

**Código A.3:** archivo fem3d.prb

```

1   problem data

```

```
2 question: Nombre_del_problema
3 value:
4 end problem data
```

**Código A.4:** archivo fem3d.tcl

```
1 proc InitGIDProject { dir } {
2
3 }
4
5
6
7 proc EndGIDProject {} {
8
9 }
10
11
12
13 proc NumLines { } {
14
15 set a [ .central.s info list_entities Status ]
16
17 regexp -nocase {number of Lines: ([0-9]+)} $a none num
18
19 return $num
20
21 }
22
23
24
25 proc WriteAllLinesInfo { } {
26
27 return [ .central.s info list_entities Lines 1:[NumLines] ]
28
29 }
30
31
32
33 proc WriteLinesInfo { num } {
34
35 return [ .central.s info list_entities Lines $num ]
36
37 }
```

**Código A.5:** archivo fem3d.mat

```
1 number: 1 material: Acero_torre_1
2 question: Ix
3 value: 237
```

```
4 question: Iy
5 value: 237
6 question: Ixy
7 value: 237
8 question: E
9 value: 210000000000
10 question: masa
11 value: 2700
12 question: area
13 value: 900
14 end material
15 number: 2 material: Acero_torre_2
16 question: Ix
17 value: 237
18 question: Iy
19 value: 237
20 question: Ixy
21 value: 237
22 question: E
23 value: 210000000000
24 question: masa
25 value: 2700
26 question: area
27 value: 900
28 end material
29 number: 3 material: Acero_torre_3
30 question: Ix
31 value: 237
32 question: Iy
33 value: 237
34 question: Ixy
35 value: 237
36 question: E
37 value: 210000000000
38 question: masa
39 value: 2700
40 question: area
41 value: 900
42 end material
43 number: 4 material: Acero_torre_4
44 question: Ix
45 value: 237
46 question: Iy
47 value: 237
48 question: Ixy
49 value: 237
50 question: E
51 value: 210000000000
52 question: masa
53 value: 2700
54 question: area
55 value: 900
56 end material
```



```
57     number: 5 material: Acero_cables_1
58     question: area
59     value: 80.2
60     question: E
61     value: 175000000000
62     question: masa
63     value: 7874
64     question: tension_inicial
65     value: 440
66     end material
67     number: 6 material: Acero_cables_2
68     question: area
69     value: 80.2
70     question: E
71     value: 175000000000
72     question: masa
73     value: 7874
74     question: tension_inicial
75     value: 440
76     end material
77     number: 7 material: Acero_cables_3
78     question: area
79     value: 80.2
80     question: E
81     value: 175000000000
82     question: masa
83     value: 7874
84     question: tension_inicial
85     value: 440
86     end material
87     number: 8 material: Acero_cables_4
88     question: area
89     value: 80.2
90     question: E
91     value: 175000000000
92     question: masa
93     value: 7874
94     question: tension_inicial
95     value: 440
96     end material
97     number: 9 material: Acero_cables_5
98     question: area
99     value: 80.2
100    question: E
101    value: 175000000000
102    question: masa
103    value: 7874
104    question: tension_inicial
105    value: 440
106    end material
107    number: 10 material: Acero_cables_6
108    question: area
109    value: 80.2
```

```
110     question: E
111     value: 175000000000
112     question: masa
113     value: 7874
114     question: tension_inicial
115     value: 440
116     end material
117     number: 11 material: Acero_cables_7
118     question: area
119     value: 80.2
120     question: E
121     value: 175000000000
122     question: masa
123     value: 7874
124     question: tension_inicial
125     value: 440
126     end material
127     number: 12 material: Acero_cables_8
128     question: area
129     value: 80.2
130     question: E
131     value: 175000000000
132     question: masa
133     value: 7874
134     question: tension_inicial
135     value: 440
136     end material
137     number: 13 material: Acero_cables_9
138     question: area
139     value: 80.2
140     question: E
141     value: 175000000000
142     question: masa
143     value: 7874
144     question: tension_inicial
145     value: 440
146     end material
```

A continuación se transcriben los códigos de Matlab del programa FEM no lineal para resolver estructuras arriostradas:

**Código A.6:** archivo DATA.m

```
1 %Este archivo contiene los datos de entrada que el usuario debe ...
   ingresar
2 %para resolver un mastil arriostrado.
3
4 close all
5 clear all
6 clc
```

```
7 tic
8 opcion = input('Indique tipo de análisis: (1) estático (0) ...
    dinámico ');
9
10 %% PROPIEDADES DE LOS MATERIALES
11 % cables
12 A = 7.85375e-5; % [m2] cable de 1cm de diametro
13 E = 2e11; % [N/m2] modulo de elasticidad acero
14 H = 3000; % [N] pretension
15 rho = 7850;
16 m = rho*A;
17
18 % columna
19 Eb = 2e11; % [N/m2]
20 Ab = 0.0015; % [m2]
21 Iz = 3e-5; % [m4]
22 Iy = 3e-5; % [m4]
23 Ix = 1e-5; % [m4]
24 Gb = 8.5e10; % [N/m2]
25 mb = Ab*rho;
26
27 N = 1000;
28
29 prop.young = E; prop.area = A; prop.initial_tension = H; ...
    prop.mass = m;
30 prop.youngb = Eb; prop.areab = Ab; prop.IX = Ix; prop.IY = Iy;
31 prop.IZ = Iz; prop.Gb = Gb; prop.massb = mb; prop.rho = rho;
32
33 %% MALLADO GiD-MATLAB
34 prueba_tesis
35 mallado
36
37 %% TSPAN
38 ti = 0;
39 dt = 1/200;
40 tf = 2.5;
41 tspan = ti:dt:tf;
42 tt=length(tspan);
43
44 t=0; %indizador para que algunos archivos reconozcan los ...
    resultados como estaticos o dinamicos
45
46 %% CONDICIONES INICIALES
47 u0 = zeros(sgdof,1);
48 v0 = u0;
49 a0 = u0;
50
51 %% ANALISIS ESTATICO
52 % intensidad de las cargas distribuidas (constantes)
53 % cables
54 qc = -rho*A*9.81; % [N] peso propio cables
55 % columna
56 qbv = -rho*Ab*10; % [N] peso propio columna
```

```

57 qbu = 0; %[N] carga distribuida en la columna
58 qbw = 0;
59
60 % componentes para formar los vectores de carga
61 % cables
62 fcv = qc; %[N]
63 fcu = 0;
64 fcw = 0;
65 % columna
66 fbu = qbu;
67 fbv = qbv;
68 fbw = qbw;
69 fbx = 0;
70 fby = 0;
71 fbz = 0;
72
73 % Vector de las cargas
74 F = zeros(sgdof,1);
75 for i=1:ne
76     xy = Coord(:,ElNod(i,3:4));
77     if ElNod(i,2) == 1 % si el elemento es columna....
78         Fe = FF3dV(fbu,fbv,fbw,fbx,fby,fbz,xy);
79     else
80         Fe = FF3d(fcu,fcv,fcw,xy);
81     end
82     lm = LM(:,i);
83     lm(lm==0)=[];
84     F(lm,1) = F(lm,1) + Fe;
85 end
86
87 LimIter = 5;
88 Tol = 0.01;
89
90 FEM_estatico %configuracion de equilibrio estatica u0 ...
    (Newton/Raphson)
91 plot_mast
92 pause
93 close all
94 if opcion ==1
95     % plot_mast
96     posproceso
97     return
98 else
99     it = 10; %input('Indique el paso de tiempo para el cual se ...
        extraen los resultados ');
100 end
101
102
103
104 %% cargas activas para analisis dinamico
105 %intensidades de las cargas distribuidas (constantes)
106 % cables
107 qc = -rho*A*9.81; %[N] peso propio cables

```

```

108 % columna
109 qbv = 0; % -rho*Ab*10; % [N] peso propio columna
110 qbu = 200; % [N] carga distribuida en la columna
111 qbw = 0;
112
113 % componentes para formar los vectores de carga
114 % cables
115 fcv = qc; % [N]
116 fcu = 0;
117 fcw = 0;
118 % columna
119 fbu = qbu;
120 fbv = qbv;
121 fbw = qbw;
122 fbx = 0;
123 fby = 0;
124 fbz = 0;
125
126 % funcion para carga dinamica
127 freq = 3;
128 mult = 0.5*cos(2*freq*pi*tspan)+1.1;
129
130 % Vector de las cargas
131 F = zeros(sgdof,tt);
132 for i=1:ne
133     lm = LM(:,i);
134     lm(lm==0)=[];
135     xy = Coord(:,ElNod(i,3:4));
136     if ElNod(i,2) == 1 % si el elemento es columna....
137         Fe = FF3dV(fbu,fbv,fbw,fbx,fby,fbz,xy)*mult;
138     else
139         Fe = FF3d(fcu,fcv,fcw,xy)*ones(1,tt);
140     end
141     F(lm,:) = F(lm,:) + Fe;
142 end
143
144 %% Newmark / Newton-Raphson
145 B = 0.31; % beta
146 G = 0.6; % gama
147 Newmark
148 final=toc
149 beep
150 pause
151 plot_dyn
152
153 posproceso

```

**Código A.7:** archivo mallado.m

```

1 % acomodo, cuento, ordeno y clasifico los nodos de cada tipo de ...
   elemento

```

```

2 ElNodV = ElNod(ElNod(:,2)==1,:); %extrae los datos de elementos ...
   viga de la matriz ElNod
3 NV = ElNodV(:, [3 4]); % extrae solo los nodos de la matriz NV
4 NV = NV(:); % acomoda la matriz como un vector
5 NV = union(NV,NV); % elimina los elementos (nodos) repetidos en NV
6 nNV = length(NV); % cantidad de nodos de viga (algunos se ...
   comparten con cables)
7 ElNodViga = ElNodV(:, [1 3 4])';
8
9 ElNodC = ElNod((ElNod(:,2)==2),:); %extrae los datos de ...
   elementos cable de la matriz ElNod
10 NC = ElNodC(:, [3 4]); %extrae solo los nodos de la matriz NC
11 NC = NC(:); % acomoda la matriz como un vector
12 NC = union(NC,NC); % elimina los elementos (nodos) repetidos en NC
13 NC = setdiff(NC,NV); % elimina de NC los elementos (nodos) que ...
   ya estan listados en NV
14 nNC = length(NC); %cantidad de nodos solo de cables
15
16 % Numero y pseudo acomodo los grados de libertad
17 GLsNodosViga = 1:6*nNV; % para la viga
18 gl1 = reshape(GLsNodosViga,6,nNV);
19 GLsNodosCables = 6*nNV+1:6*nNV+3*nNC; %para los cables
20 gl2 = reshape(GLsNodosCables,3,nNC);
21
22 if isempty(gl2)==1; %si no hay elementos cable... (que se ...
   mallan en 2do termino..)
23     sgdof = max(max(gl1));
24 else
25     sgdof = max(max(gl2));
26 end
27
28 dof = 1:sgdof;
29
30 % armado de la matriz NodDof ordenada (se listan los GL ...
   asignados a cada nodo)
31 inodof = zeros(6,nNV+nNC);
32 inodof(:,1:nNV) = gl1;
33 inodof(1:3,nNV+1:end) = gl2;
34 ii = [NV;NC]';
35 inodof = [ii;inodof];
36 inodof = sortrows(inodof',1)';
37
38 NodDof = inodof(2:end,:);
39
40 % armado de la matriz IEN (se listan GL asignados a cada elemento)
41 IEN = zeros(12,ne);
42 for i=1:ne
43     if ElNod(i,2) == 1 %si el elemento es viga...
44         IEN(1:6,i) = NodDof(:,ElNod(i,3));
45         IEN(7:end,i) = NodDof(:,ElNod(i,4));
46     else %si el elemento es cable...
47         IEN(1:3,i) = NodDof(1:3,ElNod(i,3));
48         IEN(7:9,i) = NodDof(1:3,ElNod(i,4));

```

```

49     end
50 end
51
52 CB = [];
53 for i=1:size(cbi,1)
54     o=cbi(i,:);
55     o(o==0)=[];
56 CB = [CB; NodDof(o(2:end),o(1))];
57 end
58
59 fdof = dof(1:end-length(CB));
60
61 % armado de la matriz LM
62 a=0;
63 for i=1:length(dof)
64     if i≠CB
65         a=a+1;
66         ID(i)=a;
67     else
68         ID(i)=0;
69     end
70 end
71
72 for i=1:length(dof)
73     if ID(i)==0
74         a=a+1;
75         ID(i)=a;
76     end
77 end
78
79 LM = zeros(size(IEN));
80 for i=1:size(IEN,2)
81     for j=1:size(IEN,1)
82         V = IEN(j,i);
83         if V==0
84             LM(j,i) = 0;
85         else
86             LM(j,i)=ID(V);
87         end
88     end
89 end

```

**Código A.8:** archivo FEM\_estatico.m

```

1  %Programa que calcula la configuracion inicial estatica de ...
   equilibrio para
2  %problemas tipo mastil arriostrado
3
4  % help FEM_7dic15_estatico
5
6  F=F(fdof);

```

```

7 R = F;
8
9 %% --- proceso iterativo Newton-Raphson ---
10 iter=0;
11 while norm(R)>Tol && iter<LimIter
12     iter=iter+1;
13
14     % -- Ensamblado de la matriz de RIGIDEZ LINEALIZADA --
15     K = zeros(sgdof,sgdof);
16     for i=1:ne
17         ien = IEN(:,i);
18         ien(ien==0)=[];
19
20         % corrimientos de los nodos del elemento i
21         U = u0(ien);
22
23         % coordenadas de los nodos del elemento i
24         xy = Coord(:,ElNod(i,3:4));
25
26         if ElNod(i,2) == 1 %si el elemento es viga
27             % matriz de rigidez del elemento i
28             Ke = frameg(prop,xy,N);
29
30         else %si el elemento es cable
31             % matriz de rigidez del elemento i
32             Ke = Kel(prop,U,xy);
33
34         end
35         lm = LM(:,i);
36         lm(lm==0) = [];
37
38         % matriz de rigidez global
39         K (lm,lm) = K(lm,lm) + Ke;
40
41     end
42
43     % matriz de rigidez global sin las filas/columnas de los GL
44     % restringidos (quedan al final)
45     K = K(fdof,fdof); ...
46
47     %elimino las filas/columnas de los GL restringidos
48
49     % Solucion del sistema de ecuaciones linealizado
50     du = linsolve(K,R);
51
52     % Acomodo los datos
53     dub = [du;zeros(length(CB),1)]; %agrega las componentes ...
54         restrictas (el sistema linear que se resuelve no las ...
55         incluye -no son incognitas-)
56
57     du = dub(ID); %reordena el vector de los resultado para los ...
58         resultados coincidan con el orden de los gl globales..

```



```

55     % Hallo la nueva aproximacion de la solucion
56     u0 = u0 + du;
57
58     % G es el vector que resulta de incluir los corrimientos ...
        resultados
59     % del sistema linealizado, dentro del sistema original no ...
        lineal. El
60     % resultado es un vector de fuerzas, que deberia ir ...
        acercandose al
61     % vector F de excitacion del sistema.
62
63     G = zeros(sgdof,1);
64     for i=1:ne
65         % corrimientos de los nodos del elemento i (solucion ...
            del paso de
66         % tiempo anterior)
67         ien = IEN(:,i);
68         ien(ien==0)=[];
69
70         % corrimientos velocidades y aceloraciones de los ...
            nodos del elemento i
71         U = u0(ien);
72
73         % coordenadas de los nodos del elemento i
74         xy = Coord(:,ElNod(i,3:4));
75
76         if ElNod(i,2) == 1 % si el elemento es viga....
77             % Vector de esfuerzos internos de la Ec Dif LINEAL ...
                (viga)
78             Re = PeV(prop,U,xy,N);
79
80         else % si el elemento es cable
81
82             % Vector de esfuerzos internos de la Ec Dif NL (cables)
83             Re = Pel(prop,U,xy);
84         end
85
86         lm = LM(:,i);
87         lm(lm==0) = [];
88
89         % Vector de fuerza de la Ec Dif NL (ubicado en la ...
            matriz global)-(NEWMARK)
90         G (lm,1) = G(lm,1) + Re;
91     end
92
93     Gj=G(fdof);
94     R=F-Gj;
95
96 end
97
98
99 %%
100 if iter==LimIter

```

```

101     disp('-----')
102     disp('se alcanzo el numero maximo de iteraciones sin lograr ...
        convergencia')
103     disp('-----')
104 else
105     disp(['se logro convergencia en ',num2str(iter),' ...
        iteraciones'])
106 end
107
108
109 %calculo las reacciones de vinculo
110 Gr = G(ID);
111 Reac_est = zeros(size(cbi));
112 Reac_est(:,1) = cbi(:,1);
113
114 for r=1:size(cbi,1)
115     o=cbi(r,1);
116     o = NodDof(:,o);
117     o(o==0)=[];
118     if length(o)<4
119         Reac_est(r,2:4) = Reac_est(2:4) + Gr(o)';
120     else
121         Reac_est(r,2:7) = Reac_est(2:7) + Gr(o)';
122     end
123 end
124
125 enc3 = {'Nodo','Rx','Ry','Rz','Mx','My','Mz'};
126 datar = num2cell(Reac_est);
127 datare = [enc3;datar];
128 disp(datare)

```

**Código A.9:** archivo Newmark.m

```

1 % Integrador implicito de Newmark (usa un newton raphson dentro ...
  de cada
2 % paso de iteracion)
3
4 % constantes del integrador
5 a1 = 1/(B*dt^2);
6 a2 = 1/(B*dt);
7 a3 = (1-2*B)/(2*B);
8 a4 = G/(B*dt);
9 a5 = (1-G/B);
10 a6 = (1-G/(2*B))*dt;
11
12 %% AMORTIGUAMIENTO CERO!!!
13 Cc = 0;
14 %%
15 resultados.pos(:,1) = u0;
16 resultados.vel(:,1) = v0;
17 resultados.acel(:,1) = a0;

```

```

18 FF=F;
19
20 F=F(fdof,:); R=F(:,1);
21
22 %-----
23 %-----*----- INTEGRADOR DE NEWMARK -----*-----
24 %-----*-----
25 tic
26 %=====
27 reverseStr = ' '; ...
                                     ...
                                     %parametro para mostrar el progreso del bucle for
28 %=====
29 for t=1:length(tspan)
30
31     % leo los datos de desplazamientos, velocidades y ...
        aceleraciones del paso de
32     % tiempo anterior.
33     uu = resultados.pos(:,t);
34     vv = resultados.vel(:,t);
35     aa = resultados.acel(:,t);
36
37     % inicializado para el paso de tiempo actual
38     G = zeros(sgdof,1);
39     for i=1:ne
40         % corrimientos de los nodos del elemento i (solucion ...
            del paso de
41         % tiempo anterior)
42         ien = IEN(:,i);
43         ien(ien==0)=[];
44
45         U0 = uu(ien);
46
47         % corrimientos velocidades y acelaciones de los ...
            nodos del
48         % elemento i (en el paso de tiempo actual y la ...
            iteracion actual)
49         U = u0(ien);
50         V = v0(ien);
51         A = a0(ien);
52
53         %           P = F(IEN(:,i));
54
55         % coordenadas de los nodos del elemento i
56         xy = Coord(:,ElNod(i,3:4));
57
58         if ElNod(i,2) == 1 % si el elemento es viga....
59             % Vector de esfuerzos internos de la Ec Dif LINEAL ...
                (viga)
60             Re = PeV(prop,U,xy,N);
61
62             % Matriz de masa del elemento (viga)
63             Mc = massV(prop,xy);

```

```

64
65     else % si el elemento es cable
66
67         % Vector de esfuerzos internos de la Ec Dif NL (cables)
68         Re = Pel(prop,U,xy);
69
70         % Matriz de masa del elemento (cables)
71         Mc = mass(prop,xy);
72     end
73
74     % Vector de esfuerzos inerciales de la Ec Dif NL ...
75     (local)-(NEWMARK)
76     In = Mc*(a1*(U-U0) - a2*V - a3*A);
77
78     % Vector de amortiguamiento de la Ec Dif NL ...
79     (local)-(NEWMARK)
80     D = Cc*(a4*(U-U0) + a5*V +a6*A);
81
82     lm = LM(:,i);
83     lm(lm==0) = [];
84
85     % Vector de fuerza de la Ec Dif NL (ubicado en la ...
86     matriz global)-(NEWMARK)
87     G(lm,1) = G(lm,1) + Re + In + D;
88 end
89
90 Gj=G(fdof);
91 R=F(:,t)-Gj ;
92 % end
93
94 %----- INICIO ITERACIONES NEWTON RAPHSON -----
95 %-----
96
97 iter=0;
98 while norm(R)>Tol && iter<LimIter
99     iter=iter+1;
100
101     % -- Ensamblado de la matriz de RIGIDEZ LINEALIZADA --
102     K = zeros(sgdof,sgdof);
103     for i=1:ne
104         ien = IEN(:,i);
105         ien(ien==0)=[];
106
107         % corrimientos de los nodos del elemento i
108         U = u0(ien);
109
110         % coordenadas de los nodos del elemento i
111         xy = Coord(:,ElNod(i,3:4));
112
113         if ElNod(i,2) == 1 %si el elemento es viga
114             % matriz de rigidez del elemento i
115             Ke = frameg(prop,xy,N);
116
117             % Matriz de masa del elemento i

```

```

114         Me = massV(prop,xy);
115
116     else %si el elemento es cable
117         % matriz de rigidez del elemento i
118         Ke = Kel(prop,U,xy);
119
120         % Matriz de masa del elemento i
121         Me = mass(prop,xy);
122     end
123     lm = LM(:,i);
124     lm(lm==0) = [];
125
126     % matriz de rigidez global
127     K(lm,lm) = K(lm,lm) + Ke + a1*Me + a4*Cc;
128
129 end
130
131 % matriz de rigidez global sin las filas/columnas de los GL
132 % restringidos (quedan al final)
133 K = K(fdof,fdof); ...
134
135     %elimino las filas/columnas de los GL restringidos
136
137 % Solucion del sistema de ecuaciones linealizado
138 du = linsolve(K,R);
139
140 % Acomodo los datos
141 dub = [du;zeros(length(CB),1)]; %agrega las componentes ...
142     restrictas (el sistema linear que se resuelve no las ...
143     incluye -no son incognitas-)
144
145 du = dub(ID); %reordena el vector de los resultado para los ...
146     resultados coincidan con el orden de los gl globales..
147
148 % Hallo la nueva aproximacion de la solucion
149 u0 = u0 + du;
150
151 G = zeros(sgdof,1);
152 for i=1:ne
153     % corrimientos de los nodos del elemento i (solucion ...
154     del paso de
155     % tiempo anterior)
156     ien = IEN(:,i);
157     ien(ien==0)=[];
158     U0 = uu(ien);
159
160     % corrimientos velocidades y aceloeraciones de los ...
161     nodos del elemento i
162     U = u0(ien);
163     V = v0(ien);
164     A = a0(ien);
165     %           P = F(IEN(:,i));

```

```

160     % coordenadas de los nodos del elemento i
161     xy = Coord(:,ElNod(i,3:4));
162
163     if ElNod(i,2) == 1 % si el elemento es viga....
164         % Vector de esfuerzos internos de la Ec Dif LINEAL ...
165         % (viga)
166         Re = PeV(prop,U,xy,N);
167
168         % Matriz de masa del elemento (viga)
169         Mc = massV(prop,xy);
170
171     else % si el elemento es cable
172
173         % Vector de esfuerzos internos de la Ec Dif NL (cables)
174         Re = Pel(prop,U,xy);
175
176         % Matriz de masa del elemento (cables)
177         Mc = mass(prop,xy);
178     end
179     % Vector de esfuerzos inerciales de la Ec Dif NL ...
180     % (local)-(NEWMARK)
181     In = Mc*(a1*(U-U0) - a2*V - a3*A);
182
183     % Vector de amortiguamiento de la Ec Dif NL ...
184     % (local)-(NEWMARK)
185     D = Cc*(a4*(U-U0) + a5*V +a6*A);
186
187     lm = LM(:,i);
188     lm(lm==0) = [];
189
190     % Vector de fuerza de la Ec Dif NL (ubicado en la ...
191     % matriz global)-(NEWMARK)
192     G(lm,1) = G(lm,1) + Re + In + D;
193 end
194
195     Gj=G(fdof);
196     R=F(:,t)-Gj;
197
198 end
199
200 %-----
201 %----- FIN ITERACIONES NEWTON RAPHSON -----
202
203 %calculo las reacciones de vinculo
204 Gr = G(ID);
205 RR = zeros(size(cbi));
206 RR(:,1) = cbi(:,1);
207
208 for r=1:size(cbi,1)
209     o=cbi(r,1);
210     o = NodDof(:,o);
211     o(o==0)=[];
212     if length(o)<4

```

```

209         RR(r,2:4) = RR(2:4) + Gr(o)';
210     else
211         RR(r,2:7) = RR(2:7) + Gr(o)';
212     end
213 end
214 Reac_din(:, :, t) = RR;
215
216 % calculo las componentes de velocidad y aceleracion (una vez ...
    que los
217 % desplazamientos convergen)
218 a0 = a1*(u0 - uu) - a2*vv - a3*aa;
219 v0 = a4*(u0 - uu) + a5*vv + a6*aa;
220
221 % guardo los datos de desplazamientos, velocidades y aceleraciones.
222 resultados.pos(:,t+1) = u0;
223 resultados.vel(:,t+1) = v0;
224 resultados.acel(:,t+1) = a0;
225
226 fin = toc;
227 % Display the progress=====
228 falta=(tt-t)*fin/(t);%segundos  %/60; % /60 = minutos
229 falta2=falta/60; %minutos % horas
230 percentDone = 100 * t / tt;
231 msg = sprintf('\n Porcentaje calculado: %3.1f \n. Faltan mas o ...
    menos %3.1f segundos (%3.1f minutos). \n', ...
    percentDone, falta, falta2); %Don't forget this semicolon
232 fprintf([reverseStr, msg]);
233 reverseStr = repmat(sprintf('\b'), 1, length(msg));
234 %=====
235
236 end

```

**Código A.10:** archivo frameg.m

```

1 function Kviga = frameg(prop,xy,N)
2 % calcula la matriz de rigidez de la viga en coordenadas globales.
3 % xy : vector de las coordenadas de los nodos del elemento.
4 % N : carga normal de compresion (introducir con signo ...
    negativo) actuando en la viga
5
6 E = prop.youngb; %(modulo de elasticidad)
7 A = prop.areab; %(area)
8 Iz = prop.IZ; %(inerca flexion en el plano de la viga)
9 Iy = prop.IY; %(inerca flexion fuera del plano de la viga)
10 Ix = prop.IX; %(inerca polar de la viga)
11 Gb = prop.Gb; %(modulo de corte)
12
13 b=[ xy(1,2)-xy(1,1); xy(2,2)-xy(2,1); xy(3,2)-xy(3,1)];
14
15 v1 = xy(:,1);
16 v2 = xy(:,2);

```

```

17 v3 = v1; % agrego un punto en el plano xy (para definir el ...
    plano necesito 3 puntos no colineales)
18
19 if b(1)==0 && b(3)==0
20     %transformacion especial para el caso que el elemento este ...
        sobre el eje
21     %"y" (caso especial de vigas-columna en m\'astiles ...
        arriostrados)
22     v3(3) = v3(3)+1;
23 else
24     v3(2) = v3(2)+1;
25 end
26
27 le=sqrt(b'*b); % longitud del elemento
28 n1=b/le; %cosenos directores del vector x local
29 n1=n1';
30
31 v21 = v2-v1;
32 v31 = v3-v1;
33
34 b2 = cross(v21,v31); %producto vectorial de v21 y v31 (da el ...
    vector normal a esos dos, -direccion del eje z local-)
35 bb2 = sqrt(b2'*b2);
36 n3 = b2/bb2; %cosenos directores del vector z local
37 n3=n3';
38
39 %cosenos directores del vector y local --
40 n2 = cross(n3,n1); % producto vectorial ZxX => Y
41 %-----
42
43 An=[n1; n2; n3]; %matrix de los cosenos directores de las ...
    componentes xyz del sistema local en el sistema global
44
45 T_Glob2Loc =[ An      zeros(3) zeros(3) zeros(3);
46              zeros(3) An      zeros(3) zeros(3);
47              zeros(3) zeros(3) An      zeros(3);
48              zeros(3) zeros(3) zeros(3) An      ];
49
50 l=le;
51
52 kviga = [ E*A/l      0      0      0      -E*A/l      0 ...
            0      0      0      0      0      0 ...
            0      0      12*E*Iz/l^3      0      6*E*Iz/l^2      0 ...
53            0      0      -12*E*Iz/l^3      0      6*E*Iz/l^2      0 ...
            0      0      0      6*E*Iz/l^2      12*E*Iy/l^3      0 ...
54            0      0      -6*E*Iy/l^2      0      -12*E*Iy/l^3      0 ...
            0      0      -6*E*Iy/l^2      0      0      0 ...
55            0      0      0      0      0      Gb*Ix/l ...
            0      0      0      0      0      0 ...

```



```

56      -Gb*Ix/l      0      0      ...
      0      0      0      0
      4*E*Iy/l      0      -6*E*Iy/l^2      0 ...
      0      0      6*E*Iy/l^2      0 ...
      2*E*Iy/l      0
57      0      6*E*Iz/l^2      0      0 ...
      0      4*E*Iz/l      0 ...
      -6*E*Iz/l^2      0      0 ...
      0      2*E*Iz/l
58      -E*A/l      0      0      0 ...
      0      0      0      E*A/l ...
      0      0      0      0 ...
59      0      -12*E*Iz/l^3      0      0 ...
      0      -6*E*Iz/l^2      0 ...
      12*E*Iz/l^3      0      0 ...
      0      -6*E*Iz/l^2
60      0      0      -12*E*Iy/l^3      0 ...
      6*E*Iy/l^2      0      0 ...
      0      12*E*Iy/l^3      0 ...
      6*E*Iy/l^2      0
61      0      0      0      0      Gb*Ix/l ...
      0      0      0      0      0 ...
      0      0      0      Gb*Ix/l      0 ...
      0      0
62      0      0      -6*E*Iy/l^2      0 ...
      2*E*Iy/l      0      0 ...
      0      6*E*Iy/l^2      0 ...
      4*E*Iy/l      0
63      0      6*E*Iz/l^2      0      0 ...
      0      2*E*Iz/l      0 ...
      -6*E*Iz/l^2      0      0 ...
      0      4*E*Iz/l ];
64
65
66 % efecto de 2do orden
67 kviga2do = N/(10*le)*[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
      0 0 0
68      0 12 0 0 0 -1e 0 -12 0 ...
      0 0 -1e
69      0 0 12 0 -1e 0 0 0 ...
      -12 0 -1e 0
70      0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
      0 0 0
71      0 0 -1e 0 4/3*le^2 0 0 0 ...
      le -le^2/3 0 0
72      0 -1e 0 0 0 4/3*le^2 0 le 0 ...
      0 0 -1/3*le^2
73      0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
      0 0 0
74      0 -12 0 0 0 le 0 12 0 ...
      0 0 le

```

```

75         0  0 -12  0  1e  0  0  0  0  ...
           12  0  0  0  1e  0
76         0  0  0  0  0  0  0  0  0  ...
           0  0  0  0
77         0  0 -1e  0 4/3*1e^2  0  0  0  ...
           1e -2*1e^2  0  0
78         0 -1e  0  0  0 -1/3*1e^2  0  1e  0  ...
           0  0  0  4/3*1e^2 ];
79
80 kvinga = kvinga + kvinga2do;
81
82 Kvinga = T_Glob2Loc'*kvinga*T_Glob2Loc;

```

**Código A.11:** archivo massV.m

```

1  function M=mass031215V(prop,xy)
2  % calcula la matriz de masa del elemento viga en el sistema global
3  rho = prop.rho;
4  A = prop.areab;
5  Ix = prop.IX;
6
7  b=[ xy(1,2)-xy(1,1); xy(2,2)-xy(2,1); xy(3,2)-xy(3,1)];
8
9  v1 = xy(:,1);
10 v2 = xy(:,2);
11 v3 = v1; % agrego un punto en el plano xy (para definir el ...
           plano necesito 3 puntos no colineales)
12
13 if b(1)==0 && b(3)==0
14     %transformacion especial para el caso que el elemento este ...
           sobre el eje
15     %"y" (caso especial de vigas-columna en m\'astiles ...
           arriostrados)
16     v3(3) = v3(3)+1;
17 else
18     v3(2) = v3(2)+1;
19 end
20
21 le=sqrt(b'*b); % longitud del elemento
22 n1=b/le; %cosenos directores del vector x local
23 n1=n1';
24
25 v21 = v2-v1;
26 v31 = v3-v1;
27
28 b2 = cross(v21,v31); %producto vectorial de v21 y v31 (da el ...
           vector normal a esos dos, -direccion del eje z local-)
29 bb2 = sqrt(b2'*b2);
30 n3 = b2/bb2; %cosenos directores del vector z local
31 n3=n3';
32

```

```

33 %cosenos directores del vector y local --
34 n2 = cross(n3,n1); % producto vectorial ZxX => Y
35 %-----
36
37 An=[n1; n2; n3]; %matrix de los cosenos directores de las ...
    componentes xyz del sistema local en el sistema global
38
39 T_Glob2Loc =[ An      zeros(3) zeros(3) zeros(3);
40              zeros(3) An      zeros(3) zeros(3);
41              zeros(3) zeros(3) An      zeros(3);
42              zeros(3) zeros(3) zeros(3) An      ];
43
44 l=le;
45
46
47 Mel = rho*A*l/2/105 * [ 70      0      0      0      0      0 ...
    0      35      0      0      0      0      0 ...
    0      0      0      0      0      0      0 ...
48 0      78      0      0      0      11*1      0 ...
    0      27      0      0      0      0      -6.5*1
49 0      0      78      0      -11*1      0      0 ...
    0      0      27      0      0      6.5*1      0 ...
50 0      0      0      70*Ix/A      0      0      0 ...
    0      0      0      -35*Ix/A      0      0      0 ...
51 0      -11*1      0      2*1^2      0      0      0 ...
    0      -6.5*1      0      0      -1.5*1^2      0
52 0      11*1      0      0      0      -2*1^2      0 ...
    6.5*1      0      0      0      0      -1.5*1^2
53 35      0      0      0      0      0      0 ...
    0      0      0      0      0      0      0 ...
54 0      27      0      0      0      6.5*1      0 ...
    78      0      0      0      0      11*1
55 0      0      27      0      -6.5*1      0      0 ...
    0      78      0      0      -11*1      0
56 0      0      0      -35*Ix/A      0      0      0 ...
    0      0      70*Ix/A      0      0
57 0      0      6.5*1      0      -1.5*1^2      0      0 ...
    0      -11*1      0      2*1^2      0
58 0      -6.5*1      0      0      0      -1.5*1^2      0 ...
    11*1      0      0      0      0      0
    2*1^2      ];
59
60 M = T_Glob2Loc' * Mel * T_Glob2Loc;
61
62 end

```

**Código A.12:** archivo PeV.m

```

1 function PUEV = Pe03dic15V(prop,U,xy,N)
2
3 K = frameg(prop,xy,N); %matriz de rigidez de la viga

```

```

4
5 PUEV = K*U; %=> esfuerzos internos desarrollados por la viga ...
   (lineales)
6
7 end

```

**Código A.13:** archivo Ke3d.m

```

1 function JAC = Ke3d(prop,le,u,xy)
2 % esta funcion calcula la matriz de rigidez tangente del ...
   elemento cable
3
4 % propiedades del cable
5 E = prop.young;
6 H = prop.initial_tension;
7 A = prop.area;
8
9 % corrimientos del cable
10 u1 = u(1); v1 = u(2); w1 = u(3);
11 u2 = u(4); v2 = u(5); w2 = u(6);
12
13 % coordenadas de los nodos y del elemento
14 y1 = xy(2); y2 = xy(5);
15
16 t2 = 1.0./le.^2;
17 t3 = 1.0./le;
18 t4 = A.*E.*t3;
19 t5 = v1.*2.0;
20 t6 = y1.*2.0;
21 t35 = v2.*2.0;
22 t36 = y2.*2.0;
23 t7 = t5+t6-t35-t36;
24 t8 = w1.*2.0;
25 t38 = w2.*2.0;
26 t9 = t8-t38;
27 t10 = t3.*v1;
28 t13 = t3.*v2;
29 t11 = t10-t13;
30 t17 = t3.*w1;
31 t18 = t3.*w2;
32 t12 = t17-t18;
33 t14 = t3.*y1;
34 t16 = t3.*y2;
35 t15 = t14-t16;
36 t19 = t10-t13+t14-t16;
37 t20 = H.*t3;
38 t21 = t11.^2;
39 t22 = t21.*(1.0./2.0);
40 t23 = t12.^2;
41 t24 = t23.*(1.0./2.0);
42 t25 = t3.*u2;

```

```

43 t26 = t11.*t15;
44 t53 = t3.*u1;
45 t27 = t22+t24+t25+t26-t53;
46 t28 = A.*E.*t3.*t27;
47 t29 = t3.*t11;
48 t30 = t3.*t15;
49 t31 = t29+t30;
50 t32 = A.*E.*t19.*t31;
51 t33 = A.*E.*t3.*t12.*t19;
52 t34 = w1-w2;
53 t37 = 1.0./le.^3;
54 t39 = A.*E.*t7.*t34.*t37.*(1.0./2.0);
55 t40 = v1.*y1.*2.0;
56 t41 = v2.*y2.*2.0;
57 t42 = v1.^2;
58 t43 = v2.^2;
59 t44 = w1.^2;
60 t45 = w2.^2;
61 t57 = v1.*v2.*2.0;
62 t58 = w1.*w2.*2.0;
63 t59 = v1.*y2.*2.0;
64 t60 = v2.*y1.*2.0;
65 t46 = t40+t41+t42+t43+t44+t45-t57-t58-t59-t60;
66 t47 = A.*E.*t37.*t46.*(1.0./2.0);
67 t48 = u1-u2;
68 t49 = A.*E.*t9.*t34.*t37.*(1.0./2.0);
69 t50 = A.*E.*t2.*t7.*(1.0./2.0);
70 t51 = A.*E.*t2.*t9.*(1.0./2.0);
71 t52 = A.*E.*t3.*t19;
72 t54 = -t20-t28-t32;
73 t55 = t20+t28+t32;
74 t56 = A.*E.*t2.*t34;
75 t61 = A.*E.*t2.*t48;
76 t62 = -t20-t47-t49+t61;
77 JAC = ...
    reshape([t4,-A.*E.*t3.*(t10+t14-t3.*v2-t3.*y2),-A.*E.*t2.*t34,-t4,t52,t56,A
    6]);

```

**Código A.14:** archivo Kel.m

```

1 function Kee = Kel031215(prop,U,xy)
2
3 % calcula la matriz de rigidez del elemento en el sistema global
4
5 b=[ xy(1,2)-xy(1,1); xy(2,2)-xy(2,1); xy(3,2)-xy(3,1)];
6
7 v1 = xy(:,1);
8 v2 = xy(:,2);
9 v3 = v1; % agrego un punto en el plano xy (para definir el ...
    plano necesito 3 puntos no colineales)
10

```

```

11 if b(1)==0 && b(3)==0
12     %transformacion especial para el caso que el elemento este ...
        sobre el eje
13     %"y" (caso especial de vigas-columna en m\'astiles ...
        arriostrados)
14     v3(3) = v3(3)+1;
15 else
16     v3(2) = v3(2)+1;
17 end
18
19 le=sqrt(b'*b); % longitud del elemento
20 n1=b/le; %cosenos directores del vector x local
21 n1=n1';
22
23 v21 = v2-v1;
24 v31 = v3-v1;
25
26 b2 = cross(v21,v31); %producto vectorial de v21 y v31 (da el ...
        vector normal a esos dos, -direccion del eje z local-)
27 bb2 = sqrt(b2'*b2);
28 n3 = b2/bb2; %cosenos directores del vector z local
29 n3=n3';
30
31 %cosenos directores del vector y local --
32 n2 = cross(n3,n1); % producto vectorial ZxX => Y
33 %-----
34
35 An=[n1; n2; n3]; %matrix de los cosenos directores de las ...
        componentes xyz del sistema local en el sistema global
36
37 T_Glob2Loc =[ An      zeros(3);
38              zeros(3)  An      ];
39
40 XY = xy(:);
41 xyo = T_Glob2Loc * XY;
42
43 % xy = XY;
44
45 u = T_Glob2Loc * U; %vector de desplazamientos en coordenadas ...
        locales
46
47 K1 = Ke3d(prop,le,u,xyo);
48
49 Kee = T_Glob2Loc' * K1 * T_Glob2Loc;
50
51 end

```

**Código A.15:** archivo mass.m

```

1 function M=mass031215(prop,xy)
2 % calcula la matriz de masa del elemento cable de dos nodos en ...

```

```

    el sistema global
3 rho = prop.rho;
4 A = prop.area;
5 m = rho*A;
6 b=[ xy(1,2)-xy(1,1); xy(2,2)-xy(2,1); xy(3,2)-xy(3,1)];
7
8 v1 = xy(:,1);
9 v2 = xy(:,2);
10 v3 = v1; % agrego un punto en el plano xy (para definir el ...
    plano necesito 3 puntos no colineales)
11
12 if b(1)==0 && b(3)==0
13     %transformacion especial para el caso que el elemento este ...
        sobre el eje
14     %"y" (caso especial de vigas-columna en m\'astiles ...
        arriostrados)
15     v3(3) = v3(3)+1;
16 else
17 v3(2) = v3(2)+1;
18 end
19
20 le=sqrt(b'*b); % longitud del elemento
21 n1=b/le; %cosenos directores del vector x local
22 n1=n1';
23
24 v21 = v2-v1;
25 v31 = v3-v1;
26
27 b2 = cross(v21,v31); %producto vectorial de v21 y v31 (da el ...
    vector normal a esos dos, -direccion del eje z local-)
28 bb2 = sqrt(b2'*b2);
29 n3 = b2/bb2; %cosenos directores del vector z local
30 n3=n3';
31
32 %cosenos directores del vector y local --
33 n2 = cross(n3,n1); % producto vectorial ZxX => Y
34 %-----
35
36 An=[n1; n2; n3]; %matrix de los cosenos directores de las ...
    componentes xyz del sistema local en el sistema global
37
38 T_Glob2Loc =[ An    zeros(3);
39              zeros(3)  An    ];
40
41
42 Mel = m*le/6* [ 2 0 0 1 0 0;
43                0 2 0 0 1 0;
44                0 0 2 0 0 1;
45                1 0 0 2 0 0;
46                0 1 0 0 2 0;
47                0 0 1 0 0 2];
48
49 M = T_Glob2Loc' * Mel * T_Glob2Loc;

```

```
50
51 end
```

**Código A.16:** archivo Pel.m

```
1 function PUE = Pel03dic15(prop,U,xy)
2
3 % Calcula las fuerzas del sistema diferencial (en un elemento) en
4 % coordenadas globales.
5 % U : vector de los desplazamientos en coord globales.
6 % xy : vector de las coordenadas de los nodos del elemento.
7
8 b=[ xy(1,2)-xy(1,1); xy(2,2)-xy(2,1); xy(3,2)-xy(3,1)];
9
10 v1 = xy(:,1);
11 v2 = xy(:,2);
12 v3 = v1; % agrego un punto en el plano xy (para definir el ...
13         plano necesito 3 puntos no colineales)
14
15 if b(1)==0 && b(3)==0
16     %transformacion especial para el caso que el elemento este ...
17     sobre el eje
18     %"y" (caso especial de vigas-columna en m\'astiles ...
19     arriostrados)
20     v3(3) = v3(3)+1;
21 else
22     v3(2) = v3(2)+1;
23 end
24
25 le=sqrt(b'*b); % longitud del elemento
26 n1=b/le; %cosenos directores del vector x local
27 n1=n1';
28
29 v21 = v2-v1;
30 v31 = v3-v1;
31
32 b2 = cross(v21,v31); %producto vectorial de v21 y v31 (da el ...
33     vector normal a esos dos, -direccion del eje z local-)
34 bb2 = sqrt(b2'*b2);
35 n3 = b2/bb2; %cosenos directores del vector z local
36 n3=n3';
37
38 %cosenos directores del vector y local --
39 n2 = cross(n3,n1); % producto vectorial ZxX => Y
40 %-----
41 An=[n1; n2; n3]; %matrix de los cosenos directores de las ...
42     componentes xyz del sistema local en el sistema global
43
44 T_Glob2Loc =[ An      zeros(3);
45              zeros(3)  An      ];
```



```

42
43
44
45 u = T_Glob2Loc * U; %vector de desplazamientos en coordenadas ...
    locales
46 XY = xy(:); %escribe la matrix de pares de valores xy como un ...
    vector.
47 xyo = T_Glob2Loc * XY;
48
49 % xy = XY;
50
51 %lo que se calcula a continuacion es la fuerza que el sistema ...
    (en el
52 %elemento -local-) diferencial no lineal devuelve cuando se ...
    reemplazan los
53 %desplazamientos calculados con la linealizacion (se usa para ...
    calcular
54 %el residuo)
55
56 % xn = xy1(1);
57
58 puu = PU3d(prop,le,u,xyo); %reemplazo los desplazamientos en el ...
    sistema diferencial no lineal (sistema local)
59
60 % Hallo puu para el sistema global
61 PUE = T_Glob2Loc' * puu;
62
63 end

```

**Código A.17:** archivo PU3d.m

```

1 function K = PU3d(prop,le,u,xy)
2 % esta funcion calcula las fuerzas internas desarrolladas por ...
    el elemento
3 % cable (en su formulacion no lineal) provocadas por los ...
    desplazamientos u
4
5 % propiedades del cable
6 E = prop.young;
7 H = prop.initial_tension;
8 A = prop.area;
9
10 % corrimientos del cable
11 u1 = u(1); v1 = u(2); w1 = u(3);
12 u2 = u(4); v2 = u(5); w2 = u(6);
13
14 % coordenadas de los nodos y del elemento
15 y1 = xy(2); y2 = xy(5);
16
17 t2 = 1.0./le;
18 t3 = t2.*v1;

```

```

19 t6 = t2.*v2;
20 t4 = t3-t6;
21 t21 = t2.*w1;
22 t22 = t2.*w2;
23 t5 = t21-t22;
24 t7 = t2.*y1;
25 t8 = 1.0./le.^2;
26 t9 = w1-w2;
27 t10 = v1.*y1.*2.0;
28 t11 = v2.*y2.*2.0;
29 t12 = v1.^2;
30 t13 = v2.^2;
31 t14 = w1.^2;
32 t15 = w2.^2;
33 t16 = le.*u2.*2.0;
34 t33 = v1.*v2.*2.0;
35 t34 = w1.*w2.*2.0;
36 t35 = v1.*y2.*2.0;
37 t36 = v2.*y1.*2.0;
38 t17 = t10+t11+t12+t13+t14+t15+t16-t33-t34-t35-t36-le.*u1.*2.0;
39 t18 = H.*t4;
40 t19 = t4.^2;
41 t20 = t19.*(1.0./2.0);
42 t23 = t5.^2;
43 t24 = t23.*(1.0./2.0);
44 t25 = t2.*u2;
45 t29 = t2.*y2;
46 t26 = t7-t29;
47 t27 = t4.*t26;
48 t28 = t20+t24+t25+t27-t2.*u1;
49 t30 = H.*t2.*t9;
50 t31 = u1-u2;
51 t32 = 1.0./le.^3;
52 K = ...
    [A.*E.*t8.*t17.*(-1.0./2.0);t18+A.*E.*t28.*(t3+t7-t2.*v2-t2.*y2); ...
    t30+A.*E.*t9.*t32.*(t10+t11+t12+t13+t14+t15-v1.*v2.*2.0-w1.*w2.*2.0-v1.*y2.
    t17.*(1.0./2.0);-t18-A.*E.*t28.*(t3-t6+t7-t29);-t30-A.*E.*t9.*t32.* ...
    (t10+t11+t12+t13+t14+t15-t33-t34-t35-t36).*(1.0./2.0)+A.*E.*t8.*t9.*t31];

```

**Código A.18:** archivo FF3d.m

```

1 function F = FF3d(fu, fv, fw, xy)
2
3 b=[ xy(1,2)-xy(1,1); xy(2,2)-xy(2,1); xy(3,2)-xy(3,1)];
4 le=sqrt(b'*b); % longitud del elemento
5
6 t2 = fu.*le.*(1.0./2.0);
7 t3 = fv.*le.*(1.0./2.0);
8 t4 = fw.*le.*(1.0./2.0);
9 F = [t2;t3;t4;t2;t3;t4];

```

**Código A.19:** archivo FF3dV.m

```

1 function F = FF3dV(fu, fv, fw, fx, fy, fz, xy)
2 %computa el vector de cargas (en componentes globales) de la viga
3
4 %fu = carga distribuida axil
5 %fv, fw, cargas distribuidas transversales en direcciones ...
   perpendiculares
6 %fx = momento torsor distribuido
7 %fy, fz = momentos flexores distribuidos.
8
9 b=[ xy(1,2)-xy(1,1); xy(2,2)-xy(2,1); xy(3,2)-xy(3,1)];
10 le=sqrt(b'*b); % longitud del elemento
11
12 m = le/2; mm=le^2/12;
13
14 F = [fu*m; fv*m; fw*m; fx*m; -fw*mm; -fv*mm; fu*m; fv*m; fw*m; ...
   fx*m; fw*mm; fv*mm];

```

**Código A.20:** archivo Plot\_mast.m

```

1 %Deformada
2 if t==length(tspan)
3     %     it=10;
4     d=resultados.pos(:,it);
5 else
6     d = u0;
7 end
8
9 fe=15;
10 figure('units','normalized','position',[0.2 0.1 0.6 0.75]);
11 hold on
12 for i = 1:max(ElNod(:,5))
13
14     a = ElNod(ElNod(:,5)==i,[3 4]); %extrae los datos de elementos ...
   de cable1 de la matriz ElNod
15     nodos = [a(:,1);a(end,2)]; % nodos de los elementos del cable1
16     GLs = NodDof(1:3,nodos);
17     Coords = Coord(:,nodos);
18     Cx = Coords(1,:);
19     Cy = Coords(2,:);
20     Cz = Coords(3,:);
21
22     plot3(Cx,Cz,Cy,'k')
23
24     b = [d(GLs(1,:)),d(GLs(2,:)),d(GLs(3,:))]' ;
25     c = Coords + fe*b;
26
27     plot3(c(1,:),c(3,:),c(2,),'r')
28 end
29 view(-24,34)

```

```

30
31
32
33 % % N = [6 12];
34 % % Qy = [7 13];
35 % % Qz = [8 14];
36 % % My = [9 15];
37 % % Mz = [10 16];
38 % % T = [11 17];
39 % %
40 % figure
41 % N = [result(:,7);result(end,12)];
42 % for i = 1:max(ElNod(:,5))
43 % a = ElNod(ElNod(:,5)==i,[3 4]); %extrae los datos de ...
    elementos de cable1 de la matriz ElNod
44 % b = ElNod(ElNod(:,5)==i,1);
45 % nodos = [a(:,1);a(end,2)]; % nodos de los elementos del cable1
46 % GLs = NodDof(1:3,nodos);
47 % Coords = Coord(:,nodos);
48 %
49 % bb = result(b,[7 13]);
50 % C = [bb(:,1);bb(end,2)];
51 %
52 % Cx = Coords(1,:);
53 % Cy = Coords(2,:);
54 % Cz = Coords(3,:);
55 %
56 % surface([Cx(:),Cx(:)], [Cz(:), ...
    Cz(:)], [Cy(:),Cy(:)], [C(:),C(:)],...
57 % 'EdgeColor','flat', 'FaceColor','none','linew',2);
58 % colormap(jet)
59 %
60 % end
61 % view(-24,34)

```

**Código A.21:** archivo Plot\_dyn.m

```

1 %animacion de analisis dinamico
2
3 figure('units','normalized','position',[0.2 0.1 0.6 0.75]);
4 for it=1:1:tt
5     d=resultados.pos(:,it);
6 fe=10;
7
8 for i = 1:max(ElNod(:,5))
9
10 a = ElNod(ElNod(:,5)==i,[3 4]); %extrae los datos de elementos ...
    de cable1 de la matriz ElNod
11 nodos = [a(:,1);a(end,2)]; % nodos de los elementos del cable1
12 GLs = NodDof(1:3,nodos);
13 Coords = Coord(:,nodos);

```

```

14 Cx = Coords(1,:);
15 Cy = Coords(2,:);
16 Cz = Coords(3,:);
17
18 plot3(Cx,Cz,Cy,'k')
19 hold on
20 b = [d(GLs(1,:)),d(GLs(2,:)),d(GLs(3,:))];
21 c = Coords + fe*b;
22
23 plot3(c(1,:),c(3,:),c(2),'r','linewidth',2)
24 end
25 view(-24,34)
26 pause(0.01)
27 hold off
28 end

```

**Código A.22:** archivo posproceso.m

```

1 % Archivo de postproceso. Escribe los archivos de datos de ...
   esfuerzos de la
2 % estructura
3
4 if t == length(tspan)
5     %     it = 15;
6     res = resultados.pos(:,it);
7 else
8     res = u0;
9 end
10
11 result = zeros(ne, 17);
12 result(:,1) = ElNod(:,1);
13 result(:,[2 3]) = ElNod(:,[3 4]);
14 result(:,4) = ElNod(:,2);
15 result(:,5) = ElNod(:,5);
16
17 desplaz = result;
18
19 for i=1:ne
20     % Nodos del elemento
21     ien = IEN(:,i);
22     ien(ien==0)=[];
23
24     %desplazamientos del elemento
25     U = res(ien);
26
27     % coordenadas de los nodos del elemento i
28     xy = Coord(:,ElNod(i,3:4));
29
30     if ElNod(i,2) == 1 % si el elemento es viga....
31         [N1, Qy1, Qz1, My1, Mz1, T1, N2, Qy2, Qz2, My2, Mz2, ...
          T2] = beam_eff(prop,xy,U);

```

```

32     rr = [N1, Qy1, Qz1, My1, Mz1, T1, N2, Qy2, Qz2, My2, ...
33           Mz2, T2];
34     result(i,6:17) = result(i,6:17) + rr;
35     desplaz(i,6:17) = desplaz(i,6:17) + U';
36 else % si el elemento es cable
37     [N] = cable_eff(prop,xy,U);
38     rr = [N,N];
39     result(i,[6 12]) = result(i,[6 12]) + rr;
40     desplaz(i,[6 7 8 12 13 14]) = desplaz(i,[6 7 8 12 13 ...
41           14]) + U';
42 end
43 if t==length(tspan)
44     enc = {'Elemento','nodo i','nodo ...
45           j','material','parte','Ni','Qyi','Qzi',...
46           'Myi','Mzi','Ti','Nj','Qyj','Qzj','Myj','Mzj','Tj'};
47     ress = num2cell(result);
48     datares = [enc;ress];
49     xlswrite('Esfuerzos_t.xls',datares);
50     enc2 = {'Elemento','nodo i','nodo ...
51           j','material','parte','dxi','dyi','dzi',...
52           'Rxi','Ryi','Rzi','dxj','dyj','dzj','Rxj','Ryj','Rzj'};
53     despll = num2cell(desplaz);
54     datadesp = [enc2;despll];
55     xlswrite('Desplazamientos_t.xls',datadesp)
56 else
57     enc = {'Elemento','nodo i','nodo ...
58           j','material','parte','Ni','Qyi','Qzi',...
59           'Myi','Mzi','Ti','Nj','Qyj','Qzj','Myj','Mzj','Tj'};
60     ress = num2cell(result);
61     datares = [enc;ress];
62     xlswrite('Esfuerzos.xls',datares);
63     enc2 = {'Elemento','nodo i','nodo ...
64           j','material','parte','dxi','dyi','dzi',...
65           'Rxi','Ryi','Rzi','dxj','dyj','dzj','Rxj','Ryj','Rzj'};
66     despll = num2cell(desplaz);
67     datadesp = [enc2;despll];
68     xlswrite('Desplazamientos.xls',datadesp)
69     enc3 = {'Nodo','Rx','Ry','Rz','Mx','My','Mz'};
70     datar = num2cell(Reac_est);
71     datare = [enc3;datar];
72     xlswrite('Reacciones.xls',datare)
73 end

```

Código A.23: archivo cable\_eff.m

```

1 function [N] = cable_eff(prop,xy,U)
2
3 % propiedades del cable
4 E = prop.young;
5 H = prop.initial_tension;
6 A = prop.area;
7
8 b=[ xy(1,2)-xy(1,1); xy(2,2)-xy(2,1); xy(3,2)-xy(3,1)];
9
10 v1 = xy(:,1);
11 v2 = xy(:,2);
12 v3 = v1; % agrego un punto en el plano xy (para definir el ...
           plano necesito 3 puntos no colineales)
13
14 if b(1)==0 && b(3)==0
15     %transformacion especial para el caso que el elemento este ...
           sobre el eje
16     %"y" (caso especial de vigas-columna en m\'astiles ...
           arriostrados)
17     v3(3) = v3(3)+1;
18 else
19 v3(2) = v3(2)+1;
20 end
21
22 le=sqrt(b'*b); % longitud del elemento
23 n1=b/le; %cosenos directores del vector x local
24 n1=n1';
25
26 v21 = v2-v1;
27 v31 = v3-v1;
28
29 b2 = cross(v21,v31); %producto vectorial de v21 y v31 (da el ...
           vector normal a esos dos, -direccion del eje z local-)
30 bb2 = sqrt(b2'*b2);
31 n3 = b2/bb2; %cosenos directores del vector z local
32 n3=n3';
33
34 %cosenos directores del vector y local --
35 n2 = cross(n3,n1); % producto vectorial ZxX => Y
36 %-----
37
38 An=[n1; n2; n3]; %matrix de los cosenos directores de las ...
           componentes xyz del sistema local en el sistema global
39
40 T_Glob2Loc = [ An      zeros(3);
41               zeros(3)  An      ];
42
43 XY = xy(:);
44 xyo = T_Glob2Loc * XY;
45
46 y1 = xyo(2); y2 = xyo(5);
47 Y = [y1;y2];

```

```

48 % xy = XY;
49
50 u = T_Glob2Loc * U; %vector de desplazamientos en coordenadas ...
    locales
51
52 dU = u([1 4]);
53 dV = u([2 5]);
54 dW = u([3 6]);
55
56 alpha1 = [-1/le;1/le]; % para hallar el esfuerzo normal en ...
    vigas y momento torsor.
57
58 up = dU'*alpha1; vp = dV'*alpha1; wp = dW'*alpha1; yp=Y'*alpha1;
59
60 epsilon = up+yp*vp+vp^2/2+wp^2/2; %no considera
61
62 N = H+E*A*epsilon;

```

**Código A.24:** archivo beam\_eff.m

```

1 function [N1, Qy1, Qz1, My1, Mz1, T1, N2, Qy2, Qz2, My2, Mz2, ...
    T2] = beam_eff(prop,xy,U)
2
3 E = prop.youngb; %(modulo de elasticidad)
4 A = prop.areab; %(area)
5 Iz = prop.IZ; %(inercia flexion en el plano de la viga)
6 Iy = prop.IY; %(inercia flexion fuera del plano de la viga)
7 Ix = prop.IX; %(inercia polar de la viga)
8 Gb = prop.Gb; %(modulo de corte)
9
10 b=[ xy(1,2)-xy(1,1); xy(2,2)-xy(2,1); xy(3,2)-xy(3,1)];
11
12 v1 = xy(:,1);
13 v2 = xy(:,2);
14 v3 = v1; % agrego un punto en el plano xy (para definir el ...
    plano necesito 3 puntos no colineales)
15
16 if b(1)==0 && b(3)==0
17     %transformacion especial para el caso que el elemento este ...
    sobre el eje
18     %"y" (caso especial de vigas-columna en m\'astiles ...
    arriostrados)
19     v3(3) = v3(3)+1;
20 else
21 v3(2) = v3(2)+1;
22 end
23
24 le=sqrt(b'*b); % longitud del elemento
25 n1=b/le; %cosenos directores del vector x local
26 n1=n1';
27

```



```

28 v21 = v2-v1;
29 v31 = v3-v1;
30
31 b2 = cross(v21,v31); %producto vectorial de v21 y v31 (da el ...
    vector normal a esos dos, -direccion del eje z local-)
32 bb2 = sqrt(b2'*b2);
33 n3 = b2/bb2; %cosenos directores del vector z local
34 n3=n3';
35
36 %cosenos directores del vector y local --
37 n2 = cross(n3,n1); % producto vectorial ZxX => Y
38 %-----
39
40 An=[n1; n2; n3]; %matrix de los cosenos directores de las ...
    componentes xyz del sistema local en el sistema global
41
42 T_Glob2Loc =[ An      zeros(3) zeros(3) zeros(3);
43              zeros(3) An      zeros(3) zeros(3);
44              zeros(3) zeros(3) An      zeros(3);
45              zeros(3) zeros(3) zeros(3) An      ];
46
47 l=le;
48
49 u = T_Glob2Loc * U; %vector de desplazamientos en coordenadas ...
    locales
50
51 dU = u([1 7]);
52 dV = u([2 6 8 12]);
53 dW = u([3 5 9 11]);
54 dT = u([4 10]);
55
56 x = le;
57
58 p1 = 12*x/le^3 - 6/le^2; p2 = -4*(x/le-1)/le-2*x/le^2;
59 p3 = 6/le^2-12*x/le^3; p4 = 2/le-6*x/le^2;
60
61 phi_2 = [p1;p2;p3;p4]; %-para hallar el momento en el nodo 2 ...
    del elemento
62
63 p1 = 12/le^3; p2=-6/le^2; p3 = -p1; p4 = p2;
64
65 phi_3 = [p1;p2;p3;p4]; % para hallar el corte en el nodo 2 del ...
    elemento
66
67 alpha1 = [-1/le;1/le]; % para hallar el esfuerzo normal en ...
    vigas y momento torsor.
68
69 N2 = E*A*dU'*alpha1; T2 = Gb*Ix*dT'*alpha1;
70 Qy2 = E*Iz*dV'*phi_3; Qz2 = E*Iy*dW'*phi_3;
71 My2 = E*Iz*dV'*phi_2; Mz2 = E*Iy*dW'*phi_2;
72
73 x = 0;
74

```

```
75 pp1 = 12*x/le^3 - 6/le^2; pp2 = -4*(x/le-1)/le-2*x/le^2;  
76 pp3 = 6/le^2-12*x/le^3; pp4 = 2/le-6*x/le^2;  
77  
78 pphi_2 = [pp1;pp2;pp3;pp4]; %-para hallar el momento en el nodo ...  
    2 del elemento  
79  
80 pp1 = 12/le^3; pp2=-6/le^2; pp3 = -pp1; pp4 = p2;  
81  
82 pphi_3 = [pp1;pp2;pp3;pp4]; % para hallar el corte en el nodo 2 ...  
    del elemento  
83  
84 palpha1 = [-1/le;1/le]; % para hallar el esfuerzo normal en ...  
    vigas y momento torsor.  
85  
86 N1 = E*A*dU'*palpha1; T1 = Gb*Ix*dT'*palpha1;  
87 Qy1 = E*Iz*dV'*pphi_3; Qz1 = E*Iy*dW'*pphi_3;  
88 My1 = E*Iz*dV'*pphi_2; Mz1 = E*Iy*dW'*pphi_2;
```