



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTORA EN MATEMÁTICA

**La cohomología de Hochschild de álgebras de cuerdas
y su estructura de álgebra de Gerstenhaber**

Lucrecia Juliana Román

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2015

Prefacio

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctora en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Sur durante el período comprendido entre los meses de abril de 2010 y noviembre de 2015, bajo la dirección de la Dra. María Julia Redondo, Profesora Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur. Este trabajo ha sido financiado en parte con becas de posgrado otorgadas por CONICET.

A mis abuelos.



Agradecimientos

Muchos! Porque más allá de que esta tesis sea el resultado de años de estudio y trabajo, es a partir de ella que conocí a lindas personas y una vez más sentí el afecto de otras que me acompañan desde hace tiempo, y para mí todo esto forma parte de los resultados más valiosos que uno obtiene en la vida.

Un muy especial agradecimiento quiero hacer a mi Directora María Julia, la persona que confió en mí desde el comienzo, alentándome en cada cuentas que hacía y quien no deja de sorprenderme por su gran capacidad y dedicación en cada cosa que hace; realmente todas las oportunidades que tuve y tengo se las debo a ella. Gracias!!!

Gracias también a todos los profesores que he tenido a lo largo de estos años, en especial a María Inés Platzeck, a quien admiro por su manera de enseñar, su pasión al hacer matemática y su enorme generosidad y a Sheldy Ombrosi por enseñarme a mirar la matemática de forma diferente. En esta etapa de doctorado tuve la suerte de conocer a tres personas increíbles: Vale, Andrea Bel y Andrea Gatica, con las cuales he compartido viajes, largas charlas, muchos momentos divertidos, quienes me han brindado más que una amistad, quienes pasaron a ser muy importantes para mí. Gracias a mis amigas de la famosa oficina de becarios: Jessie y (de nuevo) Andre, gracias por tantos lindos momentos juntas, por tantos mates, por estar siempre, por los famosos almuerzos en la UNS y acá no puedo olvidarme de Diego, gracias también por ser parte de esta etapa. A Romi, Mel y Vero, por hacerme reír tanto en momentos donde mi nivel de nerviosismos estaba elevadísimo (Romi, me acuerdo de inglés no puedo evitar seguir riéndome, gracias amiga!). Gracias Marita por tus consejos. A mis amigas de hace tantos años, July, Ale, Bety, Lujan, Yany, Lau, Gise, Nadia, Wan, Gra, por siempre preguntarme por mi trabajo. A muchas personas: directivos, docentes, no docentes, a los chicos del laboratorio, del instituto, que me paraban en los pasillos de la UNS, para preguntarme como estaba, gracias a todos ellos, que aun sin nombrarlos, los gestos que tuvieron no los voy a olvidar. Gracias también a los Dres. Ibrahim Assem, Mariano Suárez-Álvarez y Paulo Tiraio, por aceptar ser jurados de esta tesis, por sus comentarios y por su buena predisposición, respetando los tiempos pautados para la defensa de la tesis. Finalmente y muy especialmente, agradezco a mi familia, porque sin su apoyo continuo todo esto hubiese sido muy difícil. Gracias Ma y Pa por darme la posibilidad de estudiar, por enseñarme lo importante que es ser responsable, paciente, por demostrarme que cualquier meta se logra con mucho trabajo. Gracias Ger por estar siempre a mi lado acompañándome, por escucharme, por escucharme, por escucharme (y no me estoy equivocando al tipiar), por contenerme en aquellos días en los que veía esto tan lejos y gracias a mis hermanos, Caro, Cintia y Nico por estar siempre.

Resumen

Este trabajo es sobre la cohomología de Hochschild de k -álgebras de dimensión finita

$$\mathrm{HH}^*(A) = \bigoplus_{n \geq 0}^{\infty} \mathrm{HH}^n(A).$$

Los resultados obtenidos se refieren al cálculo explícito de los grupos $\mathrm{HH}^n(A)$ cuando A es un álgebra de cuerdas y a la descripción de la estructura de álgebra de Gerstenhaber de $\mathrm{HH}^*(A)$ cuando A es un álgebra monomial.

En primer lugar, utilizando la resolución proyectiva de minimal de Bardzell, se hallan los grupos de cohomología de Hochschild de álgebras de cuerdas triangulares y de álgebras de cuerdas cuadráticas, no necesariamente triangulares, haciéndose un análisis riguroso de los elementos que son cociclos y cobordes del complejo asociado. Toda esta información es usada en la última parte de este trabajo.

En segundo lugar construimos morfismos de comparación entre la resolución del radical y la resolución minimal de Bardzell en el caso de álgebras monomiales. Estos morfismos nos permiten definir la estructura de álgebra de Gerstenhaber de $\mathrm{HH}^*(A)$ cuando A es un álgebra monomial cuyos grupos de cohomología $\mathrm{HH}^n(A)$ han sido calculados a partir de la resolución de Bardzell.

Finalmente, utilizando el morfismo de comparación y el conocimiento de los grupos de cohomología hallados en la primera parte de este trabajo, describimos la estructura de álgebra de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de las álgebras de cuerdas triangulares y de las álgebras de cuerdas cuadráticas no necesariamente triangulares. En el caso triangular pudimos mostrar que la estructura de anillo conmutativo graduado de la cohomología de Hochschild es trivial y pudimos obtener una fórmula que nos permite calcular su estructura de álgebra de Lie graduada. En el caso cuadrático vimos que el morfismo de comparación adquiere una forma muy simple. En este caso usamos la información de los grupos de cohomología para encontrar condiciones sobre el carcaj asociado a estas álgebras que muestran cómo obtener estructuras no triviales.



Abstract

This thesis is about the Hochschild cohomology of a finite dimensional k -algebra A

$$\mathrm{HH}^*(A) = \bigoplus_{n \geq 0}^{\infty} \mathrm{HH}^n(A).$$

The results refer to the explicit calculation of the groups $\mathrm{HH}^n(A)$ when A is a string algebra and the description of the Gerstenhaber algebra structure of $\mathrm{HH}^*(A)$ when A is a monomial algebra.

Firstly, using Bardzell's projective minimal resolution, we find the Hochschild cohomology groups of triangular string algebras and of quadratic algebras, and we make a rigorous analysis of the elements which are cocycles and coborders in the associated complex. All this information is used in the latter part of this work.

Secondly, we construct comparison morphisms between the radical resolution and Bardzell's minimal resolution for monomial algebras. With these morphisms we define the Gerstenhaber algebra structure of $\mathrm{HH}^*(A)$ when A is a monomial algebra whose cohomology groups are calculated using Bardzell's resolution.

Finally, using the comparison morphisms and the knowledge of the cohomology groups found in the first part of this work, we describe the Gerstenhaber algebra structure of the Hochschild cohomology of A when A is a triangular string algebra and when A is a quadratic algebra. In the triangular case we show that the structure of commutative ring of the Hochschild cohomology is trivial, and we get a formula that allows us to calculate the structure of graded Lie algebra. In the quadratic case we show that the comparison morphisms take a very simple form, and we use the information about the cohomology groups to find conditions on the bound quiver associated to these algebras in order to get non-trivial structures.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	7
1.1. Homología	7
1.2. Cohomología de Hochschild	9
1.3. El álgebra de Gerstenhaber	13
1.4. Álgebras de caminos y carcaj asociado a un álgebra	17
1.5. La resolución de Bardzell	20
2. Cohomología de Hochschild de álgebras de cuerdas	25
2.1. Álgebras de cuerdas	25
2.2. Cohomología de álgebras de cuerdas triangulares	26
2.3. Cohomología de álgebras de cuerdas cuadráticas	31
3. Sobre la resolución del radical y la resolución minimal de Bardzell	49
3.1. Resoluciones proyectivas del álgebra A	49
3.2. Morfismos de comparación	51
3.3. El morfismo de comparación \mathbf{F}	55
3.4. El morfismo de comparación \mathbf{G}	59
3.5. Estructura de álgebra de Gerstenhaber de $\mathrm{HH}^*(A)$	77
3.5.1. El producto cup y el corchete de Lie en álgebras monomiales	80
3.5.2. Estructura de módulo de Lie de $\mathrm{HH}^*(A)$	82
3.5.3. El producto cup en $\bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{HH}^{2n}(A)$	83
4. Álgebra de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de álgebras de cuerdas	85
4.1. Álgebras de cuerdas triangulares	86
4.2. Álgebras de cuerdas cuadráticas	98
4.2.1. Los morfismos de comparación	98
4.2.2. Descripción del producto cup y del corchete de Lie	100
4.2.3. Estructuras no triviales	101
Bibliografía	105



Introducción

Esta introducción tiene como objetivo presentar los principales resultados de este trabajo y las motivaciones que nos impulsaron a la realización de los mismos.

La cohomología de Hochschild es una teoría de homología para álgebras asociativas sobre cuerpos. Posee importantes propiedades de invariancia, por ejemplo es invariante bajo equivalencia derivadas y bajo equivalencia Morita. Fue introducida por G. Hochschild en 1945 en [Ho]. Para un álgebra A sobre un cuerpo k y un A -bimódulo B , G. Hochschild considera el grupo de aplicaciones n -lineales $L_k^n(A, B)$ y define el operador coborde $L_k^n(A, B) \rightarrow L_k^{n+1}(A, B)$ en analogía con el correspondiente de la topología algebraica. El n -ésimo grupo de cohomología de este complejo se denota $\mathrm{HH}^n(A, B)$, $n \geq 0$ y recibe el nombre de n -ésimo grupo de cohomología de Hochschild de A con coeficientes en B . Posteriormente, en 1956, H. Cartan y S. Eilenberg extienden esta teoría a álgebras sobre anillos más generales en [CE]. Ellos prueban que los grupos de cohomología pueden obtenerse como un caso particular de la teoría de funtores derivados: si $A^e = A \otimes_k A^{op}$ es el álgebra envolvente de A , y B es un A -bimódulo (o, lo que es lo mismo, B es un A^e -módulo), ellos definen los grupos de cohomología de A con coeficientes en B en términos del funtor Ext , esto es, $\mathrm{HH}^n(A, B) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, B)$.

Uno de los casos más estudiados, y este será el considerado en esta tesis, es cuando el A -bimódulo B es igual a A , siendo A una k -álgebra de dimensión finita y k un cuerpo algebraicamente cerrado. A las álgebras que son de este tipo se les puede asociar un carcaj con relaciones, lo que permite obtener información sobre los grupos $\mathrm{HH}^n(A, A)$, que de ahora en más serán notados $\mathrm{HH}^n(A)$, a partir de datos combinatorios que se expresan en función del carcaj y las relaciones. Los primeros intentos de obtener fórmulas para las dimensiones de los grupos $\mathrm{HH}^n(A)$ fueron hecho por Cibils [C1] y Happel [Ha]. Sin embargo, sólo en situaciones específicas se han hallado fórmulas explícitas para determinar estas dimensiones, ver por ejemplo [BLM, C1, C3, EH, GR, Ha, Lo, R1].

La cohomología de Hochschild $\mathrm{HH}^*(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{HH}^n(A)$ admite una estructura algebraica interesante; Gerstenhaber define en [G] dos operaciones: el producto cup

$$- \cup - : \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \rightarrow \mathrm{HH}^{n+m}(A)$$

y el corchete de Lie

$$[-, -] : \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \rightarrow \mathrm{HH}^{n+m-1}(A).$$

Ellos son inducidos por operaciones definidas usando la resolución bar y dan a la cohomología de Hochschild $\mathrm{HH}^*(A)$ una estructura de álgebra de Gerstenhaber. Más precisamente, $(\mathrm{HH}^*(A), \cup)$ es un álgebra conmutativa graduada y $(\mathrm{HH}^*(A), [,])$ es un álgebra de Lie graduada. Además estas dos operaciones se relacionan por medio de la identidad de Poisson, esto es,

$$[g \cup h, f] = [g, f] \cup h + (-1)^{|f|(|h|-1)} g \cup [h, f]$$

y así se tiene que $(\mathrm{HH}^*(A), \cup, [,])$ es un álgebra de Gerstenhaber. Ha sido probado que ambas estructuras son preservadas bajo equivalencias derivadas, ver [Ha, K, R], lo que aumenta aún más el interés por su estudio.

Un problema actual es describir esta estructura, y una de las técnicas con que esto puede hacerse es mediante la definición de estas operaciones a partir de resoluciones más sencillas que la resolución bar. Para el producto cup esto es posible, debido a que coincide con el producto de Yoneda, y este último se puede calcular utilizando cualquier resolución proyectiva del A -bimódulo A . Con respecto al corchete de Lie, sólo se han hecho descripciones en casos particulares, ver por ejemplo [Bu, SF, S].

Nuestro principal interés es el estudio de la cohomología de Hochschild y su estructura de álgebra de Gerstenhaber.

Los primeros resultados de este trabajo se refieren al cálculo de los grupos de cohomología de Hochschild de álgebras de cuerdas triangulares y de álgebras de cuerdas cuadráticas.

Recordemos que un álgebra es llamada de cuerdas si es Morita equivalente a un álgebra kQ/I con la presentación (Q, I) satisfaciendo:

- S1) Cada vértice en Q es el origen de a lo sumo dos flechas y el final de a lo sumo dos flechas;
- S2) Para cada flecha α en Q existe a lo sumo una flecha β y a lo sumo una flecha γ tal que $\alpha\beta \notin I$ y $\gamma\alpha \notin I$.
- S3) I es un ideal monomial.

Un álgebra se dice cuadrática si el ideal I está generado por caminos de longitud 2 y un álgebra se dice triangular si el carcaj asociado Q no tiene circuitos orientados.

Debido a que las álgebras de cuerdas son álgebras monomiales, pudimos usar la resolución proyectiva minimal de Bardzell desarrollada en [B] para calcular sus grupos de cohomología. De esta manera conseguimos fórmulas que nos permitieron determinar sus dimensiones a partir de caminos visualizados en el carcaj con relaciones asociado a estas álgebras. Más precisamente, obtuvimos los siguientes resultados:

Teorema 2.2.4. *Si A es un álgebra de cuerdas triangular entonces*

$$\dim_k \mathrm{HH}^n(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ |Q_1| + |{}^-(0, 0)_1^-| - |Q_0| + 1 & \text{si } n = 1, \\ |{}^{+-}(0, 1)_n| + |{}^-(0, 0)_n^-| & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Teorema 2.3.8. *Si A es un álgebra de cuerdas cuadrática entonces*

$$\begin{aligned} \dim_k \mathrm{HH}^0(A) &= |^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^-| + 1, \\ \dim_k \mathrm{HH}^1(A) &= \begin{cases} |^-(0,0)_1^-| + |Q_1| - |Q_0| + 1 & \text{si } \mathrm{car} k \neq 2, \\ |^-(0,0)_1^-| + |Q_1| - |Q_0| + 1 + |\mathcal{G}_1| & \text{si } \mathrm{car} k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Teorema 2.3.10. *Si A es un álgebra de cuerdas cuadrática y $n \geq 2$ entonces*

$$\begin{aligned} \dim_k \mathrm{HH}^n(A) &= |^-(0,0)_n^-| + |\mathcal{E}_n| - |N\mathcal{E}_{n-1}| + |((1,0)_n \sqcup ^-(0,1)_n) \cap (AP_n//Q_1)| \\ &+ \begin{cases} \dim_k k\mathcal{G}_n / \mathrm{Im}(1-t) & \text{si } n \text{ es par y } \mathrm{car} k \neq 2 \\ \dim_k k\mathcal{G}_{n-1} / \mathrm{Im}(1-t) & \text{si } n \text{ es impar y } \mathrm{car} k \neq 2, \\ \dim_k k\mathcal{G}_n / \mathrm{Im}(1-t) + \dim_k k\mathcal{G}_{n-1} / \mathrm{Im}(1-t) & \text{si } \mathrm{car} k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

En el desarrollo de la tesis daremos una definición precisa de $^-(a,b)^-$, $^{++}(a,b)$, con $a, b \in \{0, 1\}$, \mathcal{G}_n , \mathcal{E}_n , y $N\mathcal{E}_{n-1}$, que son conjuntos especiales cuyos elementos son caminos paralelos a ciertas concatenaciones de relaciones. Estos elementos nos permiten describir bases de los grupos de cohomología que son utilizados en la última parte de la tesis para describir el producto cup y el corchete de Lie en $\mathrm{HH}^*(A)$.

En la segunda parte de este trabajo nos concentramos en la estructura de álgebra de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de álgebras monomiales. Nuestro propósito es obtener las definiciones del producto cup y del corchete de Lie a partir de la resolución de Bardzell.

Si A es un álgebra monomial, consideramos la resolución de Bardzell

$$\mathbf{Ap} : \quad \dots \longrightarrow A \otimes kAP_n \otimes A \xrightarrow{d_n} A \otimes kAP_{n-1} \otimes A \longrightarrow \dots \longrightarrow A \otimes kAP_0 \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0,$$

la resolución del radical

$$\mathbf{Rad} : \quad \dots \longrightarrow A \otimes \mathrm{rad} A^{\otimes n} \otimes A \xrightarrow{b_n} A \otimes \mathrm{rad} A^{\otimes n-1} \otimes A \longrightarrow \dots \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

y la resolución bar

$$\mathbf{Bar} : \quad \dots \longrightarrow A \otimes_E A^{\otimes n} \otimes_E A \xrightarrow{b'_n} A \otimes_E A^{\otimes n-1} \otimes_E A \longrightarrow \dots \longrightarrow A \otimes_E A \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0,$$

con $E = kQ_0$.

El producto cup y del corchete de Lie definidos por Gerstenhaber se expresan en función de la resolución bar, y la resolución del radical fue utilizada por Claudia Strametz y por Selene Sánchez-Flores en [S, SF] para estudiar el corchete de Lie.

Nosotros definimos explícitamente morfismos $\mathbf{F} : \mathbf{AP} \rightarrow \mathbf{Rad}$ y $\mathbf{G} : \mathbf{Rad} \rightarrow \mathbf{AP}$ y así obtenemos el primer resultado de comparación:

Teorema 3.2.1. *Las aplicaciones \mathbf{F} y \mathbf{G} son morfismos de comparación entre las resoluciones proyectivas \mathbf{Ap} y \mathbf{Rad} .*

Su demostración consiste en mostrar la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^n} \otimes_E A & \xrightarrow{b_n} & A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^{n-1}} \otimes_E A \\
\downarrow G_n & & \downarrow G_{n-1} \\
A \otimes_E AP_n \otimes_E A & \xrightarrow{d_n} & A \otimes_E AP_{n-1} \otimes_E A \\
\\
A \otimes_E AP_n \otimes_E A & \xrightarrow{d_n} & A \otimes_E AP_{n-1} \otimes_E A \\
\downarrow F_n & & \downarrow F_{n-1} \\
A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^n} \otimes_E A & \xrightarrow{b_n} & A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^{n-1}} \otimes_E A.
\end{array}$$

Además estos morfismos de comparación verifican la igualdad $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} = \text{Id}_{\mathbf{Ap}}$.

Queremos destacar que nuestra elección de la resolución del radical en lugar de la resolución bar ha sido simplemente para simplificar notaciones; a partir del morfismo \mathbf{G} se puede definir un nuevo morfismo de comparación $\mathbf{V} : \mathbf{Bar} \rightarrow \mathbf{Ap}$ y la misma demostración del Teorema 3.2.1 nos permite afirmar que \mathbf{V} es también morfismo de comparación. Tenemos entonces que nuestro teorema compara la resolución \mathbf{Bar} y la resolución \mathbf{Ap} , y de esta manera pudimos describir ambas estructuras, el corchete de Lie y el producto cup en $\text{HH}^*(A)$, a partir de la resolución de Bardzell. Más precisamente, definimos el producto cup y el corchete de Lie mediante las fórmulas:

$$f \cup g = F^{n+m}(V^n(f) \cup V^m(g)) \quad \text{y} \quad [f, g] = F^{m+n-1}[V^n(f), V^m(g)]$$

donde

$$\begin{aligned}
(F^n : \text{Hom}_{E-E}(A^{\otimes^n}, A) &\longrightarrow \text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A))_{n \geq 0} \text{ y} \\
(V^n : \text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A) &\longrightarrow \text{Hom}_{E-E}(A^{\otimes^n}, A))_{n \geq 0}
\end{aligned}$$

y estas fórmulas inducen las operaciones \cup y $[,]$ en $\text{HH}^*(A)$.

En la última parte de este trabajo combinamos los resultados obtenidos para describir explícitamente el producto cup y el corchete de Lie en la cohomología $\text{HH}^*(A)$ cuando A es un álgebra de cuerdas triangular y cuando A es un álgebra de cuerdas cuadrática.

En el primer caso, mostramos que la estructura de anillo conmutativo graduado de $\text{HH}^*(A)$ es trivial.

Teorema 4.1.7. *Si A es una álgebra de cuerdas triangular, $n, m > 0$, entonces $\text{HH}^n(A) \cup \text{HH}^m(A) = 0$.*

Respecto a la estructura de álgebra de Lie hallamos la siguiente fórmula de la operación \circ_i , que se utiliza para calcular el corchete de Lie, en términos de caminos visualizados en el carcaj con relaciones asociado a estas álgebras:

Teorema 4.1.10. Sean $n, m \geq 2$, $(\rho_1, \gamma_1) \in {}^-(0, 0)_n^- \sqcup (1, 0)_n^-$ y $(\rho_2, \gamma_2) \in {}^-(0, 0)_m^- \sqcup (1, 0)_m^-$. Consideremos la descomposición $\rho_1 = {}^{(i-1)}\rho_1 a \rho_1^{(n-i)}$. Entonces $(\rho_1, \gamma_1) \circ_i (\rho_2, \gamma_2)$ es no nula si y sólo si

(a) $i = 1$, $\gamma_2 = ba$, $\rho_2 \rho_1^{(n-1)} \in AP_{n+m-1}$ y $b\gamma_1 \in \mathcal{P}$. En este caso,

$$(a\rho_1^{(n-1)}, \gamma_1) \circ_1 (\rho_2, ba) = (\rho_2 \rho_1^{(n-1)}, b\gamma_1),$$

(b) $i > 1$, $a = c\gamma_2$ y ${}^{(i-1)}\rho_1 c \rho_2 \rho_1^{(n-i)} \in AP_{n+m-1}$. En este caso,

$${}^{(i-1)}\rho_1 c \rho_2 \rho_1^{(n-i)}, \gamma_1) \circ_i (\rho_2, \gamma_2) = ({}^{(i-1)}\rho_1 c \rho_2 \rho_1^{(n-i)}, \gamma_1).$$

En el caso en que A es un álgebra de cuerdas cuadrática vimos que, imponiendo condiciones sobre el carcaj asociado a estas álgebras, es posible obtener estructuras no triviales.

Teorema 4.2.4. Sea A un álgebra de cuerdas cuadrática, $n, m > 0$. Si $\mathcal{G}_n = \emptyset = \mathcal{G}_m$ entonces $\mathrm{HH}^n(A) \cup \mathrm{HH}^m(A) = 0$.

Teorema 4.2.7: Sea A un álgebra de cuerdas cuadrática y $\mathcal{G}_n \neq \emptyset$ para algún $n > 0$. Entonces el producto cup definido en $\mathrm{HH}^*(A)$ es no trivial. Más precisamente,

- (i) si n es par y $\mathrm{car} k \neq 2$, $\mathrm{HH}^{s_1 n}(A) \cup \mathrm{HH}^{s_2 n}(A) \neq 0$;
- (ii) si n es impar y $\mathrm{car} k \neq 2$, $\mathrm{HH}^{2s_1 n}(A) \cup \mathrm{HH}^{2s_2 n}(A) \neq 0$;
- (iii) si $\mathrm{car} k = 2$, $\mathrm{HH}^{s_1 n}(A) \cup \mathrm{HH}^{s_2 n}(A) \neq 0$

para cualquier $s_1, s_2 \geq 1$.

Con respecto al corchete de Lie, pudimos obtener resultados al considerar la subclase de álgebras gentiles, estas son álgebras de cuerdas $A = kQ/I$ tales que el ideal I está generado por relaciones cuadráticas y para cada flecha $\alpha \in Q$ existe a lo sumo una flecha β y a lo sumo una flecha γ tales que $\alpha\beta \in I$ y $\gamma\alpha \in I$.

Teorema 4.2.9. Si A es un álgebra gentil, $n, m > 1$, y $\mathcal{G}_{n-1} = \emptyset = \mathcal{G}_{m-1}$ entonces $[\mathrm{HH}^n(A), \mathrm{HH}^m(A)] = 0$.

Teorema 4.2.12. Sea $\mathrm{car} k = 0$ y A un álgebra gentil tal que $\mathcal{G}_n \neq \emptyset$ para algún $n > 0$. Entonces el corchete de Lie definido en $\mathrm{HH}^*(A)$ es no trivial. Más precisamente,

- (i) si n es par, $[\mathrm{HH}^{s_1 n+1}(A), \mathrm{HH}^{s_2 n+1}(A)] \neq 0$;
- (ii) si n es impar, $[\mathrm{HH}^{2s_1 n+1}(A), \mathrm{HH}^{2s_2 n+1}(A)] \neq 0$

para cualquier $s_1, s_2 \geq 1$, $s_1 \neq s_2$.

Queremos destacar que una de las principales motivaciones de esta tesis han sido los trabajos:

[Bu] Bustamante, J. C.
The cohomology structure of string algebras.
J. Pure Appl. Algebra **204** (2006), no. 3, 616–626.

[ACT] Ames, G.; Cagliero, L.; Tirao, P.
Comparison morphisms and the Hochschild cohomology ring of truncated quiver algebras.
J. Pure Appl. Algebra **322** (2009), 1466–1497.

J.C. Bustamante estudia la estructura de anillo conmutativo graduado y la estructura de álgebra de Lie de la cohomología $HH^*(A)$ en el caso en que A es un álgebra de cuerdas cuadrática triangular.

G. Ames, L. Cagliero y P. Tirao construyen un morfismo de comparación entre la resolución reducida bar y la resolución minimal de Bardzell para álgebras truncadas y describen el producto de Yoneda para estas familias de algebras.

Los resultados de esta tesis forman parte de tres artículos: uno publicado, uno enviado y uno en etapa de redacción.

Los resultados referidos a las álgebras de cuerdas triangulares de las Secciones 2.2 y 4.1 aparecen en el trabajo

Redondo, M. J.; Román, L.
Hochschild cohomology of triangular string algebras and its ring structure.
J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), no. 5, 925–936.

Los resultados sobre las álgebras de cuerdas cuadráticas de las Secciones 2.3 y 4.2 se encuentran en

Redondo, M. J.; Román, L.
Gerstenhaber algebra of quadratic string algebras.
Disponible en arXiv:1504.02495v1 [math.RA].

Los resultados sobre el morfismo de comparación del Capítulo 3 aparecerán en el trabajo

Román, L.
Comparison morphisms between resolutions for monomial algebras.
Trabajo en etapa de redacción.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contiene definiciones y resultados teóricos que serán necesarios en todo este trabajo.

1.1. Homología

En esta sección daremos algunas de las herramientas más importantes del álgebra homológica que serán usadas a lo largo de esta tesis. Dada una categoría abeliana \mathcal{A} , notemos con $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ a la **categoría de complejos** de \mathcal{A} , cuyos objetos son los complejos C^* , esto es, C^* es una sucesión de objetos y morfismos en \mathcal{A}

$$C^* : \quad \dots \longrightarrow C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2} \longrightarrow \dots$$

con la propiedad de que $d^n \circ d^{n-1} = 0$, y los morfismos $f : C^* \rightarrow D^*$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ son familias de morfismos $f^n : C^n \rightarrow D^n$ en \mathcal{A} que hacen conmutativos a los diagramas

$$\begin{array}{ccc} C^n & \xrightarrow{d^n} & C^{n+1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ D^n & \xrightarrow{d^n} & D^{n+1}. \end{array}$$

Sin lugar a dudas, una de la definiciones elementales para comenzar a estudiar la teoría de homología es la de **functor de cohomología**:

$$\mathrm{HH}^n : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z},$$

con $\mathrm{HH}^n(C^*)$ definido por

$$\mathrm{HH}^n(C^*) = \frac{\mathrm{Nu} \, d^n}{\mathrm{Im} \, d^{n-1}},$$

y

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HH}^n(f) : \mathrm{HH}^n(C^*) & \longrightarrow & \mathrm{HH}^n(D^*) \\ \overline{z_n} & \longrightarrow & \overline{f_n(z_n)}. \end{array}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, el objeto $\mathrm{HH}^n(C^*)$ es llamado el n -ésimo **grupo de cohomología** del complejo C^* . Los elementos del grupo $\mathrm{HH}^n(C^*)$ son llamados las clases de cohomología y los elementos de C^n son llamados las n -**cocadenas**. Cada clase de cohomología está representada por una n -cocadena c verificando que $d^n c = 0$. Tales cocadenas son llamados n -**cociclos**. Una cocadena c de la forma $d^{n-1}c'$ se llama un n -**coborde**.

Sean $C^*, D^* \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ y $f, g : C^* \rightarrow D^*$ morfismos en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Una pregunta que es de interés es cuándo f y g inducen el mismo morfismo entre $\mathrm{HH}(C^*)$ y $\mathrm{HH}(D^*)$. Para estudiar este problema se introduce la noción de homotopía.

Definición 1.1.1. Sean $f, g : C^* \rightarrow D^*$ morfismos en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Una **homotopía** s entre f y g es una familia de morfismos $s^n : C^n \rightarrow D^{n-1}$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & C^{m-1} & \xrightarrow{d^{m-1}} & C^m & \xrightarrow{d^m} & C^{m+1} & \dots \\ & \searrow s^m & & \downarrow f^m - g^m & & \swarrow s^{m+1} & \\ \dots & D^{m-1} & \xrightarrow{\tilde{d}^{m-1}} & D^m & \xrightarrow{\tilde{d}^m} & D^{m+1} & \dots \end{array}$$

tales que $\tilde{d}^{n-1}s^n + s^{n+1}d^n = f^n - g^n$.

Si existe tal homotopía, se dice que f y g son **homotópicos** y se nota $f \simeq g$. Como ya lo hemos anticipado, tenemos el siguiente resultado sobre homotopías.

Proposición 1.1.2. [H, Proposition 3.1] Si $f, g : C^* \rightarrow D^*$ son morfismos de complejos tales que $f \simeq g$ entonces

$$\mathrm{HH}^n(f) = \mathrm{HH}^n(g) : \mathrm{HH}^n(C^*) \rightarrow \mathrm{HH}^n(D^*), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

La relación de homotopía es compatible con la composición de morfismos y con la aplicación de funtores aditivos, esto es, si $f \simeq g : C^* \rightarrow D^*$ y $f' \simeq g' : D^* \rightarrow E^*$ entonces

$$f'f \simeq g'g : C^* \rightarrow E^*,$$

y si $F : \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ es un funtor aditivo entonces

$$Ff \simeq Fg : FC^* \rightarrow FD^*.$$

Definición 1.1.3. Sean $C^*, D^* \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Decimos que C^* y D^* son **homotópicos** si existen morfismos $f : C^* \rightarrow D^*$, $g : D^* \rightarrow C^*$ tales que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{D^*}$ y $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{C^*}$.

Una herramienta importante en el desarrollo de esta tesis se basa en la aplicación de los funtores Ext_A^n , donde A es una k -álgebra. Si M es un A -módulo, los funtores

$$\mathrm{Ext}_A^n(-, M) : \mathrm{Mod}(A) \rightarrow \mathrm{Mod}(k)$$

se definen como los funtores derivados a derecha del funtor contravariante aditivo $\mathrm{Hom}_A(-, M)$, esto es,

$$\mathrm{Ext}_A^n(-, M) = R^n(\mathrm{Hom}_A(-, M)), \quad \text{para } n \geq 0.$$

Recordemos que esto significa que si N es un A -módulo, los grupos abelianos $\text{Ext}_A^n(N, M)$ pueden ser calculados como el n -ésimo grupo de cohomología del complejo $\text{Hom}_A(P^*, M)$, donde

$$P^* : \dots \longrightarrow P^{-n-1} \longrightarrow P^{-n} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de N . Es de suma importancia para su definición verificar que el funtor $\text{Ext}_A^n(N, M)$ no depende de la resolución proyectiva P^* de N que se elija. El siguiente resultado es esencial para este propósito.

Teorema 1.1.4. *[H, Teorema 4.1] Sea $f : X \rightarrow X'$ un morfismo de A -módulos,*

$$P^* : \dots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

una resolución proyectiva de X y

$$C^* : \dots \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow X' \rightarrow 0$$

un complejo exacto. Entonces existe un morfismo de complejos $(f_n) : P^ \rightarrow C^*$ tal que $f_{-1} = f$, y que es único a menos de homotopías.*

El morfismo (f_n) del teorema anterior es llamado un **morfismo sobre f** .

Corolario 1.1.5. *[H, Proposición 4.3] Dos resoluciones proyectivas de un A -módulo N son del mismo tipo de homotopía.*

Como consecuencia de estos resultados obtenemos que $\text{Ext}_A^n(N, M)$ no depende de la resolución proyectiva de N .

1.2. Cohomología de Hochschild

Para describir la cohomología de Hochschild necesitaremos fijar un cuerpo k y una k -álgebra A . Escribiremos \otimes en lugar de \otimes_k y $A^{\otimes n}$ para notar el producto tensorial $A \otimes \dots \otimes A$ de A n -veces. El **álgebra envolvente** A^e de A es simplemente el álgebra producto tensorial $A \otimes_k A^{op}$ (donde A^{op} es el álgebra opuesta de A) y cuya multiplicación está dada por $(a \otimes b).(a' \otimes b') = aa' \otimes b'b$. Existe un isomorfismo entre las categorías de A -bimódulos y A^e -módulos a izquierda, obtenido de la siguiente manera: si X es un A -bimódulo entonces X tiene estructura de A^e -módulo a izquierda, definiendo

$$(a \otimes b)x = axb, \quad \text{para } a, b \in A, x \in X.$$

Recíprocamente, si X es un A^e -módulo a izquierda entonces definiendo

$$ax = (a \otimes 1)x \text{ y } xb = (1 \otimes b)x, \quad \text{para } a, b \in A, x \in X$$

se tiene que X es un A -bimódulo.

La cohomología de Hochschild se define como la cohomología de un complejo especial asociado al A^e -módulo A . Debido a su importancia en esta tesis, describiremos la

construcción de este complejo. Se comienza definiendo una resolución del A^e -módulo A , generalmente conocida como la **resolución bar**. Para cada $n \geq -1$, los A^e -módulos $S_n(A)$ de esta resolución son

$$S_n(A) = A^{\otimes n+2} = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A \otimes A}_{n+2 \text{ veces}}$$

donde la operación de A^e -módulos está dada por

$$a(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1})b = (aa_0) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes (a_{n+1}b).$$

Para cada $n \geq 0$ los diferenciales $b_n : S_n(A) \rightarrow S_{n-1}(A)$ son

$$\begin{aligned} b_0(a_0 \otimes a_1) &= a_0a_1 \quad \text{y} \\ b_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) &= \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}. \end{aligned}$$

Es claro que b_n es morfismo de A^e -módulos para todo $n \geq 0$. La demostración de que la sucesión de los A^e -módulos $S_n(A)$ junto con los diferenciales b_n forman un complejo exacto se hace considerando primero las funciones $s_n : S_n(A) \rightarrow S_{n+1}(A)$ definidas por $s_n(a) = 1 \otimes a$, $a \in S_n(A)$ que verifican que

$$\begin{cases} b_{n+1}s_n + s_{n-1}b_n = \text{id}_{S_n(A)}, & \text{para } n \geq 0; \\ b_0s_{-1} = \text{Id}_{S_{-1}(A)}. \end{cases}$$

De aquí se obtiene que b_0 es un epimorfismo y que $\text{Nu } b_i \subseteq \text{Im } b_{i+1}$. Luego por inducción sobre i se prueba que $b_i b_{i+1} = 0$. Para más detalles ver [CE].

Así la A^e - **resolución bar** del álgebra A es la resolución:

$$\mathbf{bar} : \cdots \longrightarrow A^{\otimes n+2} \xrightarrow{b_n} A^{\otimes n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{\otimes 3} \xrightarrow{b_1} A^{\otimes 2} \xrightarrow{b_0} A \longrightarrow 0.$$

Si B es un A -bimódulo, aplicando el funtor contravariante $\text{Hom}_{A^e}(-, B)$ a la resolución bar de A , obtenemos el complejo

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 2}, B) \xrightarrow{b^1} \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 3}, B) \xrightarrow{b^2} \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 4}, B) \longrightarrow \cdots$$

donde $b^n = \text{Hom}_{A^e}(b_n, B)$ es el morfismo inducido por b_n . La cohomología $\text{HH}^n(A, B)$ de este complejo es el **n -ésimo grupo de cohomología de Hochschild** de A con coeficientes en B . Los conjuntos de n -cocadenas, n -cociclos y n -cobordes de este complejo serán notados como $C^n(A, B)$, $Z^n(A, B)$ y $B^n(A, B)$ respectivamente.

Para calcular los grupos de cohomología de Hochschild es usual considerar identificaciones de la forma

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A^e}(A \otimes A^i \otimes A, B) &\cong \text{Hom}_k(A^i, B) \\ f &\longrightarrow \hat{f} \end{aligned}$$

donde $\hat{f}(a) = f(1 \otimes a \otimes 1)$. Así obtenemos el isomorfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 2}, B) & \xrightarrow{b^1} & \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 3}, B) & \xrightarrow{b^2} & \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 4}, B) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\delta^0} & \text{Hom}_k(A, B) & \xrightarrow{\delta^1} & \text{Hom}_k(A^{\otimes 2}, B) \longrightarrow \dots, \end{array}$$

cuyos diferenciales

$$\delta^n : \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, B) \rightarrow \text{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, B)$$

están definidos por

$$\begin{aligned} (\delta^{n+1}f)(a_1 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) &= a_1 f(a_2 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) \\ &+ \sum_{k=1}^n (-1)^k f(a_1 \otimes \dots \otimes a_k a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) a_{n+1} \end{aligned}$$

y podemos calcular estos grupos como

$$\text{HH}^n(A, B) \cong \text{Nu } \delta^n / \text{Im } \delta^{n-1}, \text{ para } n \geq 0.$$

Usando el isomorfismo anterior es posible dar una interpretación de los primeros grupos de cohomología de Hochschild:

$$\begin{aligned} \text{HH}^0(A, B) &= \text{Nu}(\delta^0) \\ &= \{b \in B : \delta^0(b) = 0\} \\ &= \{b \in B : \delta^0(b)(a) = ab - ba = 0, \forall a \in A\}. \end{aligned}$$

En particular si el A^e -módulo B es igual a A , tenemos que $\text{HH}^0(A, A) = Z(A)$, el centro de A .

$$\text{HH}^1(A, B) = \text{Nu}(\delta^1) / \text{Im}(\delta^0)$$

donde

$$\begin{aligned} \text{Nu}(\delta^1) &= \{f \in \text{Hom}_k(A, B) : \delta^1(f)(a \otimes b) = 0, \forall a, b \in A\} \\ &= \{f \in \text{Hom}_k(A, B) : af(b) - f(ab) + f(a)b = 0, \forall a, b \in A\} \\ &= \text{Der}_k(A, B), \text{ el espacio de las derivaciones de } A \text{ en } B, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Im}(\delta^0) &= \{f \in \text{Hom}_k(A, B) : f = \delta^0(b), b \in B\} \\ &= \{f_b \in \text{Hom}_k(A, B), b \in B : f_b(a) = ab - ba\} \\ &= \text{IntDer}_k(A, B), \text{ el espacio de las derivaciones interiores de } A \text{ en } B. \end{aligned}$$

Luego

$$\text{HH}^1(A, B) \simeq \text{Der}_k(A, B) / \text{IntDer}_k(A, B).$$

Observación 1.2.1. Para cada $n > 0$ escribamos los A^e -módulos $S_n(A)$ de la resolución bar en la forma

$$S_n(A) = A^{\otimes n+2} = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A = A^e \otimes A^{\otimes n}. \quad (*)$$

Es claro que si A es k -proyectivo entonces $A^{\otimes n}$ es k -proyectivo. Luego por (*) el A^e -módulo $S_n(A)$ es A^e -proyectivo. Así **bar** es una A^e -resolución proyectiva de A y por lo tanto podemos definir el n -ésimo grupo de cohomología de Hochschild de A con coeficientes en B como

$$\mathrm{HH}^n(A, B) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, B).$$

En este caso tenemos que la cohomología de Hochschild de A con coeficientes en B no depende de la resolución proyectiva de A sobre A^e que se elija.

Parte de esta tesis tiene como objetivo calcular los grupos de cohomología de Hochschild $\mathrm{HH}^n(A, A)$ de una cierta familia de k -álgebras A , donde k será un cuerpo algebraicamente cerrado. Teniendo en cuenta la observación anterior, nuestro objetivo es encontrar resoluciones adecuadas del A -bimódulo A y hacer identificaciones, sobre sus complejos asociados, de manera análoga a lo hecha anteriormente. En este caso los grupos de cohomología $\mathrm{HH}^n(A, A)$ los notaremos simplemente como $\mathrm{HH}^n(A)$.

La cohomología de Hochschild tiene importantes propiedades de invariancia, una de ellas es la equivalencia Morita.

Definición 1.2.2. Dos k -álgebras A y B se dicen **Morita equivalentes** si existe un A - B -bimódulo P y un B - A -bimódulo Q tales que $P \otimes_B Q \simeq A$ como A -bimódulo y $Q \otimes_A P \simeq B$ como B -bimódulo.

Se tiene el siguiente resultado referido a los bimódulos P y Q .

Lema 1.2.3. [W, Lema 9.5.4] Si P y Q definen una equivalencia Morita entre A y B entonces P y Q son proyectivos finitamente generados como A -módulos y como B -módulos.

El siguiente resultado nos muestra la conexión entre la cohomología de Hochschild y la invariancia Morita:

Teorema 1.2.4. La cohomología de Hochschild es invariante Morita, esto es, si A y B son álgebras Morita equivalentes, entonces

$$\mathrm{HH}^n(A, M) \simeq \mathrm{HH}^n(B, Q \otimes_A M \otimes_A P) \quad \text{y} \quad \mathrm{HH}^n(B, N) \simeq \mathrm{HH}^n(A, P \otimes_B N \otimes_B Q)$$

para todo A -bimódulo M y para todo B -bimódulo N .

Demostración. Sea ϕ el funtor de la categoría de A -bimódulos a la categoría de B -bimódulos definido por

$$\phi(M) = Q \otimes_A M \otimes_A P.$$

Similarmente sea ψ el funtor de la categoría de B -bimódulos a la categoría de A -bimódulos definido por

$$\psi(N) = P \otimes_B N \otimes_B Q.$$

Por el lema anterior sabemos que P y Q son proyectivos como A -módulos y como B -módulos, entonces ellos inducen funtores exactos que envían resoluciones proyectivas de A -bimódulos en resoluciones proyectivas de B -bimódulos y viceversa. Tenemos así los isomorfismos buscados

$$\text{Ext}_{A^e}^n(A, M) \simeq \text{Ext}_{B^e}^n(B, \phi(M)) \quad \text{y} \quad \text{Ext}_{B^e}^n(B, N) \simeq \text{Ext}_{A^e}^n(A, \psi(N)).$$

□

En particular, cuando el A -bimódulo M es igual a A tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.2.5. *Si A y B son álgebras Morita equivalentes entonces $\text{HH}^n(A) \simeq \text{HH}^n(B)$.*

Demostración. Se deduce del teorema anterior usando los isomorfismos

$$\phi(A) = Q \otimes_A A \otimes_A P \simeq Q \otimes_A P \simeq B.$$

□

Por último daremos la siguiente proposición que muestra que para calcular la cohomología de Hochschild podemos restringirnos a álgebras indescomponibles.

Proposición 1.2.6. *[W, Teorema 9.1.8] Sean A y B dos k -álgebras. Si M es un A -bimódulo y N es un B -bimódulo entonces*

$$\text{HH}^n(A \times B, M \times N) \simeq \text{HH}^n(A, M) \oplus \text{HH}^n(B, N).$$

1.3. El álgebra de Gerstenhaber

En esta sección mostraremos que la cohomología de Hochschild de A admite una estructura de álgebra de Gerstenhaber.

Definición 1.3.1. *Una k -álgebra graduada $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n$ se dice un álgebra de Gerstenhaber si existe un producto asociativo*

$$\cup : H^n \times H^m \rightarrow H^{n+m}$$

y un corchete de Lie

$$[-, -] : H^n \times H^m \rightarrow H^{n+m-1}$$

tales que, dados $a \in H^n$, $b \in H^m$ y $c \in H^t$, se verifican

- 1) $b \cup a = (-1)^{nm} a \cup b$ (conmutativo);
- 2) $[a, b] = -(-1)^{(n-1)(m-1)} [b, a]$ (antisimétrico);
- 3) $(-1)^{(n-1)(t-1)} [[a, b], c] + (-1)^{(m-1)(n-1)} [[b, c], a] + (-1)^{(t-1)(m-1)} [[c, a], b] = 0$ (identidad de Jacobi graduada);
- 4) $[a, b \cup c] = [a, b] \cup c + (-1)^{(n-1)m} b \cup [a, c] = 0$ (identidad de Poisson).

Gerstenhaber mostró en [G] que la cohomología de Hochschild de un álgebra A es un álgebra de Gerstenhaber. Más precisamente, en el espacio de cohomología $\mathrm{HH}^*(A)$ se pueden definir dos operaciones, un producto cup

$$\cup : \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \rightarrow \mathrm{HH}^{n+m}(A)$$

y un corchete de Lie

$$[-, -] : \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \rightarrow \mathrm{HH}^{n+m-1}(A).$$

Estas operaciones se definen a partir de fórmulas explícitas expresadas en el complejo de Hochschild. Luego se prueba que estas fórmulas inducen operaciones en los grupos de cohomología y que verifican las identidades de la Definición 1.3.1.

Antes de mostrar estas operaciones tales como fueron hechas por Gerstenhaber, queremos presentar la definición del producto de Yoneda, que coincide con el product cup (ver [BGSS, Proposición 1.1]) gracias al isomorfismo natural existente entre los grupos de cohomología de Hochschild y los funtores Ext^n .

Sean $n, m > 0$ y sean P^* y Q^* resoluciones proyectivas del A^e -módulo A . Sean $\bar{f} \in \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, A)$ y $\bar{g} \in \mathrm{Ext}_{A^e}^m(A, A)$ con

$$f \in \mathrm{Nu}(\mathrm{Hom}_{A^e}(d_{n+1}, A) : \mathrm{Hom}_{A^e}(P_n, A) \rightarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(P_{n+1}, A))$$

y

$$g \in \mathrm{Nu}(\mathrm{Hom}_{A^e}(d'_{m+1}, A) : \mathrm{Hom}_{A^e}(Q_m, A) \rightarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(Q_{m+1}, A)).$$

Como P^* es una resolución proyectiva y Q^* es exacta, existe una familia de A^e -morfismos $f_k : P_{n+k} \rightarrow Q_k$ haciendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_{n+m} & \xrightarrow{d_{n+m}} & P_{n+m-1} & \xrightarrow{d_{n+m-1}} & \cdots & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \begin{array}{l} \searrow f \\ \downarrow f_0 \end{array} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_m & & \downarrow f_{m-1} & & & & \downarrow f_0 & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_m & \xrightarrow{d'_m} & Q_{m-1} & \xrightarrow{d'_{m-1}} & \cdots & \longrightarrow & Q_0 & \xrightarrow{\mu} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow g & & & & & & & & & & \\ & & A & & & & & & & & & & \end{array}$$

La composición $g \circ f_m : P_{n+m} \rightarrow A$ representa un elemento en $\mathrm{Ext}_{A^e}^{n+m}(A, A)$ pues $g \circ f_m \in \mathrm{Nu}(\mathrm{Hom}_{A^e}(d_{n+m}, A))$. Se puede mostrar que este elemento no depende de las elecciones hechas, y así hemos conseguido la aplicación bilineal

$$\mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, A) \times \mathrm{Ext}_{A^e}^m(A, A) \rightarrow \mathrm{Ext}_{A^e}^{n+m}(A, A), \quad (\bar{f}, \bar{g}) \rightarrow \overline{g \circ f_m}$$

que recibe el nombre de **producto de Yoneda**.

Como ya mencionamos, el producto de Yoneda y el producto cup coinciden. La diferencia entre los mismos radica en que el producto de Yoneda requiere de la construcción de A^e -morfismos completando de manera conmutativa el diagrama anterior, mientras que el producto cup se describe directamente sobre cocadenas del complejo de Hochschild. Damos entonces ahora la definición a la que hicimos referencia en un principio.

Definición 1.3.2. Sean $f \in C^n(A, A), g \in C^m(A, A)$ cocadenas del complejo de Hochschild. El **producto cup** de f y g es la $(n + m)$ -cocadena

$$f \cup g \in C^{n+m}(A, A)$$

definida por

$$f \cup g(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n} \otimes 1) = f(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)g(1 \otimes a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{m+n} \otimes 1).$$

De la definición anterior tenemos que $C^*(A, A) = \bigoplus_{i \geq 0} C^i(A, A)$ se convierte con el producto \cup en un anillo asociativo graduado. Además

$$b^{n+m+1}(f \cup g) = b^{n+1}(f) \cup g + (-1)^{n+1} f \cup b^{m+1}(g).$$

Esta última igualdad muestra que, si

$$f \in Z^n(A, A) \quad \text{y} \quad g \in Z^m(A, A) \quad \text{entonces} \quad f \cup g \in Z^{m+n}(A, A),$$

y siendo $f \in Z^n(A, A), g \in Z^m(A, A)$, si

$$f \in B^m(A, A) \quad \text{ó} \quad g \in B^n(A, A) \quad \text{entonces} \quad f \cup g \in B^{m+n}(A, A).$$

Por lo tanto, el producto cup induce un producto, también denotado por \cup , en $\text{HH}^*(A)$. Gerstenhaber muestra en [G, Corolario 2] la conmutatividad de este producto, esto es,

$$f \cup g = (-1)^{mn} g \cup f$$

para $f \in \text{HH}^n(A), g \in \text{HH}^m(A)$.

La definición del corchete de Lie, introducida por Gerstenhaber en [G], se realiza a partir de operaciones intermedias definidas en $C^*(A, A)$. La primera de estas operaciones es el producto \circ . Sean $m > 0, f \in C^m(A, A)$ y $g \in C^n(A, A)$. Para cada $i = 1, \dots, m$ consideremos la aplicación bilineal

$$\circ_i : C^m(A, A) \times C^n(A, A) \rightarrow C^{m+n-1}(A, A)$$

definida por sustitución del i -ésimo lugar

$$\begin{aligned} & f \circ_i g(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1} \otimes 1) \\ &= f(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g(1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_{n+i-1} \otimes 1) \otimes a_{n+i} \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1} \otimes 1) \end{aligned}$$

cuando $n > 0$, y si $n = 0$, g se identifica con un elemento de A y en este caso tenemos que

$$f \circ_i g(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m-1} \otimes 1) = f(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g \otimes a_i \cdots a_{m-1} \otimes 1).$$

El producto \circ es la aplicación bilineal

$$\circ : C^m(A, A) \times C^n(A, A) \rightarrow C^{m+n-1}(A, A)$$

definida como la suma

$$f \circ g = \sum_{i=1}^m (-1)^{(i-1)(n-1)} f \circ_i g.$$

Esta definición puede ser extendida a 0-cocadenas tomando $f \circ g = 0$ si $m = 0$. Declarando los elementos de $C^m(A, A)$ como homogéneos de grado $m - 1$, tenemos una primera estructura de anillo graduado en $C^*(A, A)$ que satisface la identidad

$$(f \circ g) \circ h - (-1)^{(n-1)(p-1)}(f \circ h) \circ g = f \circ (g \circ h - (-1)^{(n-1)(p-1)}h \circ g)$$

para f, g, h en $C^m(A, A)$, $C^n(A, A)$ y $C^p(A, A)$ respectivamente. Así $(C^*(A, A), \circ)$ es un **anillo graduado pre-Lie**.

Ahora bien, consideremos la aplicación bilineal

$$[-, -] : C^m(A, A) \times C^n(A, A) \rightarrow C^{m+n-1}(A, A)$$

definida por

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(m-1)(n-1)}g \circ f.$$

Esta aplicación satisface las siguientes condiciones:

$$[f, g] = -(-1)^{(m-1)(n-1)}[g, f] \quad (1.1)$$

$$(-1)^{(m-1)(p-1)}[[f, g], h] + (-1)^{(p-1)(n-1)}[[h, f], g] + (-1)^{(n-1)(m-1)}[[g, h], f] = 0 \quad (1.2)$$

para f, g, h en $C^m(A, A)$, $C^n(A, A)$ y $C^p(A, A)$ respectivamente y, por lo tanto, tenemos que $(C^*(A, A), [-, -])$ es un **anillo de Lie graduado**.

Para mostrar que la operación definida induce una operación en $\text{HH}^*(A)$, Gerstenhaber considera el elemento $\pi \in C^2(A, A)$ definido por

$$\pi(1 \otimes a \otimes b \otimes 1) = ab$$

y expresa el operador diferencial $b^* : C^*(A, A) \rightarrow C^*(A, A)$ usando el cociclo π según la siguiente fórmula:

$$b^{m+1}(f) = [f, -\pi] = [\pi, f].$$

De aquí se verifica fácilmente que el operador b^* es una derivación de grado 1 del anillo graduado de Lie $C^*(A, A)$, esto es, tenemos que

$$b^{n+m}[f, g] = [f, b^{n+1}g] + (-1)^{(n-1)}[b^{m+1}f, g]$$

para $f \in C^m(A, A)$, $g \in C^n(A, A)$. Así, si

$$f \in Z^m(A, A) \quad \text{y} \quad g \in Z^n(A, A) \quad \text{entonces} \quad [f, g] \in Z^{m+n}(A, A)$$

y siendo $f \in Z^n(A, A), g \in Z^m(A, A)$, si

$$f \in B^m(A, A) \quad \text{ó} \quad g \in B^n(A, A) \quad \text{entonces } [f, g] \in B^{m+n}(A, A)$$

y de esta manera $(\text{HH}^*(A), [-, -])$ se convierte en un **álgebra de Lie graduada**.

Además, Gerstenhaber prueba que la manera en que se relacionan los productos \cup y $[-, -]$ es por medio de la identidad de Poisson, esto es,

$$[g \cup h, f] = [g, f] \cup h + (-1)^{m(p-1)} g \cup [h, f]$$

donde f, g, h son elementos de $\text{HH}^p(A), \text{HH}^m(A), \text{HH}^n(A)$ respectivamente.

Como conclusión de todo lo presentado, tenemos que $(\text{HH}^*(A), \cup, [-, -])$ es un álgebra de Gerstenhaber.

1.4. Álgebras de caminos y carcaj asociado a un álgebra

En esta sección trabajaremos con k -álgebras de dimensión finita, donde k será un cuerpo algebraicamente cerrado y, a menos que se indique lo contrario, de ahora en adelante en esta tesis todas nuestras álgebras serán asumidas con esta propiedad. La razón de esta consideración es que tales álgebras pueden ser visualizadas mediante un carcaj con relaciones. Más exactamente, el **Teorema de estructura de Gabriel** dice que es equivalente estudiar k -álgebras de dimensión finita, básicas e indescomponibles, a estudiar cocientes de álgebras de carcaj por ideales admisibles. En esta sección pretendemos recordar estos resultados.

Definición 1.4.1. *Un carcaj $Q = (Q_0, Q_1)$ es un grafo orientado. Más precisamente, un carcaj está dado por un conjunto Q_0 de **vértices** y un conjunto Q_1 de **flechas**, junto con un par de funciones $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ las cuales asocian a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su origen $s(\alpha)$ y su final $t(\alpha)$ respectivamente.*

Una flecha $\alpha \in Q_1$ de origen $s(\alpha) = i$ y final $t(\alpha) = j$ usualmente es denotada por $\alpha : i \rightarrow j$. Un carcaj se dice **finito** si los conjuntos Q_0 y Q_1 son finitos. El **gráfico subyacente** \bar{Q} de un carcaj Q se obtiene a partir de Q olvidándonos de la orientación de las flechas. El carcaj Q se dice **conexo** si \bar{Q} es un gráfico conexo.

Un camino w de **longitud** $l \geq 1$ con origen i y final j es una sucesión de l flechas $\alpha_1 \dots \alpha_l$ tales que $s(\alpha_1) = i, t(\alpha_l) = j$ y $t(\alpha_r) = s(\alpha_{r+1})$, donde $1 \leq r \leq l-1$. Denotamos por $|w|$ la longitud del camino w . A cada vértice i le asociamos un camino trivial de longitud $l = 0$, llamado e_i , siendo en este caso $s(e_i) = t(e_i) = i$. Un **circuito orientado** es un camino no trivial w tal que $s(w) = t(w)$. Un circuito orientado de longitud 1 se llama **lazo**. Un carcaj Q se dice **triangular** si no contiene circuitos orientados.

Definición 1.4.2. *Sea Q un carcaj y k un cuerpo. El **álgebra de caminos** kQ de Q es el k -espacio vectorial con base el conjunto de todos los caminos del carcaj Q , incluso los*

triviales, con el producto de dos elementos base no triviales $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$ y $\beta = \beta_1 \dots \beta_m$ de kQ definido por

$$\alpha.\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } t(\alpha_n) \neq s(\beta_1), \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m & \text{si } t(\alpha_n) = s(\beta_1) \end{cases}$$

y en el caso de los caminos triviales

$$\alpha.\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = e_i, \beta = e_j \text{ con } i \neq j, \\ \beta & \text{si } \alpha = e_i, \beta = \beta_1 \dots \beta_m \text{ con } s(\beta) = i, \\ \alpha & \text{si } \alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n, \beta = e_j \text{ con } t(\alpha) = j. \end{cases}$$

Este producto se extiende por linealidad a todo kQ , obteniéndose así la k -álgebra asociativa kQ .

Como ya lo hemos señalado anteriormente queremos considerar k -álgebras A de dimensión finita. Si A es un álgebra de este tipo entonces A puede ser vista como un objeto en $\text{Mod } A$ y por el teorema de Krull - Schmidt, A admite una única descomposición en suma directa

$$A = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n \quad (\text{I})$$

donde cada uno de los módulos P_i son A -módulos proyectivos indescomponibles. Cuando en la descomposición anterior se tiene que $P_i \simeq P_j$ si y sólo si $i = j$, la k -álgebra A se dice **básica**.

Nuestro objeto de estudio es la cohomología de Hochschild de k -álgebras de dimensión finita y, de acuerdo al Corolario 1.2.5, en el siguiente teorema vemos que no se pierde ninguna generalidad al considerar solamente k -álgebras básicas.

Teorema 1.4.3. [AF, Proposición 27.14] *Para toda k -álgebra A de dimensión finita, existe una única, a menos de isomorfismos, k -álgebra B de dimensión finita y básica tal que A y B son Morita equivalentes.*

Una k -álgebra es **indescomponible** si no es suma directa de dos k -álgebras o equivalentemente, si los únicos idempotentes centrales son 0 y 1.

La Proposición 1.2.6 y el siguiente resultado nos dicen que, sin pérdida de generalidad, podemos restringirnos a álgebras indescomponibles.

Teorema 1.4.4. [AF, Teorema 7.9] *Toda k -álgebra de dimensión finita es isomorfa a una suma directa de un número finito de k -álgebras indescomponibles de dimensión finita.*

Consideremos la k -álgebra kQ . No es difícil ver que si Q es un carcaj finito, kQ es una k -álgebra asociativa cuya unidad es $\sum_{i \in Q_0} e_i$, y que kQ es una k -álgebra de dimensión finita si y sólo si Q es triangular. Tenemos también el siguiente resultado.

Proposición 1.4.5. [ASS, Corolario 1.11] *Sea Q un carcaj finito, conexo y triangular. Entonces el álgebra de caminos kQ es una k -álgebra básica, indescomponible y $\{e_i : i \in Q_0\}$ es un conjunto completo de elementos idempotentes ortogonales primitivos de kQ .*

Sea Q un carcaj finito y conexo, denotemos por J el ideal bilátero de kQ generado por las flechas de Q . Un ideal bilátero I del álgebra de carcaj kQ se dice **admisibile** si existe $m \geq 2$ tal que

$$J^m \subseteq I \subseteq J^2.$$

Una **relación** ρ en Q es una combinación k -lineal de caminos de longitud mayor o igual a dos,

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$$

donde $\lambda_i \in k$ y los caminos w_i verifican que $s(w_i) = s(w_j)$ y $t(w_i) = t(w_j)$ para todo i, j . Cuando $m = 1$, ρ se dice una **relación monomial**. Una relación monomial w se dice **cuadrática** si w es un camino de longitud 2.

Se puede probar que si Q es un carcaj finito, existe un conjunto finito de relaciones $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ que generan el ideal admisibile I . El par (Q, I) se denomina **carcaj con relaciones** y el álgebra cociente kQ/I es conocida como el **álgebra de caminos con relaciones**. Damos el siguiente resultado respecto al álgebra kQ/I .

Proposición 1.4.6. *[ASS, Corolario 2.12] Sea Q un carcaj finito e I un ideal admisibile de kQ . El álgebra kQ/I es de dimensión finita y básica. Si además Q es conexo, kQ/I es indescomponible.*

Dado un carcaj Q , hemos definido su álgebra asociada y cocientes de estas por ideales admisibles, y vimos que sometiendo Q a algunas restricciones obtenemos álgebras básicas e indescomponibles. Haremos ahora un proceso inverso, dada una k -álgebra A básica, indescomponible y de dimensión finita sobre un cuerpo k , definiremos a continuación el carcaj ordinario de A que denotaremos Q_A .

Consideremos un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos $\{e_1, \dots, e_n\}$, la existencia de tal sistema es clara por ser A una k -álgebra de dimensión finita, más aún, $A = Ae_1 \oplus \dots \oplus Ae_n$ es la descomposición (I) de A en suma de A -módulos indescomponibles. Los vértices de Q_A serán tantos como los idempotentes del sistema, o sea n . A cada vértice i se le asocia el idempotente e_i y el número de flechas que comienzan en el vértice i y terminan en el vértice j es

$$\dim_k[e_j(\text{rad}A/\text{rad}^2A)e_i]$$

con la estructura natural de A -bimódulo del cociente $\text{rad}A/\text{rad}^2A$. Como A es de dimensión finita, también lo es cada espacio vectorial de la forma $e_j(\text{rad}A/\text{rad}^2A)e_i$.

Hay otros carcajes asociados a A , como por ejemplo el carcaj de Auslander-Reiten, el carcaj estable. El nombre ordinario se le da a Q_A para distinguirlo de los otros.

El siguiente resultado, al cual nos hemos referido al comienzo de la sección, fue probado por Gabriel y muestra la importancia de las álgebras de caminos.

Teorema 1.4.7. *[ASS, Teorema 3.7] Toda álgebra A de dimensión finita sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, básica e indescomponible es isomorfa a un cociente de un álgebra de caminos sobre un ideal admisibile, es decir, $A \simeq kQ/I$.*

Si A es una k -álgebra de dimensión finita, básica e indescomponible, vimos que existe un isomorfismo $A \simeq kQ_A/I$, donde I es un ideal admisible de kQ_A y el par (Q, I) es llamado una **presentación** del álgebra A . En esta tesis consideraremos álgebras de la forma kQ/I , con Q finito y conexo e I un ideal admisible generado por relaciones monomiales.

1.5. La resolución de Bardzell

En esta sección recordamos la definición de la resolución proyectiva minimal construida por M. Bardzell en [B] para álgebras monomiales de dimensión finita, esta son álgebras de la forma kQ/I , donde Q es un carcaj finito e I ideal admisible generado por un número finito de relaciones monomiales. Se incluirán también muchas de las propiedades que esta verifica, debido a la utilidad de esta resolución a lo largo de toda la tesis.

Sea $A = kQ/I$ un álgebra monomial de dimensión finita y sea $\mathcal{R} = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ un conjunto minimal de generadores monomiales minimales del ideal I , esto es, \mathcal{R} es un conjunto minimal de generadores de I y si $\rho_i \in \mathcal{R}$ ningún subdivisor propio de ρ_i está en \mathcal{R} , ver [FFG].

Para describir los A -bimódulos proyectivos de la resolución de Bardzell, necesitaremos dar algunas definiciones y notaciones.

Las **n -concatenaciones** serán elementos definidos inductivamente como sigue: dado un camino T en Q , consideremos el conjunto de vértices correspondientes a orígenes y finales de flechas pertenecientes a T , con $<$ el orden natural del conjunto ordenado de vértices del camino T . Sea $\mathcal{R}(T)$ el conjunto de caminos en \mathcal{R} que están contenidos en el camino T . Fijemos $p_1 \in \mathcal{R}(T)$ y consideremos el conjunto

$$L_2 = \{p \in \mathcal{R}(T) : s(p_1) < s(p) < t(p_1)\}.$$

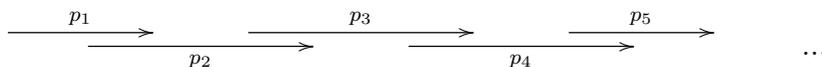
Si $L_2 \neq \emptyset$, sea $p_2 \in L_2$ tal que $s(p_2)$ es mínimo respecto a todo $p \in L_2$. Supongamos que p_1, p_2, \dots, p_j han sido construidos y sea

$$L_{j+1} = \{p \in \mathcal{R}(T) : t(p_{j-1}) \leq s(p) < t(p_j)\}.$$

Si $L_{j+1} \neq \emptyset$, sea $p_{j+1} \in L_{j+1}$ tal que $s(p_{j+1})$ es mínimo con respecto a todo $p \in L_{j+1}$.

Definición 1.5.1. La upla (p_1, \dots, p_{n-1}) de elementos de \mathcal{R} es llamada una **n -concatenación** y el camino contenido en T de origen $s(p_1)$ y final $t(p_{n-1})$ es llamado el soporte de la concatenación y denotado por $w(p_1, \dots, p_{n-1})$.

Notaremos AP_n el conjunto de soportes de n -concatenaciones. Gráficamente las concatenaciones pueden ser visualizadas de la siguiente manera:



Es posible hacer una construcción dual a la anterior. Consideremos nuevamente un camino T en Q con el orden natural $<$ en los vértices y flechas de este camino y fijemos $q_1 \in \mathcal{R}(T)$ y tomemos ahora el conjunto

$$L_2^{op} = \{q \in \mathcal{R}(T) : s(q_1) < t(q) < t(q_1)\}.$$

Si $L_2^{op} \neq \emptyset$, sea $q_2 \in L_2^{op}$ tal que $t(q_2)$ es máximo con respecto a todo $q \in L_2^{op}$. Supongamos que q_1, q_2, \dots, q_j han sido construidos y sea

$$L_{j+1}^{op} = \{q \in \mathcal{R}(T) : s(q_j) < t(q) \leq s(q_{j-1})\}.$$

Si $L_{j+1}^{op} \neq \emptyset$, sea $q_{j+1} \in L_{j+1}^{op}$ tal que $t(q_{j+1})$ es máximo respecto a todo $q \in L_{j+1}^{op}$.

Definición 1.5.2. La upla (q_{n-1}, \dots, q_1) de elementos en \mathcal{R} es llamada una **n -op-concatenación** y el camino contenido en T de origen $s(q_{n-1})$ y final $t(q_1)$ es llamado el soporte de la concatenación y denotado por $w^{op}(q_{n-1}, \dots, q_1)$.

Notaremos AP_n^{op} el conjunto de soportes de n -op-concatenaciones y $w^{op}(q_{n-1}, \dots, q_1) = w^{op}(q^1, \dots, q^{n-1})$.

Observación 1.5.3. Por definición $AP_2 = AP_2^{op} = \mathcal{R}$.

El siguiente resultado muestra la importancia de considerar ambas construcciones. Incluimos su prueba pues la misma no aparece en el trabajo de Bardzell y las desigualdades que en ella demostramos serán muy necesarias en el desarrollo de esta tesis.

Lema 1.5.4. [B, Lema 3.1] Si $n \geq 2$ entonces $AP_n = AP_n^{op}$.

Demostración. Debemos probar que para cualquier n -concatenación (p_1, \dots, p_{n-1}) existe una única n -op-concatenación (q^1, \dots, q^{n-1}) tal que $w(p_1, \dots, p_{n-1}) = w^{op}(q^1, \dots, q^{n-1})$. Utilizaremos para esto la construcción de las relaciones p_j ; la otra inclusión se prueba similarmente usando la construcción de los caminos q^j . Observemos primero que $w(p_1) = w^{op}(p_1)$ y $w(p_1, p_2) = w^{op}(p_1, p_2)$. Asumamos ahora que $n > 3$ y sea T el camino dirigido $w(p_1, \dots, p_{n-1})$. Es claro que $q^{n-1} = p_{n-1}$ pues son relaciones en \mathcal{R} contenidas en el mismo camino T y finalizando en el mismo vértice. Mostraremos la existencia de las demás relaciones q^j para lo cual debemos ver que los conjuntos

$$\begin{aligned} L_j^{op} &= \{q \in \mathcal{R}(T) : s(q^{j+1}) < t(q) \leq s(q^{j+2})\}, \quad \text{para } j = 1, \dots, n-3 \quad \text{y} \\ L_{n-2}^{op} &= \{q \in \mathcal{R}(T) : s(q^{n-1}) < t(q) < t(q^{n-1})\} \end{aligned}$$

son no vacíos. Como $p_{n-1} = q^{n-1}$, de la construcción de p_{n-2} y p_{n-1} sabemos que

$$s(p_{n-2}) < t(p_{n-3}) \leq s(p_{n-1}) = s(q^{n-1}) < t(p_{n-2})$$

y por lo tanto como los elementos de \mathcal{R} son caminos de longitud minimal

$$t(p_{n-2}) < t(q^{n-1}),$$

así de las desigualdades anteriores se tiene que

$$s(q^{n-1}) < t(p_{n-2}) < t(q^{n-1}),$$

esto es, $p_{n-2} \in L_{n-2}^{op}$. Ahora q^{n-2} debe ser elegido de manera tal que $t(q^{n-2})$ sea máximo entre todos los elementos de L_{n-2}^{op} , tenemos así que $t(p_{n-2}) \leq t(q^{n-2})$ y como los elementos en \mathcal{R} son caminos de longitud minimal, $s(p_{n-2}) \leq s(q^{n-2})$. Ahora $t(q^{n-2}) < t(q^{n-1}) = t(p_{n-1})$ nos dice que $q^{n-2} \neq p_{n-1}$ y de la minimalidad del origen de p_{n-1} es $s(q^{n-2}) < t(p_{n-3})$. Entonces

$$s(p_{n-2}) \leq s(q^{n-2}) < t(p_{n-3}) \quad \text{y} \quad t(p_{n-2}) \leq t(q^{n-2}) < t(p_{n-1}).$$

Haremos ahora un argumento inductivo. Supongamos que existe $q^{n-j} \in \mathcal{R}(T)$ verificando

$$s(p_{n-j}) \leq s(q^{n-j}) < t(p_{n-j-1}) \quad \text{y} \quad t(p_{n-j}) \leq t(q^{n-j}) < t(p_{n-j+1}). \quad (1.3)$$

Hallemos q^{n-j-1} . De las anteriores desigualdades y la construcción de p_{n-j+1} tenemos que

$$s(q^{n-j}) < t(p_{n-j-1}) \leq s(p_{n-j+1}) \leq s(q^{n-j+1}).$$

Así el conjunto $L_{n-j-1}^{op} \neq \emptyset$, pues $p_{n-j-1} \in L_{n-j-1}^{op}$ y de la maximalidad de $t(q^{n-j-1})$ se tiene que

$$t(p_{n-j-1}) \leq t(q^{n-j-1}) \quad \text{y por lo tanto} \quad s(p_{n-j-1}) \leq s(q^{n-j-1}).$$

De la definición de q^{n-j-1} y de (1.3),

$$t(q^{n-j-1}) \leq s(q^{n-j+1}) < t(p_{n-j})$$

y esto dice que $q^{n-j-1} \neq p_{n-j}$. Por la minimalidad del origen de p_{n-j} tenemos que $s(q^{n-j-1}) < t(p_{n-j-2})$ y así

$$s(p_{n-j-1}) \leq s(q^{n-j-1}) < t(p_{n-j-2}) \quad \text{y} \quad t(p_{n-j-1}) \leq t(q^{n-j-1}) < t(p_{n-j}). \quad (1.4)$$

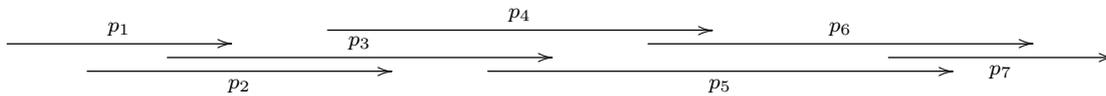
Habiendo ya mostrado la existencia de las relaciones q^j para $j = 1, \dots, n-1$, para finalizar la demostración debemos ver que $q^1 = p_1$, pero esto se deduce de las desigualdades

$$t(p_1) \leq t(q^1) \leq s(q^3) < t(p_2), \quad \text{y por lo tanto} \quad s(p_1) \leq s(q^1) < s(p_2),$$

y de la minimalidad del origen de p_2 . □

Definición 1.5.5. Para cualquier $w \in AP_n$, $\text{Sub}(w) = \{w' \in AP_{n-1} : w' \text{ divide } w\}$.

Ejemplo 1.5.6. Consideremos las siguientes relaciones contenidas en el camino T :



Entonces $w = w(p_1, p_2, p_4, p_5, p_7)$ es una 6-concatenación, $w = w^{op}(p_1, p_3, p_4, p_6, p_7)$ y

$$\text{Sub}(w) = \{w(p_1, p_2, p_4, p_5), w(p_2, p_3, p_5, p_6), w(p_3, p_4, p_6, p_7)\}.$$

Como se verá en muchos resultados las syzygies de la resolución de Bardzell experimentan un comportamiento alternado. El siguiente lema es crucial para comprender este comportamiento.

Lema 1.5.7. [B, Lemma 3.3] Si $m \geq 1$ y $w \in AP_{2m+1}$ entonces $|\text{Sub}(w)| = 2$.

Conforme al lema anterior, si $m \geq 1$ para cualquier $w \in AP_{2m+1}$ tenemos que $\text{Sub}(w) = \{\psi_1, \psi_2\}$. Denotaremos $L(\psi_1)$ y $R(\psi_2)$ los caminos que verifican

$$w = L(\psi_1)\psi_1 = \psi_2R(\psi_2);$$

De la misma manera, para cualquier $w \in AP_{2m}$, si $\psi \in \text{Sub}(w)$ denotamos $L(\psi)$ y $R(\psi)$ a los caminos que verifican

$$w = L(\psi)\psi R(\psi).$$

Lema 1.5.8. [B, Lema 3.4] Si $m \geq 1$, $w \in AP_m$ y $\psi \in \text{Sub}(w)$ entonces $L(\psi), R(\psi)$ no son divisibles por caminos en \mathcal{R} .

Teniendo todas las herramientas necesarias, describiremos la **resolución proyectiva minimal de Bardzell**. La demostración de su existencia puede encontrarse en [B, Teorema 4.1]. Esta resolución es la siguiente:

$$\dots \longrightarrow A \otimes kAP_n \otimes A \xrightarrow{d_n} A \otimes kAP_{n-1} \otimes A \longrightarrow \dots \longrightarrow A \otimes kAP_0 \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

donde $kAP_0 = kQ_0$, $kAP_1 = kQ_1$ y kAP_n es el espacio vectorial generado por el conjunto de soportes de n -concatenaciones. Todos los productos tensoriales son tomados sobre $E = kQ_0$, la subálgebra de A generada por los vértices. Los diferenciales de esta resolución

$$d_n : A \otimes kAP_n \otimes A \rightarrow A \otimes kAP_{n-1} \otimes A$$

están dados a partir de las definiciones hechas anteriormente:

$$\begin{aligned} \mu(1 \otimes e_i \otimes 1) &= e_i, \\ d_1(1 \otimes \alpha \otimes 1) &= \alpha \otimes e_{t(\alpha)} \otimes 1 - 1 \otimes e_{s(\alpha)} \otimes \alpha, \\ d_{2m}(1 \otimes w \otimes 1) &= \sum_{\psi \in \text{Sub}(w)} L(\psi) \otimes \psi \otimes R(\psi), \\ d_{2m+1}(1 \otimes w \otimes 1) &= L(\psi_1) \otimes \psi_1 \otimes 1 - 1 \otimes \psi_2 \otimes R(\psi_2). \end{aligned}$$

Observación 1.5.9.

- 1) La descripción de la resolución proyectiva que hemos dado es equivalente a la dada por Bardzell, debido al isomorfismo de A -bimódulo

$$\bigoplus_{p \in AP_n} As(p) \otimes_k t(p)A \simeq A \otimes_E kAP_n \otimes_E A$$

dado por

$$\lambda t(p) \otimes_k s(p)\mu \rightarrow \lambda \otimes_E p \otimes_E \mu,$$

donde $\lambda, \mu \in A$, $p \in AP_n$.

- 2) En [Sk] Sköldbberg muestra la exactitud del complejo que hemos descrito: define E - A -morfismos $c : A \otimes kAP_{n-1} \otimes A \rightarrow A \otimes kAP_n \otimes A$,

$$c(a \otimes \psi \otimes 1) = \sum_{\substack{w \in AP_n \\ L(w)wR(w)=a\psi}} L(w) \otimes w \otimes R(w)$$

que resultan ser una contracción de homotopía de dicha resolución, ver [Sk, Teorema 1] para más detalles.



Capítulo 2

Cohomología de Hochschild de álgebras de cuerdas

Las álgebras de cuerdas pertenecen a la clase de álgebras biseriales especiales, que fueron introducidas por Skowroński y Waschbüsch en [SW].

Un álgebra se dice biserial si el radical de todo módulo proyectivo indecomponible es suma de dos módulos uniseriales cuya intersección es simple o cero, ver [F]. Estas álgebras han sido estudiadas por varios autores y desde distintos puntos de vista dado que una gran variedad de ejemplos naturales de álgebras que aparecen en la literatura son de este tipo.

La teoría de representación de estas álgebras fue estudiada por Gelfand y Ponomarev en [GP], quienes clasificaron todos los módulos indescomponibles. Esta clasificación muestra que las álgebras biseriales especiales son siempre de tipo manso. En el caso particular de álgebras de cuerdas, Butler y Ringel describieron en [BR] la estructura de su carcaj de Auslander - Reiten.

Un álgebra se dice de cuerdas si es Morita equivalente a un álgebra especial biserial monomial.

En este capítulo calcularemos los grupos de cohomología de Hochschild de álgebras de cuerdas triangulares y de álgebras de cuerdas cuadráticas, no necesariamente triangulares.

2.1. Álgebras de cuerdas

Comencemos la sección dando la definición de un álgebra de cuerda. Sea A un álgebra básica, conexa, de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y sea (Q, I) una presentación de A .

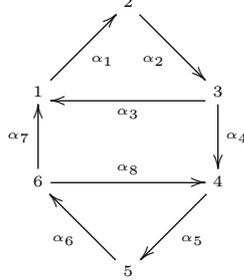
El par (Q, I) se dice **biserial especial** si satisface las siguientes condiciones:

- S1) Cada vértice en Q es el origen de a lo sumo dos flechas y el final de a lo sumo dos flechas;
- S2) Para cada flecha α en Q existe a lo sumo una flecha β y a lo sumo una flecha γ tal que $\alpha\beta \notin I$ y $\gamma\alpha \notin I$.

Si además el ideal I está generado por caminos, la presentación (Q, I) se dice **de cuerdas**.

Definición 2.1.1. [SW] Un álgebra se dice **biserial especial** (o de cuerdas) si es Morita equivalente a un álgebra de caminos kQ/I con (Q, I) una presentación biserial especial (o una presentación de cuerdas, respectivamente).

Ejemplo 2.1.2. Sea $A = kQ/I$ el álgebra dada por el siguiente carcaj Q :



siendo $I = \langle \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_2\alpha_4, \alpha_5\alpha_6\alpha_8\alpha_5, \alpha_4\alpha_5, \alpha_6\alpha_7, \alpha_7\alpha_1, \alpha_3\alpha_1 \rangle$. Entonces A es un álgebra de cuerdas.

Debido a que la cohomología de Hochschild es invariante bajo equivalencia Morita, sin pérdida de generalidad podemos asumir que nuestras álgebras de cuerdas son de la forma $A = kQ/I$, donde (Q, I) es una presentación que satisface las condiciones anteriores. Con respecto al ideal I , fijaremos un conjunto minimal \mathcal{R} de caminos de longitud minimal que lo generan. Además, fijaremos un conjunto \mathcal{P} de caminos en Q tal que el conjunto $\{\gamma + I, \gamma \in \mathcal{P}\}$ es una base de $A = kQ/I$.

2.2. Cohomología de álgebras de cuerdas triangulares

En esta sección calcularemos los grupos de cohomología de Hochschild de álgebras de cuerdas triangulares, esto es, el carcaj asociado Q no tiene circuitos orientados.

Recordemos que los grupos de cohomología de Hochschild $\mathrm{HH}^i(A)$ de un álgebra A son los grupos $\mathrm{Ext}_{A-A}^i(A, A)$ y ya que las álgebras de cuerdas son algebras monomiales, sus grupos de cohomología de Hochschild pueden ser computados usando la resolución proyectiva minimal dada por Bardzell en [B] que ha sido descripta en los preliminares.

Más precisamente, los grupos de cohomología de Hochschild son los grupos de cohomología del complejo que obtenemos de la siguiente manera: aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{A-A}(-, A)$ a la resolución minimal de Bardzell y luego consideraremos los isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_{A-A}(A \otimes kAP_n \otimes A, A) \simeq \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_n, A).$$

Así el complejo con el cual trabajaremos es:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_0, A) \xrightarrow{D_1} \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_1, A) \xrightarrow{D_2} \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_2, A) \cdots$$

donde

$$\begin{aligned} D_1(f)(\alpha) &= \alpha f(e_{t(\alpha)}) - f(e_{s(\alpha)})\alpha, \\ D_{2m}(f)(w) &= \sum_{\psi \in \mathrm{Sub}(w)} L(\psi) f(\psi) R(\psi), \\ D_{2m+1}(f)(w) &= L(\psi_1) f(\psi_1) - f(\psi_2) R(\psi_2). \end{aligned}$$

Para el cálculo de la cohomología necesitaremos describir este complejo: describiremos bases explícitas de estos k -espacios vectoriales y estudiaremos el comportamiento de los morfismos D_n entre ellos con el propósito de obtener información sobre sus núcleos e imágenes.

Recordemos que hemos fijado un conjunto \mathcal{P} de caminos en Q tal que el conjunto $\{\gamma + I : \gamma \in \mathcal{P}\}$ es una base de $A = kQ/I$. Para cualquier subconjunto X de caminos en Q , denotamos $(X//\mathcal{P})$ el conjunto de pares $(\rho, \gamma) \in X \times \mathcal{P}$ tales que ρ, γ son paralelos en Q , esto es,

$$(X//\mathcal{P}) = \{(\rho, \gamma) \in X \times \mathcal{P} : s(\rho) = s(\gamma), t(\rho) = t(\gamma)\}.$$

Observar que los k -espacios vectoriales $\text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A)$ y $k(AP_n//\mathcal{P})$ son isomorfos y, de ahora en adelante, identificaremos a $(\rho, \gamma) \in (AP_n//\mathcal{P})$ con el elemento base $f_{(\rho, \gamma)}$ en $\text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A)$ definido por

$$f_{(\rho, \gamma)}(w) = \begin{cases} \gamma & \text{si } w = \rho, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Comencemos introduciendo varios subconjuntos de $(AP_n//\mathcal{P})$ con el propósito antes mencionado: dar una buena descripción del núcleo e imagen de D_n . Para $n = 0$ tenemos que $(AP_0//\mathcal{P}) = (Q_0//Q_0)$. Para $n = 1$, $(AP_1//\mathcal{P}) = (Q_1//\mathcal{P})$ y consideramos la siguiente partición

$$(Q_1//\mathcal{P}) = (1, 1)_1 \cup (0, 0)_1$$

donde

$$\begin{aligned} (1, 1)_1 &= \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in Q_1\}, \\ (0, 0)_1 &= \{(\alpha, \gamma) \in (Q_1//\mathcal{P}) : \alpha \neq \gamma\} \end{aligned}$$

y para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} (0, 0)_n &= \{(\rho, \gamma) \in (AP_n//\mathcal{P}) : \rho = \alpha_1 \hat{\rho} \alpha_2 \text{ y } \gamma \notin \alpha_1 kQ \cup kQ \alpha_2\}, \\ (1, 0)_n &= \{(\rho, \gamma) \in (AP_n//\mathcal{P}) : \rho = \alpha_1 \hat{\rho} \alpha_2 \text{ y } \gamma \in \alpha_1 kQ, \gamma \notin kQ \alpha_2\}, \\ (0, 1)_n &= \{(\rho, \gamma) \in (AP_n//\mathcal{P}) : \rho = \alpha_1 \hat{\rho} \alpha_2 \text{ y } \gamma \notin \alpha_1 kQ, \gamma \in kQ \alpha_2\}, \\ (1, 1)_n &= \{(\rho, \gamma) \in (AP_n//\mathcal{P}) : \rho = \alpha_1 \hat{\rho} \alpha_2 \text{ y } \gamma \in \alpha_1 kQ \alpha_2\}. \end{aligned}$$

Observación 2.2.1.

- 1) Estos subconjuntos forman una partición de $(AP_n//\mathcal{P})$.
- 2) Cada $(\rho, \gamma) \in (AP_n//\mathcal{P})$ verifica que ρ y γ tienen a lo sumo una primera flecha en común y a lo sumo una última flecha en común: si $\rho = \alpha_1 \dots \alpha_s \beta \bar{\rho}$ y $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_s \delta \bar{\gamma}$, con β, δ flechas diferentes, entonces $\alpha_s \beta \in I$. Como $\alpha_1 \dots \alpha_s$ divide a γ , y γ pertenece a \mathcal{P} , entonces $\alpha_1 \dots \alpha_s \notin I$. Pero la n -concatenación asociada a ρ debe comenzar con una relación en $\mathcal{R}(T)$, luego $s = 1$, esta concatenación comienza con la relación $\alpha_s \beta$ y la segunda relación de esta concatenación comienza en $s(\beta)$. Análogamente se verifica que ρ y γ tienen a lo sumo una última flecha en común.

3) Si $(\rho, \gamma) \in (1, 0)_n$, $\rho = \alpha_1 \bar{\rho}$, $\gamma = \alpha_1 \bar{\gamma}$ entonces $\bar{\rho} \in AP_{n-1}$ y $(\bar{\rho}, \bar{\gamma}) \in (0, 0)_{n-1}$. La misma construcción vale también en $(0, 1)_n$. Finalmente, si $(\rho, \gamma) \in (1, 1)_n$, $\rho = \alpha_1 \hat{\rho} \alpha_2$, $\gamma = \alpha_1 \hat{\gamma} \alpha_2$ entonces $\hat{\rho} \in AP_{n-2}$ y $(\hat{\rho}, \hat{\gamma}) \in (0, 0)_{n-2}$.

4) Si $(\rho, \gamma) \in (AP_2 // \mathcal{P}) = (\mathcal{R} // \mathcal{P})$, vemos que ρ y γ tiene a lo sumo una primer flecha en común y una última flecha en común. Supongamos que $\rho = \alpha_1 \alpha_2 \bar{\rho}$, $\gamma = \alpha_1 \beta \bar{\gamma}$. Como A es un álgebra de cuerdas y $\gamma \notin I$ tenemos que $\alpha_1 \alpha_2 \in I$ y entonces $\rho = \alpha_1 \alpha_2$. Además como estamos asumiendo que nuestras álgebras son triangulares, tenemos que ρ y γ no pueden tener simultáneamente una primer flecha en común y una última flecha en común. Entonces

$$\begin{aligned} (1, 1)_2 &= \emptyset \\ (1, 0)_2 &= \{(\rho, \gamma) \in (\mathcal{R}, \mathcal{P}) : \rho = \alpha_1 \alpha_2, \gamma \in \alpha_1 kQ, \gamma \notin kQ \alpha_2\} \\ (0, 1)_2 &= \{(\rho, \gamma) \in (\mathcal{R}, \mathcal{P}) : \rho = \alpha_1 \alpha_2, \gamma \notin \alpha_1 kQ, \gamma \in kQ \alpha_2\}. \end{aligned}$$

Distinguiremos también elementos dentro de cada conjunto anterior según las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} {}^+(X // \mathcal{P}) &= \{(\rho, \gamma) \in (X // \mathcal{P}) : Q_1 \gamma \notin I\}, \\ {}^-(X // \mathcal{P}) &= \{(\rho, \gamma) \in (X // \mathcal{P}) : Q_1 \gamma \subset I\}. \end{aligned}$$

Análogamente definimos $(X // \mathcal{P})^+$, $(X // \mathcal{P})^-$, ${}^+(X // \mathcal{P})^+ = {}^+(X // \mathcal{P}) \cap (X // \mathcal{P})^+$ y así los demás casos.

Finalmente definimos

$$\begin{aligned} (1, 0)_n^{--} &= \{(\rho, \gamma) \in (1, 0)_n^- : \rho = \alpha_1 \hat{\rho} \alpha_2, \gamma = \alpha_1 \hat{\gamma}, \hat{\gamma} Q_1 \subset I\}, \\ (1, 0)_n^{-+} &= \{(\rho, \gamma) \in (1, 0)_n^- : \rho = \alpha_1 \hat{\rho} \alpha_2, \gamma = \alpha_1 \hat{\gamma}, \hat{\gamma} Q_1 \not\subset I\}, \\ {}^{--}(0, 1)_n &= \{(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 1)_n : \rho = \alpha_1 \hat{\rho} \alpha_2, \gamma = \hat{\gamma} \alpha_2, Q_1 \hat{\gamma} \subset I\}, \\ {}^{+-}(0, 1)_n &= \{(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 1)_n : \rho = \alpha_1 \hat{\rho} \alpha_2, \gamma = \hat{\gamma} \alpha_2, Q_1 \hat{\gamma} \not\subset I\}. \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de describir el comportamiento de los morfismos D_n en los conjuntos que acabamos de definir.

Lema 2.2.2. Para $n \geq 2$ tenemos

- (a) ${}^-(0, 0)_{n-1}^- \cup (1, 0)_{n-1}^- \cup {}^-(0, 1)_{n-1} \cup (1, 1)_{n-1} \subset \text{Nu } D_n$;
- (b) la función D_n induce una biyección de ${}^-(0, 0)_{n-1}^+$ a ${}^{--}(0, 1)_n$;
- (c) la función D_n induce una biyección de ${}^+(0, 0)_{n-1}^-$ a $(1, 0)_n^{--}$;
- (d) existen biyecciones $\phi_m : (1, 0)_m^+ \rightarrow {}^+(0, 1)_m$ y $\psi_m : (1, 0)_m^{-+} \rightarrow {}^{+-}(0, 1)_m$ tales que

$$(id + (-1)^{n-1} \phi_{n-1})((1, 0)_{n-1}^+) \subset \text{Nu } D_n,$$

$$(-1)^n D_n((1, 0)_{n-1}^+) = (1, 1)_n$$

y

$$D_n({}^+(0, 0)_{n-1}^+) = (id + (-1)^n \phi_n)((1, 0)_n^+) \cup (id + (-1)^n \psi_n)((1, 0)_n^{-+}).$$

Demostración. (a) Para probar que (ρ, γ) pertenece a $\text{Nu } D_n$ debemos ver que si $w \in AP_n$ es tal que ρ divide a w , esto es, $w = L(\rho)\rho R(\rho)$ y $|L(\rho)| + |R(\rho)| > 0$, entonces $L(\rho)\gamma R(\rho) \in I$.

Si $(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 0)_{n-1}^-$ es claro que $L(\rho)\gamma R(\rho) \in I$.

Si $(\rho, \gamma) \in (1, 0)_{n-1}^-$ entonces $\gamma R(\rho) \in I$ si $|R(\rho)| > 0$. En caso contrario $w = L(\rho)\rho$ y podemos deducir que $L(\rho)\gamma \in I$ usando la Observación 2.2.1(2): si $L(\rho) \notin I$ entonces la primera relación en la n -concatenación correspondiente a w tiene a α_1 como última flecha y $\gamma = \alpha_1\hat{\gamma}$.

La demostración para $(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 1)_{n-1}$ es análoga.

Finalmente, si $(\rho, \gamma) \in (1, 1)_{n-1}$, la afirmación es clara para $n = 2, 3$. Si $n > 3$ y $\rho = \alpha_1\hat{\rho}\alpha_2$, de la Observación 2.2.1(2) tenemos que si $|L(\rho)| > 0$ entonces la primera relación en la n -concatenación correspondiente a w tiene a α_1 como última flecha, y si $|R(\rho)| > 0$ entonces la última relación tiene a α_2 como primera flecha. La afirmación es clara pues $\gamma = \alpha_1\hat{\gamma}\alpha_2$ y entonces $L(\rho)\gamma R(\rho) = L(\rho)\alpha_1\hat{\gamma}\alpha_2 R(\rho) \in I$.

(b) Si $(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 0)_{n-1}^+$ existe una única flecha β tal que $\gamma\beta \in \mathcal{P}$. Es claro que $\rho\beta \in AP_n$, $(\rho\beta, \gamma\beta) \in {}^{--}(0, 1)_n$ y $D_n(f_{(\rho, \gamma)}) = (-1)^n f_{(\rho\beta, \gamma\beta)}$.

(c) Análogo al inciso anterior.

(d) Si $(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma}) \in (1, 0)_m^+$ entonces existe una única flecha β tal que $\alpha\hat{\gamma}\beta \in \mathcal{P}$. Es claro que $\hat{\rho} \in AP_{m-1}$, $(\hat{\rho}, \hat{\gamma}) \in {}^+(0, 0)_{m-1}^+$, $(\hat{\rho}\beta, \hat{\gamma}\beta) \in {}^+(0, 1)_m$ y $(\alpha\hat{\rho}\beta, \alpha\hat{\gamma}\beta) \in (1, 1)_{m+1}$. La afirmación es clara si definimos $\phi_m(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma}) = (\hat{\rho}\beta, \hat{\gamma}\beta)$ pues

$$D_{m+1}(f_{(\hat{\rho}\beta, \hat{\gamma}\beta)}) = f_{(\alpha\hat{\rho}\beta, \alpha\hat{\gamma}\beta)} = (-1)^{m+1} D_{m+1}(f_{(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma})}).$$

Similarmente podemos ver que si $(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma}) \in (1, 0)_m^{-+}$ entonces existe una única flecha β tal que $\hat{\gamma}\beta \in \mathcal{P}$. Ahora tenemos que $\hat{\rho} \in AP_{m-1}$, $(\hat{\rho}, \hat{\gamma}) \in {}^+(0, 0)_{m-1}^+$ y $(\hat{\rho}\beta, \hat{\gamma}\beta) \in {}^{+-}(0, 1)_m$, así definimos $\psi_m(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma}) = (\hat{\rho}\beta, \hat{\gamma}\beta)$.

Ahora si $(\hat{\rho}, \hat{\gamma}) \in {}^+(0, 0)_{m-1}^+$ existen únicas flechas α, β tal que $\alpha\hat{\gamma} \in \mathcal{P}$ y $\hat{\gamma}\beta \in \mathcal{P}$. Si $\alpha\hat{\gamma}\beta \in \mathcal{P}$ entonces $(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma}) \in (1, 0)_m^+$ y $\phi_m(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma}) = (\hat{\rho}\beta, \hat{\gamma}\beta) \in {}^+(0, 1)_m$. Si $\alpha\hat{\gamma}\beta \in I$ entonces $(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma}) \in (1, 0)_m^{-+}$ y $\psi_m(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma}) = (\hat{\rho}\beta, \hat{\gamma}\beta) \in {}^{+-}(0, 1)_m$. En ambos casos

$$D_m(f_{(\hat{\rho}, \hat{\gamma})}) = f_{(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma})} + (-1)^m f_{(\hat{\rho}\beta, \hat{\gamma}\beta)}.$$

□

Lema 2.2.3. Para $n \geq 2$ tenemos

$$\dim_{\mathbb{k}} \text{Nu } D_n = |{}^-(0, 0)_{n-1}^-| + |(1, 0)_{n-1}| + |{}^-(0, 1)_{n-1}| + |(1, 1)_{n-1}|$$

y

$$\dim_{\mathbb{k}} \text{Im } D_n = |{}^{--}(0, 1)_n| + |(1, 0)_n| + |(1, 1)_n|.$$

Demostración. Del lema anterior podemos ver que

$$\dim_{\mathbb{k}} \text{Nu } D_n = |{}^-(0, 0)_{n-1}^-| + |(1, 0)_{n-1}^-| + |{}^-(0, 1)_{n-1}| + |(1, 1)_{n-1}| + |(1, 0)_{n-1}^+|,$$

y el resultado se sigue de

$$|(1, 0)_{n-1}| = |(1, 0)_{n-1}^-| + |(1, 0)_{n-1}^+|.$$

Por otro lado

$$\dim_{\mathbb{k}} \text{Im } D_n = |{}^{--}(0, 1)_n| + |(1, 0)_n^{--}| + |(1, 1)_n| + |(1, 0)_n^+| + |(1, 0)_n^{-+}|,$$

y

$$|(1, 0)_n| = |(1, 0)_n^{--}| + |(1, 0)_n^{-+}| + |(1, 0)_n^+|.$$

□

Ahora estamos en condiciones de calcular los grupos de cohomología de Hochschild.

Teorema 2.2.4. *Si A es un álgebra de cuerdas triangular, entonces*

$$\dim_{\mathbb{k}} \text{HH}^n(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ |Q_1| + |{}^-(0, 0)_1^-| - |Q_0| + 1 & \text{si } n = 1, \\ |{}^{+-}(0, 1)_n| + |{}^-(0, 0)_n^-| & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Demostración. Es claro que $\text{HH}^0(A) = \text{Nu } D_1$ es el centro de A , y que tiene dimensión 1 pues A es triangular. Esto implica que

$$\dim_{\mathbb{k}} \text{Im } D_1 = |(Q_0//Q_0)| - \dim_{\mathbb{k}} \text{Nu } D_1 = |Q_0| - 1.$$

Luego

$$\dim_{\mathbb{k}} \text{HH}^1(A) = \dim_{\mathbb{k}} \text{Nu } D_2 - |Q_0| + 1 = |(1, 1)_1| + |{}^-(0, 0)_1^-| - |Q_0| + 1$$

pues $(1, 0)_1 = \emptyset = (0, 1)_1$, y $|(1, 1)_1| = |Q_1|$. Finalmente para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{k}} \text{HH}^n(A) &= \dim_{\mathbb{k}} \text{Nu } D_{n+1} - \dim_{\mathbb{k}} \text{Im } D_n \\ &= |(1, 1)_n| + |(1, 0)_n| + |{}^-(0, 1)_n| + |{}^-(0, 0)_n^-| \\ &\quad - |(1, 0)_n| - |(1, 1)_n| - |{}^{--}(0, 1)_n| \\ &= |{}^{+-}(0, 1)_n| + |{}^-(0, 0)_n^-| \end{aligned}$$

□

El siguiente corolario incluye la subclase de **álgebras gentiles**, estas son álgebras de cuerdas $A = kQ/I$ tales que el ideal I está generado por relaciones cuadráticas y para cada flecha $\alpha \in Q$ existe a lo sumo una flecha β y a lo sumo una flecha γ tales que $\alpha\beta \in I$ y $\gamma\alpha \in I$. En la siguiente sección calcularemos los grupos de cohomología de esta familia de álgebras sin la suposición de ser triangulares.

Corolario 2.2.5. *Si A es un álgebra de cuerdas cuadrática y triangular entonces*

$$\dim_{\mathbb{k}} \text{HH}^n(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ |Q_1| + |{}^-(0, 0)_1^-| - |Q_0| + 1 & \text{si } n = 1, \\ |{}^-(0, 0)_n^-| & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.6. Sea $A_n = kQ/I$ con

$$Q : 0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\beta_1} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_2} \\ \xrightarrow{\beta_2} \end{array} 2 \quad \cdots \quad n-1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_n} \\ \xrightarrow{\beta_n} \end{array} n$$

y $I = \langle \alpha_i \alpha_{i+1}, \beta_i \beta_{i+1} \rangle_{\{i=1, \dots, n-1\}}$, $n \geq 1$. Entonces

$$\dim \mathrm{HH}^i(A_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 3 & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad \dim \mathrm{HH}^i(A_{2m}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 2m & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$\dim \mathrm{HH}^i(A_{2m+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 2m+1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i = 2m+1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como aplicación del cálculo de los grupos de cohomología tenemos:

Corolario 2.2.7. [ABL, Teorema 5.1] Si A es un álgebra de cuerdas triangular, las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $\mathrm{HH}^1(A) = 0$;
- ii) El carcaj Q es un árbol;
- iii) $\mathrm{HH}^i(A) = 0$ para $i > 0$;
- iv) A es simplemente conexa.

Demostración. Sabemos que un álgebra monomial A es simplemente conexa si y sólo si Q es un árbol. Si $\mathrm{HH}^1(A) = 0$, observando que $|\cdot(0, 0)_1^-| \geq 0$ tenemos que $|Q_1| - |Q_0| + 1 = 0$, y por lo tanto el carcaj Q es un árbol. Las demás implicaciones son claras. \square

2.3. Cohomología de álgebras de cuerdas cuadráticas

En la sección anterior consideramos álgebras de cuerdas triangulares, esto es, álgebras de la forma kQ/I con (Q, I) una presentación de cuerdas y Q un carcaj sin circuitos orientados. Nuestro objetivo será ahora estudiar las álgebras de cuerdas cuadráticas sin la suposición de que el carcaj Q sea triangular. Recordemos que un álgebra de cuerdas cuadrática $A = kQ/I$ es un álgebra de cuerdas tal que el ideal admisible I está generado por caminos de longitud dos. En esta sección también vamos a tener en cuenta a las álgebras gentiles.

La estructura inicial que nos permitirá estudiar la cohomología de Hochschild $\mathrm{HH}^n(A)$ en el caso en que A sea un álgebra de cuerdas cuadrática es similar a la utilizada en la sección anterior.

Consideraremos la resolución minimal de Bardzell, que en el caso particular de álgebras cuadráticas es la siguiente:

$$\dots \longrightarrow A \otimes kAP_n \otimes A \xrightarrow{d_n} A \otimes kAP_{n-1} \otimes A \longrightarrow \dots \longrightarrow A \otimes kAP_0 \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

donde $kAP_0 = kQ_0$, $kAP_1 = kQ_1$, kAP_n es el espacio vectorial generado por

$$AP_n = \{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n : \alpha_i \alpha_{i+1} \in I, 1 \leq i < n\},$$

todos los productos tensoriales son tomados sobre $E = kQ_0$, la subálgebra de A generada por los vértices, y los morfismos de A -bimódulos son

$$\begin{aligned} \mu(1 \otimes e_i \otimes 1) &= e_i, \\ d_1(1 \otimes \alpha \otimes 1) &= \alpha \otimes e_{t(\alpha)} \otimes 1 - 1 \otimes e_{s(\alpha)} \otimes \alpha, \\ d_n(1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_n \otimes 1) &= \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n. \end{aligned}$$

El complejo que calcula la cohomología se obtiene aplicando $\text{Hom}_{A-A}(-, A)$ a esta resolución y usando luego los isomorfismos

$$\text{Hom}_{A-A}(A \otimes kAP_n \otimes A, A) \simeq \text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A),$$

esto es,

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{E-E}(kAP_0, A) \xrightarrow{D_1} \text{Hom}_{E-E}(kAP_1, A) \xrightarrow{D_2} \text{Hom}_{E-E}(kAP_2, A) \rightarrow \dots$$

donde

$$\begin{aligned} D_1(f)(\alpha) &= \alpha f(e_{t(\alpha)}) - f(e_{s(\alpha)})\alpha, \\ D_n(f)(\alpha_1 \cdots \alpha_n) &= \alpha_1 f(\alpha_2 \cdots \alpha_n) + (-1)^n f(\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1})\alpha_n. \end{aligned}$$

La descripción de elementos base de los k -espacios vectoriales $\text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A)$, que nos permitirán estudiar el núcleo y la imagen de los morfismos D_n , se realiza a partir del conjunto de pares de caminos paralelos

$$(X//\mathcal{P}) = \{(\rho, \gamma) \in X \times \mathcal{P} : s(\rho) = s(\gamma), t(\rho) = t(\gamma)\}$$

donde \mathcal{P} es el conjunto fijo de caminos en Q tal que el conjunto $\{\gamma + I : \gamma \in \mathcal{P}\}$ es una base de $A = kQ/I$ y X es cualquier subconjunto de caminos en Q . También vamos a considerar los conjuntos

$$(X//\mathcal{P}_m) = \{(\rho, \gamma) \in X \times \mathcal{P} : s(\rho) = s(\gamma), t(\rho) = t(\gamma), |\gamma| \geq m\},$$

y así $(X//\mathcal{P}) = (X//Q_0) \sqcup (X//\mathcal{P}_1)$, donde \sqcup significa unión disjunta.

Recordemos el isomorfismo de k -espacios vectoriales

$$\begin{aligned} k(AP_n//\mathcal{P}) &\simeq \text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A) \\ (\rho, \gamma) &\rightarrow f_{(\rho, \gamma)} \end{aligned}$$

donde

$$f_{(\rho, \gamma)}(w) = \begin{cases} \gamma & \text{si } w = \rho, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Estos isomorfismos nos permiten construir los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A) & \xrightarrow{D_{n+1}} & \text{Hom}_{E-E}(kAP_{n+1}, A) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ k(AP_n//Q_0) \oplus k(AP_n//P_1) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_{n+1}^0 & 0 \\ 0 & D_{n+1}^1 \end{pmatrix}} & k(AP_{n+1}//Q_0) \oplus k(AP_{n+1}//Q_1) \oplus k(AP_{n+1}//P_2) \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} D_1^0(e_r, e_r) &= \sum_{\{\beta \in Q_1: t(\beta)=r\}} (\beta, \beta) - \sum_{\{\beta \in Q_1: s(\beta)=r\}} (\beta, \beta), \\ D_1^1(e_r, \gamma) &= \sum_{\{\beta \in Q_1: t(\beta)=r\}} (\beta, \beta\gamma) - \sum_{\{\beta \in Q_1: s(\beta)=r\}} (\beta, \gamma\beta), \\ D_{n+1}^0(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) &= \sum_{\substack{\{\beta \in Q_1: \\ \beta\alpha_1 \in I, t(\beta)=r\}}} (\beta\alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta) + (-1)^{n+1} \sum_{\substack{\{\beta \in Q_1: \\ \alpha_n\beta \in I, s(\beta)=r\}}} (\alpha_1 \cdots \alpha_n\beta, \beta) \end{aligned}$$

y

$$D_{n+1}^1(\alpha_1 \cdots \alpha_n, \gamma) = \sum_{\substack{\{\beta \in Q_1: \\ \beta\alpha_1 \in I, \beta\gamma \notin I\}}} (\beta\alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta\gamma) + (-1)^{n+1} \sum_{\substack{\{\beta \in Q_1: \\ \alpha_n\beta \in I, \gamma\beta \notin I\}}} (\alpha_1 \cdots \alpha_n\beta, \gamma\beta).$$

Definiremos ahora subconjuntos de $(AP_n//P)$ de manera de dar una descripción del núcleo y la imagen de D_{n+1}^0 y D_{n+1}^1 .

Para $n = 0$ tenemos que $(AP_0//P) = (Q_0//P)$. Como A es de dimensión finita y cuadrática, si $(e_r, \alpha_1 \cdots \alpha_n) \in (Q_0//P_1)$ entonces $\alpha_n\alpha_1 \in I$.

Para $n = 1$, $(AP_1//P) = (Q_1//P)$, y consideramos la siguiente partición

$$(Q_1//P) = (1, 1)_1 \sqcup (0, 0)_1 \sqcup (1, 0)_1 \sqcup (0, 1)_1.$$

donde

$$\begin{aligned} (1, 1)_1 &= \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in Q_1\}, \\ (0, 0)_1 &= \{(\alpha, \gamma) \in (Q_1//P) : \gamma \notin \alpha kQ \cup kQ\alpha\}, \\ (1, 0)_1 &= \{(\alpha, \gamma) \in (Q_1//P) : \gamma \in \alpha kQ, \gamma \notin kQ\alpha\}, \\ (0, 1)_1 &= \{(\alpha, \gamma) \in (Q_1//P) : \gamma \notin \alpha kQ, \gamma \in kQ\alpha\}. \end{aligned}$$

Para cualquier $n \geq 2$ sea

$$\begin{aligned} (0, 0)_n &= \{(\rho, \gamma) \in (AP_n//P) : \rho = \alpha_1\hat{\rho}\alpha_2 \text{ y } \gamma \notin \alpha_1 kQ \cup kQ\alpha_2\}, \\ (1, 0)_n &= \{(\rho, \gamma) \in (AP_n//P) : \rho = \alpha_1\hat{\rho}\alpha_2 \text{ y } \gamma \in \alpha_1 kQ, \gamma \notin kQ\alpha_2\}, \\ (0, 1)_n &= \{(\rho, \gamma) \in (AP_n//P) : \rho = \alpha_1\hat{\rho}\alpha_2 \text{ y } \gamma \notin \alpha_1 kQ, \gamma \in kQ\alpha_2\}, \\ (1, 1)_n &= \{(\rho, \gamma) \in (AP_n//P) : \rho = \alpha_1\hat{\rho}\alpha_2 \text{ y } \gamma \in \alpha_1 kQ\alpha_2\} \end{aligned}$$

y es claro que $(AP_n//\mathcal{P}) = (0,0)_n \sqcup (1,0)_n \sqcup (0,1)_n \sqcup (1,1)_n$. Distinguiremos también conjuntos dentro de cada conjunto anterior teniendo en cuenta las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} {}^+(X//\mathcal{P}) &= \{(\rho, \gamma) \in (X//\mathcal{P}) : Q_1\gamma \notin I\} \\ {}^-(X//\mathcal{P}) &= \{(\rho, \gamma) \in (X//\mathcal{P}) : Q_1\gamma \subset I\}. \end{aligned}$$

Similarmente definimos $(X//\mathcal{P})^+$, $(X//\mathcal{P})^-$, ${}^+(X//\mathcal{P})^+ = {}^+(X//\mathcal{P}) \cap (X//\mathcal{P})^+$ y así los demás casos.

Ahora vamos a describir el comportamiento de los morfismos D_{n+1}^1 en los conjuntos que acabamos de definir, análogamente a lo que hicimos en el Lema 2.2.2, en este caso para álgebras de cuerdas cuadráticas.

Lema 2.3.1. *Para todo $n \geq 1$ tenemos*

- (a) ${}^-(0,0)_n^- \sqcup (1,0)_n^- \sqcup {}^-(0,1)_n \sqcup (1,1)_n \subset \text{Nu } D_{n+1}^1$;
- (b) La función D_{n+1}^1 induce una biyección de ${}^-(0,0)_n^+$ a ${}^-(0,1)_{n+1} \cap (AP_{n+1}//\mathcal{P}_2)$;
- (c) La función D_{n+1}^1 induce una biyección de ${}^+(0,0)_n^-$ a $(1,0)_{n+1}^- \cap (AP_{n+1}//\mathcal{P}_2)$;
- (d) Existe una biyección $\phi_m : (1,0)_m^+ \rightarrow {}^+(0,1)_m$ dada por $\phi_m(\alpha\hat{\rho}, \alpha\hat{\gamma}) = (\hat{\rho}\beta, \hat{\gamma}\beta)$ tal que

$$\begin{aligned} (id + (-1)^n \phi_n)((1,0)_n^+) &\subset \text{Nu } D_{n+1}^1, \\ (-1)^{n+1} D_{n+1}^1((1,0)_n^+) &= (1,1)_{n+1} \cap (AP_{n+1}//\mathcal{P}_2), \\ D_{n+1}^1({}^+(0,0)_n^+ \cap (AP_n//\mathcal{P}_1)) &= (id + (-1)^{n+1} \phi_{n+1})((1,0)_{n+1}^+) \cap k(AP_{n+1}//\mathcal{P}_2). \end{aligned}$$

Demostración. Similar al Lema 2.2.2. □

Proposición 2.3.2. *Para todo $n \geq 1$ tenemos*

$$\begin{aligned} \dim_k \text{Nu } D_{n+1}^1 &= |{}^-(0,0)_n^-| + |{}^-(0,1)_n| + |(1,1)_n| + |(1,0)_n|, \\ \dim_k \text{Im } D_{n+1}^1 &= |({}^-(0,1)_{n+1} \sqcup (1,0)_{n+1} \sqcup (1,1)_{n+1}) \cap (AP_{n+1}//\mathcal{P}_2)|. \end{aligned}$$

Demostración. Es clara, pues del lema anterior tenemos que el conjunto

$${}^-(0,0)_n^- \sqcup (1,0)_n^- \sqcup {}^-(0,1)_n \sqcup (1,1)_n \sqcup (id + (-1)^n \phi_n)((1,0)_n^+)$$

es una base de $\text{Nu } D_{n+1}^1$, el conjunto

$$({}^-(0,1)_{n+1} \sqcup (1,0)_{n+1}^- \sqcup (1,1)_{n+1} \sqcup (id + (-1)^{n+1} \phi_{n+1})((1,0)_{n+1}^+)) \cap k(AP_{n+1}//\mathcal{P}_2)$$

es una base de $\text{Im } D_{n+1}^1$ y

$$(1,0)_n = (1,0)_n^+ \sqcup (1,0)_n^-.$$

□

Con el objetivo de describir el comportamiento de los morfismos D_{n+1}^0 en $k(AP_n//Q_0)$ necesitamos definir elementos base en estos espacios vectoriales. Observemos que

$$(AP_n//Q_0) \subset {}^+(0, 0)_n^+.$$

Definición 2.3.3. Un par $(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) \in (AP_n//Q_0)$ será llamado **incompleto** si $\alpha_n \alpha_1 \notin I$, y será llamado **completo** si $\alpha_n \alpha_1 \in I$. Denotamos \mathcal{I}_n y \mathcal{C}_n a los conjuntos de pares incompletos y de pares completos en $(AP_n//Q_0)$ respectivamente.

El grupo cíclico $\mathbb{Z}_n = \langle t \rangle$ de orden n actúa sobre \mathcal{C}_n , con acción dada por

$$t(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_{s(\alpha_1)}) = (\alpha_n \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}, e_{s(\alpha_n)}).$$

Dado $(\rho, e) \in \mathcal{C}_n$ definimos su **orden** como el primer número natural k tal que $t^k(\rho, e) = (\rho, e)$, y consideramos la norma de este elemento definida por

$$N(\rho, e) = \sum_{i=0}^{k-1} t^i(\rho, e).$$

Claramente t y N inducen aplicaciones lineales $t, N : k\mathcal{C}_n \rightarrow k\mathcal{C}_n$. Consideremos ahora los siguientes subconjuntos de pares completos

$$\mathcal{C}_n(0) = \{(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) \in \mathcal{C}_n : \nexists \gamma \in Q_1 \setminus \{\alpha_n\} \text{ y } \nexists \beta \in Q_1 \setminus \{\alpha_1\} \text{ con } \alpha_n \beta, \gamma \alpha_1 \in I\}.$$

Definición 2.3.4.

- (a) Un par completo $(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r)$ se dirá **gentil** si $t^m(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) \in \mathcal{C}_n(0)$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$;
- (b) Un par incompleto $(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r)$ se dirá **vacío** si no existe relación $\beta \gamma \in I$ con $t(\beta) = r = s(\gamma)$.

Denotamos \mathcal{G}_n y \mathcal{E}_n a los conjuntos de pares gentiles y de pares vacíos en $(AP_n//Q_0)$ respectivamente, y $N\mathcal{G}_n, N\mathcal{E}_n$ sus correspondientes complementos en \mathcal{C}_n y \mathcal{I}_n respectivamente, esto es

$$(AP_n//Q_0) = \mathcal{C}_n \sqcup \mathcal{I}_n, \quad \mathcal{C}_n = \mathcal{G}_n \sqcup N\mathcal{G}_n, \quad \mathcal{I}_n = \mathcal{E}_n \sqcup N\mathcal{E}_n.$$

Para describir los morfismos $D_{n+1}^0 : k(AP_n//Q_0) \rightarrow k(AP_{n+1}//Q_1)$ será suficiente estudiar el comportamiento de los mismos en cada sumando directo $k\mathcal{G}_n, kN\mathcal{G}_n, k\mathcal{E}_n$ y $kN\mathcal{E}_n$. Observemos que cualquier elemento en el conjunto $(1, 1)_{n+1} \cap (AP_{n+1}//Q_1)$ es de la forma

$$(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \alpha_1, \alpha_1)$$

donde $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n, e_{s(\alpha_1)})$ es un par completo en \mathcal{C}_n , perteneciente a \mathcal{G}_n ó a $N\mathcal{G}_n$. Luego podemos descomponer el conjunto $(1, 1)_{n+1} \cap (AP_{n+1}//Q_1)$ en la unión disjunta

$$(1, 1)_{n+1}^{\mathcal{G}} \sqcup (1, 1)_{n+1}^{N\mathcal{G}}.$$

Lema 2.3.5. *La sucesión*

$$k\mathcal{G}_n \xrightarrow{N} k\mathcal{G}_n \xrightarrow{(1-t)} k\mathcal{G}_n \xrightarrow{N} k\mathcal{G}_n$$

es exacta.

Demostración. Es claro que $N(1-t) = (1-t)N = 0$. Cada $x \in k\mathcal{G}_n$ puede ser escrito como

$$x = \sum_i \sum_{j=0}^{m_i-1} \lambda_{ij} t^j (\rho_i, e_{s_i}),$$

con m_i el orden de (ρ_i, e_{s_i}) , $\lambda_{ij} \in k$ y $(\rho_k, e_{s_k}) \neq t^j(\rho_i, e_{s_i})$ si $k \neq i$. Ahora, $N(x) = 0$ implica que

$$0 = \sum_{i,j} \lambda_{ij} N t^j (\rho_i, e_{s_i}) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} N (\rho_i, e_{s_i})$$

pues $Nt = N$. Así tenemos que $\sum_{j=0}^{m_i-1} \lambda_{ij} = 0$, y luego

$$x = \sum_{i,j} \lambda_{ij} t^j (\rho_i, e_{s_i}) - \sum_i \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \lambda_{ij} \right) (\rho_i, e_{s_i}) = \sum_i \sum_{j=1}^{m_i-1} \lambda_{ij} (t^j - 1) (\rho_i, e_{s_i}) \in \text{Im}(1-t).$$

Por otro lado, si $(1-t)x = 0$ entonces

$$\sum_i \sum_{j=0}^{m_i-1} \lambda_{ij} t^j (\rho_i, e_{s_i}) = \sum_i \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{i(j-1)} t^j (\rho_i, e_{s_i})$$

así $\lambda_{i0} = \lambda_{ij}$ para cualquier j , y entonces

$$x = \sum_i \sum_{j=0}^{m_i-1} \lambda_{i0} t^j (\rho_i, e_{s_i}) = \sum_i \lambda_{i0} N (\rho_i, e_{s_i}) \in \text{Im } N.$$

□

Lema 2.3.6. *Si $n \geq 1$ entonces $D_{n+1}^0 = U_{n+1}^1 \oplus U_{n+1}^2 \oplus U_{n+1}^3$ siendo*

$$U_{n+1}^1 : k\mathcal{E}_n \rightarrow 0,$$

$$U_{n+1}^2 : k\mathcal{G}_n \rightarrow k(1, 1)_{n+1}^{\mathcal{G}},$$

$$U_{n+1}^3 : k(N\mathcal{E}_n \sqcup N\mathcal{G}_n) \rightarrow k(1, 1)_{n+1}^{N\mathcal{G}} \oplus k(((1, 0)_{n+1} \sqcup (0, 1)_{n+1}) \cap (AP_{n+1}/Q_1)).$$

Además, U_{n+1}^3 es inyectiva, $\text{Nu } U_{2m+1}^2 = k\mathcal{G}_{2m}/\text{Im}(1-t)$ y

$$\text{Nu } U_{2m}^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{car } k \neq 2 \\ k\mathcal{G}_{2m-1}/\text{Im}(1-t) & \text{si } \text{car } k = 2. \end{cases}$$

Demostración. Recordemos que

$$D_{n+1}^0(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) = \sum_{\substack{\{\beta \in Q_1: \\ \beta \alpha_1 \in I, t(\beta)=r\}}} (\beta \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta) + (-1)^{n+1} \sum_{\substack{\{\beta \in Q_1: \\ \alpha_n \beta \in I, s(\beta)=r\}}} (\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta, \beta)$$

luego es claro que $D_{n+1}^0(\mathcal{E}_n) = 0$, y si $(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) \in \mathcal{G}_n$ entonces

$$D_{n+1}^2(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) = (\alpha_n \alpha_1 \cdots \alpha_n, \alpha_n) + (-1)^{n+1} (\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_1, \alpha_1) \in k(1, 1)_{n+1}^{\mathcal{G}}.$$

Ahora debemos probar que $\text{Nu } U_{2m+1}^2 = k\mathcal{G}_{2m} / \text{Im}(1-t)$. De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} k\mathcal{G}_{2m} & \xrightarrow{U_{2m+1}^2} & k(1, 1)_{2m+1}^{\mathcal{G}} \\ \parallel & & \uparrow -\psi \\ k\mathcal{G}_{2m} & \xrightarrow{(1-t)} & k\mathcal{G}_{2m} \end{array}$$

donde $\psi(\alpha_1 \cdots \alpha_{2m}, e_{s(\alpha_1)}) = (\alpha_1 \cdots \alpha_{2m} \alpha_1, \alpha_1)$ es un isomorfismo, tenemos que

$$\text{Nu } U_{2m+1}^2 = \text{Nu}(1-t).$$

La igualdad

$$\text{Nu}(1-t) = \text{Im } N = k\mathcal{G}_{2m} / \text{Nu } N = k\mathcal{G}_{2m} / \text{Im}(1-t)$$

sigue de la exactitud de la sucesión

$$k\mathcal{G}_{2m} \xrightarrow{N} k\mathcal{G}_{2m} \xrightarrow{(1-t)} k\mathcal{G}_{2m} \xrightarrow{N} k\mathcal{G}_{2m},$$

probada en el Lema 2.3.5. Si $\text{car } k = 2$ la misma demostración vale también para $\text{Nu } U_{2m}^2$. Si $\text{car } k \neq 2$, definimos $T : k(1, 1)_{2m}^{\mathcal{G}} \rightarrow k\mathcal{G}_{2m-1}$ como sigue:

$$T(\alpha_1 \cdots \alpha_{2m-1} \alpha_1, \alpha_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2m-2} (-1)^i t^i (\alpha_1 \cdots \alpha_{2m-1}, e_{s(\alpha_1)})$$

y tenemos que $T \circ U_{2m}^2 = \text{id}$ y $U_{2m}^2 \circ T = \text{id}$, así U_{2m}^2 es biyectiva.

Si $(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) \in N\mathcal{E}_n$ entonces

$$U_{n+1}^3(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) = \begin{cases} (\beta \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta) & \in k(1, 0)_{n+1}, \\ (-1)^{n+1} (\alpha_1 \cdots \alpha_n \gamma, \gamma) & \in k(0, 1)_{n+1}, \\ (\beta \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta) + (-1)^{n+1} (\alpha_1 \cdots \alpha_n \gamma, \gamma) & \in k((1, 0)_{n+1} \sqcup (0, 1)_{n+1}), \end{cases}$$

dependiendo de la existencia de β y γ satisfaciendo $\beta \neq \alpha_n$ y $\beta \alpha_1 \in I$, $\gamma \neq \alpha_1$ y $\alpha_n \gamma \in I$.

Finalmente, si $(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) \in N\mathcal{G}_n$ entonces

$$\begin{aligned} & U_{n+1}^3(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_r) = \\ & = \begin{cases} (\alpha_n \alpha_1 \cdots \alpha_n, \alpha_n) + (-1)^{n+1} (\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_1, \alpha_1), \\ (\alpha_n \alpha_1 \cdots \alpha_n, \alpha_n) + (-1)^{n+1} (\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_1, \alpha_1) + (\beta \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta), \\ (\alpha_n \alpha_1 \cdots \alpha_n, \alpha_n) + (-1)^{n+1} (\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_1, \alpha_1) + (-1)^{n+1} (\alpha_1 \cdots \alpha_n \gamma, \gamma), \\ (\alpha_n \alpha_1 \cdots \alpha_n, \alpha_n) + (-1)^{n+1} (\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_1, \alpha_1) + (\beta \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta) + (-1)^{n+1} (\alpha_1 \cdots \alpha_n \gamma, \gamma), \end{cases} \end{aligned}$$

dependiendo de la existencia de β y γ en Q_1 satisfaciendo $\beta \neq \alpha_n$ y $\beta\alpha_1 \in I$, $\gamma \neq \alpha_1$ y $\alpha_n\gamma \in I$. Luego

$$\begin{aligned} U_{n+1}^3(kN\mathcal{E}_n) &\subset k(((1,0)_{n+1} \sqcup (0,1)_{n+1}) \cap (AP_{n+1}/Q_1)), \\ U_{n+1}^3(kN\mathcal{G}_n) &\subset k(((1,1)_{n+1}^{NG} \sqcup (1,0)_{n+1} \sqcup (0,1)_{n+1}) \cap (AP_{n+1}/Q_1)). \end{aligned}$$

Ahora definimos la aplicación lineal

$$T : k(((1,1)_{n+1}^{NG} \sqcup (1,0)_{n+1} \sqcup (0,1)_{n+1}) \cap (AP_{n+1}/Q_1)) \rightarrow k(N\mathcal{E}_n \sqcup N\mathcal{G}_n)$$

como sigue:

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_1, \alpha_1) &= (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{\mu(w)-1} (-1)^{in} t^i(w) \\ T(\beta\alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta) &= \begin{cases} w & \text{si } \alpha_n \alpha_1 \notin I, \\ 0 & \text{si } \alpha_n \alpha_1 \in I \text{ y } \exists \gamma \neq \alpha_1 \\ & \text{tal que } \alpha_n \gamma \in I, \\ (-1)^n \sum_{i=0}^{\mu(t(w))-1} (-1)^{in} t^{i+1}(w) & \text{en caso contrario;} \end{cases} \\ T(\alpha_1 \cdots \alpha_n \gamma, \gamma) &= \begin{cases} -\sum_{i=0}^{\mu(t(w))-1} (-1)^{in} t^{i+1}(w) & \text{si } \alpha_n \alpha_1 \in I, \\ 0 & \text{si } \alpha_n \alpha_1 \notin I \text{ y } \exists \beta \neq \alpha_n \\ & \text{tal que } \beta\alpha_1 \in I, \\ (-1)^{n+1} w & \text{en caso contrario,} \end{cases} \end{aligned}$$

donde $w = (\alpha_1 \cdots \alpha_n, e_{s(\alpha_1)})$ y $\mu(w)$ es el primer número natural tal que $t^{\mu(w)-1}(w) \notin \mathcal{C}_n(0)$. Un cálculo directo muestra que $T \circ U_{n+1}^3 = \text{id}$, y así U_{n+1}^3 es inyectiva. \square

Proposición 2.3.7. *Si $n \geq 1$ entonces*

$$\begin{aligned} \dim_k \text{Nu } D_{n+1}^0 &= \begin{cases} |\mathcal{E}_n| + \dim_k k\mathcal{G}_n / \text{Im}(1-t) & \text{si } n \text{ es par y } \text{car } k \neq 2, \\ |\mathcal{E}_n| & \text{si } n \text{ es impar y } \text{car } k \neq 2, \\ |\mathcal{E}_n| + \dim_k k\mathcal{G}_n / \text{Im}(1-t) & \text{si } \text{car } k = 2; \end{cases} \\ \dim_k \text{Im } D_{n+1}^0 &= \begin{cases} |\mathcal{C}_n| + |N\mathcal{E}_n| - \dim_k k\mathcal{G}_n / \text{Im}(1-t) & \text{si } n \text{ es par y } \text{car } k \neq 2, \\ |\mathcal{C}_n| + |N\mathcal{E}_n| & \text{si } n \text{ es impar } \text{car } k \neq 2, \\ |\mathcal{C}_n| + |N\mathcal{E}_n| - \dim_k k\mathcal{G}_n / \text{Im}(1-t) & \text{si } \text{car } k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Demostración. Las fórmulas de las dimensiones de $\text{Nu } D_{n+1}^0$ se deducen por cálculo directo usando el Lema 2.3.6. La igualdad

$$\dim_k \text{Im } D_{n+1}^0 = |(AP_n/Q_0)| - \dim_k \text{Nu } D_{n+1}^0$$

y

$$|(AP_n/Q_0)| = |\mathcal{G}_n| + |N\mathcal{G}_n| + |\mathcal{E}_n| + |N\mathcal{E}_n| = |\mathcal{C}_n| + |\mathcal{E}_n| + |N\mathcal{E}_n|$$

implican la fórmula para $\dim_k \text{Im } D_{n+1}^0$. \square

Comenzaremos a calcular los primeros grupos de la cohomología de Hochschild.

Teorema 2.3.8. *Sea $A = kQ/I$ un álgebra de cuerdas cuadrática. Entonces*

$$\begin{aligned} \dim_k \mathrm{HH}^0(A) &= |^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^-| + 1, \\ \dim_k \mathrm{HH}^1(A) &= \begin{cases} |^-(0,0)_1^-| + |Q_1| - |Q_0| + 1 & \text{si } \mathrm{car} k \neq 2, \\ |^-(0,0)_1^-| + |Q_1| - |Q_0| + 1 + |\mathcal{G}_1| & \text{si } \mathrm{car} k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Demostración. Recordemos que los morfismos D_1^0 y D_1^1 del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{E-E}(kQ_0, A) & \xrightarrow{D_1} & \mathrm{Hom}_{E-E}(kQ_1, A) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ k(Q_0//Q_0) \oplus k(Q_0//\mathcal{P}_1) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_1^0 & 0 \\ 0 & D_1^1 \end{pmatrix}} & k(Q_1//Q_0) \oplus k(Q_1//Q_1) \oplus k(Q_1//\mathcal{P}_2) \end{array}$$

están dados por

$$\begin{aligned} D_1^0(e_r, e_r) &= \sum_{\{\beta \in Q_1: t(\beta)=r\}} (\beta, \beta) - \sum_{\{\beta \in Q_1: s(\beta)=r\}} (\beta, \beta), \\ D_1^1(e_r, \gamma) &= \sum_{\{\beta \in Q_1: t(\beta)=r\}} (\beta, \beta\gamma) - \sum_{\{\beta \in Q_1: s(\beta)=r\}} (\beta, \gamma\beta). \end{aligned}$$

Entonces

$$D_1^0\left(\sum_{r \in Q_0} \lambda_r(e_r, e_r)\right) = \sum_{\beta \in Q_1} (\lambda_{t(\beta)} - \lambda_{s(\beta)})(\beta, \beta) = 0$$

implica que $\lambda_i = \lambda_j$ siempre que exista una flecha $\beta : i \rightarrow j$. Como Q es conexo, tenemos que $\lambda_i = \lambda_j$ para cualquier i, j . Luego $\dim_k \mathrm{Nu} D_1^0 = 1$.

Por otro lado, $(Q_0//\mathcal{P}_1) = {}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^- \sqcup {}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^+ \sqcup {}^+(Q_0//\mathcal{P}_1)^- \sqcup {}^+(Q_0//\mathcal{P}_1)^+$ y tenemos que:

- (i) $D_1^1({}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^-) = 0$;
- (ii) D_1^1 induce una biyección de ${}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^+$ a ${}^-(0,1)_1$;
- (iii) D_1^1 induce una biyección de ${}^+(Q_0//\mathcal{P}_1)^-$ a $(1,0)_1^-$;
- (iv) existe una biyección $\phi_1 : (1,0)_1^+ \rightarrow {}^+(0,1)_1$ dada por $\phi_1(\alpha, \alpha\gamma) = (\beta, \gamma\beta)$ tal que $D_1^1({}^+(Q_0//\mathcal{P}_1)^+) = (id - \phi_1)((1,0)_1^+)$.

Así ${}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^-$ es una base para $\mathrm{Nu} D_1^1$ y entonces

$$\dim_k \mathrm{HH}^0(A) = \dim_k \mathrm{Nu} D_1 = \dim_k \mathrm{Nu} D_1^0 + \dim_k \mathrm{Nu} D_1^1 = 1 + |^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^-|.$$

De este cálculo tenemos que

$$\begin{aligned}\dim_k \text{Im } D_1^0 &= |(Q_0//Q_0)| - \dim_k \text{Nu } D_1^0 = |Q_0| - 1, \\ \dim_k \text{Im } D_1^1 &= |(Q_0//\mathcal{P}_1)| - \dim_k \text{Nu } D_1^1 \\ &= |{}^-(0,1)_1| + |(1,0)_1^-| + |(1,0)_1^+|.\end{aligned}$$

De la Proposición 2.3.2 y la Proposición 2.3.7 tenemos que

$$\begin{aligned}\dim_k \text{Nu } D_2 &= \dim_k \text{Nu } D_2^0 + \dim_k \text{Nu } D_2^1 \\ &= |\mathcal{E}_1| + |{}^-(0,0)_1^-| + |{}^-(0,1)_1| + |(1,1)_1| + |(1,0)_1|\end{aligned}$$

si $\text{car } k \neq 2$, y

$$\dim_k \text{Nu } D_2 = |\mathcal{E}_1| + |{}^-(0,0)_1^-| + |{}^-(0,1)_1| + |(1,1)_1| + |(1,0)_1| + \dim_k k\mathcal{G}_1 / \text{Im}(1-t)$$

si $\text{car } k = 2$. Ahora $(1,1)_1 = Q_1$, $\mathcal{E}_1 = \emptyset$ pues A es de dimensión finita y

$$k\mathcal{G}_1 / \text{Im}(1-t) = k\mathcal{G}_1,$$

así

$$\dim_k \text{HH}^1(A) = \begin{cases} |{}^-(0,0)_1^-| + |Q_1| - |Q_0| + 1 & \text{si } \text{car } k \neq 2, \\ |{}^-(0,0)_1^-| + |Q_1| - |Q_0| + 1 + |\mathcal{G}_1| & \text{si } \text{car } k = 2. \end{cases}$$

□

Al igual que en el caso de álgebras de cuerdas triangulares (Corolario 2.2.7), como aplicación del cálculo de los primeros grupos de cohomología tenemos:

Corolario 2.3.9. *[ABL, Teorema 5.1] Si A es un álgebra de cuerdas cuadrática, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) $\text{HH}^1(A) = 0$;
- ii) *El carcaj Q es un árbol;*
- iii) $\text{HH}^i(A) = 0$ para $i > 0$;
- iv) *A es simplemente conexa.*

Finalmente, las dimensiones que hemos calculado en la Proposiciones 2.3.2 y 2.3.7 serán usadas para demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.3.10. *Si $A = kQ/I$ es un álgebra de cuerdas cuadrática y $n \geq 2$ entonces*

$$\begin{aligned}\dim_k \text{HH}^n(A) &= |{}^-(0,0)_n^-| + |\mathcal{E}_n| - |N\mathcal{E}_{n-1}| + |((1,0)_n \sqcup {}^-(0,1)_n) \cap (AP_n//Q_1)| \\ &+ \begin{cases} \dim_k k\mathcal{G}_n / \text{Im}(1-t) & \text{si } n \text{ es par y } \text{car } k \neq 2 \\ \dim_k k\mathcal{G}_{n-1} / \text{Im}(1-t) & \text{si } n \text{ es impar y } \text{car } k \neq 2, \\ \dim_k k\mathcal{G}_n / \text{Im}(1-t) + \dim_k k\mathcal{G}_{n-1} / \text{Im}(1-t) & \text{si } \text{car } k = 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Demostración. De las Proposiciones 2.3.7 y 2.3.2 tenemos que si n es par y $\text{car } k \neq 2$ entonces

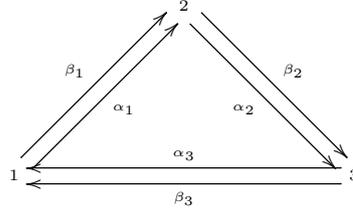
$$\begin{aligned} \dim_k \text{HH}^n(A) &= \dim_k \text{Nu } D_{n+1} - \dim_k \text{Im } D_n \\ &= |{}^-(0,0)_n^-| + |{}^-(0,1)_n| + |(1,1)_n| + |(1,0)_n| \\ &\quad - |({}^-(0,1)_n \sqcup (1,0)_n \sqcup (1,1)_n) \cap (AP_n//\mathcal{P}_2)| \\ &\quad + |\mathcal{E}_n| + \dim_k k\mathcal{G}_n / \text{Im}(1-t) - |\mathcal{C}_{n-1}| - |N\mathcal{E}_{n-1}| \end{aligned}$$

y la fórmula buscada vale pues, de la identificación

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \alpha_1, \alpha_1) \leftrightarrow (\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}, e_{s(\alpha_1)}),$$

tenemos que $|(1,1)_n \cap (AP_n//Q_1)| = |\mathcal{C}_{n-1}|$. Similarmente se deducen las otras fórmulas. \square

Ejemplo 2.3.11. Sea $A = kQ/I$ un álgebra de cuerdas dada por el siguiente carcaj Q :



donde $I = \langle \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1, \beta_1 \beta_2, \beta_2 \beta_3, \beta_3 \beta_1, \beta_1 \alpha_2 \rangle$.

- Elementos base de la forma ${}^-(0,0)_n^-$ para $n \geq 1$. Si $(\rho, \gamma) \in {}^-(0,0)_n^-$ entonces $\gamma = \alpha_2 \beta_3 \alpha_1 \beta_2 \alpha_3 \beta_1$. Luego ρ debe iniciar con la flecha β_2 y finalizar con la flecha α_1 , así $\rho = (\beta_2 \beta_3 \beta_1)^{t_1} (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1)^{t_2}$, con $t_1, t_2 \geq 1$ y $n = 3(t_1 + t_2)$. De este modo obtenemos que

$$|{}^-(0,0)_1^-| = 0, \quad |{}^-(0,0)_2^-| = 0$$

y para $i \geq 1$

$$|{}^-(0,0)_{3i}^-| = i - 1, \quad |{}^-(0,0)_{3i+1}^-| = 0 \quad \text{y} \quad |{}^-(0,0)_{3i+2}^-| = 0.$$

- Elementos base de la forma ${}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^-$. Si $(e, \gamma) \in {}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^-$ entonces $e = e_2$ y $\gamma = \alpha_2 \beta_3 \alpha_1 \beta_2 \alpha_3 \beta_1$. De este modo obtenemos que

$$|{}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^-| = 1.$$

- Elementos base de la forma $(1,0)_n \cap (AP_n//Q_1)$, $n \geq 1$. Para $j = 1, 2, 3$, tenemos que $(1,0)_n \cap (AP_n//\{\alpha_j\}) = \emptyset$, pues no existe $\rho \in AP_n$ que inicie con la flecha α_j y finalice con la flecha β_j . Luego si $(\rho, \gamma) \in (1,0)_n \cap (AP_n//Q_1)$ debe ser $\gamma = \beta_1, \beta_2$ ó β_3 . Si $\gamma = \beta_1$ entonces $\rho = \beta_1 (\beta_2 \beta_3 \beta_1)^{t_1} (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1)^{t_2}$ con $t_1 \geq 0, t_2 \geq 1$ y $n = 3(t_1 + t_2) + 1$. De este modo obtenemos que

$$|(1,0)_1 \cap (AP_1//\{\beta_1\})| = 0, \quad |(1,0)_2 \cap (AP_2//\{\beta_1\})| = 0$$

y para $i \geq 1$

$$|(1, 0)_{3i+1} \cap (AP_{3i+1} // \{\beta_1\})| = i,$$

$$|(1, 0)_{3i} \cap (AP_{3i} // \{\beta_1\})| = 0 \quad y \quad |(1, 0)_{3i+2} \cap (AP_{3i+2} // \{\beta_1\})| = 0.$$

Si $\gamma = \beta_2$ entonces $\rho = (\beta_2\beta_3\beta_1)^{t_1}(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)^{t_2}\alpha_2$ con $t_1 \geq 1, t_2 \geq 0$ y $n = 3(t_1+t_2)+1$. De este modo obtenemos que

$$|(1, 0)_1 \cap (AP_1 // \{\beta_2\})| = 0, \quad |(1, 0)_2 \cap (AP_2 // \{\beta_2\})| = 0$$

y para $i \geq 1$

$$|(1, 0)_{3i+1} \cap (AP_{3i+1} // \{\beta_2\})| = i \quad y$$

$$|(1, 0)_{3i} \cap (AP_{3i} // \{\beta_2\})| = 0 \quad y \quad |(1, 0)_{3i+2} \cap (AP_{3i+2} // \{\beta_2\})| = 0.$$

Si $\gamma = \beta_3$ entonces $\rho = \beta_3\beta_1(\beta_2\beta_3\beta_1)^{t_1}(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)^{t_2}\alpha_2\alpha_3$ con $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$ y $n = 3(t_1+t_2)+1$. De este modo obtenemos que

$$|(1, 0)_1 \cap (AP_1 // \{\beta_3\})| = 0, \quad |(1, 0)_2 \cap (AP_2 // \{\beta_3\})| = 0$$

y para $i \geq 1$

$$|(1, 0)_{3i+1} \cap (AP_{3i+1} // \{\beta_3\})| = i \quad y$$

$$|(1, 0)_{3i} \cap (AP_{3i} // \{\beta_3\})| = 0 \quad y \quad |(1, 0)_{3i+2} \cap (AP_{3i+2} // \{\beta_3\})| = 0.$$

- Elementos base de la forma $^-(0, 1)_n \cap (AP_n // Q_1)$, $n \geq 1$. Si $(\rho, \gamma) \in ^-(0, 1)_n \cap (AP_n // Q_1)$ entonces $\gamma = \alpha_2$. Luego $\rho = (\beta_2\beta_3\beta_1)^{t_1}(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)^{t_2}\alpha_2$ con $t_1 \geq 1, t_2 \geq 0$ y $n = 3(t_1+t_2)+1$. De este modo obtenemos que

$$|^-(0, 1)_1 \cap (AP_1 // \{\alpha_2\})| = 0, \quad |^-(0, 1)_2 \cap (AP_2 // \{\alpha_2\})| = 0$$

y para $i \geq 1$

$$|^-(0, 1)_{3i+1} \cap (AP_{3i+1} // \{\alpha_2\})| = i,$$

$$|^-(0, 1)_{3i} \cap (AP_{3i} // \{\alpha_2\})| = 0 \quad y \quad |^-(0, 1)_{3i+2} \cap (AP_{3i+2} // \{\alpha_2\})| = 0$$

- $\mathcal{G}_n = \emptyset$ para todo $n \geq 1$.
- $\mathcal{E}_n = \emptyset$ para todo $n \geq 1$.
- $N\mathcal{E}_1 = \emptyset, N\mathcal{E}_2 = \emptyset$ y para $i \geq 1$

$$\begin{aligned} N\mathcal{E}_{3i} &= \{(\beta_1(\beta_2\beta_3\beta_1)^{t_1}(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)^{t_2}\alpha_2\alpha_3, e_1) : t_1, t_2 \geq 0, t_1+t_2+1 = i\} \\ &\cup \{((\beta_2\beta_3\beta_1)^{t_1}(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)^{t_2}, e_2) : t_1, t_2 \geq 1, t_1+t_2 = i\} \\ &\cup \{(\beta_3\beta_1(\beta_2\beta_3\beta_1)^{t_1}(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)^{t_2}\alpha_2, e_3) : t_1, t_2 \geq 0, t_1+t_2+1 = i\} \end{aligned}$$

$N\mathcal{E}_{3i+1} = \emptyset, N\mathcal{E}_{3i+2} = \emptyset$ y por lo tanto

$$|N\mathcal{E}_{3i+1}| = 0, \quad |N\mathcal{E}_{3i+2}| = 0 \quad y \quad |N\mathcal{E}_{3i}| = 3i - 1.$$

Del análisis anterior obtenemos

$$\dim_k \mathrm{HH}^0(A) = 2 \quad \dim_k \mathrm{HH}^1(A) = 4, \quad \dim_k \mathrm{HH}^2(A) = 0$$

y para $n \geq 3$

$$\dim_k \mathrm{HH}^n(A) = \begin{cases} i - 1 & \text{si } n = 3i, \\ i + 1 & \text{si } n = 3i + 1, \\ 0 & \text{si } n = 3i + 2. \end{cases}$$

Los grupos de cohomología de Hochschild de las álgebras gentiles fueron calculados en [L], y estos resultados han sido expresados en términos de un invariante derivado introducido por Avella-Alaminos y Geiss en [AAG].

Corolario 2.3.12. *Si $A = kQ/I$ es un álgebra gentil, entonces*

$$\begin{aligned} \dim_k \mathrm{HH}^0(A) &= |^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^-| + 1, \\ \dim_k \mathrm{HH}^1(A) &= \begin{cases} |^-(0,0)_1^-| + |Q_1| - |Q_0| + 1 & \text{si } \mathrm{car} k \neq 2, \\ |^-(0,0)_1^-| + |Q_1| - |Q_0| + 1 + |(Q_1//Q_0)| & \text{si } \mathrm{car} k = 2, \end{cases} \\ \dim_k \mathrm{HH}^n(A) &= |^-(0,0)_n^-| + |\mathcal{E}_n| + a \dim_k k\mathcal{G}_n / \mathrm{Im}(1-t) + b \dim_k k\mathcal{G}_{n-1} / \mathrm{Im}(1-t) \end{aligned}$$

donde

$$(a, b) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } n \geq 2, n \text{ par, } \mathrm{car} k \neq 2 \\ (0, 1) & \text{si } n \geq 2, n \text{ impar, } \mathrm{car} k \neq 2, \\ (1, 1) & \text{si } n \geq 2, \mathrm{car} k = 2. \end{cases}$$

Demostración. De los Teoremas 2.3.8 y 2.3.10 es claro que sólo debemos probar que

$$|N\mathcal{E}_{n-1}| = |((1,0)_n \sqcup ^-(0,1)_n) \cap (AP_n//Q_1)|.$$

Como A es gentil, $N\mathcal{G}_{n-1} = \emptyset$, y en este caso la aplicación inyectiva

$$U_n^3 : k(N\mathcal{E}_{n-1}) \rightarrow k(((1,0)_n \sqcup (0,1)_n) \cap (AP_n//Q_1))$$

estudiada en el Lema 2.3.6 verifica

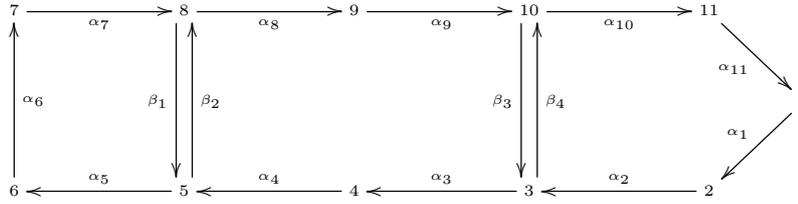
$$U_n^3(\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}, e_r) = \begin{cases} (\beta\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}, \beta) & \in k(1,0)_n^-, \\ (-1)^n(\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\gamma, \gamma) & \in k(^-(0,1)_n), \\ (\beta\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}, \beta) + (-1)^n(\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\gamma, \gamma) & \in k((id + (-1)^n\phi_n)(1,0)_n^+) \end{cases}$$

dependiendo de la existencia de β y γ . Así

$$|N\mathcal{E}_{n-1}| = \dim_k \mathrm{Im} U_n^3 = |((1,0)_n \sqcup ^-(0,1)_n) \cap (AP_n//Q_1)|.$$

□

Ejemplo 2.3.13. Sea $A = kQ/I$ el álgebra gentil dada por el siguiente carcaj Q :



donde $I = \langle \alpha_i \alpha_{i+1} \rangle_{\{i=1, \dots, 10\}} \cup \langle \beta_1 \beta_2, \beta_2 \beta_1, \beta_3 \beta_4, \beta_4 \beta_3 \rangle$.

- Para cada $n \geq 1$, ${}^-(0, 0)_n^- = \emptyset$. Pues si $(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 0)_n^-$ debe ser

$$\gamma = \alpha_{11} \alpha_1, \alpha_9 \beta_3 \alpha_3, \alpha_7 \beta_1 \alpha_5, \alpha_6, \alpha_2 \beta_4 \alpha_{10} \text{ ó } \alpha_4 \beta_2 \alpha_8,$$

pero para estas posibilidades de γ , ó no es posible hallar ρ verificando que $s(\rho) = s(\gamma)$ y $t(\rho) = t(\gamma)$ ó no es posible hallar ρ que inicie(finalice) con un flecha diferente a la que inicia(finaliza) γ .

- Claramente ${}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^- = \emptyset$ y $(Q_1//Q_0) = \emptyset$.
- Elementos base de la forma \mathcal{G}_n . Si $(\rho, e) \in \mathcal{G}_n$, entonces $\rho = (\beta_1 \beta_2)^i, (\beta_2 \beta_1)^i, (\beta_3 \beta_4)^i$ ó $(\beta_4 \beta_3)^i$ y $n = 2i$. Como $t((\beta_1 \beta_2)^i, e_8) = ((\beta_2 \beta_1)^i, e_5)$, $t^2((\beta_1 \beta_2)^i, e_8) = ((\beta_1 \beta_2)^i, e_8)$, $t((\beta_3 \beta_4)^i, e_{10}) = ((\beta_4 \beta_3)^i, e_3)$, $t^2((\beta_3 \beta_4)^i, e_{10}) = ((\beta_3 \beta_4)^i, e_{10})$ obtenemos que

$$\dim_k k\mathcal{G}_n / \text{Im}(1 - t) = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ es par;} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

- Elementos base de la forma \mathcal{E}_n . Si $(\rho, e) \in \mathcal{E}_n$, entonces $e = e_1$ y $\rho = \alpha_1 \dots \alpha_{11}$. Luego

$$|\mathcal{E}_n| = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 11; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

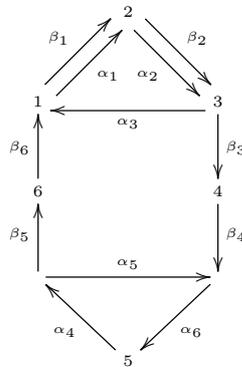
Del análisis anterior obtenemos

$$\dim_k \text{HH}^0(A) = 1 \quad \dim_k \text{HH}^1(A) = 5$$

y para $n \geq 2$

$$\dim_k \text{HH}^n(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 11, \\ 2 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.14. Sea $A = kQ/I$ el álgebra gentil dada por el siguiente carcaj Q :



donde $I = \langle \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1, \beta_1 \beta_2, \beta_2 \beta_3, \beta_3 \beta_4, \beta_5 \beta_6, \beta_6 \beta_1, \alpha_4 \alpha_5, \alpha_5 \alpha_6 \rangle$

- Elementos base de la forma ${}^-(0,0)_n^-$. Si $(\rho, \gamma) \in {}^-(0,0)_n^-$ entonces

$$\gamma = \alpha_5, \beta_6\alpha_1\beta_2\alpha_3\beta_1\alpha_2\beta_3 \text{ ó } \beta_4\alpha_6\alpha_4\beta_5.$$

Solo cuando $\gamma = \alpha_5$ es posible hallar $\rho = \beta_5\beta_6\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ verificando las condiciones deseadas. Luego

$$|{}^-(0,0)_n^-| = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 6; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Claramente ${}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^- = \emptyset$ y $(Q_1//Q_0) = \emptyset$.
- Elementos base de la forma \mathcal{G}_n . Si $(\rho, e) \in \mathcal{G}_n$, entonces $\rho = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^i, (\alpha_2\alpha_3\alpha_1)^i$ ó $(\alpha_3\alpha_1\alpha_2)^i$ y $n = 3i$. Como $t((\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^i, e_1) = ((\alpha_3\alpha_1\alpha_2)^i, e_3)$, $t^2((\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^i, e_1) = ((\alpha_2\alpha_3\alpha_1)^i, e_2)$ y $t^3((\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^i, e_1) = ((\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^i, e_1)$ obtenemos que

$$\dim_k k\mathcal{G}_n / \text{Im}(1-t) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 3i; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Elementos base de la forma \mathcal{E}_n . Si $(\rho, e) \in \mathcal{E}_n$, entonces $e = e_5$ y $\rho = \alpha_4\alpha_5\alpha_6$. Luego

$$|\mathcal{E}_n| = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 3; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Del análisis anterior obtenemos que si $\text{car } k \neq 2$

$$\dim_k \text{HH}^0(A) = 1, \quad \dim_k \text{HH}^1(A) = 5, \quad \dim_k \text{HH}^2(A) = 0$$

$\dim_k \text{HH}^3(A) = 1, \quad \dim_k \text{HH}^4(A) = 0, \quad \dim_k \text{HH}^5(A) = 0$ y $\dim_k \text{HH}^6(A) = 2$
y para $n \geq 7$

$$\dim \text{HH}^n(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3i, n = 3i + 1, \text{ con } i \text{ par,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

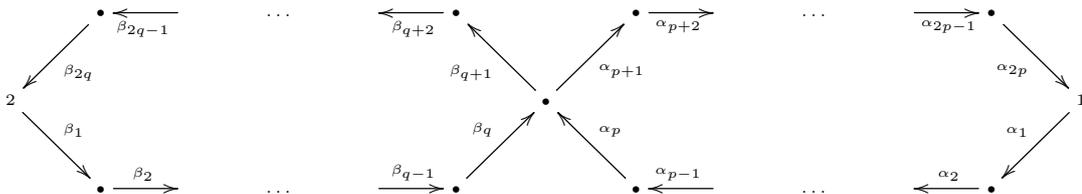
y si $\text{car } k = 2$

$$\dim_k \text{HH}^0(A) = 1, \quad \dim_k \text{HH}^1(A) = 5, \quad \dim_k \text{HH}^2(A) = 0$$

$\dim_k \text{HH}^3(A) = 2, \quad \dim_k \text{HH}^4(A) = 1, \quad \dim_k \text{HH}^5(A) = 0$ y $\dim_k \text{HH}^6(A) = 2$
y para $n \geq 7$

$$\dim \text{HH}^n(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3i, n = 3i + 1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.15. Sea $p, q > 2$ y $A_{p,q} = kQ/I$ el álgebra gentil dada por el siguiente carcaj Q :



donde $I = \langle \alpha_i \alpha_{i+1} \rangle_{\{i=1, \dots, 2p-1\}} \cup \langle \beta_i \beta_{i+1} \rangle_{\{i=1, \dots, 2q-1\}}$.

Podemos ver que en este caso ${}^-(0, 0)_n^- = \emptyset$, $\mathcal{G}_n = \emptyset$, ${}^-(Q_0//\mathcal{P}_1)^- = \emptyset$, $(Q_1//Q_0) = \emptyset$ y

$$\mathcal{E}_n = \begin{cases} \{(\alpha_1 \dots \alpha_{2p}, e_1)\}, & \text{si } n = 2p ; \\ \{(\beta_1 \dots \beta_{2q}, e_2)\}, & \text{si } n = 2q ; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Obtenemos entonces que

$$\dim_k \text{HH}^0(A_{p,q}) = 1, \quad y \quad \dim_k \text{HH}^1(A_{p,q}) = 2$$

y para $n \geq 2$

$$\dim \text{HH}^n(A_{p,q}) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2p = 2q = n, \\ 1 & \text{si } 2p = n \text{ y } 2q \neq n \text{ ó } 2q = n \text{ y } 2p \neq n \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Los siguientes resultados serán usados en el último capítulo de esta tesis para describir el producto cup y el corchete de Lie en $\text{HH}^*(A)$.

Proposición 2.3.16. *Sea $n > 1$ y sea*

$$f = \sum_{i=1}^t \lambda_i(\rho_i, \gamma_i) \in \text{Nu } D_{n+1}^1 \cap k(AP_n//\mathcal{P}_2)$$

tal que $(\rho_i, \gamma_i) \notin {}^-(0, 0)_n^-$ para todo i con $1 \leq i \leq t$. Entonces $\bar{f} = 0$ en $\text{HH}^n(A)$.

Demostración. Del Lema 2.2.2 sabemos que f es combinación lineal de elementos en

$$((1, 0)_n^- \sqcup {}^-(0, 1)_n \sqcup (1, 1)_n \sqcup (id + (-1)^n \phi_n)((1, 0)_n^+)) \cap k(AP_n//\mathcal{P}_2)$$

y del mismo lema deducimos que

$$\begin{aligned} (1, 0)_n^- \cap (AP_n//\mathcal{P}_2) &= D_n^1({}^+(0, 0)_{n-1}^-) \\ {}^-(0, 1)_n \cap (AP_n//\mathcal{P}_2) &= D_n^1({}^-(0, 0)_{n-1}^+) \\ (1, 1)_n \cap (AP_n//\mathcal{P}_2) &= (-1)^n D_n^1((1, 0)_{n-1}^+) \\ (id + (-1)^n \phi_n)((1, 0)_n^+) \cap k(AP_n//\mathcal{P}_2) &= D_n^1({}^+(0, 0)_{n-1}^+) \cap (AP_{n-1}//\mathcal{P}_1). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.17. *Sea A un álgebra gentil, $n > 1$ y sea*

$$f = \sum_{i=1}^t \lambda_i(\rho_i, \gamma_i) \in \text{Nu } D_{n+1}^1$$

tal que $(\rho_i, \gamma_i) \notin {}^-(0, 0)_n^-$, $(\rho_i, \gamma_i) \notin (1, 1)_n \cap (AP_n//Q_1)$ para todo i con $1 \leq i \leq t$. Entonces $\bar{f} = 0$ en $\text{HH}^n(A)$.

Demostración. Del Lema 2.2.2 sabemos que f puede ser escrito como $f = f_1 + f_2$ donde

$$f_1 \in \text{Nu } D_{n+1}^1 \cap k(AP_n//Q_1) \quad \text{y} \quad f_2 \in \text{Nu } D_{n+1}^1 \cap k(AP_n//P_2).$$

Por la Proposición 2.3.16 tenemos que $\overline{f_2} = 0$ en $\text{HH}^n(A)$. Por otro lado, f_1 es una combinación lineal de elementos en

$$((1, 0)_n^- \sqcup^- (0, 1)_n \sqcup (id + (-1)^n \phi_n)((1, 0)_n^+)) \cap k(AP_n//Q_1).$$

La demostración del Corolario 2.3.12 muestra que

$$((1, 0)_n^- \sqcup^- (0, 1)_n \sqcup (id + (-1)^n \phi_n)((1, 0)_n^+)) \cap k(AP_n//Q_1) = \text{Im } U_n^3 \subset \text{Im } D_n^0.$$

Luego $\overline{f_1} = 0$ en $\text{HH}^n(A)$. □

Corolario 2.3.18. *Sea A un álgebra gentil, $n > 1$ y sea*

$$f = \sum_{i=1}^t \lambda_i (\rho_i, \gamma_i) \in \text{Nu } D_{n+1}^1$$

tal que $(\rho_i, \gamma_i) \notin {}^-(0, 0)_n^-$ para todo i con $1 \leq i \leq t$. Si $\mathcal{G}_{n-1} = \emptyset$ entonces $\overline{f} = 0$ en $\text{HH}^n(A)$.

Demostración. El resultado buscado se sigue de la proposición anterior pues $(1, 1)_n \cap (AP_n//Q_1) = \emptyset$ debido a que

$$(1, 1)_n \cap (AP_n//Q_1) = (1, 1)_n^{\mathcal{G}} \sqcup (1, 1)_n^{N\mathcal{G}},$$

$\mathcal{G}_{n-1} = \emptyset$ por hipótesis y $N\mathcal{G}_{n-1} = \emptyset$ por ser A un álgebra gentil. □



Capítulo 3

Sobre la resolución del radical y la resolución minimal de Bardzell

Dada un álgebra A sobre un cuerpo k , Cibils introduce en [C2] una resolución proyectiva de A sobre A^e , denominada la resolución del radical, que es más pequeña que la resolución standard bar.

Esta resolución ha sido muy utilizada: conecta la cohomología de Hochschild con la cohomología simplicial; a partir de ella se han calculado los grupos de cohomología de Hochschild de álgebras de radical al cuadrado cero y de álgebras de incidencia, ver [C2, C3].

Sobre esta resolución también son claras las dos estructuras definidas por Gerstenhaber. Más específicamente, sobre esta resolución el producto cup fue descrito por Claude Cibils en [C3] y el corchete de Lie fue estudiado por Selene Sánchez-Flores en [SF].

Por otro lado, para una gran familia de álgebras monomiales, la resolución minimal de Bardzell ha resultado ser una herramienta muy útil en el cálculo de grupos de cohomología y en el tratamiento de cuestiones y problemas homológicos.

En este capítulo construiremos un morfismo de comparación entre la resolución del radical y la resolución minimal de Bardzell para álgebras monomiales.

3.1. Resoluciones proyectivas del álgebra A

Sean X, X' dos resoluciones proyectivas del A -bimódulo A . Considerando el morfismo identidad id_A , por el Lema 1.1.4 sabemos que existen aplicaciones

$$f : X \rightarrow X' , g : X' \rightarrow X$$

que levantan la aplicación identidad de A , siendo f, g únicos a menos de equivalencia homotópica.

Así también se tienen las homotopías $f \circ g \sim \text{id}_{X'}$ y $g \circ f \sim \text{id}_X$.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f & & \parallel & & \\
 \text{id} \curvearrowright X' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow g & & \parallel & & \\
 \text{id} \curvearrowright X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f & & \parallel & & \\
 X' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

y aplicando el funtor de cohomología $\text{HH}^n(-)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \text{HH}^n(f) \circ \text{HH}^n(g) &= \text{HH}^n(f \circ g) = \text{HH}^n(\text{id}_{X'}) = \text{id}_{\text{HH}^n(X')} \\
 \text{HH}^n(g) \circ \text{HH}^n(f) &= \text{HH}^n(g \circ f) = \text{HH}^n(\text{id}_X) = \text{id}_{\text{HH}^n(X)}
 \end{aligned}$$

y por lo tanto $\text{HH}^n(f)$ y $\text{HH}^n(g)$ son isomorfismos para todo n . En particular así obtenemos que los complejos $\text{Hom}_{A^e}(X, A)$ y $\text{Hom}_{A^e}(X', A)$ son quasi - isomorfos.

Los morfismos f, g que levantan la aplicación identidad sobre A se llaman **morfismos de comparación**.

Consideremos

$$\mathbf{Rad} : \dots \longrightarrow A \otimes \text{rad } A^{\otimes n} \otimes A \xrightarrow{b_n} A \otimes \text{rad } A^{\otimes n-1} \otimes A \longrightarrow \dots \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

la resolución del radical definida en [C2], con diferenciales

$$\varepsilon(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta,$$

$$b_n(\alpha_0 \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n \otimes \alpha_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_0 \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_i \alpha_{i+1} \otimes \dots \otimes \alpha_n \otimes \alpha_{n+1}, \quad n > 0$$

y

$$\mathbf{Ap} : \dots \longrightarrow A \otimes kAP_n \otimes A \xrightarrow{d_n} A \otimes kAP_{n-1} \otimes A \longrightarrow \dots \longrightarrow A \otimes kAP_0 \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

la resolución proyectiva minimal dada por Bardzell en [B] y descrita en los preliminares, cuyos diferenciales están dados por

$$\mu(1 \otimes e_i \otimes 1) = e_i$$

$$d_1(1 \otimes \alpha \otimes 1) = \alpha \otimes e_{t(\alpha)} \otimes 1 - 1 \otimes e_{s(\alpha)} \otimes \alpha$$

$$d_{2m}(1 \otimes w \otimes 1) = \sum_{\psi \in \text{Sub}(w)} L(\psi) \otimes \psi \otimes R(\psi), \quad m > 0$$

$$d_{2m+1}(1 \otimes w \otimes 1) = L(\psi_1) \otimes \psi_1 \otimes 1 - 1 \otimes \psi_2 \otimes R(\psi_2), \quad m > 0$$

donde todos los productos tensoriales son tomados sobre $E = kQ_0$, la subálgebra de A generada por los vértices. Por lo anterior, sabemos que existen morfismos de comparación entre ambas resoluciones, sin embargo su construcción no es inmediata. En las siguientes secciones damos la definición explícita de estos morfismos y desarrollamos herramientas necesarias para probar que efectivamente son morfismos de comparación.

3.2. Morfismos de comparación

Como observamos en la sección anterior, la existencia de morfismos de comparación

$$\mathbf{F} : \mathbf{Ap} \rightarrow \mathbf{Rad} \quad \text{y} \quad \mathbf{G} : \mathbf{Rad} \rightarrow \mathbf{Ap}$$

es clara, sin embargo definir explícitamente tales morfismos no es muy simple. Por este motivo en las dos secciones siguientes nos ocuparemos de construir dichos morfismos para posteriormente mostrar el teorema principal de este capítulo:

Teorema 3.2.1. *Las aplicaciones \mathbf{F} y \mathbf{G} son morfismos de comparación entre las resoluciones proyectivas \mathbf{Ap} y \mathbf{Rad} .*

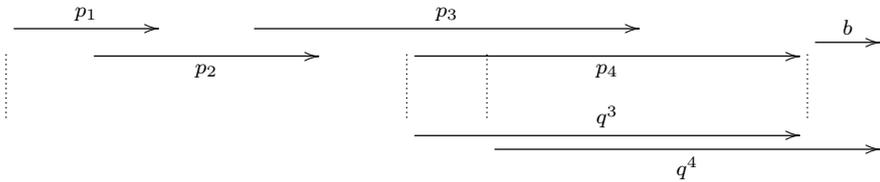
La demostración del teorema consistirá en mostrar la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^n} \otimes_E A & \xrightarrow{b_n} & A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^{n-1}} \otimes_E A \\ \downarrow G_n & & \downarrow G_{n-1} \\ A \otimes_E AP_n \otimes_E A & \xrightarrow{d_n} & A \otimes_E AP_{n-1} \otimes_E A \\ \\ A \otimes_E AP_n \otimes_E A & \xrightarrow{d_n} & A \otimes_E AP_{n-1} \otimes_E A \\ \downarrow F_n & & \downarrow F_{n-1} \\ A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^n} \otimes_E A & \xrightarrow{b_n} & A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^{n-1}} \otimes_E A \end{array}$$

por lo que se requerirán una gran cantidad de cálculos. En esta sección damos lemas necesarios y comunes a la prueba de ambos diagramas.

Los siguientes dos lemas tienen como objetivo describir divisores a izquierda y a derecha de caminos de la forma aw y wb respectivamente, donde w es el soporte de una concatenación y $a, b \in \mathcal{P}$. La existencia de estos divisores depende de cada caso particular como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.2. *Sea $w = w(p_1, p_2, p_3, p_4) \in AP_5$, $b \in \mathcal{P}$ con $t(w) = s(b)$. Observemos que la existencia de un divisor $\psi \in AP_n$, para $n = 4$ ó 5 y tal que $wb = L(\psi)\psi$ depende de la existencia de relaciones apropiadas. Por ejemplo, si wb es el siguiente camino*



la existencia de $\psi = \psi^{op}(q^1, q^2, q^3, q^4)$ depende de la existencia de una relación cuyo vértice final esté entre $s(q^3)$ y $s(q^4)$.

Lema 3.2.3. *Sea $w = w^{op}(q^1, \dots, q^{2n-1}) \in AP_{2n}$.*

-
- (i) Si $v = v(p_1, \dots, p_{2n-2}) \in AP_{2n-1}$ es tal que $aw = vb$ con a, b caminos en Q y $a \in \mathcal{P}$ entonces $t(p_{2n-2}) \leq s(q^{2n-1})$, y por lo tanto $b \in I$;
- (ii) Si $u = u(p_1, \dots, p_{2n-1}) \in AP_{2n}$ es tal que $aw = ub$ con $a, b \in \mathcal{P}$ entonces existe $z \in AP_{2n+1}$ tal que z divide al camino ub y $s(z) = s(u)$.

Demostración. (i) Probemos por inducción que

$$s(q^{2j-1}) < t(p_{2j-1}) \quad (3.1)$$

$$s(p_{2j}) \leq s(q^{2j-1}) \quad (3.2)$$

$$t(p_{2j}) \leq t(q^{2j-1}) \quad (3.3)$$

para todo $j = 1, \dots, n-1$. Claramente la segunda desigualdad implica la tercera pues las relaciones p_{2j}, q^{2j-1} son minimales.

La hipótesis de que $a \in \mathcal{P}$ implica que

$$s(p_1) < s(q^1) < t(p_1). \quad (3.4)$$

Como p_2 fue elegido en el conjunto

$$L_1 = \{ \gamma \in \mathcal{R}(v) : s(p_1) < s(\gamma) < t(p_1) \}$$

de manera tal que $s(p_2)$ sea minimal con respecto a todos los $\gamma \in L_1$, de (3.4) se deduce que

$$s(p_2) \leq s(q^1) \text{ y por lo tanto, } t(p_2) \leq t(q^1).$$

Supongamos por hipótesis inductiva que se verifican las desigualdades (3.1), (3.2) y (3.3). De la construcción de v se deduce que

$$t(p_{2j-1}) \leq s(p_{2j+1}) < t(p_{2j}) \quad (3.5)$$

y usando las desigualdades de la hipótesis inductiva obtenemos

$$s(q^{2j-1}) < s(p_{2j+1}) < t(q^{2j-1}). \quad (3.6)$$

Esta última desigualdad nos dice que

$$t(q^{2j-1}) < t(p_{2j+1}). \quad (3.7)$$

De la construcción de w^{op} sabemos que q^{2j-1} fue elegido en el conjunto

$$L_{2j-1}^{op} = \{ \gamma \in \mathcal{R}(w) : s(q^{2j}) < t(\gamma) \leq s(q^{2j+1}) \}$$

de manera tal que $t(q^{2j-1})$ sea maximal con respecto a todos los $\gamma \in L_{2j-1}^{op}$. Así (3.7) implica que $p_{2j+1} \notin L_{2j-1}^{op}$, y como

$$s(q^{2j}) < t(q^{2j-1}) < t(p_{2j+1})$$

tenemos que

$$s(q^{2j+1}) < t(p_{2j+1}). \quad (3.8)$$

Por lo tanto, de (3.3), (3.8) y la construcción de w^{op} tenemos que

$$t(p_{2j}) \leq t(q^{2j-1}) \leq s(q^{2j+1}) < t(p_{2j+1}).$$

Como p_{2j+2} fue elegido en el conjunto

$$L_{2j+2} = \{ \gamma \in \mathcal{R}(v) : t(p_{2j}) \leq s(\gamma) < t(p_{2j+1}) \}$$

de manera tal que $s(p_{2j+2})$ sea minimal con respecto a todos los $\gamma \in L_{2j+2}$, podemos concluir que

$$s(p_{2j+2}) \leq s(q^{2j+1}) \quad \text{y por la tanto,} \quad t(p_{2j+2}) \leq t(q^{2j+1}). \quad (3.9)$$

En particular, tenemos que $t(p_{2n-2}) \leq t(q^{2n-3}) \leq s(q^{2n-1})$.

- (ii) Para probar la existencia de z tenemos que mostrar que existe $p_{2n} \in \mathcal{R}$ tal que $z = z(p_1, \dots, p_{2n-1}, p_{2n})$ pertenece a AP_{2n+1} , esto es, tenemos que ver que el conjunto

$$\{q \in \mathcal{R}(aw) : t(p_{2n-2}) \leq s(q) < t(p_{2n-1})\}$$

es no vacío. Como $b \in \mathcal{P}$ tenemos que $s(q^{2n-1}) < t(p_{2n-1})$, y por (i) sabemos que $t(p_{2n-2}) \leq s(q^{2n-1})$. Por lo tanto $q^{2n-1} \in \{q \in \mathcal{R}(aw) : t(p_{2n-2}) \leq s(q) < t(p_{2n-1})\}$. \square

Lema 3.2.4. *Sea $w = w(p_1, \dots, p_{n-1}) \in AP_{2n}$.*

- (i) *Si $v = v^{op}(q^2, \dots, q^{2n-1}) \in AP_{2n-1}$ es tal que $wb = av$ con a, b caminos en Q y $b \in \mathcal{P}$ entonces $t(p_1) \leq s(q^2)$, y por lo tanto $a \in I$;*
- (ii) *Si $u = u^{op}(q^1, \dots, q^{2n-1}) \in AP_{2n}$ es tal que $wb = au$ con a, b caminos en \mathcal{P} entonces existe $z \in AP_{2n+1}$ tal que z divide al camino au y $t(z) = t(u)$.*

Demostración. Es dual a la del lema anterior. \square

Proposición 3.2.5. *Sea $w \in AP_{2n+1}$, $Sub(w) = \{\psi_1, \psi_2\}$ con $w = L(\psi_1)\psi_1 = \psi_2R(\psi_2)$. Si $w = w(p_1, \dots, p_{2n}) = w^{op}(q^1, \dots, q^{2n})$, tenemos que:*

- (i) *Si $\gamma \in Sub(\psi_1)$ es tal que $t(\psi_2) < t(\gamma)$, entonces $t(p_1) \leq s(\gamma)$.*
- (ii) *Si $\gamma \in Sub(\psi_2)$ es tal que $s(\gamma) < s(\psi_1)$, entonces $t(\gamma) \leq s(q^{2n})$.*

Demostración. (i) Sean a, b tales que $\psi_2b = a\gamma$. Entonces $b \in \mathcal{P}$ pues b divide a $R(\psi_2)$ y el resultado se sigue del Lema 3.2.4 (i).

- (ii) Análogamente, se deduce del Lema 3.2.3 (i). \square

En el siguiente lema vemos que podemos debilitar las hipótesis de la parte (ii) de los lemas anteriores:

Lema 3.2.6. Sean $w, u \in AP_{2n}$ tales que $wb = au$, con a, b caminos en Q . Entonces $a \in \mathcal{P}$ si y sólo si $b \in \mathcal{P}$.

Demostración. Sean $w = w(p_1, \dots, p_{2n-1}), u = u^{op}(q^1, \dots, q^{2n-1})$ y supongamos que $a \in \mathcal{P}$. Para mostrar que $b \in \mathcal{P}$ basta verificar que $s(q^{2n-1}) < t(p_{2n-1}) = s(b)$. De la demostración del Lema 3.2.3(i) tenemos que

$$s(q^{2n-3}) < t(p_{2n-3}) \quad \text{y} \quad t(p_{2n-2}) \leq t(q^{2n-3}).$$

Estas desigualdades junto a $t(p_{2n-3}) \leq s(p_{2n-1}) < t(p_{2n-2})$ obtenidas de la construcción de w implican que

$$s(q^{2n-3}) < s(p_{2n-1}) \leq t(q^{2n-3})$$

y por lo tanto, $t(q^{2n-3}) < t(p_{2n-1})$, y de la maximalidad de $t(q^{2n-3})$ se deduce que $s(q^{2n-1}) < t(p_{2n-1})$. Análogamente se muestra que si $b \in \mathcal{P}$ entonces $a \in \mathcal{P}$. \square

Así, la parte (ii) de los lemas 3.2.4 y 3.2.3 puede enunciarse como sigue:

Lema 3.2.7. Sea $w, u \in AP_{2n}$, tales que $wb = au$ con a ó b en \mathcal{P} . Entonces:

(i) Existe $z \in AP_{2n+1}$ tal que z divide al camino au y $t(z) = t(u)$.

(ii) Existe $z \in AP_{2n+1}$ tal que z divide al camino wb y $s(z) = s(w)$.

Lema 3.2.8. Sea $w \in AP_n$ y sea $Sub(w) = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ con $w = L(\zeta_m)\zeta_m$. Si $\psi_1 \in Sub(\zeta_m)$ es tal que $\zeta_m = L(\psi_1)\psi_1$, entonces $L(\zeta_m)L(\psi_1) \in I$.

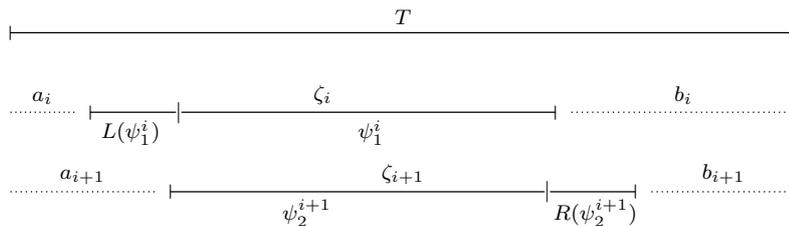
Demostración. El Lema 1.5.4 nos dice que $AP_n = AP_n^{op}$, así

$$w = w(p_1, \dots, p_{n-1}) = w^{op}(q^1, \dots, q^{n-1})$$

y entonces $\zeta_m = \zeta_m^{op}(q^2, \dots, q^{n-1})$ y $\psi_1 = \psi_1^{op}(q^3, \dots, q^{n-1})$. Luego $t(q_1) \leq s(q^3) = s(\psi_1)$ y por lo tanto q^1 divide a $L(\zeta_m)L(\psi_1)$. \square

Lema 3.2.9. Sea $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ el conjunto ordenado de todas las concatenaciones en AP_{2n-1} contenidas en un camino T , verificando que $T = a_i\zeta_i b_i$, con $a_i, b_i \in \mathcal{P}$, $s(\zeta_i) < s(\zeta_{i+1})$. Para cada i , sea $Sub(\zeta_i) = \{\psi_1^i, \psi_2^i\} \subseteq AP_{2n-2}$, $\zeta_i = \psi_2^i R(\psi_2^i) = L(\psi_1^i)\psi_1^i$. Entonces $\psi_1^i = \psi_2^{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, m-1$.

Demostración. Consideremos ζ_i, ζ_{i+1} . Gráficamente tenemos



Si $s(\psi_2^{i+1}) < s(\psi_1^i)$ tendremos que

$$s(\zeta_{i+1}) = s(\psi_2^{i+1}) < s(\psi_1^i) < t(\psi_1^i) = t(\zeta_i) < t(\zeta_{i+1}).$$

Luego será $\psi_1^i \in \text{Sub}(\zeta_{i+1})$ con $\psi_1^i \neq \psi_2^{i+1}$, $\psi_1^i \neq \psi_1^{i+1}$. Esto es una contradicción pues $|\text{Sub}(\zeta_{i+1})| = 2$, ver Lema 1.5.7.

Si $s(\psi_1^i) < s(\psi_2^{i+1})$, sea $\delta = \psi_1^i b = a\psi_2^{i+1}$. Entonces a y $b \in \mathcal{P}$ pues a divide a a_{i+1} y b divide a b_i . Por el Lema 3.2.7 (i) existirá $z \in AP_{2n-1}$ tal que z divide a δ y verifica

$$s(\zeta_i) < s(\psi_1^i) \leq s(z) < t(z) = t(\psi_2^{i+1}) < t(\zeta_{i+1})$$

Tendremos así que $z \notin \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$. Contradicción. \square

3.3. El morfismo de comparación \mathbf{F}

Comenzaremos definiendo la aplicación

$$\mathbf{F} : \mathbf{Ap} \rightarrow \mathbf{Rad}$$

de la resolución minimal de Bardzell a la resolución del radical. Los morfismos de A -bimódulos

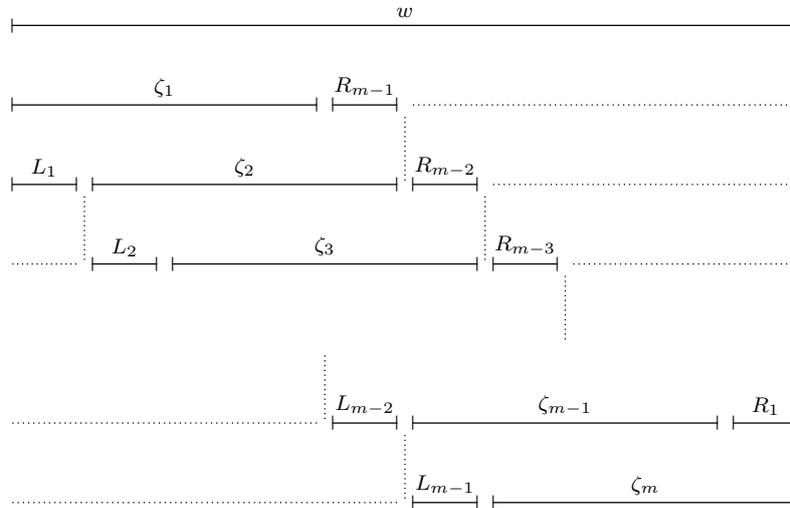
$$F_n : A \otimes kAP_n \otimes A \longrightarrow A \otimes \text{rad } A^{\otimes n} \otimes A$$

son

$$\begin{aligned} F_0(1 \otimes e \otimes 1) &= e \otimes 1, \\ F_1(1 \otimes \alpha \otimes 1) &= 1 \otimes \alpha \otimes 1, \\ F_n(1 \otimes w \otimes 1) &= \sum_{i=1}^{m-1} 1 \otimes L_1 \dots L_i F_{n-1}(1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m-(i+1)} \dots R_1, \quad \text{si } n \geq 2 \end{aligned}$$

donde el conjunto $\text{Sub}(w) = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\} \subset AP_{n-1}$ está ordenado de manera tal que si $i < j$ entonces $s(\zeta_i) < s(\zeta_j)$ con respecto al orden dado en el soporte de w , y L_i, R_i son los caminos definidos por $L_i \zeta_{i+1} = \zeta_i R_{m-i}$ para $i = 1, \dots, m-1$. Gráficamente,

$$w = L_1 \dots L_i \zeta_{i+1} R_{m-(i+1)} \dots R_1$$



Nuestro objetivo es mostrar que $\mathbf{F} : \mathbf{Ap} \rightarrow \mathbf{Rad}$ es morfismo de comparación. Comencemos dando una observación sobre la definición de F_n y sobre el comportamiento de los diferenciales de la resolución del radical.

Observación 3.3.1.

1) i) Si $n = 2$ y $w = \alpha_1 \dots \alpha_s \in AP_2$, $\alpha_i \in Q_1$, entonces $\text{Sub}(w) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$. Luego

$$\begin{aligned} F_2(1 \otimes w \otimes 1) &= \sum_{i=1}^{s-1} 1 \otimes \alpha_1 \dots \alpha_i F_1(1 \otimes \alpha_{i+1} \otimes 1) \alpha_{i+2} \dots \alpha_s \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} 1 \otimes \alpha_1 \dots \alpha_i (1 \otimes \alpha_{i+1} \otimes 1) \alpha_{i+2} \dots \alpha_s \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} 1 \otimes \alpha_1 \dots \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \otimes \alpha_{i+2} \dots \alpha_s. \end{aligned}$$

ii) Si n es impar y $w \in AP_n$, entonces $\text{Sub}(w) = \{\psi_1, \psi_2\}$ con $w = L(\psi_1)\psi_1$. Luego

$$F_n(1 \otimes w \otimes 1) = 1 \otimes L(\psi_1)F_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1).$$

2) Si $c \in A$ y $w \in AP_n$ entonces

$$b_{n+1}(1 \otimes cF_n(1 \otimes w \otimes 1)) = cF_n(1 \otimes w \otimes 1) - 1 \otimes cb_n F_n(1 \otimes w \otimes 1)$$

pues b_{n+1} es lineal y

$$\begin{aligned} b_{n+1}(1 \otimes c(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1})) &= c(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) - 1 \otimes b_n(c(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1})) \\ &= c(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) - 1 \otimes cb_n(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}). \end{aligned}$$

Con los resultados anteriores estamos en condiciones de demostrar que $\mathbf{F} : \mathbf{Ap} \rightarrow \mathbf{Rad}$ es morfismo de comparación.

Demostración de la primera parte del Teorema 3.2.1. Claramente $\varepsilon \circ F_0 = \mu$ pues $\varepsilon \circ F_0(1 \otimes e \otimes 1) = \varepsilon(e \otimes 1) = e = \mu(1 \otimes e \otimes 1)$.

Para $n \geq 1$ la demostración de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_E AP_n \otimes_E A & \xrightarrow{d_n} & A \otimes_E AP_{n-1} \otimes_E A \\ \downarrow F_n & & \downarrow F_{n-1} \\ A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^n} \otimes_E A & \xrightarrow{b_n} & A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^{n-1}} \otimes_E A \end{array}$$

la haremos por inducción distinguiendo la paridad de n .

Si $n = 1$, $b_1 \circ F_1 = F_0 \circ d_1$ pues

$$\begin{aligned} b_1 \circ F_1(1 \otimes \alpha \otimes 1) &= \alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha \\ &= \alpha \otimes 1 - e_{s(\alpha)} \otimes \alpha \\ &= F_0(\alpha \otimes e_{t(\alpha)} \otimes 1 - 1 \otimes e_{s(\alpha)} \otimes \alpha) \\ &= F_0 \circ d_1(1 \otimes \alpha \otimes 1). \end{aligned}$$

Si $n = 2$, $b_2 \circ F_2 = F_1 \circ d_2$ pues si $w = \alpha_1 \dots \alpha_s \in \mathcal{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
b_2 \circ F_2(1 \otimes w \otimes 1) &= b_2 \left(\sum_{i=1}^{s-1} 1 \otimes \alpha_1 \dots \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \otimes \alpha_{i+2} \dots \alpha_s \right) = \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_1 \dots \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \otimes \alpha_{i+2} \dots \alpha_s \\
&- \sum_{i=1}^{s-1} 1 \otimes \alpha_1 \dots \alpha_{i+1} \otimes \alpha_{i+2} \dots \alpha_s + \sum_{i=1}^{s-1} 1 \otimes \alpha_1 \dots \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} \dots \alpha_s \\
&= \sum_{i=1}^s \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \dots \alpha_s = F_1 \left(\sum_{i=1}^s \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \dots \alpha_s \right) \\
&= F_1 \circ d_2(1 \otimes w \otimes 1).
\end{aligned}$$

Si $n \geq 3$, comencemos viendo que $b_n \circ F_n = F_{n-1} \circ d_n$, para n impar.

$$\begin{aligned}
b_n \circ F_n(1 \otimes w \otimes 1) &= b_n(1 \otimes L(\psi_1)F_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1)) \\
&= L(\psi_1)F_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1) - 1 \otimes L(\psi_1)b_{n-1}F_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1) \\
&= L(\psi_1)F_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1) - 1 \otimes L(\psi_1)F_{n-2}d_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1)
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usamos la Observación 3.3.1(2) y en la última igualdad la hipótesis de inducción.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
F_{n-1}d_n(1 \otimes w \otimes 1) &= F_{n-1}(L(\psi_1) \otimes \psi_1 \otimes 1) - F_{n-1}(1 \otimes \psi_2 \otimes R(\psi_2)) \\
&= L(\psi_1)F_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1) - F_{n-1}(1 \otimes \psi_2 \otimes 1)R(\psi_2).
\end{aligned}$$

Luego sólo debemos ver que

$$F_{n-1}(1 \otimes \psi_2 \otimes 1)R(\psi_2) = 1 \otimes L(\psi_1)F_{n-2}d_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1).$$

En efecto

$$F_{n-1}(1 \otimes \psi_2 \otimes 1)R(\psi_2) = \sum_{\gamma \in \text{Sub}(\psi_2)} 1 \otimes L_\gamma F_{n-2}(1 \otimes \gamma \otimes 1)R_\gamma R(\psi_2)$$

y

$$\begin{aligned}
1 \otimes L(\psi_1)F_{n-2}d_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1) &= 1 \otimes L(\psi_1)F_{n-2} \left(\sum_{\gamma \in \text{Sub}(\psi_1)} L(\gamma) \otimes \gamma \otimes R(\gamma) \right) \\
&= \sum_{\gamma \in \text{Sub}(\psi_1)} 1 \otimes L(\psi_1)L(\gamma)F_{n-2}(1 \otimes \gamma \otimes 1)R(\gamma).
\end{aligned}$$

Si $\gamma \in \text{Sub}(\psi_2) \cap \text{Sub}(\psi_1)$ es claro que

$$1 \otimes L_\gamma F_{n-2}(1 \otimes \gamma \otimes 1)R_\gamma R(\psi_2) = 1 \otimes L(\psi_1)L(\gamma)F_{n-2}(1 \otimes \gamma \otimes 1)R(\gamma).$$

Si $\gamma \in \text{Sub}(\psi_2)$ y $\gamma \notin \text{Sub}(\psi_1)$ entonces debe ser $s(\gamma) < s(\psi_1)$. Luego por la Proposición 3.2.5 (ii), $R_\gamma R(\psi_2) \in I$. Si $\gamma \in \text{Sub}(\psi_1)$ y $\gamma \notin \text{Sub}(\psi_2)$ entonces debe ser $t(\psi_2) < t(\gamma)$. Luego por la Proposición 3.2.5 (i), $L(\psi_1)L(\gamma) \in I$. Esto termina la demostración para n impar.

Si n es par

$$\begin{aligned}
b_n \circ F_n(1 \otimes w \otimes 1) &= b_n \left(\sum_{i=1}^{m-1} 1 \otimes L_1 \dots L_i F_{n-1}(1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m-(i+1)} \dots R_1 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} L_1 \dots L_i F_{n-1}(1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m-(i+1)} \dots R_1 \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m-1} 1 \otimes L_1 \dots L_i b_{n-1} F_{n-1}(1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m-(i+1)} \dots R_1 \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} L_1 \dots L_i F_{n-1}(1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m-(i+1)} \dots R_1 \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m-1} 1 \otimes L_1 \dots L_i F_{n-2} d_{n-1}(1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m-(i+1)} \dots R_1
\end{aligned}$$

donde, nuevamente, en la segunda igualdad hemos usado la Observación 3.3.1(2) y en la tercer igualdad la hipótesis de inducción.

Como $\zeta_{i+1} \in AP_{n-1}$ y $n-1$ es impar, $\text{Sub}(\zeta_{i+1}) = \{\psi_1^{i+1}, \psi_2^{i+1}\}$. Luego la suma anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m-1} L_1 \dots L_i F_{n-1}(1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m-(i+1)} \dots R_1 \\
&- \sum_{i=1}^{m-1} 1 \otimes L_1 \dots L_i L(\psi_1^{i+1}) F_{n-2}(1 \otimes \psi_1^{i+1} \otimes 1) R_{m-(i+1)} \dots R_1 \\
&+ \sum_{i=1}^{m-1} 1 \otimes L_1 \dots L_i F_{n-2}(1 \otimes \psi_2^{i+1} \otimes 1) R(\psi_2^{i+1}) R_{m-(i+1)} \dots R_1.
\end{aligned}$$

Por el Lema 3.2.9 tenemos que $\psi_1^i = \psi_2^{i+1}$, para $i = 1, \dots, m-1$. Luego de cancelar los términos correspondientes en la suma anterior, obtenemos la suma

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m-1} L_1 \dots L_i F_{n-1}(1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m-(i+1)} \dots R_1 \\
&+ 1 \otimes L_1 F_{n-2}(1 \otimes \psi_2^2 \otimes 1) R(\psi_2^2) R_{m-2} \dots R_1 - 1 \otimes L_1 \dots L_{m-1} L(\psi_1^m) F_{n-2}(1 \otimes \psi_1^m \otimes 1).
\end{aligned}$$

Por el Lema 3.2.8, $L_1 \dots L_{m-1} L(\psi_1^m) \in I$, pues $L(\zeta_m) = L_1 \dots L_{m-1}$. Además por el Lema 3.2.9, $\psi_2^2 = \psi_1^1$, y esto implica que $R(\psi_2^2) = R_{m-1}$, pues $L(\psi_1^1) \psi_1^1 R_{m-1} = \zeta_1 R_{m-1} = L_1 \psi_2^2 R(\psi_2^2)$. Como $n-1$ es impar y $\text{Sub}(\zeta_1) = \{\psi_1^1, \psi_2^1\}$, usando la Observación 3.3.1(1-ii) tenemos que

$$F_{n-1}(1 \otimes \zeta_1 \otimes 1) R_{m-1} \dots R_1 = 1 \otimes L_1 F_{n-2}(1 \otimes \psi_2^2 \otimes 1) R(\psi_2^2) R_{m-2} \dots R_1.$$

Finalmente la suma anterior es igual a

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m-1} L_1 \dots L_i F_{n-1} (1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m-(i+1)} \dots R_1 + F_{n-1} (1 \otimes \zeta_1 \otimes 1) R_{m-1} \dots R_1 \\
&= \sum_{i=1}^m L_1 \dots L_{i-1} F_{n-1} (1 \otimes \zeta_i \otimes 1) R_{m-i} \dots R_1 \\
&= F_{n-1} \circ d_n (1 \otimes w \otimes 1).
\end{aligned}$$

De esta manera finalizamos la demostración de que $b_n \circ F_n = F_{n-1} \circ d_n$. \square

3.4. El morfismo de comparación \mathbf{G}

Comenzamos esta sección definiendo el morfismo

$$\mathbf{G} : \text{Rad} \rightarrow \text{Ap}$$

de la resolución del radical a la resolución minimal de Bardzell. Como \mathbf{G} es morfismo de A -bimódulos, basta definirlo en los elementos base

$$1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1, \quad v_i \in \mathcal{P}, \quad t(v_i) = s(v_{i+1})$$

de $A \otimes \text{rad } A^{\otimes n} \otimes A$. Para esto necesitaremos distinguir n -uplas (v_1, \dots, v_n) de elementos de \mathcal{P} .

Definición 3.4.1. Una n -upla $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{P}^n$ se dirá **bien concatenada** si $t(v_i) = s(v_{i+1})$ para $i = 1, \dots, n-1$. Para cada n -upla bien concatenada (v_1, \dots, v_n) definimos los conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{imp} &= \mathcal{M}_{imp}(v_1, \dots, v_n) = \{j : v_{2j-1} \cdot v_{2j} \notin I\}, \\
\mathcal{M}_{par} &= \mathcal{M}_{par}(v_1, \dots, v_n) = \{j : v_{2j} \cdot v_{2j+1} \notin I\}.
\end{aligned}$$

La n -upla bien concatenada (v_1, \dots, v_n) se llamará **buena** si verifica que $\mathcal{M}_{imp} = \emptyset$ cuando n es par y $\mathcal{M}_{par} = \emptyset$ cuando n es impar. En otro caso, la n -upla bien concatenada (v_1, \dots, v_n) se llamará **mala**.

Para cada n -upla (v_1, \dots, v_n) buena, consideremos el siguiente subconjunto de AP_n :

$$\chi(v_1, \dots, v_n) = \{w \in AP_n : v_1 \dots v_n = L(w)wR(w)\}.$$

Así, los morfismos de A -bimódulos

$$G_n : A \otimes \text{rad } A^{\otimes n} \otimes A \longrightarrow A \otimes kAP_n \otimes A$$

son

$$\begin{aligned}
G_0(1 \otimes 1) &= 1 \otimes 1 \otimes 1 = \sum_{i \in Q_0} 1 \otimes e_i \otimes 1, \\
G_1(1 \otimes v_1 \otimes 1) &= \sum_{i=1}^s \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \dots \alpha_s \quad \text{si } v_1 = \alpha_1 \dots \alpha_s.
\end{aligned}$$

Si $1 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes 1$ es un elemento base de $A \otimes \text{rad } A^{\otimes n} \otimes A$, y la n -upla (v_1, \dots, v_n) es mala ó $\chi(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$,

$$G_n(1 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes 1) = 0.$$

De otra manera, si $\chi(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$,

$$G_n(1 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes 1) = L(w) \otimes w \otimes R(w), \quad \text{si } n \text{ es par,}$$

donde w es tal que $s(w) = \min \{s(w') : w' \in \chi(v_1, \dots, v_n)\}$ y

$$G_n(1 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes 1) = \sum_{\substack{w \in \chi(v_1, \dots, v_n) \\ s(v_1) \leq s(w) < t(v_1)}} L(w) \otimes w \otimes R(w), \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Nuestro objetivo es mostrar que

$$\mathbf{G} : \mathbf{Rad} \rightarrow \mathbf{Ap}$$

es morfismo de comparación. Necesitamos primero demostrar lemas relativos a los conjuntos $\mathcal{M}_{imp}, \mathcal{M}_{par}$.

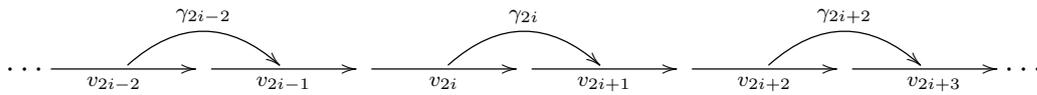
Sea (v_1, \dots, v_n) una n -upla bien concatenada. Si $v_j v_{j+1} \in I$ existen relaciones $\gamma \in \mathcal{R}$ dividiendo al camino $v_j v_{j+1}$ y verificando

$$s(v_j) \leq s(\gamma) < t(v_j)$$

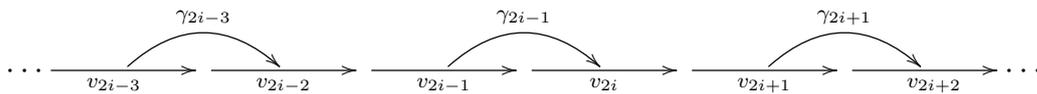
$$s(v_{j+1}) < t(\gamma) \leq t(v_{j+1}).$$

En lo que sigue llamaremos γ_j a una de esas relaciones (elijo una).

A cada n -upla bien concatenada que verifique $\mathcal{M}_{par}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$ le asociamos una sucesión $(\gamma_2, \gamma_4, \dots)$:



Análogamente, si $\mathcal{M}_{imp}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$, a la n -upla le asociamos una sucesión $(\gamma_1, \gamma_3, \dots)$:

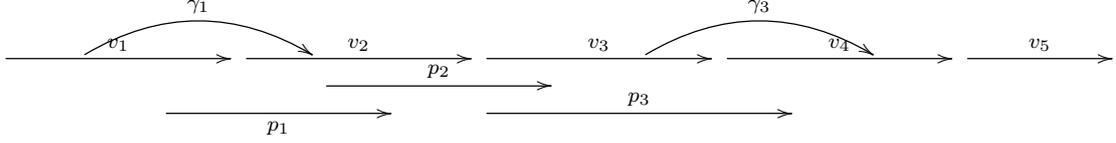


En las mismas condiciones anteriores, supongamos además que existe $w \in AP_{n-1}$ tal que $v_1 \dots v_n = awb$ con a, b caminos en \mathcal{P} .

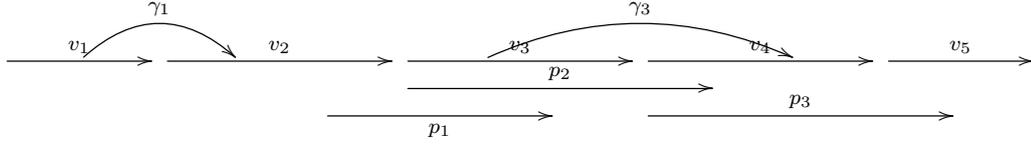
La pregunta que nos hacemos es:

¿ Cuándo existe $z \in AP_n$ tal que $w \in \text{Sub}(z)$ y $z \in \chi(v_1, \dots, v_n)$? (★)

Por ejemplo, supongamos que $n = 5$, $\mathcal{M}_{imp} = \emptyset$ y existe $w = w(p_1, p_2, p_3) \in AP_4$. Si tenemos:



existe $z = z(\gamma_1, p_1, p_2, p_3) \in AP_5$ y $w \in Sub(z)$. Sin embargo, si tenemos



no existe $z \in AP_5$.

El objetivo de los siguientes lemas es demostrar que bajo ciertas condiciones la pregunta (\star) tiene una respuesta afirmativa.

Lema 3.4.2. *Sea $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{P}^n$ una n -upla bien concatenada y sea además $w \in AP_{n-1}$ tal que $v_1 \dots v_n = awb$.*

(i) *Si $w = w(p_1, \dots, p_{n-2})$, $s(w) < t(v_1)$ y $\mathcal{M}_{par} = \emptyset$ entonces*

$$t(p_{n-2}) \leq t(\gamma_{n-2}) \quad \text{si } n \text{ es par,} \quad (3.10)$$

$$t(p_{n-3}) \leq t(\gamma_{n-3}) \quad \text{si } n \text{ es impar,} \quad (3.11)$$

donde $(\gamma_2, \gamma_4, \dots)$ es una sucesión asociada a (v_1, \dots, v_n) .

(ii) *Si n es impar, $w = w^{op}(q^1, \dots, q^{n-2})$, $s(v_n) < t(w)$ y $\mathcal{M}_{imp} = \emptyset$, entonces*

$$s(\gamma_3) \leq s(q^2),$$

donde $(\gamma_1, \gamma_3, \dots)$ es una sucesión asociada a (v_1, \dots, v_n) .

Demostración. (i) Veamos que para $i \geq 1$ se verifican las desigualdades

$$t(p_{2i}) \leq t(\gamma_{2i}).$$

Como $s(w) = s(p_1) < t(v_1) = s(v_2) \leq s(\gamma_2)$ es $s(p_1) < s(\gamma_2)$, y por la tanto

$$t(p_1) < t(\gamma_2).$$

Por construcción de p_2 tenemos que $p_2 = \gamma_2$ ó $s(p_2) < s(\gamma_2)$, esto es,

$$t(p_2) \leq t(\gamma_2).$$

Supongamos probado que $t(p_{2i-2}) \leq t(\gamma_{2i-2})$. Como $t(\gamma_{2i-2}) < s(\gamma_{2i})$ tenemos que $t(p_{2i-2}) \leq t(\gamma_{2i-2}) < s(\gamma_{2i})$. De la construcción de p_{2i} se deduce que $p_{2i} = \gamma_{2i}$ ó $s(p_{2i}) < s(\gamma_{2i})$, esto es,

$$t(p_{2i}) \leq t(\gamma_{2i}).$$

Finalmente analizando la paridad de n es claro que

$$\begin{aligned} t(p_{n-2}) &\leq t(\gamma_{n-2}) && \text{si } n \text{ es par,} \\ t(p_{n-3}) &\leq t(\gamma_{n-3}) && \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

(ii) Veamos que para $i \geq 1$ se verifican las desigualdades

$$s(\gamma_{n-2i}) \leq s(q^{n-2i-1}).$$

Como $t(\gamma_{n-2}) \leq s(v_n) < t(w) = t(q^{n-2})$ es $t(\gamma_{n-2}) < t(q^{n-2})$, y por la tanto

$$s(\gamma_{n-2}) < s(q^{n-2}).$$

Por construcción de q^{n-3} tenemos que $q^{n-3} = \gamma_{n-2}$ ó $t(\gamma_{n-2}) < t(q^{n-3})$, esto es,

$$s(\gamma_{n-2}) \leq s(q^{n-3}).$$

Supongamos probado que $s(\gamma_{n-2i+2}) \leq s(q^{n-2i+1})$. Como $t(\gamma_{n-2i}) < s(\gamma_{n-2i+2})$ tenemos que $t(\gamma_{n-2i}) < s(\gamma_{n-2i+2}) \leq s(q^{n-2i+1})$. De la construcción de q^{n-2i-1} se deduce que $q^{n-2i-1} = \gamma_{n-2i}$ ó $t(\gamma_{n-2i}) < t(q^{n-2i-1})$, esto es,

$$s(\gamma_{n-2i}) \leq s(q^{n-2i-1}).$$

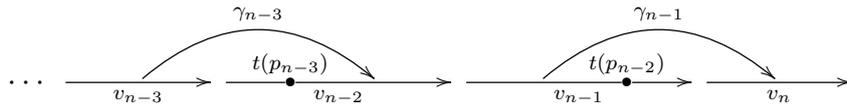
Finalmente como n es impar, $s(\gamma_3) < s(q^2)$. □

En lo que sigue, sea T el camino dirigido $v_1 \dots v_n$.

Lema 3.4.3. *Sea n impar, $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{P}^n$ una n -upla bien concatenada, y $w \in AP_{n-1}$ tal que $v_1 \dots v_n = cw b$. Entonces*

- (i) *Si $b \in \mathcal{P}$, $s(w) < t(v_1)$ y $\mathcal{M}_{par}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$, existe $z \in AP_n$ con $z = wR(w)$ y $R(w)$ dividiendo a b .*
- (ii) *Si $c \in \mathcal{P}$, $s(v_n) < t(w)$ y $\mathcal{M}_{imp}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$, existe $z \in AP_n$, con $z = L(w)w$ y $L(w)$ dividiendo a c .*

Demostración. (i) Sea $w = w(p_1, \dots, p_{n-2})$. Necesitamos buscar δ de manera tal que el elemento $z(p_1, \dots, p_{n-2}, \delta) \in AP_n$ verifique lo pedido. Del Lema 3.4.2 (i) sabemos que $t(p_{n-3}) \leq t(\gamma_{n-3})$. Además $b \in \mathcal{P}$ entonces $s(\gamma_{n-1}) < t(w) = t(p_{n-2})$.



Luego el conjunto $L = \{\gamma \in \mathcal{R}(T) : t(p_{n-3}) \leq s(\gamma) < t(p_{n-2})\} \neq \emptyset$, pues $\gamma_{n-1} \in L$. Si $\delta \in L$ es tal que $s(\delta)$ es mínimo con respecto a todo $s(\gamma), \gamma \in L$, construimos $z = z(p_1, \dots, p_{n-2}, \delta) \in AP_n$ verificando las condiciones deseadas.

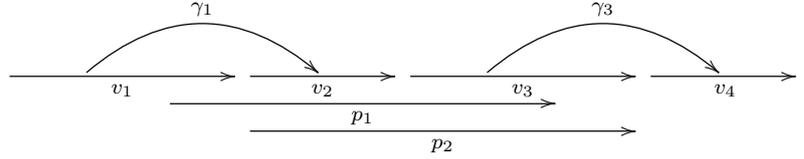
(ii) Es análoga considerando la parte (ii) del Lema 3.4.2. □

Lema 3.4.4. *Sea n par y $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{P}^n$ una n -upla bien concatenada. Si $\mathcal{M}_{par}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$ y existe $w \in AP_{n-1}$ tal que $s(v_1) \leq s(w) < t(v_1)$ entonces $t(w) \leq t(\gamma_{n-2}) \leq t(v_{n-1})$.*

Demostración. Sea $w = w(p_1, \dots, p_{n-2})$. Del Lema 3.4.2 (i) tenemos que $t(p_{n-2}) \leq t(\gamma_{n-2})$. Así $t(w) = t(p_{n-2}) \leq t(\gamma_{n-2}) \leq t(v_{n-1})$. □

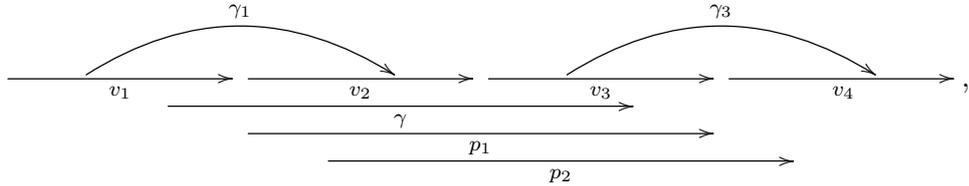
Para comenzar la demostración de que \mathbf{G} es morfismo de comparación, sólo necesitamos demostrar un lema similar al Lema 3.4.3 en el caso en que n sea par y el conjunto $\mathcal{M}_{imp} = \emptyset$. Lamentablemente esta demostración no será sencilla debido a que el conjunto de relaciones para construir $z \in AP_n$ puede contener alguna o ninguna de las relaciones que constituyen w , como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Sea $n = 4$, $w = w(p_1, p_2) \in AP_3$ tal que



En este caso no existe $z \in AP_4$ tal que $w \in Sub(z)$ y $z = L(w)w$ ó $z = wR(w)$, pero sí existe $z = z(\gamma_1, p_1, \gamma_3) \in AP_4$ tal que $w \in Sub(z)$.

Si tenemos



$z = z(\gamma_1, \gamma, \gamma_3) \in AP_4$ es la única concatenación tal que $w \in Sub(z)$.

Nuestro objetivo será ahora demostrar el siguiente lema:

Lema 3.4.5. *Sea n par y $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{P}^n$ una n -upla bien concatenada. Si $\mathcal{M}_{imp}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$ y existe $w = w(p_1, \dots, p_{n-2}) \in AP_{n-1}$ con $v_1 \dots v_n = awb$, $a, b \in \mathcal{P}$, entonces existe $z \in AP_n$ tal que z divide a $v_1 \dots v_n$ y $w \in Sub(z)$.*

Como hemos dicho antes esta demostración no será sencilla. Comenzaremos presentando un conjunto de relaciones $\{p'_{2i-1}, p''_{2i-1}\}_{1 \leq 2i-1 \leq n-3}$ definidas por

1) p'_{2i-1} será un elemento del conjunto

$$T_{2i-1} = \{\gamma \in \mathcal{R}(T) : t(\gamma) \leq s(p'_{2i+1})\},$$

con $t(p'_{2i-1})$ máximo entre todos los $\gamma \in T_{2i-1}$, donde $p'_{n-1} = \gamma_{n-1}$;

2) p''_{2i-1} es elegido a partir de p'_{2i-1} , y será un elemento del conjunto

$$S_{2i-1} = \{\gamma \in \mathcal{R}(T) : s(p'_{2i-1}) < s(\gamma)\}$$

siendo $s(p''_{2i-1})$ mínimo entre todos los $\gamma \in S_{2i-1}$.

Sea n par, $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{P}^n$ una n -upla bien concatenada con $\mathcal{M}_{imp}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$, y sea $(\gamma_1, \gamma_3, \dots)$ la sucesión asociada. Sea $w = w(p_1, \dots, p_{n-2}) \in AP_{n-1}$ con $v_1 \dots v_n = awb$, $a, b \in \mathcal{P}$, y supongamos que $s(\gamma_{n-1}) < t(p_{n-3})$. Bajo estas condiciones demostraremos los próximos dos lemas.

Lema 3.4.6. *Los conjuntos T_{2i-1} son no vacíos, más precisamente, $\gamma_{2i-1} \in T_{2i-1}$, y las relaciones p'_{2i-1} verifican*

$$s(\gamma_{2i-1}) \leq s(p'_{2i-1}) < t(p_{2i-3}) \quad (3.12)$$

para $2i - 1 = 1, \dots, n - 3$, donde $t(p_{-1}) := s(p_1)$.

Demostración. Comencemos probando el lema cuando $2i - 1 = n - 3$. Como $t(\gamma_{n-3}) < s(\gamma_{n-1})$ y $p'_{n-1} = \gamma_{n-1}$, tenemos que $\gamma_{n-3} \in T_{n-3}$ y esto demuestra la existencia de p'_{n-3} . Así de la maximalidad de $t(p'_{n-3})$, de que $\gamma_{n-3} \in T_{n-3}$ y de la hipótesis $s(\gamma_{n-1}) = s(p'_{n-1}) < t(p_{n-3})$, tenemos

$$t(\gamma_{n-3}) \leq t(p'_{n-3}) \leq s(p'_{n-1}) < t(p_{n-3}) \quad (3.13)$$

y por lo tanto

$$s(\gamma_{n-3}) \leq s(p'_{n-3}) < s(p_{n-3}). \quad (3.14)$$

Usando la construcción de w sabemos que p_{n-3} es elegido de manera que $s(p_{n-3})$ es mínimo con respecto a todas las relaciones en el conjunto $\{\gamma \in \mathcal{R}(T) : t(p_{n-5}) \leq s(\gamma) < t(p_{n-4})\}$. Así $s(p'_{n-3}) < t(p_{n-5})$, pues si $t(p_{n-5}) \leq s(p'_{n-3})$ debe ser $s(p_{n-3}) \leq s(p'_{n-3})$ contradiciendo (3.14). Luego

$$s(\gamma_{n-3}) \leq s(p'_{n-3}) < t(p_{n-5}). \quad (3.15)$$

Supongamos por hipótesis inductiva que existe p'_{n-2i-1} verificando (3.12). Hallemos p'_{n-2i-3} . De (3.12), $s(\gamma_{n-2i-1}) \leq s(p'_{n-2i-1})$ y como $t(\gamma_{n-2i-3}) < s(\gamma_{n-2i-1})$, $\gamma_{n-2i-3} \in T_{n-2i-3}$ y esto muestra la existencia de p'_{n-2i-3} . Así de la maximalidad de $t(p'_{n-2i-3})$ en T_{n-2i-3}

$$t(\gamma_{n-2i-3}) \leq t(p'_{n-2i-3})$$

y nuevamente con (3.12) obtenemos

$$t(\gamma_{n-2i-3}) \leq t(p'_{n-2i-3}) \leq s(p'_{n-2i-1}) < t(p_{n-2i-3}) \quad (3.16)$$

por lo tanto

$$s(\gamma_{n-2i-3}) \leq s(p'_{n-2i-3}) < s(p_{n-2i-3}). \quad (3.17)$$

Usando la construcción de w sabemos que p_{n-2i-3} fue elegido de manera tal que $s(p_{n-2i-3})$ es mínimo entre los $\gamma \in \{\gamma \in \mathcal{R}(T) : t(p_{n-2i-5}) \leq s(\gamma) < t(p_{n-2i-4})\}$, luego $s(p'_{n-2i-3}) < t(p_{n-2i-5})$, pues si $t(p_{n-2i-5}) \leq s(p'_{n-2i-3})$ debe ser $s(p_{n-2i-3}) \leq s(p'_{n-2i-3})$ contradiciendo (3.17). Así obtenemos

$$s(\gamma_{n-2i-3}) \leq s(p'_{n-2i-3}) < t(p_{n-2i-5}).$$

□

Lema 3.4.7. *Los conjuntos S_{2i-1} son no vacíos, más precisamente, $p_{2i-1} \in S_{2i-1}$, y las relaciones p''_{2i-1} verifican*

$$s(p'_{2i+1}) < t(p''_{2i-1}) \leq t(p_{2i-1}), \quad (3.18)$$

$$t(p'_{2i-1}) \leq s(p'_{2i+1}) < t(p''_{2i-1}), \quad (3.19)$$

para $2i - 1 = 1, \dots, n - 3$.

Demostración. Sea i tal que $2i - 1 = 1, \dots, n - 3$. Claramente $S_{2i-1} \neq \emptyset$ pues de (3.12), $s(p'_{2i-1}) < t(p_{2i-3})$ y por construcción de w , $t(p_{2i-3}) \leq s(p_{2i-1})$, así $s(p'_{2i-1}) < s(p_{2i-1})$ y $p_{2i-1} \in S_{2i-1}$. De la minimalidad de $s(p''_{2i-1})$ en S_{2i-1} tenemos que

$$s(p''_{2i-1}) \leq s(p_{2i-1})$$

y por lo tanto

$$t(p''_{2i-1}) \leq t(p_{2i-1}).$$

Así, como $s(p'_{2i+1}) < t(p''_{2i-1})$, (pues si fuera $t(p''_{2i-1}) \leq s(p'_{2i+1})$ entonces de la maximalidad de $t(p'_{2i-1})$ en T_{2i-1} , sería $t(p''_{2i-1}) \leq t(p_{2i-1})$ y por lo tanto $s(p''_{2i-1}) \leq s(p'_{2i-1})$ contradiciendo la definición de p''_{2i-1}), tenemos entonces que

$$s(p'_{2i+1}) < t(p''_{2i-1}) \leq t(p_{2i-1}). \quad (3.20)$$

Finalmente de la definición de $t(p'_{2i-1})$ y de la desigualdad anterior obtenemos

$$t(p'_{2i-1}) \leq s(p'_{2i+1}) < t(p''_{2i-1}). \quad (3.21)$$

□

Observación 3.4.8. *Las relaciones halladas p'_1, p''_1 verifican que $(p'_1, p''_1) \in AP_3$.*

Estamos en condiciones de probar el Lema 3.4.5.

Demostración del Lema 3.4.5. Supongamos primero que $t(p_{n-3}) \leq s(\gamma_{n-1})$. Por hipótesis $v_1 \dots v_n = awb$ con $b \in \mathcal{P}$ luego $s(\gamma_{n-1}) < t(p_{n-2})$.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\gamma_{n-1}} & \\ \xrightarrow{p_{n-3}} & & \\ & \xrightarrow{p_{n-2}} & \xrightarrow{b} \end{array}$$

Así el conjunto

$$L = \{\gamma \in \mathcal{R}(T) : t(p_{n-3}) \leq s(\gamma) < t(p_{n-2})\} \neq \emptyset$$

pues $\gamma_{n-1} \in L$. Si δ es de origen mínimo con respecto a las relaciones en L , tenemos que $w = w(p_1, \dots, p_{n-2}, \delta) \in AP_n$ verifica las condiciones deseadas.

Supongamos que $s(\gamma_{n-1}) < t(p_{n-3})$. Hallaremos $z = z(z_1, \dots, z_{n-1}) \in AP_n$ con $z_1 = p'_1$. La demostración consistirá en mostrar que el conjunto

$$L_i = \{\gamma \in \mathcal{R}(T) : t(z_{i-2}) \leq s(\gamma) < t(z_{i-1})\}$$

en no vacío. Luego bastará elegir z_i de manera tal que $s(z_i)$ sea mínimo entre todos los $s(\gamma)$ con $\gamma \in L_i$. De la Observación 3.4.8 tenemos que $z_2 = p''_1$ y, por (3.18), z_2 verifica la desigualdad

$$t(p''_1) = t(z_2) \leq t(p_1).$$

Para obtener z_3 , de (3.19) tenemos que $p'_3 \in L_3$, luego $L_3 \neq \emptyset$ y de la minimalidad de $s(z_3)$ en L_3 es $s(z_3) \leq s(p'_3)$, y por lo tanto

$$t(z_3) \leq t(p'_3).$$

Así tenemos la siguiente desigualdad para z_3 :

$$t(p_2) \leq t(z_3) \leq t(p'_3) \tag{3.22}$$

donde la primera desigualdad se deduce de que por ser $a \in \mathcal{P}$, $s(p_1) < t(\gamma_1)$, y de (3.12) $s(\gamma_1) \leq s(p'_1)$ y por lo tanto $t(\gamma_1) \leq t(p'_1)$. Así

$$s(p_1) < t(p'_1) = t(z_1) \leq s(z_3)$$

y por la construcción de p_2 es $s(p_2) \leq s(z_3)$, por lo tanto $t(p_2) \leq t(z_3)$.

Supongamos por hipótesis inductiva que existe z_j verificando

$$t(p_{j-1}) \leq t(z_j) \leq t(p'_j) \quad \text{si } j \text{ es impar,} \tag{3.23}$$

$$t(p''_{j-1}) \leq t(z_j) \leq t(p_{j-1}) \quad \text{si } j \text{ es par.} \tag{3.24}$$

Hallemos z_{j+1} para $j+1 = 2i$ y para $j+1 = 2i+1$.

Sea $j+1 = 2i$. De la construcción de w , $t(p_{j-2}) \leq s(p_j) < t(p_{j-1})$, y de (3.23) y (3.24) tenemos $t(z_{j-1}) \leq s(p_j) < t(z_j)$. Así $p_j \in L_{j+1}$ y esto asegura la existencia de z_{j+1} . De la minimalidad de $s(z_{j+1})$ se tiene que $s(z_{j+1}) \leq s(p_j)$ y por lo tanto

$$t(z_{j+1}) \leq t(p_j). \tag{3.25}$$

De (3.18) y (3.24), es $s(p'_j) < t(z_{j-1}) \leq s(z_{j+1})$, entonces la minimalidad de $s(p''_j)$ en S_j nos dice que

$$s(p''_j) \leq s(z_{j+1})$$

y por lo tanto

$$t(p''_j) \leq t(z_{j+1}).$$

Esta última desigualdad unida a (3.25) nos da

$$t(p''_j) \leq t(z_{j+1}) \leq t(p_j). \tag{3.26}$$

Sea $j + 1 = 2i + 1$. Usando (3.19), (3.23) y (3.24) tenemos

$$t(z_{j-1}) \leq t(p'_{j-1}) \leq s(p'_{j+1}) < t(p''_{j-1}) \leq t(z_j),$$

luego $p'_{j+1} \in L_j$ y esto asegura la existencia de z_{j+1} . De la minimalidad de $s(z_{j+1})$ se tiene que $s(z_{j+1}) \leq s(p'_{j+1})$, y por lo tanto

$$t(p_j) \leq t(z_{j+1}) \leq t(p'_{j+1})$$

donde la primera desigualdad se deduce de que por (3.23), $t(p_{j-2}) \leq t(z_{j-1}) \leq s(z_{j+1})$ y de que p_j fue elegido de manera que $s(p_j)$ es mínimo respecto a todo δ pertenecientes al conjunto

$$\{\gamma \in \mathcal{R}(T) : t(p_{j-2}) \leq s(\gamma) < t(p_{j-1})\}.$$

De esta manera hemos hallado $z = z(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in AP_n$ con z_j verificando (3.23) y (3.24) respectivamente. Lo único que nos queda por demostrar es que $w \in \text{Sub}(z)$. Para esto es suficiente mostrar que

$$s(z) \leq s(w) \text{ y } t(w) \leq t(z).$$

De (3.12), $s(z) = s(z_1) = s(p'_1) < t(p_{-1}) = s(p_1) = s(w)$, obteniendo así la primera de las desigualdades. Por (3.23), $t(p_{n-2}) \leq t(z_{n-1})$ y por lo tanto $t(w) \leq t(z)$. \square

Finalmente estamos en condiciones de mostrar que \mathbf{G} es morfismo de comparación. Dada una n -upla bien concatenada $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{P}^n$ llamaremos, en caso de existir,

$$j_0 = \min(\mathcal{M}_{imp}), \quad j_1 = \max(\mathcal{M}_{imp})$$

$$i_0 = \min(\mathcal{M}_{par}), \quad i_1 = \max(\mathcal{M}_{par}).$$

Observación 3.4.9. Usando los conjuntos $\mathcal{M}_{imp}, \mathcal{M}_{par}$ podemos cancelar términos en la suma

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ \sum_{\{j : 2 \leq 2j < n\}} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j} v_{2j+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &- \sum_{\{j : 1 \leq 2j-1 < n\}} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j-1} v_{2j} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ (-1)^n G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n). \end{aligned}$$

1) Si $\mathcal{M}_{par} = \emptyset$ y $\mathcal{M}_{imp} = \emptyset$ entonces

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ (-1)^n G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n), \end{aligned}$$

pues $v_j v_{j+1} \in I$ para todo j .

2) Si $\mathcal{M}_{imp} = \emptyset$ y $\mathcal{M}_{par} \neq \emptyset$ entonces

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ \sum_{\{j: 2i_0 \leq 2j \leq 2i_1\}} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j} v_{2j+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ (-1)^n G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n), \end{aligned}$$

pues $v_{2j-1} v_{2j} \in I$ para todo j y $v_{2j} v_{2j+1} \in I$ si $j < i_0$ ó $j > i_1$.

3) Si $\mathcal{M}_{par} = \emptyset$ y $\mathcal{M}_{imp} \neq \emptyset$ entonces

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &- \sum_{\{j: 2j_0 \leq 2j \leq 2j_1\}} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j-1} v_{2j} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ (-1)^n G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n), \end{aligned}$$

pues $v_{2j} v_{2j+1} \in I$ para todo j y $v_{2j-1} v_{2j} \in I$ si $j < j_0$ ó $j > j_1$.

4) Si $\mathcal{M}_{par} \neq \emptyset$ y $\mathcal{M}_{imp} \neq \emptyset$ entonces

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ \sum_{\{j: 2i_0 \leq 2j \leq 2i_1\}} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j} v_{2j+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &- \sum_{\{j: 2j_0 \leq 2j \leq 2j_1\}} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j-1} v_{2j} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ (-1)^n G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n), \end{aligned}$$

pues $v_{2j} v_{2j+1} \in I$ si $j < i_0$ ó $j > i_1$ y $v_{2j-1} v_{2j} \in I$ si $j < j_0$ ó $j > j_1$.

Los conjuntos $\mathcal{M}_{imp}, \mathcal{M}_{par}$ también nos permiten caracterizar al núcleo de G_n :

Observación 3.4.10. Sea $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{P}^n$ una n -upla bien concatenada. Entonces

$$G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = 0$$

si y sólo si una y sólo una de las siguientes condiciones se satisfacen:

- 1) (v_1, \dots, v_n) es una n -upla mala,
- 2) (v_1, \dots, v_n) es una n -upla buena y $\chi(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$,
- 3) (v_1, \dots, v_n) es una n -upla buena, $\chi(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$ y

-
- i) si n es par, $L(w)$ ó $R(w) \in I$ para $w \in AP_n$ tal que $s(w) = \min\{s(w') : w' \in \chi(v_1, \dots, v_n)\}$;
- ii) si n es impar, $L(w)$ ó $R(w) \in I$ para todo $w \in \chi(v_1, \dots, v_n)$ con $s(v_1) \leq s(w) < t(v_1)$.

Observación 3.4.11.

1) Si $\mathcal{M}_{imp} \neq \emptyset$ entonces

$$\sum_{\{j: 2j_0 \leq 2j \leq 2j_1\}} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j-1} v_{2j} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1)$$

se reduce a

$$\begin{aligned} &G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_0-1} v_{2j_0} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \quad \text{si } n \text{ es impar,} \\ &G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_1-1} v_{2j_1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \quad \text{si } n \text{ es par} \end{aligned}$$

porque $(v_1, \dots, v_{2j-1} v_{2j}, \dots, v_n)$ es una $(n-1)$ -upla mala si $j > j_0$ cuando n es impar pues $v_{2j_0-1} v_{2j_0} \notin I$, y si $j < j_1$ cuando n es par pues $v_{2j_1-1} v_{2j_1} \notin I$. El mismo argumento puede ser usado para ver también que

$$\begin{aligned} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) &= 0 \quad \text{si } n \text{ es impar, y} \\ G_{n-1}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= 0 \quad \text{si } n \text{ es par y } j_1 \neq 1. \end{aligned}$$

2) Si $\mathcal{M}_{par} \neq \emptyset$ entonces

$$\sum_{\{j: 2i_0 \leq 2j \leq 2i_1\}} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j} v_{2j+1} \otimes \dots \otimes v_n)$$

se reduce a

$$\begin{aligned} &G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_0} v_{2i_0+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \quad \text{si } n \text{ es par,} \\ &G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_1} v_{2i_1+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \quad \text{si } n \text{ es impar} \end{aligned}$$

porque $(v_1, \dots, v_{2j} v_{2j+1}, \dots, v_n \otimes 1)$ es una $(n-1)$ -upla mala si $j > i_0$ cuando n es par pues $v_{2i_0} v_{2i_0+1} \notin I$, y si $j < i_1$ cuando n es impar pues $v_{2i_1} v_{2i_1+1} \notin I$. El mismo argumento puede ser usado para ver también que

$$\begin{aligned} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) &= 0 \quad \text{si } n \text{ es par, y} \\ G_{n-1}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= 0 \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Demstración de la segunda parte del Teorema 3.2.1. Claramente

$$\mu \circ G_0 = \varepsilon$$

pues

$$\mu \circ G_0(1 \otimes 1) = \mu(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1 = \varepsilon(1 \otimes 1)$$

y $G_0 \circ b_1 = d_1 \circ G_1$ pues

$$\begin{aligned}
d_1 \circ G_1(1 \otimes \alpha_1 \dots \alpha_s \otimes 1) &= d_1 \left(\sum_{i=1}^s \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \dots \alpha_s \right) \\
&= \sum_{i=1}^s \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i \otimes e_{t(\alpha_i)} \otimes \alpha_{i+1} \dots \alpha_s - \sum_{i=1}^s \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \otimes e_{s(\alpha_i)} \otimes \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_s \\
&= \alpha_1 \dots \alpha_s \otimes e_{t(\alpha_s)} \otimes 1 - 1 \otimes e_{s(\alpha_1)} \otimes \alpha_1 \dots \alpha_s = G_0 \circ b_1(1 \otimes v \otimes 1).
\end{aligned}$$

Para $n > 1$ la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^n} \otimes_E A & \xrightarrow{b} & A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes_E^{n-1}} \otimes_E A \\
\downarrow G_n & & \downarrow G_{n-1} \\
A \otimes_E AP_n \otimes_E A & \xrightarrow{d} & A \otimes_E AP_{n-1} \otimes_E A
\end{array}$$

será hecha en cuatro etapas definidas de acuerdo a las Observaciones 3.4.9 y 3.4.11.

Caso 1: $\mathcal{M}_{par}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$ y $\mathcal{M}_{imp}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$.

En este caso

$$\begin{aligned}
G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\
&+ (-1)^n G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n).
\end{aligned}$$

i) Si $G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = 0$ debemos ver que

$$G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = -(-1)^n G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n). \quad (*)$$

Sea n impar. Comencemos observando que si $G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \neq 0$, esto es,

$$G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = L(w) \otimes w \otimes L(w),$$

con $L(w), R(w) \in \mathcal{P}$ y $w \in AP_{n-1}$, y se verifica que $s(v_1) \leq s(w) < t(v_1)$, por el Lema 3.4.3 (i) existirá $z \in AP_n$ con $s(z) = s(w)$ y por lo tanto $s(v_1) \leq s(z) < t(v_1)$ contradiciendo que $G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = 0$.

Luego, si $G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = L(w) \otimes w \otimes R(w) \neq 0$, debe ser $t(v_1) = s(v_2) \leq s(w)$. Entonces en este caso tendremos la igualdad (*) pues $w \in \chi(v_2, \dots, v_n)$.

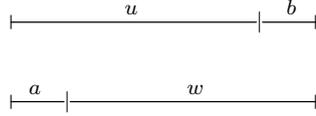
Por otro lado supongamos que

$$\begin{aligned}
G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) &= 0 \quad \text{y} \\
G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= L(w) \otimes w \otimes R(w) \neq 0
\end{aligned}$$

con $w \in \chi(v_2, \dots, v_n)$, $s(w)$ mínimo. Como (v_1, \dots, v_{n-1}) es una $(n-1)$ -upla buena, la primera igualdad nos dice que estamos en el caso (2) ó (3.i) de la Observación 3.4.10.

En el primer caso $\chi(v_1, \dots, v_{n-1}) = \emptyset$, y por lo tanto $w \in AP_{n-1}$ deberá verificar que $s(v_n) < t(w) \leq t(v_n)$. Luego por el Lema 3.4.3 (ii) existirá $z \in AP_n$, con $t(z) = t(w)$ y $w \in \text{Sub}(z)$. Si $t(v_1) \leq s(z)$, tenemos que existe $z_1 \in \text{Sub}(z) \setminus \{w\}$ con $s(z_1) = s(z)$ y esto contradice la minimalidad de $s(w)$. Si $s(z) < t(v_1)$ se contradice que $G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = 0$.

En el segundo caso $\chi(v_1, \dots, v_{n-1}) \neq \emptyset$, y si $u \in AP_{n-1}$ es tal que $s(u)$ es mínimo respecto de $\chi(v_1, \dots, v_{n-1})$ entonces $L(u)$ ó $R(u) \in I$. Comparando u y w debe ser $aw = ub$, con $a \in \mathcal{P}$ pues a divide a $L(w)$:



Luego, por el Lema 3.2.7(i), existirá $z \in AP_n$ tal que $t(z) = t(w)$ y tendremos dos casos a analizar: si $s(v_1) \leq s(z) < t(v_1)$, en este caso será $G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \neq 0$ y llegamos a un absurdo; si $s(v_2) \leq s(z)$ tomando $z_1 \in \text{Sub}(z) \setminus \{w\}$ con $s(z_1) = s(z)$, se contradice la minimalidad de $s(w)$ y llegamos a un absurdo nuevamente.

Sea ahora n par. Como (v_1, \dots, v_n) es una n -upla buena, estamos en el caso (2) ó (3.i) de la Observación 3.4.10.

Si $\chi(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$ debe ser

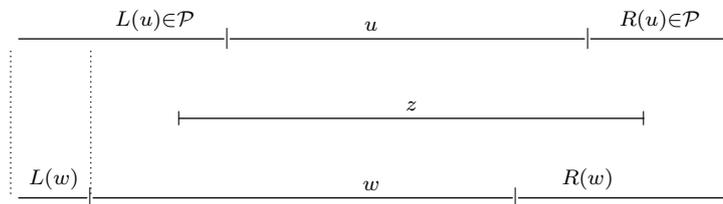
$$G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = 0 \quad \text{y} \quad G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = 0$$

pues sino llegaríamos a una contradicción usando el Lema 3.4.5.

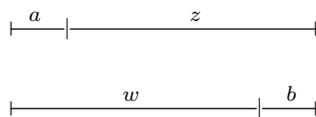
Si $\chi(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$ la contradicción no será inmediata. En este caso sabemos que $L(w) \in I$ ó $R(w) \in I$ si $w \in AP_n$ es tal que $s(w)$ es mínimo respecto de $\chi(v_1, \dots, v_n)$. Si fuera

$$G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \neq 0 \quad \text{ó} \quad G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \neq 0$$

existiría $u \in AP_{n-1}$ con $v_1 \dots v_n = L(u)uR(u)$, y $L(u), R(u) \in \mathcal{P}$ y nuevamente usando el Lema 3.4.5 construiríamos $z \in AP_n$ con $u \in \text{Sub}(z)$. Observemos que no puede ser $w = z$ debido a que $L(w) \in I$ ó $R(w) \in I$. Por ser $s(w)$ mínimo, debe ser $s(w) < s(z)$ y como $L(w)$ divide a $L(u)$, $L(w) \in \mathcal{P}$. Luego $R(w) \in I$ y así $t(w) < t(u)$.



Además como $az = wb$ con $a \in \mathcal{P}$, pues a divide a $L(u)$,



tenemos por el Lema 3.2.6 que $b \in \mathcal{P}$. Finalmente, como $wb' = cu$, podemos aplicar el Lema 3.2.4 (i)

$$\begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---}}^c \text{---} \overbrace{\text{---}}^u \text{---} \\ \text{---} \overbrace{\text{---}}^w \text{---} \overbrace{\text{---}}^{b'} \text{---} \end{array}$$

pues $b' \in \mathcal{P}$ por estar b' dividiendo a b , y así obtenemos que $c \in I$ lo que es un absurdo, pues c divide a $L(u)$ y $L(u) \in \mathcal{P}$.

ii) Sea ahora $G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \neq 0$.

Si n es impar entonces

$$G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = \sum_{i=1}^m a_i \otimes \zeta_i \otimes b_i, \quad s(v_1) \leq s(\zeta_i) < t(v_1)$$

donde las concatenaciones $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\} \subseteq AP_n$ las consideramos ordenadas de manera que $s(\zeta_i) < s(\zeta_j)$ si $i < j$.

Si $Sub(\zeta_i) = \{\psi_1^i, \psi_2^i\}$ por el Lema 3.2.9 tenemos que $\psi_2^{i+1} = \psi_1^i$ para $i = 1, \dots, m-1$. Luego podemos cancelar términos en $d_n \circ G_n$:

$$\begin{aligned} d_n \circ G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= \sum_{i=1}^m a_i L(\psi_1^i) \otimes \psi_1^i \otimes b_i - \sum_{i=1}^m a_i \otimes \psi_2^i \otimes R(\psi_2^i) b_i \\ &= a_m L(\psi_1^m) \otimes \psi_1^m \otimes b_m - a_1 \otimes \psi_2^1 \otimes R(\psi_2^1) b_1. \end{aligned}$$

Veamos entonces que

$$G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = a_m L(\psi_1^m) \otimes \psi_1^m \otimes b_m, \quad \text{y} \quad (\text{I})$$

$$G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = a_1 \otimes \psi_2^1 \otimes R(\psi_2^1) b_1. \quad (\text{II})$$

Comencemos con (I), y supongamos primero que

$$a_m L(\psi_1^m) \otimes \psi_1^m \otimes b_m \neq 0,$$

esto es, $a_m L(\psi_1^m), b_m \in \mathcal{P}$. Debemos ver que ψ_1^m es tal que

$$s(\psi_1^m) = \min\{s(w) : w \in \chi(v_2, \dots, v_n)\}.$$

Si fuera $s(v_1) \leq s(\psi_1^m) < t(v_1)$ usando el Lema 3.4.3 (i) existiría $z \in AP_n$ con $s(z) = s(\psi_1^m)$, y esto contradice la maximalidad de $s(\zeta_m)$ en $\{s(\zeta_1), \dots, s(\zeta_m)\}$ pues $s(\zeta_m) < s(\psi_1^m) = s(z)$. Luego $t(v_1) \leq s(\psi_1^m)$ y $\psi_1^m \in \chi(v_2, \dots, v_n)$. Sólo resta ver que $s(\psi_1^m)$ es mínimo. Si $\delta \in \chi(v_2, \dots, v_n)$ verifica que $s(\delta) < s(\psi_1^m)$

$$\begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---}}^\delta \text{---} \overbrace{\text{---}}^b \text{---} \\ \text{---} \overbrace{\text{---}}^{a \in \mathcal{P}} \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\psi_1^m} \text{---} \end{array}$$

por el Lema 3.2.7 (i), existirá $z \in AP_n$ con $t(z) = t(\psi_1^m)$. De aquí se desprende que $z = \zeta_m$ y como $t(v_1) \leq s(\delta) \leq s(z) = s(\zeta_m)$ se contradice que $s(\zeta_m) < t(v_1)$. Por otro lado, supongamos que

$$\begin{aligned} a_m L(\psi_1^m) \otimes \psi_1^m \otimes b_m &= 0 \text{ y} \\ G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= a \otimes \delta \otimes b \neq 0. \end{aligned}$$

Puede suceder que $s(\psi_1^m) < s(\delta)$ ó $s(\delta) < s(\psi_1^m)$

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\hspace{10em}}^{\psi_1^m} & \text{ó} & \overbrace{\hspace{10em}}^{\delta} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\delta} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\psi_1^m} \end{array} .$$

Nuevamente el Lema 3.2.7(i) nos da la existencia de $z \in AP_n$ verificando en el primer caso que $t(z) = t(\delta)$ y contradiciendo la maximalidad de $s(\zeta_m)$, pues $s(\zeta_m) < s(\psi_1^m) \leq s(z) < t(v_1)$ (observemos que si fuera $t(v_1) \leq s(z)$ tomando $z_1 \in \text{Sub}(z)$, $z = z_1 R(z_1)$, $s(\delta)$ no sería mínimo), y en el segundo caso, $t(z) = t(\psi_1^m)$ contradiciendo que $s(\zeta_m) < t(v_1)$, pues debe ser $\zeta_m = z$ y $t(v_1) \leq s(\delta) \leq s(z)$.

Veamos ahora (II) y supongamos primero que

$$a_1 \otimes \psi_2^1 \otimes R(\psi_2^1) b_1 \neq 0.$$

Debemos ver que ψ_2^1 es tal que $s(\psi_2^1) = \min\{s(w) : w \in \chi(v_1, \dots, v_{n-1})\}$. Si fuera $s(v_n) < t(\psi_2^1)$ el Lema 3.4.3 (ii), nos daría la existencia de $z \in AP_n$ con $t(z) = t(\psi_2^1)$, contradiciendo la minimalidad de $s(\zeta_1)$ en $\{s(\zeta_1), \dots, s(\zeta_m)\}$, pues $s(z) < s(\psi_2^1) = s(\zeta_1)$. Luego $t(\psi_2^1) \leq s(v_n)$ y $\psi_2^1 \in \chi(v_1, \dots, v_{n-1})$. Veamos que $s(\psi_2^1)$ es mínimo. Si $\delta \in \chi(v_1, \dots, v_{n-1})$ verifica que $s(\delta) < s(\psi_2^1)$, usando el Lema 3.2.7(ii) se contradice nuevamente la minimalidad de $s(\zeta_1)$.

Por último, si

$$\begin{aligned} a_1 \otimes \psi_2^1 \otimes R(\psi_2^1) b_1 &= 0 \text{ y} \\ G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) &= a \otimes \delta \otimes b \neq 0, \end{aligned}$$

tendríamos que $s(\delta) < s(\psi_2^1)$, y nuevamente el Lema 3.2.7(ii) contradice la minimalidad de $s(\zeta_1)$.

Si n es par tenemos que

$$G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = a \otimes w \otimes b$$

con $w \in AP_n$, $s(w)$ mínimo y $a, b \in \mathcal{P}$. Entonces

$$d_n \circ G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = d_n(a \otimes w \otimes b) = \sum_{w_i \in \text{Sub}(w)} a L(w_i) \otimes w_i \otimes R(w_i) b.$$

Como $v_1 v_2 \in I$, por ser $\mathcal{M}_{imp} = \emptyset$, sólo es suficiente considerar $w_i \in \text{Sub}(w)$ tales que $s(v_1) \leq s(w_i) < t(v_2)$.

Así, la suma anterior puede ser escrita como sigue

$$\mathbf{J} = \sum_{\substack{w_i \in \text{Sub}(w) \\ s(v_1) \leq s(w_i) < t(v_1)}} aL(w_i) \otimes w_i \otimes R(w_i)b + \sum_{\substack{w_i \in \text{Sub}(w) \\ s(v_2) \leq s(w_i) < t(v_2)}} aL(w_i) \otimes w_i \otimes R(w_i)b$$

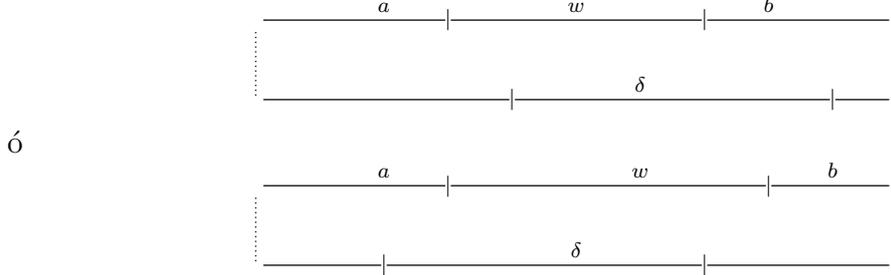
y lo que debemos probar es que

$$\mathbf{J} = G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) + G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n).$$

Teniendo en cuenta que si $w_i \in \text{Sub}(w)$ y $s(v_1) \leq s(w_i) < t(v_1)$ por el Lema 3.4.4 $t(w_i) \leq s(v_n) = t(v_{n-1})$, la igualdad buscada debería deducirse de las igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{w_i \in \text{Sub}(w) \\ s(v_1) \leq s(w_i) < t(v_1)}} aL(w_i) \otimes w_i \otimes R(w_i)b &= G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n), \quad \text{y} \\ \sum_{\substack{w_i \in \text{Sub}(w) \\ s(v_2) \leq s(w_i) < t(v_2)}} aL(w_i) \otimes w_i \otimes R(w_i)b &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1). \end{aligned}$$

Es claro que cualquier término de las sumas de la izquierda corresponde a un término de las sumas de la derecha. Recíprocamente, sea $\delta \in AP_{n-1}$ con $c \otimes \delta \otimes d$ un término de las sumas de la derecha y supongamos que $\delta \notin \text{Sub}(w)$, entonces $s(w) < s(\delta)$ ó $s(\delta) < s(w)$:



En el primer caso, será $wb' = c'\delta$, con b' dividiendo a b y por lo tanto $b' \in \mathcal{P}$. Usando el Lema 3.2.4 (i) tendremos que $c' \in I$ y entonces $c \in I$. Así $c \otimes \delta \otimes d = 0$. Análogamente en el segundo caso se ve que $d \in I$ usando el Lema 3.2.3 (i).

Caso 2: $\mathcal{M}_{par}(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$ y $\mathcal{M}_{imp}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$.

i) Sea $G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = 0$.

Si n es impar entonces

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_1} v_{2i_1+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &- G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \end{aligned}$$

y debemos mostrar que

$$G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_1} v_{2i_1+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n). \quad (*)$$

Como

$$\chi(v_1, \dots, v_{n-1}) \subseteq \chi(v_1, \dots, v_{2i_1} \cdot v_{2i_1+1}, \dots, v_n)$$

es claro que si $\chi(v_1, \dots, v_{n-1}) \neq \emptyset$ obtenemos la igualdad (*).

Si $\chi(v_1, \dots, v_{n-1}) = \emptyset$ y fuera

$$G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_1} v_{2i_1+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = L(w) \otimes w \otimes R(w) \neq 0,$$

con $w \in AP_{n-1}$ y $s(w)$ mínimo, debe verificarse que $s(v_n) < t(w) \leq t(v_n)$. Luego el Lema 3.4.3 (ii) nos da la existencia de $z \in AP_n$ con $s(z) < s(w)$. Tomando $z_1 \in Sub(z)$ con $s(z_1) = s(z)$ se contradice la minimalidad de $s(w)$.

Si n es par entonces

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_0} v_{2i_0+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1). \end{aligned}$$

La demostración es igual al caso $\mathcal{M}_{imp} = \mathcal{M}_{par} = \emptyset$.

ii) Si $G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \neq 0$, por definición de G_n , (v_1, \dots, v_n) es una n -upla buena y por lo tanto n debe ser par. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_0} v_{2i_0+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1). \end{aligned}$$

La demostración es igual al caso $\mathcal{M}_{imp} = \mathcal{M}_{par} = \emptyset$ (observando que la parte de esta demostración que utiliza el Lema 3.4.4 no es necesaria en este caso).

Caso 3: $\mathcal{M}_{par}(v_1, \dots, v_n) = \emptyset$ y $\mathcal{M}_{imp}(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$.

i) Sea $G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = 0$.

Si n es impar entonces

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &- G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_0-1} v_{2j_0} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1). \end{aligned}$$

La demostración es igual al caso $\mathcal{M}_{imp} = \mathcal{M}_{par} = \emptyset$, con la única excepción de que como

$$\chi(v_2, \dots, v_n) \subseteq \chi(v_1, \dots, v_{2j_0-1} \cdot v_{2j_0}, \dots, v_n),$$

en el análisis

$$\begin{aligned} G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_0-1} v_{2j_0} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= 0 \text{ y} \\ G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &\neq 0, \end{aligned}$$

no aparece el caso $\chi(v_1, \dots, v_{2j_0-1} v_{2j_0}, \dots, v_n) = \emptyset$ en el cual se utilizaba el Lema 3.4.3 (ii).

Si n es par entonces

$$\begin{aligned} G_{n-1}b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &- G_{n-1}(1 \otimes v_1 v_2 \otimes \dots v_n \otimes 1) \\ &+ G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \quad \text{si } j_1 = 1, y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{n-1}b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \\ &- G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_1-1}v_{2j_1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \quad \text{si } j_1 \neq 1. \end{aligned}$$

Observemos que por el Lema 3.4.4, si $w \in AP_{n-1}$ y $s(w) < t(v_1)$ entonces $t(w) \leq s(v_n) = t(v_{n-1})$. Luego basta aplicar la definición de G_{n-1} para ver que

$$G_{n-1}(1 \otimes v_1 v_2 \otimes \dots v_n \otimes 1) = G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \dots \otimes v_n \otimes 1) + G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n)$$

en el primer caso, y que

$$G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_1-1}v_{2j_1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1)$$

en el segundo caso.

ii) Si $G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \neq 0$, por definición de G_n , (v_1, \dots, v_n) es una n -upla buena y por lo tanto n debe ser impar. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} G_{n-1}b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &- G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_0-1}v_{2j_0} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1). \end{aligned}$$

Luego se puede mostrar, de la misma manera que fue hecho en el caso $\mathcal{M}_{imp} = \mathcal{M}_{par} = \emptyset$, que

$$\begin{aligned} G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= a_m L(\psi_1^m) \otimes \psi_1^m \otimes b_m \quad \text{y} \\ G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_0-1}v_{2j_0} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= a_1 \otimes \psi_2^1 \otimes R(\psi_2^1)b_1 \end{aligned}$$

observando que en el caso (II) no es necesario utilizar el Lema 3.4.3(ii).

Caso 4: $\mathcal{M}_{par}(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$ y $\mathcal{M}_{imp}(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$.

En este caso la n -upla es mala y por lo tanto, $G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = 0$.

Si n es impar entonces

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_1}v_{2i_1+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &- G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_0-1}v_{2j_0} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1). \end{aligned}$$

Observemos que la $(n-1)$ -upla $(v_1, \dots, v_{2i_1}v_{2i_1+1}, \dots, v_n)$ es buena si y sólo si lo es la $(n-1)$ -upla $(v_1, \dots, v_{2j_0-1}v_{2j_0}, \dots, v_n)$, y como

$$\chi(v_1, \dots, v_{2i_1}v_{2i_1+1}, \dots, v_n) = \chi(v_1, \dots, v_{2j_0-1}v_{2j_0}, \dots, v_n)$$

por definición de G_{n-1} obtenemos que

$$G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_0} v_{2i_0+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_0-1} v_{2j_0} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1).$$

Si n es par tenemos que

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &- G_{n-1}(1 \otimes v_1 v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_0} v_{2i_0+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \quad \text{si } j_1 = 1, y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{n-1} \circ b_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_0} v_{2i_0+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &- G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_1-1} v_{2j_1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \quad \text{si } j_1 \neq 1. \end{aligned}$$

Por definición de G_{n-1} obtenemos que

$$\begin{aligned} G_{n-1}(1 \otimes v_1 v_2 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= G_{n-1}(v_1 \otimes v_2 \dots \otimes v_n \otimes 1) \\ &+ G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_0} v_{2i_0+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \end{aligned}$$

en el primer caso, y como la $(n-1)$ -upla $(v_1, \dots, v_{2i_0} v_{2i_0+1}, \dots, v_n)$ es buena si y sólo si lo es $(v_1, \dots, v_{2j_1-1} v_{2j_1}, \dots, v_n)$,

$$G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2i_0} v_{2i_0+1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = G_{n-1}(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{2j_1-1} v_{2j_1} \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1)$$

en el segundo caso. □

3.5. Estructura de álgebra de Gerstenhaber de $\text{HH}^*(A)$

Nuestro objetivo es describir la estructura de álgebra de Gerstenhaber de $\text{HH}^*(A)$ en el caso en que A es un álgebra monomial. En el próximo capítulo estudiaremos el caso particular de álgebras de cuerdas triangulares y álgebras cuadráticas.

Como el corchete de Lie dota a $\text{HH}^1(A)$ con una estructura de álgebra de Lie y así $\text{HH}^n(A)$ es un módulo de Lie sobre $\text{HH}^1(A)$, utilizaremos también la fórmula hallada del corchete de Lie para calcular dicha estructura en un caso particular de álgebra monomial.

Por último veremos que el producto cup $f \cup g$, con $f \in \text{Hom}_E(AP_n, A)$, $g \in \text{Hom}_E(AP_m, A)$ y m par, admite una fórmula muy simple. En el capítulo siguiente se verá que esta coincide con la fórmula para hallar el producto cup en álgebras de cuerdas triangulares y cuadráticas, sin la restricción de la paridad de m .

Nos interesa considerar la resolución bar, pues sobre esta resolución conocemos el producto cup y el corchete de Lie definidos por Gerstenhaber en [G]. Ahora estamos en condiciones de definir estas operaciones en la resolución de Bardzell utilizando los morfismos de comparación entre dichas resoluciones. Sea

$$\text{Bar} : \dots \longrightarrow A \otimes_E A^{\otimes n} \otimes_E A \xrightarrow{b'_n} A \otimes_E A^{\otimes n-1} \otimes_E A \longrightarrow \dots \longrightarrow A \otimes_E A \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

la resolución bar de A , donde los diferenciales b'_n son los mismos que los definidos en la resolución del radical. Como $A \otimes_E \text{rad } A^{\otimes n} \otimes_E A$ es un submódulo de $A \otimes_E A^{\otimes n} \otimes_E A$, es claro que $\mathbf{F} : \mathbf{Ap} \rightarrow \mathbf{Bar}$ es morfismo de comparación. Si definimos $\mathbf{V} : \mathbf{Bar} \rightarrow \mathbf{Ap}$ por

$$V_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = G_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \text{ si } n \neq 1, \text{ y}$$

$$V_1(1 \otimes v_1 \otimes 1) = \begin{cases} 0, & \text{si } |v_1| = 0, \\ G_1(1 \otimes v_1 \otimes 1) & \text{si } |v_1| > 0, \end{cases}$$

puede verificarse que la misma demostración del Teorema 3.2.1 nos permite afirmar que \mathbf{V} es también morfismo de comparación.

Comenzaremos reescribiendo la definición del morfismo \mathbf{F} de una manera conveniente para nuestros propósitos y mostraremos también que $\mathbf{V} \circ \mathbf{F} = \text{Id}_{\mathbf{Ap}}$.

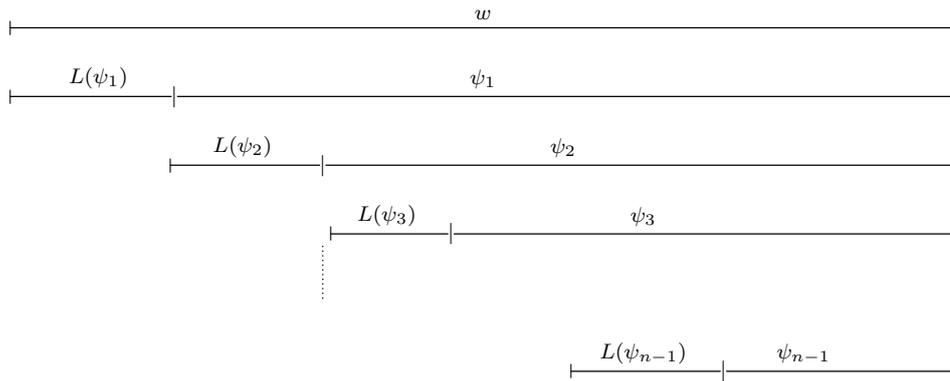
Sea $w \in AP_n$, $n \geq 2$ y $\psi_i \in AP_{n-i}$ soportes de concatenaciones dividiendo el camino w y elegidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} w &= L(\psi_1)\psi_1 \\ \psi_i &= L(\psi_{i+1})\psi_{i+1}, \quad \text{si } i = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Esto es, si $w = w^{op}(q^1, \dots, q^{n-1})$ entonces

$$\begin{aligned} \psi_i &= (q^{i+1}, \dots, q^{n-1}) \quad \text{para } i = 1, \dots, n-3, \\ \psi_{n-2} &= q^{n-1} = \alpha_1 \dots \alpha_m \quad \text{con } \alpha_i \in Q_1, \text{ y} \\ \psi_{n-1} &= \alpha_m. \end{aligned}$$

Gráficamente



Por definición, si $\text{Sub}(w) = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{m_1}\}$ tenemos

$$\begin{aligned} F_n(1 \otimes w \otimes 1) &= \sum_{i=1}^{m_1-2} 1 \otimes L_1 \dots L_i F_{n-1}(1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m_1-(i+1)} \dots R_1 \\ &+ 1 \otimes L(\psi_1) F_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1), \end{aligned}$$

donde hemos notado $\zeta_{m_1} = \psi_1$. Análogamente, si $\text{Sub}(\psi_1) = \{\zeta'_1, \dots, \zeta'_{m_2}\}$

$$\begin{aligned} F_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1) &= \sum_{i=1}^{m_2-2} 1 \otimes L'_1 \dots L'_i F_{n-2}(1 \otimes \zeta'_{i+1} \otimes 1) R'_{m_2-(i+1)} \dots R'_1 \\ &+ 1 \otimes L(\psi_2) F_{n-2}(1 \otimes \psi_2 \otimes 1), \end{aligned}$$

nuevamente $\zeta'_{m_2} = \psi_2$ y así

$$\begin{aligned} F_n(1 \otimes w \otimes 1) &= \sum_{i=1}^{m_1-2} 1 \otimes L_1 \dots L_i F_{n-1}(1 \otimes \zeta_{i+1} \otimes 1) R_{m_1-(i+1)} \dots R_1 \\ &+ \sum_{i=1}^{m_2-2} 1 \otimes L(\psi_1) \otimes L'_1 \dots L'_i F_{n-2}(1 \otimes \zeta'_{i+1} \otimes 1) R'_{m_2-(i+1)} \dots R'_1 \\ &+ 1 \otimes L(\psi_1) \otimes L(\psi_2) F_{n-2}(1 \otimes \psi_2 \otimes 1). \end{aligned}$$

Es claro que reiterando $n - 2$ veces este argumento podemos escribir

$$\begin{aligned} F_n(1 \otimes w \otimes 1) &= \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in \mathcal{K}} 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes b \\ &+ 1 \otimes L(\psi_1) \otimes L(\psi_2) \otimes \dots \otimes L(\psi_{n-1}) F_1(1 \otimes \psi_{n-1} \otimes 1) \end{aligned}$$

donde \mathcal{K} es cierto subconjunto de

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n, b) : a_1, \dots, a_n, b \in \mathcal{P} : |b| > 0, w = a_1 \dots a_n b\}$$

y

$$F_1(1 \otimes \psi_{n-1} \otimes 1) = 1 \otimes \psi_{n-1} \otimes 1.$$

De esta manera hemos demostrado el siguiente resultado.

Lema 3.5.1. *Si $w \in AP_n$ y $n \geq 2$ se tiene que*

$$\begin{aligned} F_n(1 \otimes w \otimes 1) &= \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in \mathcal{K}} 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes b \\ &+ 1 \otimes L(\psi_1) \otimes L(\psi_2) \otimes \dots \otimes L(\psi_{n-1}) \otimes \psi_{n-1} \otimes 1 \end{aligned}$$

donde \mathcal{K} es cierto subconjunto de

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n, b) : a_1, \dots, a_n, b \in \mathcal{P} : |b| > 0, w = a_1 \dots a_n b\}.$$

La descripción anterior del morfismo \mathbf{F} será usada para describir el producto cup y el corchete de Lie en algunos casos particulares, y también para demostrar la próxima proposición.

Proposición 3.5.2. *Los morfismos de comparación verifican la igualdad $\mathbf{V} \circ \mathbf{F} = \text{Id}_{\mathbf{AP}}$.*

Demostración. Claramente

$$\begin{aligned} V_0 \circ F_0(1 \otimes e \otimes 1) &= V_0(e \otimes 1) = e \otimes 1 \otimes 1 = 1 \otimes e \otimes 1, \text{ y} \\ V_1 \circ F_1(1 \otimes \alpha \otimes 1) &= V_1(1 \otimes \alpha \otimes 1) = 1 \otimes \alpha \otimes 1. \end{aligned}$$

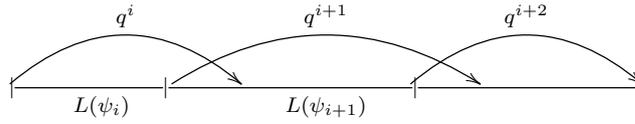
Si $w \in AP_n$ y $n \geq 2$, de acuerdo a la descripción anterior,

$$\begin{aligned} V_n \circ F_n(1 \otimes w \otimes 1) &= \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in \mathcal{K}} G_n(1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes b) \\ &+ G_n(1 \otimes L(\psi_1) \otimes L(\psi_2) \otimes \dots \otimes L(\psi_{n-1}) \otimes \psi_{n-1} \otimes 1). \end{aligned}$$

Como $w = a_1 \dots a_n b$ con $|b| > 0$, es claro que $\chi(a_1, \dots, a_n) = \emptyset$, pues de lo contrario existiría $z \in AP_n$, dividiendo a $a_1 \dots a_n$ y entonces $z, w \in AP_n$ y z dividiría propiamente a w . De aquí tenemos que

$$\sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in \mathcal{K}} G_n(1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes b) = 0.$$

Por otro lado, si $w = w^{op}(q^1, \dots, q^{n-1})$ entonces q^i divide a $L(\psi_i)L(\psi_{i+1})$,



y así la n -upla $(L(\psi_1), \dots, L(\psi_{n-1}), \psi_{n-1})$ es buena, y como $w = L(\psi_1)L(\psi_2) \dots L(\psi_{n-1})\psi_{n-1}$ obtenemos

$$G_n(1 \otimes L(\psi_1) \otimes L(\psi_2) \otimes \dots \otimes L(\psi_{n-1}) \otimes \psi_{n-1} \otimes 1) = 1 \otimes w \otimes 1.$$

□

3.5.1. El producto cup y el corchete de Lie en álgebras monomiales

Como hemos visto en la Sección 1.3 de los Preliminares, el producto cup y el corchete de Lie en la cohomología $HH^*(A)$ son inducidos por operaciones definidas usando la resolución bar como sigue: dados $f \in \text{Hom}_{E-E}(A^{\otimes n}, A)$, $g \in \text{Hom}_{E-E}(A^{\otimes m}, A)$ tenemos que

$$f \cup g \in \text{Hom}_{E-E}(A^{\otimes m+n}, A) \quad \text{y} \quad [f, g] \in \text{Hom}_{E-E}(A^{\otimes m+n-1}, A)$$

están definidos por

$$f \cup g(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n+m}) = f(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)g(v_{n+1} \otimes \dots \otimes v_{n+m})$$

y

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f$$

donde

$$f \circ_i g = \sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} f \circ_i g$$

y

$$f \circ_i g(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n+m-1}) = f(v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes g(v_i \otimes \dots \otimes v_{i+m-1}) \otimes v_{i+m} \otimes \dots \otimes v_{n+m-1}).$$

Estas estructuras pueden ser definidas en la resolución de Bardzell por medio de los morfismos de comparación

$$A \otimes kAP_n \otimes A \begin{array}{c} \xrightarrow{F_n} \\ \xleftarrow{V_n} \end{array} A \otimes A^{\otimes n} \otimes A.$$

Usando los isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_{A-A}(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, A) \simeq \mathrm{Hom}_{E-E}(A^{\otimes n}, A),$$

$$\mathrm{Hom}_{A-A}(A \otimes kAP_n \otimes A, A) \simeq \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_n, A)$$

tenemos que los morfismos F y V inducen quasi-isomorfismos

$$\begin{aligned} F^* &= (F^n : \mathrm{Hom}_{E-E}(A^{\otimes n}, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_n, A))_{n \geq 0} \text{ y} \\ V^* &= (V^n : \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_n, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E-E}(A^{\otimes n}, A))_{n \geq 0}. \end{aligned}$$

Con estos quasi-isomorfismos, el producto cup y el corchete de Lie, los cuales seguiremos notando \cup y $[-, -]$, pueden ser definidos como sigue: dado $f \in \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_n, A)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_m, A)$,

$$f \cup g \in \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_{n+m}, A) \quad \text{y} \quad f \circ_i g \in \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_{n+m-1}, A), 1 \leq i \leq n$$

están definidos por

$$f \cup g = F^{n+m}(V^n(f) \cup V^m(g)) \quad \text{y} \quad f \circ_i g = F^{m+n-1}(V^n(f) \circ_i V^m(g)),$$

y como

$$\begin{aligned} D^{n+m+1}(f \cup g) &= D^{n+1}f \cup g + (-1)^n f \cup D^{m+1}g \\ D^{n+m}[f, g] &= [f, D^{m+1}g] + (-1)^{m-1}[D^{n+1}f, g] \end{aligned}$$

tenemos que las operaciones \cup y $[-, -]$ definidas en el complejo $(\mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_n, A), F^n)_{n \geq 0}$ inducen operaciones en la cohomología $\mathrm{HH}^*(A)$. En el Capítulo 2 hemos calculado los grupos de cohomología de álgebras de cuerdas triangulares y de álgebras de cuerdas cuadráticas a partir del complejo obtenido de la resolución de Bardzell. En el siguiente capítulo usaremos el conocimiento de estos grupos para describir los productos \cup y $[-, -]$ en estos casos particulares.

3.5.2. Estructura de módulo de Lie de $\text{HH}^*(A)$

El primer grupo de cohomología $\text{HH}^1(A)$ es un álgebra de Lie, ver [S], y el corchete de Gerstenhaber da una estructura de módulo de Lie sobre los grupos de cohomología de Hochschild:

$$[-, -] : \text{HH}^1(A) \times \text{HH}^n(A) \longrightarrow \text{HH}^n(A).$$

Usaremos ahora nuestra definición del corchete de Lie para calcular esta estructura cuando A es un álgebra monomial que verifica la siguiente propiedad: $\dim_k e_i A e_j = 1$ si existe $\alpha : i \rightarrow j \in Q_1$. En este caso $\text{HH}^1(A)$ está generada por elementos $(\alpha, \alpha) \in (Q_1//Q_1)$. Sea $g_{(\alpha, \alpha)} \in \text{HH}^1(A)$ definido por

$$g_{(\alpha, \alpha)}(\beta) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \beta = \alpha; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y sea $f \in \text{HH}^m(A)$. Para calcular $[f, g_{(\alpha, \alpha)}]$ será necesario calcular

$$\begin{aligned} F^n(V^n(f) \circ_i V^1(g_{(\alpha, \alpha)})) & \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \text{ y} \\ F^n(V^1(g_{(\alpha, \alpha)}) \circ_1 V^n(f)). \end{aligned}$$

Dado $v = \alpha_1 \dots \alpha_s$ con $\alpha_i \in Q_1$, notaremos $C(\alpha, v) = \#\{i : \alpha_i = \alpha, i = 1, \dots, s\}$. Por linealidad extendemos la función $C(\alpha, -)$ a todo A .

Sea $w \in AP_n$, por el desarrollo de \mathbf{F} en el Lema (3.5.1) tenemos que

$$\begin{aligned} V^n(f) \circ_i V^1(g_{(\alpha, \alpha)}) F_n(w) &= \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in \mathcal{K}} V^n(f) \circ_i V^1(g_{(\alpha, \alpha)})(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) b \\ &+ V^n(f) \circ_i V^1(g_{(\alpha, \alpha)})(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes L(\psi_{n-1}) \otimes \psi_{n-1}) = \\ &\sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in \mathcal{K}} V^n(f)(a_1 \otimes \dots \otimes V^1(g_{(\alpha, \alpha)})(a_i) \otimes \dots \otimes a_n) b \\ &+ V^n(f)(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes V^1(g_{(\alpha, \alpha)})(L(\psi_i)) \otimes \dots \otimes \psi_{n-1}). \end{aligned}$$

Por definición $V^1(g_{(\alpha, \alpha)})(a_i) = C(\alpha, a_i) a_i$. Así podemos ver que todos los términos de la suma anterior con $|b| > 0$ se anulan, pues

$$\begin{aligned} V^n(f)(a_1 \otimes \dots \otimes V^1(g_{(\alpha, \alpha)})(a_i) \otimes \dots \otimes a_n) b &= V^n(f)(a_1 \otimes \dots \otimes C(\alpha, a_i) a_i \otimes \dots \otimes a_n) b \\ &= C(\alpha, a_i) V^n(f)(a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n) b \end{aligned}$$

y $\chi(a_1, \dots, a_n) = \emptyset$, ya que de otra manera existiría $w' \in \chi(a_1, \dots, a_n)$ con w' dividiendo a $w = a_1 \dots a_n b$. Así

$$\begin{aligned} V^n(f) \circ_i V^1(g_{(\alpha, \alpha)}) F_n(w) &= V^n(f)(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes V^1(g_{(\alpha, \alpha)})(L(\psi_i)) \otimes \dots \otimes \psi_{n-1}) \\ &= V^n(f)(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes C(\alpha, L(\psi_i)) L(\psi_i) \otimes \dots \otimes \psi_{n-1}) \\ &= C(\alpha, L(\psi_i)) V^n(f)(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes L(\psi_i) \otimes \dots \otimes \psi_{n-1}) \\ &= C(\alpha, L(\psi_i)) f(w). \end{aligned}$$

En particular, $V^n(f) \circ_n V^1(g_{(\alpha,\alpha)})F_n(w) = C(\alpha, \psi_{n-1})f(w)$. Por lo tanto

$$F^n(V^n(f) \circ V^1(g_{(\alpha,\alpha)}))(w) = \sum_{i=1}^n C(\alpha, L(\psi_i))f(w) = C(\alpha, w)f(w).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} V^1(g_{(\alpha,\alpha)}) \circ V^n(f)F_n(w) &= V^1(g_{(\alpha,\alpha)})f(V_n \circ F_n(w)) \\ &= V^1(g_{(\alpha,\alpha)})f(w) = C(\alpha, f(w))f(w), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que $V_n \circ F_n = \text{id}_{AP_n}$. De esta manera, hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 3.5.3. *Si A es un álgebra monomial tal que $\dim_k e_i A e_j = 1$ si existe $\alpha : i \rightarrow j \in Q_1$, entonces $\text{HH}^*(A)$ es un $\text{HH}^1(A)$ -módulo de Lie con la estructura dada por: si $g_{(\alpha,\alpha)} \in \text{HH}^1(A)$, $f \in \text{HH}^n(A)$ entonces $[g_{(\alpha,\alpha)}, f] \in \text{HH}^n(A)$ es la clase del elemento*

$$(C(\alpha, -)f(-) - C(\alpha, f(-))f(-) \in \text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A).$$

3.5.3. El producto cup en $\bigoplus_{n \geq 0} \text{HH}^{2n}(A)$.

En esta sección veremos que la fórmula para calcular el producto cup en grupos de cohomología de grado par en álgebras monomiales adquiere una forma muy simple.

Sean $f \in \text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A)$, $g \in \text{Hom}_{E-E}(kAP_m, A)$. De acuerdo a la Sección 3.5.1 el producto cup de f y g está definido por

$$F^{n+m}(V^n(f) \cup V^m(g))$$

y si $w \in AP_{n+m}$, $w = w^{op}(q^1, \dots, q^{n+m-1})$, utilizando el Lema 3.5.1 este puede ser calculado como sigue:

$$\begin{aligned} F^{n+m}(V^n(f) \cup V^m(g))(w) &= V^n(f) \cup V^m(g)F_{n+m}(w) \\ &= \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_{n+m}, b) \in \mathcal{K}} V^n(f)(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) V^m(g)(a_{n+1} \otimes \dots \otimes a_{n+m}) b \\ &+ V^n(f)(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes L(\psi_n)) V^m(g)(L(\psi_{n+1}) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-1}). \end{aligned}$$

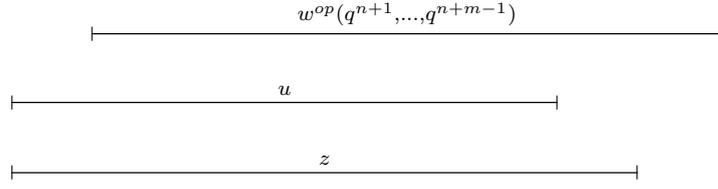
Veamos que los términos de la sumatoria

$$V^n(f)(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) V^m(g)(a_{n+1} \otimes \dots \otimes a_{n+m}) b$$

son todos nulos. Si no lo fueran, entonces $V^m(g)(a_{n+1} \otimes \dots \otimes a_{n+m}) \neq 0$. En este caso, debería existir $u \in AP_m$ dividiendo $a_{n+1} \dots a_{n+m}$ y como $|b| > 0$, $t(u) \leq t(a_{n+m}) < t(\psi_{n+m-1})$. Entonces considerando

$$u \in AP_m \quad \text{y} \quad w^{op}(q^{n+1}, \dots, q^{n+m-1}) = L(\psi_{n+1}) \dots L(\psi_{n+m-1}) \psi_{n+m-1} \in AP_m$$

por el Lema 3.2.3 (ii) tenemos que existe $z \in AP_{m+1}$ con $s(z) = s(u)$. Gráficamente,



Ahora vamos a comparar $s(u)$ con $s(q^n)$. Si $s(q^n) < s(u)$ entonces $z \in AP_{m+1}$ dividiría propiamente a $w^{op}(q^n, \dots, q^{n+m-1}) \in AP_{m+1}$, lo que es una contradicción. Entonces $s(u) \leq s(q^n)$, y por ser $V^n(f)(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \neq 0$ debería existir $v \in AP_n$ dividiendo a $a_1 \dots a_n$ y por lo tanto

$$s(a_1) \leq s(v) \quad \text{y} \quad t(v) \leq t(a_n) \leq s(u).$$

Del Lema 1.5.4 tenemos que $w = w^{op}(q^1, \dots, q^{n+m-1}) = w(p_1, \dots, p_{n+m-1})$ y de (1.4) del mismo lema,

$$s(q^n) < t(p_{n-1}).$$

Así obtenemos que

$$s(p_1) = s(a_1) \leq s(v) \leq t(v) \leq s(u) \leq s(q^n) < t(p_{n-1})$$

y por lo tanto $v \in AP_n$ divide propiamente a $w(p_1, \dots, p_{n-1}) \in AP_n$, una contradicción. De esta manera vemos que cuando m es par los términos de la sumatoria con $|b| > 0$ se anulan, obteniendo así que

$$F^{n+m}(V^n(f) \cup V^m(g))(w) = V^n(f)(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes L(\psi_n))V^m(g)(L(\psi_{n+1}) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-1}).$$

Usando que

$$L(\psi_{n+1}) \dots L(\psi_{n+m-1})\psi_{n+m-1} = w^{op}(q^{n+1}, \dots, q^{n+m-1}) \in AP_m$$

tenemos que $V^m(g)(L(\psi_{n+1}) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-1}) = g(w^{op}(q^{n+1}, \dots, q^{n+m-1}))$. Por otro lado, el Lema 1.5.4 nos dice que $t(p_{n-1}) \leq t(q^{n-1}) < s(q^{n+1})$ y así

$$w(p_1, \dots, p_{n-1}) \in \chi(L(\psi_1), \dots, L(\psi_n))$$

y como $s(p_1) = s(L(\psi_1))$, su inicio es mínimo con respecto a todas las concatenaciones del conjunto anterior. Luego

$$V^n(f)(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes L(\psi_n)) = f(w(p_1, \dots, p_{n-1}))a.$$

De esta manera hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 3.5.4. Sean n, m pares, $f \in HH^n(A)$, $g \in HH^m(A)$. Entonces $f \cup g \in HH^{n+m}(A)$ es la clase del elemento en $\text{Hom}_{E-E}(kAP_{n+m}, A)$ que a cada $w \in AP_{n+m}$ le asigna el elemento

$$f(w(p_1, \dots, p_{n-1}))ag(w^{op}(q^{n+1}, \dots, q^{n+m-1}))$$

donde $w = w(p_1, \dots, p_{n-1})aw^{op}(q^{n+1}, \dots, q^{n+m-1})$.

Capítulo 4

Álgebra de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild de álgebras de cuerdas

Dos operaciones se pueden definir en la cohomología de Hochschild: el producto cup

$$- \cup - : \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \rightarrow \mathrm{HH}^{n+m}(A)$$

y el corchete de Lie

$$[- , -] : \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \rightarrow \mathrm{HH}^{n+m-1}(A).$$

Estas operaciones fueron definidas por Gerstenhaber en [G] utilizando la resolución bar. En la Sección 3.5.1, utilizando los morfismos de comparación $\mathbf{F} : \mathbf{Ap} \rightarrow \mathbf{Bar}$ y $\mathbf{V} : \mathbf{Bar} \rightarrow \mathbf{Ap}$, hemos definido estas operaciones utilizando la resolución de Bardzell, proporcionándonos de esta manera una gran herramienta para sus cálculos. Una técnica diferente puede ser usada para calcular el primer producto pues, debido a que los grupos de cohomología de Hochschild $\mathrm{HH}^n(A)$ son identificados con los grupos $\mathrm{Ext}_{A-A}^n(A, A)$, el producto de Yoneda define un producto en la cohomología de Hochschild $\mathrm{HH}^*(A)$, que coincide con el producto cup definido en [G].

En este capítulo usaremos ambas técnicas para describir ambos productos en el caso particular de álgebras de cuerdas triangulares y álgebras de cuerdas cuadráticas. Será necesaria la identificación

$$\mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_{m+n}, A) \simeq k(AP_{m+n}/\mathcal{P})$$

dada por

$$f_{(\rho, \gamma)} \longleftrightarrow (\rho, \gamma), \quad \text{donde } f_{(\rho, \gamma)}(w) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } \rho = w; \\ 0, & \text{si } \rho \neq w \end{cases}$$

y el conocimiento de los grupos de cohomología de esta familia de álgebras que hemos hallado en el Capítulo 2.

4.1. Álgebras de cuerdas triangulares

En esta sección calcularemos el producto cup y el corchete de Lie sobre la cohomología de Hochschild de álgebras de cuerdas triangulares. Particularmente estamos interesados en describir los productos $g \cup f$ y $[g, f]$ entre aplicaciones $f \in \text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A)$, $g \in \text{Hom}_{E-E}(kAP_m, A)$ que estén en el núcleo de los morfismos

$$D_{n+1} : \text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A) \rightarrow \text{Hom}_{E-E}(kAP_{n+1}, A)$$

y

$$D_{m+1} : \text{Hom}_{E-E}(kAP_m, A) \rightarrow \text{Hom}_{E-E}(kAP_{m+1}, A)$$

del complejo de Hochschild. Por tal motivo necesitamos elegir representantes convenientes de las clases de f y g en $\text{HH}^n(A)$, $\text{HH}^m(A)$ respectivamente. Esto es lo que haremos en el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Sea $n > 1$. Si A es un álgebra de cuerdas triangular y f es un elemento en $\text{Nu } D_{n+1}$ entonces existe f^{\geq} tal que $f - f^{\geq} \in \text{Im } D_n$ donde*

$$f^{\geq} = \sum_{i=1}^t \lambda_i f_{(\rho_i, \gamma_i)}^{\geq}, \quad \lambda_i \in k$$

con $(\rho_i, \gamma_i) \in {}^-(0, 0)_n^-$ ó $(1, 0)_n^{-+}$ para todo i con $1 \leq i \leq t$.

Demostración. Sea $f \in \text{Nu } D_{n+1}$, por el Lema 2.2.2 sabemos que f es combinación lineal de elementos base $f_{(\rho, \gamma)}$ con

$$(\rho, \gamma) \in \{ {}^-(0, 0)_n^-, (1, 0)_n^-, {}^-(0, 1)_n, (1, 1)_n, (id + (-1)^n \phi_n)((1, 0)_n^+) \}$$

y del mismo lema tenemos que

$$\begin{aligned} D_n({}^+(0, 0)_{n-1}^-) &= (1, 0)_n^{--} \\ D_n({}^-(0, 0)_{n-1}^+) &= {}^{--}(0, 1)_n \\ (-1)^n D_n((1, 0)_{n-1}^+) &= (1, 1)_n \\ D_n({}^+(0, 0)_{n-1}^+) &= (id + (-1)^n \phi_n)((1, 0)_n^+) \cup (id + (-1)^n \psi_n)((1, 0)_n^{-+}). \end{aligned}$$

Para cada elemento base $f_{(\rho, \gamma)}$ definamos $f_{(\rho, \gamma)}^{\geq}$ como sigue:

$$f_{(\rho, \gamma)}^{\geq} = \begin{cases} f_{(\rho, \gamma)} & \text{si } (\rho, \gamma) \in {}^-(0, 0)_n^- \sqcup (1, 0)_n^{-+}, \\ (-1)^{n-1} f_{\psi_n^{-1}(\rho, \gamma)} & \text{si } (\rho, \gamma) \in {}^{+-}(0, 1)_n, \\ 0 & \text{si } (\rho, \gamma) \in {}^{--}(0, 1)_n \sqcup (1, 0)_n^{--} \sqcup (1, 1)_n \sqcup (1, 0)_n^+ \sqcup {}^+(0, 1)_n, \end{cases}$$

entonces si f^{\geq} es la combinación lineal de los elementos $f_{(\rho, \gamma)}^{\geq}$, por lo anterior tenemos que $f - f^{\geq} \in \text{Im } D_n$ para todo $n > 0$. Además, observemos que f^{\geq} es una combinación lineal de elementos base $f_{(\rho, \gamma)}$ con $(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 0)_n^- \sqcup (1, 0)_n^{-+}$. \square

Observación 4.1.2. Dado que las operaciones que queremos describir se definen en la cohomología, de ahora en más asumiremos que todo elemento $f \in \text{Nu } D_{n+1}$ es tal que $f = f^\geq$, esto es, f una combinación lineal de elementos base $f_{(\rho,\gamma)}$ con $(\rho, \gamma) \in (0, 0)_n^- \sqcup (1, 0)_n^{+}$.

Para describir la estructura de anillo graduado de la cohomología de Hochschild dada por el producto cup en el caso de álgebras de cuerdas triangulares usaremos el producto de Yoneda. Esto es, si $f \in \text{HH}^m(A)$ y $g \in \text{HH}^n(A)$, el producto cup $g \cup f \in \text{HH}^{n+m}(A)$ se define como $g \cup f = gf_n$ donde f_n es un morfismo que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A \otimes kAP_{m+n} \otimes A & \xrightarrow{d_{m+n}} & A \otimes kAP_{m+n-1} \otimes A & \xrightarrow{d_{m+n-1}} & \dots & \xrightarrow{d_{m+1}} & A \otimes kAP_m \otimes A & & & & \\
\downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & \searrow f & & & \\
A \otimes kAP_n \otimes A & \xrightarrow{d_n} & A \otimes kAP_{n-1} \otimes A & \xrightarrow{d_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & A \otimes kAP_0 \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow g & & & & & & & & & & \\
A & & & & & & & & & &
\end{array}$$

El siguiente lema nos permitirá definir los morfismos f_n del diagrama anterior.

Lema 4.1.3. Si $n, m \geq 0$, $n + m \geq 2$ entonces todo $w(p_1, \dots, p_{n+m-1}) \in AP_{n+m}$ puede escribirse de una única manera como

$$w(p_1, \dots, p_{n+m-1}) = {}^{(n)}w \cup w^{(m)}$$

con ${}^{(n)}w = w(p_1, \dots, p_{n-1}) \in AP_n$, $w^{(m)} = w^{op}(q^{n+1}, \dots, q^{n+m-1}) \in AP_m^{op}$ y u un camino en Q . Además, $p_n = a \cup b$ y $q^n = a' \cup b'$ con a, a', b, b' caminos no triviales, y por lo tanto $u \in \mathcal{P}$.

Demostación. Del Lema 1.5.4 sabemos que $w(p_1, \dots, p_{n+m-1}) = w^{op}(q^1, \dots, q^{n+m-1})$. Es claro que $w(p_1, \dots, p_{n-1}) \in AP_n$ y $w^{op}(q^{n+1}, \dots, q^{n+m-1}) \in AP_m^{op}$. Para probar la existencia del camino u observemos que de (1.4) del Lema 1.5.4 y la construcción de la relación q^{n-1} tenemos que

$$t(p_{n-1}) \leq t(q^{n-1}) \leq s(q^{n+1}).$$

Finalmente, la relación de u con p_n y q^n se sigue de las desigualdades

$$s(p_n) < t(p_{n-1}) \leq s(q^{n+1}) < t(p_n)$$

y

$$s(q^n) < t(p_{n-1}) \leq s(q^{n+1}) < t(q^n)$$

obtenidas nuevamente usando (1.4). □

Según el lema anterior, si $n, m > 0$, cualquier $w = w(p_1, \dots, p_{n+m-1}) \in AP_{n+m}$ puede descomponerse de una única manera como

$$w = {}^{(n)}w \cup w^{(m)}$$

con ${}^{(n)}w = w(p_1, \dots, p_{n-1}) \in AP_n$ y $w^{(m)} = w^{op}(q^{n+1}, \dots, q^{n+m-1}) \in AP_m$. Si $m > 0$, definimos

$$f_n : A \otimes kAP_{n+m} \otimes A \rightarrow A \otimes kAP_n \otimes A$$

por

$$f_n(1 \otimes w \otimes 1) = \begin{cases} 1 \otimes 1 \otimes f(1 \otimes w \otimes 1) & \text{si } n = 0, \\ \sum_{\substack{\psi \in AP_n \\ L(\psi)\psi R(\psi) = {}^{(n)}wu}} L(\psi) \otimes \psi \otimes R(\psi) f(1 \otimes w^{(m)} \otimes 1) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

De ahora en adelante usaremos la identificación

$$\text{Hom}_{A-A}(A \otimes kAP_m \otimes A, A) \simeq \text{Hom}_{E-E}(kAP_m, A)$$

por el cual si $w \in AP_m$, $f(w)$ significará $f(1 \otimes w \otimes 1)$.

Observación 4.1.4. Si n es par entonces

$$f_n(1 \otimes w \otimes 1) = 1 \otimes {}^{(n)}w \otimes u f(w^{(m)}),$$

pues del Lema 4.1.3, $w(p_1, \dots, p_n) = {}^{(n)}w$ u b con b un camino no trivial y por el Lema 1.5.7

$$\text{Sub}(w(p_1, \dots, p_n)) = \{\psi_1, \psi_2 = w(p_1, \dots, p_{n-1})\}.$$

Luego $L(\psi)\psi R(\psi) = {}^{(n)}w$ u implica que $\psi = \psi_2 = {}^{(n)}w$.

El siguiente lema será usado para mostrar que los morfismos f_n son efectivamente los que completan de manera conmutativa el diagrama mencionado.

Lema 4.1.5. Si $w = w(p_1, \dots, p_{n-1}) = w^{op}(q^1, \dots, q^{n-1})$ y q^m tiene longitud 2 para algún m tal que $1 < m < n$ entonces $q^m = p_m$ y $q^{m-1} = p_{m-1}$.

Demostración. Sea $q^m = \alpha\beta$. De (1.4) tenemos que

$$s(q^m) < t(p_{m-1}) \leq t(q^{m-1}).$$

Ahora $s(q^m) = s(\alpha)$ y $t(q^{m-1}) = t(\alpha)$, luego $t(p_{m-1}) = t(q^{m-1})$ y entonces $p_{m-1} = q^{m-1}$. Análogamente,

$$s(q^{m+1}) < t(p_m) \leq t(q^m),$$

$s(q^{m+1}) = s(\beta)$ y $t(q^m) = t(\beta)$, luego $t(p_m) = t(q^m)$ y entonces $p_m = q^m$. \square

Finalmente estamos en condiciones de demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.1.6. Sea $m > 0$ y sea $f \in \text{Nu } D_{m+1}$ elegido según la Observación 4.1.2. Entonces $f = \mu f_0$ y $f_{n-1}d_{m+n} = d_n f_n$ para todo $n \geq 1$.

Demostración. Es claro que $f = \mu f_0$ pues para todo $w \in AP_m$ tenemos que

$$\mu f_0(1 \otimes w \otimes 1) = \mu(1 \otimes 1 \otimes f(w)) = f(w) = f(1 \otimes w \otimes 1).$$

Sea $n \geq 1$ y sea $w \in AP_{n+m}$. La demostración la haremos en etapas considerando $f = f_{(\rho, \gamma)}$ con (ρ, γ) perteneciente a ${}^-(0, 0)_m^-$ ó $(1, 0)_m^+$.

(i) Supongamos que $(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 0)_m^-$. Por definición

$$f_n(1 \otimes w \otimes 1) = \sum_{\substack{\psi \in AP_n \\ L(\psi)\psi R(\psi) = {}^{(n)}wu}} L(\psi) \otimes \psi \otimes R(\psi) f(w^{(m)}),$$

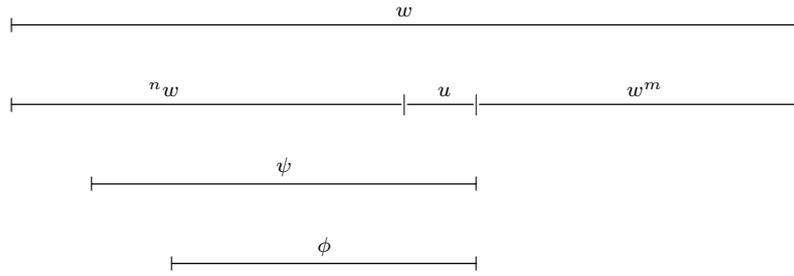
y usando que $Q_1 f(w^{(m)}) \subset I$ tenemos que

$$f_n(1 \otimes w \otimes 1) = \begin{cases} L(\psi) \otimes \psi \otimes f(w^{(m)}), & \text{si existe } \psi \in AP_n \text{ tal que } L(\psi)\psi = {}^{(n)}wu ; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si existe ψ , la condición $Q_1 f(w^{(m)}) \subset I$ implica que

$$\begin{aligned} d_n f_n(1 \otimes w \otimes 1) &= \sum_{\substack{\phi \in AP_{n-1} \\ L(\phi)\phi R(\phi) = \psi}} L(\psi) L(\phi) \otimes \phi \otimes R(\phi) f(w^{(m)}) \\ &= L(\psi) L(\phi) \otimes \phi \otimes f(w^{(m)}) \end{aligned}$$

donde $\phi \in AP_{n-1}$ es tal que $L(\psi)L(\phi)\phi = L(\psi)\psi = {}^{(n)}wu$. Gráficamente



Por otro lado, si $n + m$ es par entonces

$$d_{n+m}(1 \otimes w \otimes 1) = \sum_{\psi' \in \text{Sub}(w)} L(\psi') \otimes \psi' \otimes R(\psi')$$

mientras que si $n + m$ es impar la suma anterior se reduce a dos términos. En cualquiera de los dos casos, si $\psi' \in \text{Sub}(w)$ es tal que $|R(\psi')| > 0$ tenemos que $f(\psi'^{(m)})R(\psi') \subset I$ pues $f(\psi'^{(m)})Q_1 \subset I$. Luego

$$f_{n-1} d_{n+m}(1 \otimes w \otimes 1) = L(\psi') f_{n-1}(1 \otimes \psi' \otimes 1)$$

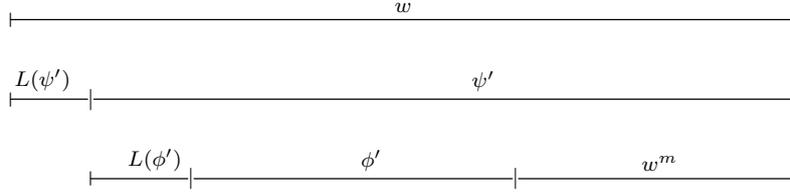
con ψ' tal que $L(\psi')\psi' = w$. Ahora $\psi' = {}^{(n-1)}\psi' u w^{(m)}$ y nuevamente como $Q_1 f(\psi'^{(m)}) \subset I$ usando el mismo argumento del comienzo obtenemos que

$$f_{n-1}(1 \otimes \psi' \otimes 1) = \begin{cases} L(\phi') \otimes \phi' \otimes f(w^{(m)}), & \text{si existe } \phi' \in AP_{n-1} \text{ tal que } L(\phi')\phi' = \psi' ; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si existe ϕ' tenemos que

$$f_{n-1} d_{n+m}(1 \otimes w \otimes 1) = L(\psi') f_{n-1}(1 \otimes \psi' \otimes 1) = L(\psi') L(\phi') \otimes \phi' \otimes f(w^{(m)})$$

donde $L(\psi')L(\phi')\phi' = L(\psi')^{(n-1)}\psi'u = {}^{(n)}wu$. Gráficamente



La igualdad buscada vale pues: si ψ y ϕ' no existen, ambos términos se anulan. Si ψ existe, entonces es claro que ϕ' también existe, en efecto $\phi' = \phi$ y $L(\psi')L(\phi') \otimes \phi' = L(\psi)L(\phi) \otimes \phi$. Finalmente asumamos que no existe $\psi \in AP_n$ tal que $L(\psi)\psi = {}^{(n)}wu$ y que ϕ' existe con $L(\psi')L(\phi') \in \mathcal{P}$. Si n es par, el Lema 3.2.4(i) aplicado sobre ${}^{(n)}w$ y ϕ' dice que $t(p_1) \leq s(\phi')$ y entonces $L(\psi')L(\phi') = 0$. Si n es impar, el Lema 3.2.4(ii) aplicado sobre ${}^{(n-1)}w$ y ϕ' implica la existencia de ψ , una contradicción.

- (ii) Supongamos ahora que $(\rho, \gamma) \in (1, 0)_m^-$. Entonces $\rho = \alpha\hat{\rho} = \alpha\rho_1 \cdots \rho_s$, $\gamma = \alpha\hat{\gamma}$ y $\alpha\rho_1 \in \mathcal{R}$. Como fue observado en el caso anterior, como $f(w^{(m)})Q_1 \subset I$ sólo nos interesa analizar en la suma $d_{n+m}(1 \otimes w \otimes 1)$ el término $L(\psi_1) \otimes \psi_1 \otimes 1$ donde $w = L(\psi_1)\psi_1$. Claramente si $w^{(m)} \neq \rho$ entonces

$$\begin{aligned} f_n(1 \otimes w \otimes 1) &= 0 \quad \text{y} \\ f_{n-1}d_{n+m}(1 \otimes w \otimes 1) &= L(\psi_1)f_{n-1}(1 \otimes \psi_1 \otimes 1) = 0 \end{aligned}$$

pues $f(w^{(m)}) = 0$. Asumamos entonces que $w^{(m)} = \rho$. Así de la descomposición

$${}^{(n-1)}\psi_1 v w^{(m)} = {}^{(n-1)}\psi_1 v \rho$$

tenemos que si n es impar, por la Observación 4.1.4,

$$f_{n-1}d_{n+m}(1 \otimes w \otimes 1) = L(\psi_1) \otimes {}^{(n-1)}\psi_1 \otimes v f(w^{(m)}) = L(\psi_1) \otimes {}^{(n-1)}\psi_1 \otimes v \gamma,$$

y si n es par

$$f_{n-1}d_{n+m}(1 \otimes w \otimes 1) = \sum_{\substack{\phi \in AP_{n-1} \\ L(\phi)\phi R(\phi) = {}^{(n-1)}\psi_1 v}} L(\psi_1)L(\phi) \otimes \phi \otimes R(\phi)\gamma.$$

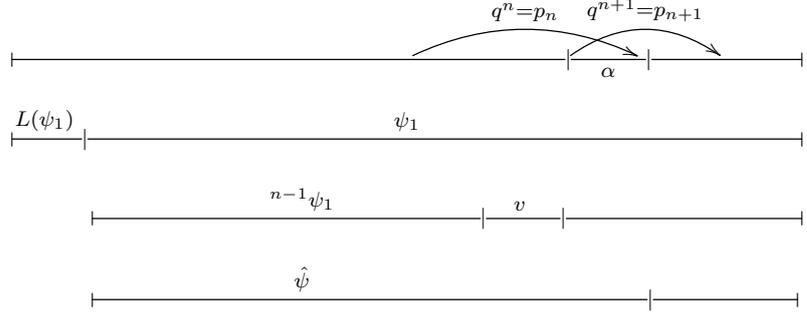
Por otro lado, $w = {}^{(n)}w u$ y $w^{(m)} = {}^{(n)}w u \rho$ y entonces

$$\begin{aligned} f_n(1 \otimes w \otimes 1) &= \sum_{\substack{\psi \in AP_n \\ L(\psi)\psi R(\psi) = {}^{(n)}wu}} L(\psi) \otimes \psi \otimes R(\psi) f(w^{(m)}) \\ &= \sum_{\substack{\psi \in AP_n \\ L(\psi)\psi R(\psi) = {}^{(n)}wu}} L(\psi) \otimes \psi \otimes R(\psi) \alpha\hat{\gamma}. \end{aligned}$$

Como w contiene la relación cuadrática $q^{n+1} = \alpha\rho_1$, por el Lema 4.1.5 tenemos que $q^{n+1} = p_{n+1}$ y $q^n = p_n$, así $t(p_n) = t(\alpha)$ y entonces ${}^{(n)}w u \alpha = {}^{(n+1)}w u$

$$\{\psi \in AP_n, L(\psi)\psi R(\psi) = {}^{(n)}wu\} = \text{Sub}({}^{(n+1)}w) \setminus \{\hat{\psi}\}$$

donde $\hat{\psi} = w^{op}(q^2, \dots, q^n) = {}^{(n-1)}\psi_1 v \alpha$ y ${}^{(n+1)}w = L(\psi_1)\hat{\psi}$. Gráficamente:



Luego

$$f_n(1 \otimes w \otimes 1) = d_{n+1}(1 \otimes {}^{(n+1)}w \otimes 1)\hat{\gamma} - (-1)^{n+1}L(\psi_1) \otimes \hat{\psi} \otimes \hat{\gamma},$$

y entonces

$$d_n f_n(1 \otimes w \otimes 1) = (-1)^n L(\psi_1) d_n(1 \otimes \hat{\psi} \otimes 1)\hat{\gamma}.$$

Si n es impar

$$d_n(1 \otimes \hat{\psi} \otimes 1) = L(\hat{\psi}_1) \otimes \hat{\psi}_1 \otimes 1 - 1 \otimes \hat{\psi}_2 \otimes R(\hat{\psi}_2)$$

y como por el Lema 3.2.8 es $L(\psi_1)L(\hat{\psi}_1) = 0$, tenemos que

$$d_n f_n(1 \otimes w \otimes 1) = L(\psi_1) \otimes \hat{\psi}_2 \otimes R(\hat{\psi}_2)\hat{\gamma} = L(\psi_1) \otimes {}^{(n-1)}\psi_1 \otimes v\gamma$$

pues $\hat{\psi}_2 = {}^{(n-1)}\psi_1$, y por lo tanto $R(\hat{\psi}_2) = v\alpha$.

Si n es par

$$d_n f_n(1 \otimes w \otimes 1) = \sum_{\substack{\phi \in AP_{n-1} \\ L(\phi)\phi R(\phi) = \hat{\psi}}} L(\psi_1)L(\phi) \otimes \phi \otimes R(\phi)\hat{\gamma}$$

y la igualdad buscada vale pues

$$\{\phi \in AP_{n-1} : L(\phi)\phi R(\phi) = {}^{(n-1)}\psi_1 v\} = \{\phi \in AP_{n-1} : L(\phi)\phi R(\phi) = \hat{\psi}\} \setminus \{\hat{\psi}_1\}$$

y como hemos visto en el Lema 3.2.8, $L(\psi_1)L(\hat{\psi}_1) = 0$.

□

Hay pocos ejemplos de álgebras de dimensión global finita tales que la estructura de anillo de $\text{HH}^*(A)$ es no trivial, en efecto, es conocida la conjetura que establece que si $A = kQ/I$ es un álgebra monomial triangular entonces la estructura de anillo $\text{HH}^*(A)$ es trivial. El siguiente teorema prueba que la conjetura es cierta para álgebras de cuerdas triangulares.

Teorema 4.1.7. *Si A es una álgebra de cuerdas triangular, $n, m > 0$, entonces $\text{HH}^n(A) \cup \text{HH}^m(A) = 0$.*

Demostración. Sean $f \in \text{HH}^m(A)$ y $g \in \text{HH}^n(A)$ con representantes elegidos según la Observación 4.1.2 y veamos que $g \cup f = 0$. Sea $w \in AP_{n+m}$, $w = {}^{(n)}w u w^{(m)}$ entonces

$$g \cup f(1 \otimes w \otimes 1) = \sum_{\substack{\psi \in AP_n \\ L(\psi)\psi R(\psi) = {}^{(n)}w u}} L(\psi)g(\psi)R(\psi)f(w^{(m)}).$$

Como $g \in \text{Nu } D_n$ es una combinación de elementos base en ${}^-(0,0)^- \cup (1,0)^{-+}$, $g(\psi)Q_1 \subset \mathcal{I}$ y así la anulación de $L(\psi)g(\psi)R(\psi)f(w^{(m)})$ es clara pues para todo $n, m > 0$ tenemos que $|f(w^{(m)})| > 0$. \square

Calculemos ahora la estructura de álgebra de Lie dada por el corchete de Lie $[-, -]$ en $\text{HH}^*(A)$ en el caso en que A es un álgebra de cuerdas triangular. En particular nos interesa encontrar una fórmula para calcular dicha estructura en términos de caminos visualizados en el carcaj con relaciones de estas álgebras. Según la Sección 3.5.1, para calcular el corchete de Lie sólo es necesario describir la operación bilineal \circ_i .

Si $f \in \text{Hom}_{E-E}(kAP_n, A)$, $g \in \text{Hom}_{E-E}(kAP_m, A)$ y $w \in AP_{n+m-1}$,

$$(f \circ_i g)(w) = F^{n+m-1}(V^n(f) \circ_i V^m(g))(w) = V^n(f) \circ_i V^m(g)(F_{n+m-1}(w))$$

y de acuerdo al Lema 3.5.1

$$\begin{aligned} V^n(f) \circ_i V^m(g)(F_{n+m-1}(w)) &= \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in \mathcal{K}} V^n(f) \circ_i V^m(g)(a_1 \otimes \dots \otimes a_{n+m-1})b \\ &+ V^n(f) \circ_i V^m(g)(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes L(\psi_{n+m-2}) \otimes \psi_{n+m-2}) \\ &= \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in \mathcal{K}} V^n(f)(a_1 \otimes \dots \otimes V^m(g)(a_i \otimes \dots \otimes a_{i+m-1}) \otimes \dots \otimes a_{n+m-1})b \quad (4.1) \\ &+ V^n(f)(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes V^m(g)(L(\psi_i) \otimes \dots \otimes L(\psi_{i+m-1})) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-2}), \quad (4.2) \end{aligned}$$

donde cuando $i = n$ estamos notando $L(\psi_{n+m-1}) = \psi_{n+m-2}$. Como nuestro objetivo es calcular el corchete de Lie en $\text{HH}^*(A)$, comenzaremos usando el Lema 4.1.1 que nos garantiza que si $n \geq 2$ sólo es necesario tomar elementos $f_{(\rho, \gamma)} \in \text{Hom}_{E-E}(AP_n, A)$ con $(\rho, \gamma) \in {}^-(0,0)_n^-, (1,0)_n^{-+}$.

Sea $f_{(\rho, \gamma)}$ con $(\rho, \gamma) \in {}^-(0,0)_n^-$ ó $(1,0)_n^{-+}$ y consideremos los términos de la suma (4.1), que son de la forma

$$V^n(f_{(\rho, \gamma)})(a_1 \otimes \dots \otimes V^m(g)(a_i \otimes \dots \otimes a_{i+m-1}) \otimes \dots \otimes a_{n+m-1})b$$

con $|b| > 0$. Por definición

$$\begin{aligned} &V^n(f_{(\rho, \gamma)})(a_1 \otimes \dots \otimes V^m(g)(a_i \otimes \dots \otimes a_{i+m-1}) \otimes \dots \otimes a_{n+m-1})b \\ &= f_{(\rho, \gamma)}V_n(a_1 \otimes \dots \otimes V^m(g)(a_i \otimes \dots \otimes a_{i+m-1}) \otimes \dots \otimes a_{n+m-1})b, \end{aligned}$$

y como $f_{(\rho,\gamma)}(\rho)Q_1 \subset I$, tenemos que se anulan todos los términos de la suma (4.1). Por lo tanto sólo nos interesa calcular el último término (4.2)

$$V^n(f_{(\rho,\gamma)})(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes V^m(g)(L(\psi_i) \otimes \dots L(\psi_{i+m-1})) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-2}).$$

En el próximo lema estudiamos la no anulación de los morfismos $V^n(f_{(\rho,\gamma)}) \in \text{Hom}_{E-E}(A^{\otimes n}, A)$ con $(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 0)^- \sqcup (1, 0)^+$.

Lema 4.1.8. *Sea $f_{(\rho,\gamma)} \in \text{Hom}_{E-E}(AP_n, A)$ y (v_1, \dots, v_n) una n -upla buena en \mathcal{P}^n .*

- (i) *Si $(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 0)_n^-$ entonces $V^n(f_{(\rho,\gamma)})(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \neq 0$ si y sólo si $v_1 \dots v_n = \rho$, y en este caso $V^n(f_{(\rho,\gamma)})(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \gamma$.*
- (ii) *Si $(\rho, \gamma) \in (1, 0)_n^+$ entonces $V^n(f_{(\rho,\gamma)})(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \neq 0$ si y sólo si $v_1 \dots v_n = b\rho$, con $s(\rho) < t(v_1)$, $b\gamma \in \mathcal{P}$, y en este caso $V^n(f_{(\rho,\gamma)})(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = b\gamma$. Además, si existe $q \in AP_2$ dividiendo a v_1v_2 con $s(q) = s(v_1)$, debe ser $b \in Q_0$.*

Demostración. Si $V^n(f_{(\rho,\gamma)})(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \neq 0$ entonces $\chi(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$. Supongamos que $V_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = \sum_{w \in \chi(v_1, \dots, v_n)} b \otimes w \otimes c$ entonces

$$V^n(f_{(\rho,\gamma)})(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \sum_{w \in \chi(v_1, \dots, v_n)} b f_{(\rho,\gamma)}(w) c = \begin{cases} 0 & \text{si } w \neq \rho \\ b\gamma c & \text{si } w = \rho. \end{cases}$$

Si $(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 0)_n^-$ para que el término anterior sea no nulo debe ser $w = \rho$ y $b\gamma c \neq 0$ lo que implica que $b, c \in Q_0$ y por lo tanto $v_1 \dots v_n = \rho$ y $V^n(f_{(\rho,\gamma)})(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f_{(\rho,\gamma)}(\rho) = \gamma$. Si $(\rho, \gamma) \in (1, 0)_n^+$ debe ser $w = \rho$, $c \in Q_0$, $b\gamma \in \mathcal{P}$ y por lo tanto $v_1 \dots v_n = b\rho$. Luego $V^n(f_{(\rho,\gamma)})(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = b\gamma$. La condición $s(\rho) < t(v_1)$ se desprende inmediatamente de la definición de V_n cuando n es impar, mientras que si n es par por comenzar ρ con una relación cuadrática, esto es, $\rho = \alpha_1 \dots \alpha_s$ y $\alpha_1 \alpha_2 \in \mathcal{R}$, y por ser $v_1 v_2 \in \mathcal{R}$ debe ser $t(\alpha_1) = t(v_1)$ y por lo tanto $s(\rho) = s(\alpha_1) < t(v_1)$. Más aún, tanto para n par o impar, $\alpha_1 \alpha_2$ debe ser la única relación que divide a $v_1 v_2$ y de aquí se deduce que si existe $q \in AP_2$ dividiendo a $v_1 v_2$ con $s(q) = s(v_1)$, entonces $q = \alpha_1 \alpha_2$, $s(\rho) = s(\alpha_1) = s(v_1)$ y $b \in Q_0$. La recíproca es clara. \square

Usando el lema anterior podemos describir la operación bilineal \circ_i entre elementos de $\text{HH}^n(A)$ y $\text{HH}^m(A)$.

Corolario 4.1.9. *Sean $n, m \geq 2$ y sean $f_{(\rho_1, \gamma_1)} \in \text{Nu } D_n$, $g_{(\rho_2, \gamma_2)} \in \text{Nu } D_m$ elegidos según la Observación 4.1.2. Si $w \in AP_{n+m-1}$, entonces*

$$f_{(\rho_1, \gamma_1)} \circ_1 g_{(\rho_2, \gamma_2)}(w) = \begin{cases} b\gamma_1, & \text{si } L(\psi_1) \dots L(\psi_m) = \rho_2 \text{ y} \\ & \gamma_2 L(\psi_{m+1}) \dots \psi_{n+m-2} = b\rho_1, b \in \mathcal{P}; \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y si $i > 1$

$$f_{(\rho_1, \gamma_1)} \circ_i g_{(\rho_2, \gamma_2)}(w) = \begin{cases} \gamma_1, & \text{si } L(\psi_i) \dots L(\psi_{i+m-1}) = \rho_2 \text{ y} \\ & L(\psi_1) \dots L(\psi_{i-1}) \gamma_2 L(\psi_{m+i}) \dots \psi_{n+m-2} = \rho_1; \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $w = w^{op}(q^1, \dots, q^{n+m-2}) \in AP_{n+m-1}$, $\psi_i = w^{op}(q^{i+1}, \dots, q^{n+m-2}) \in AP_{n+m-i-1}$ y $L(\psi_i)$ son los caminos que verifican $w = L(\psi_1)\psi_1$, $\psi_i = L(\psi_{i+1})\psi_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n + m - 3$.

Demostración. Hemos visto que de todos los términos de la suma $f_{(\rho_1, \gamma_1)} \circ_i g_{(\rho_2, \gamma_2)}(w)$ sólo tenemos que estudiar el término (4.2):

$$V^n(f_{(\rho_1, \gamma_1)})(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes V^m(g_{(\rho_2, \gamma_2)})(L(\psi_i) \otimes \dots \otimes L(\psi_{i+m-1})) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-2}).$$

Como q^i divide a $L(\psi_i)L(\psi_{i+1})$ y $s(L(\psi_i)) = s(q^i)$, de acuerdo al lema anterior tenemos que $V^m(g_{(\rho_2, \gamma_2)})(L(\psi_i) \otimes \dots \otimes L(\psi_{i+m-1}))$ será no nulo si y sólo si

$$L(\psi_i) \dots L(\psi_{i+m-1}) = \rho_2$$

obteniendo en este caso que el término (***) será igual a

$$V^n(f_{(\rho_1, \gamma_1)})(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes L(\psi_{i-1}) \otimes \gamma_2 \otimes L(\psi_{m+i}) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-2}). \quad (4.3)$$

Para continuar analizando la no anulación de este último término veamos que la n -upla bien concatenada

$$(L(\psi_1), \dots, L(\psi_{i-1}), \gamma_2, L(\psi_{m+i}), \dots, \psi_{n+m-2}) \in \mathcal{P}^n$$

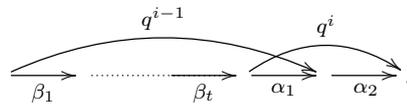
es siempre buena. En efecto, como q^i divide a $L(\psi_i)L(\psi_{i+1})$ para $i = 1, \dots, n + m - 2$, tenemos que $L(\psi_i)L(\psi_{i+1}) \in \mathcal{R}$. Luego sólo nos resta mostrar que

$$L(\psi_{i-1})\gamma_2 \in \mathcal{R}, \quad \text{para } i \geq 2 \quad \text{y} \quad \gamma_2 L(\psi_{m+i}) \in \mathcal{R}, \quad \text{para } i \leq n - 1.$$

Ambas relaciones son claras si $(\rho_2, \gamma_2) \in {}^-(0, 0)_m^-$, mientras que si $(\rho_2, \gamma_2) \in (1, 0)_m^+$ se obtiene rápidamente la segunda de las relaciones. Para ver que $L(\psi_{i-1})\gamma_2 \in \mathcal{R}$ escribamos $(\rho_2, \gamma_2) = (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_s, \alpha_1\gamma'_2)$ donde $\alpha_1\alpha_2$ es la relación cuadrática con que inicia ρ_2 . Como

$$s(\rho_2) = s(L(\psi_i)) = s(q^i)$$

debe ser $q^i = \alpha_1\alpha_2$ entonces $q^{i-1} = \beta_1 \dots \beta_t\alpha_1$ y $L(\psi_{i-1}) = \beta_1 \dots \beta_t$. Así $L(\psi_{i-1})\gamma_2 \in \mathcal{R}$ pues q^{i-1} lo divide. Gráficamente



Así, cuando $i = 1$ el término (4.3) es de la forma

$$V^n(f_{(\rho_1, \gamma_1)})(\gamma_2 \otimes L(\psi_{m+1}) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-2}),$$

y por el Lema 4.1.8 será no nulo si y sólo si $\gamma_2 L(\psi_{m+1}) \dots \psi_{n+m-2} = b\rho_1$ con $b \in \mathcal{P}$ (más aún, $b \in Q_0$ si $(\rho_1, \gamma_1) \in {}^-(0, 0)_n^-$). En este caso

$$V^n(f_{(\rho_1, \gamma_1)})(\gamma_2 \otimes L(\psi_{m+1}) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-2}) = b\gamma_1.$$

Observemos que como

$$L(\psi_{m+1}) \dots \psi_{n+m-2} = w^{op}(q^{m+1}, \dots, q^{n+m-2}) \in AP_{n-1}$$

es un elemento de $\text{Sub}(\rho_1)$ con el mismo final que ρ_1 , tenemos que

$$s(\rho_1) < s(L(\psi_{m+1}) \dots \psi_{n+m-2}) = t(\gamma_2).$$

Si $i > 1$ por el Lema 4.1.8 el término

$$V^n(f_{(\rho_1, \gamma_1)})(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes L(\psi_{i-1}) \otimes \gamma_2 \otimes L(\psi_{m+i}) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-2})$$

será no nulo si y sólo si

$$\rho_1 = L(\psi_1) \dots L(\psi_{i-1}) \gamma_2 L(\psi_{m+i}) \dots \psi_{n+m-2},$$

pues $s(q^1) = s(L(\psi_1))$, y en este caso

$$V^n(f_{(\rho_1, \gamma_1)})(L(\psi_1) \otimes \dots \otimes L(\psi_{i-1}) \otimes \gamma_2 \otimes L(\psi_{m+i}) \otimes \dots \otimes \psi_{n+m-2}) = \gamma_1.$$

□

Por último daremos la descripción de la operación \circ_i en términos de pares de caminos en $(AP_n // \mathcal{P})$. Usando el Lema 4.1.3, podemos considerar las descomposiciones

$$\rho_1 = {}^{(i-1)}\rho_1 a \rho_1^{(n-i)}$$

de

$$\rho_1 = \rho_1(r_1, \dots, r_{n-1}) = \rho_1^{op}(z^1, \dots, z^{n-1}) \in AP_n$$

donde

$${}^{(i-1)}\rho_1 = \begin{cases} e_{s(\rho_1)} \in Q_0, & \text{cuando } i = 1, \\ \text{es la primer flecha de } \rho_1, & \text{si } i = 2, \\ \rho_1(r_1, \dots, r_{i-2}) \in AP_{i-1}, & \text{cuando } 2 < i \leq n. \end{cases}$$

y

$$\rho_1^{(n-i)} = \begin{cases} \rho_1^{op}(z^{i+1}, \dots, z^{n-1}) \in AP_{n-i}, & \text{cuando } 1 \leq i < n-1, \\ \text{es la última flecha de } \rho_1, & \text{si } i = n-1, \\ e_{t(\rho_1)} \in Q_0, & \text{cuando } i = n. \end{cases}$$

Si $i = 1$, del corolario anterior sabemos que para que $f_{(\rho_1, \gamma_1)} \circ_1 g_{(\rho_2, \gamma_2)}(w)$ no se anule debe ser

$$L(\psi_1) \dots L(\psi_m) = \rho_2 \quad \text{y} \quad \gamma_2 L(\psi_{m+1}) \dots \psi_{n+m-2} = b\rho_1 = ba\rho_1^{(n-1)}, \text{ con } b \in \mathcal{P}.$$

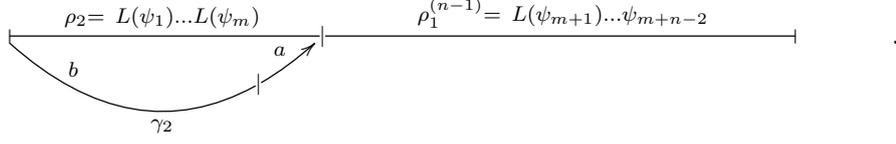
Como $L(\psi_{m+1}) \dots \psi_{n+m-2} \in AP_{n-1}$, la segunda de las igualdades implica que

$$\gamma_2 = ba \quad \text{y} \quad L(\psi_{m+1}) \dots \psi_{n+m-2} = \rho_1^{(n-1)}$$

y como $w = L(\psi_1) \dots L(\psi_m)L(\psi_{m+1}) \dots L(\psi_{n+m-2})\psi_{n+m-2}$ tenemos que

$$w = \rho_2 \rho_1^{(n-1)}.$$

Gráficamente



Cuando $i > 1$, del Corolario 4.1.9 tenemos que $f_{(\rho_1, \gamma_1)} \circ_i g_{(\rho_2, \gamma_2)}(w)$ será no nulo si

$$L(\psi_i) \dots L(\psi_{i+m-1}) = \rho_2 \quad y \quad (4.4)$$

$$L(\psi_1) \dots L(\psi_{i-1}) \gamma_2 L(\psi_{m+i}) \dots \psi_{n+m-2} = \rho_1 =^{(i-1)} \rho_1 a \rho_1^{(n-i)}.$$

Como $L(\psi_{m+i}) \dots \psi_{n+m-2} \in AP_{n-i}$, la segunda de las igualdades implica que

$$L(\psi_1) \dots L(\psi_{i-1}) \gamma_2 =^{(i-1)} \rho_1 a \quad y \quad L(\psi_{m+i}) \dots \psi_{n+m-2} = \rho_1^{(n-i)}. \quad (4.5)$$

Veamos que $^{(i-1)} \rho_1$ divide a $L(\psi_1) \dots L(\psi_{i-1})$. Sea $^{(i-1)} w$ la concatenación correspondiente a la descomposición de w , esto es, $^{(i-1)} w = w(p_1, \dots, p_{i-2}) \in AP_{i-1}$. Es claro que como $s(^{(i-1)} w) = s(L(\psi_1)) = s(^{(i-1)} \rho_1)$ tenemos que $^{(i-1)} w = ^{(i-1)} \rho_1$. Usando las desigualdades (1.4) del Lema 1.5.4 y la construcción de q^{i-2} tenemos que

$$t(p_{i-2}) \leq t(q^{i-2}) \leq s(q^i)$$

y por lo tanto

$$t(^{(i-1)} \rho_1) = t(p_{i-2}) \leq s(q^i) = s(L(\psi_i)) = t(L(\psi_{i-1})).$$

Así

$$L(\psi_1) \dots L(\psi_{i-1}) = ^{(i-1)} \rho_1 c, \quad \text{con } c \in \mathcal{P} \quad (4.6)$$

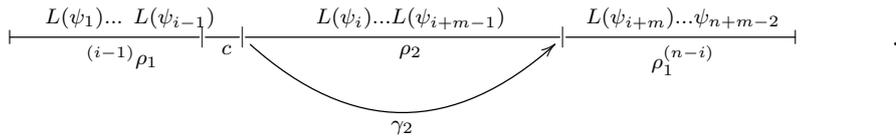
y por (4.5) debe ser $c \gamma_2 = a$. Por último como

$$w = L(\psi_1) \dots L(\psi_{i-1}) L(\psi_i) \dots L(\psi_{i+m-1}) L(\psi_{i+m}) \dots \psi_{n+m-2}$$

de (4.4), (4.5) y (4.6) tenemos que

$$w = ^{(i-1)} \rho_1 c \rho_2 \rho_1^{(n-i)}.$$

Gráficamente



Esta caracterización a partir de pares de caminos paralelos junto al Corolario 4.1.9 nos permiten obtener la siguiente descripción de la operación \circ_i entre elementos de $\text{HH}^n(A)$ y $\text{HH}^m(A)$ a partir de caminos visualizados en el carcaj asociado al álgebra A .

Teorema 4.1.10. Sean $n, m \geq 2$, $(\rho_1, \gamma_1) \in {}^-(0, 0)_n^- \sqcup (1, 0)_n^{-+}$ y $(\rho_2, \gamma_2) \in {}^-(0, 0)_m^- \sqcup (1, 0)_m^{-+}$. Consideremos la descomposición $\rho_1 = {}^{(i-1)}\rho_1 a \rho_1^{(n-i)}$. Entonces $(\rho_1, \gamma_1) \circ_i (\rho_2, \gamma_2)$ es no nula si y sólo si

(a) $i = 1$, $\gamma_2 = ba$, $\rho_2 \rho_1^{(n-1)} \in AP_{n+m-1}$ y $b\gamma_1 \in \mathcal{P}$. En este caso,

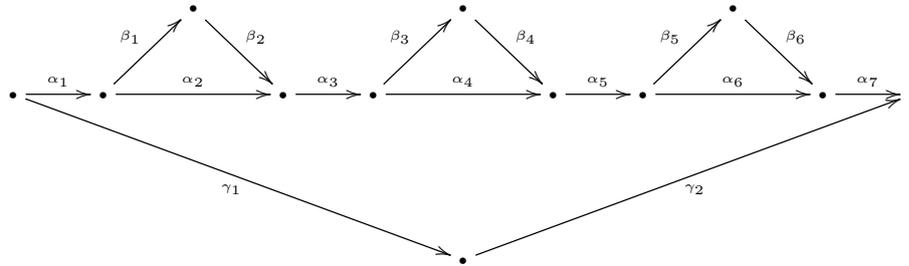
$$(a\rho_1^{(n-1)}, \gamma_1) \circ_1 (\rho_2, ba) = (\rho_2 \rho_1^{(n-1)}, b\gamma_1);$$

(b) $i > 1$, $a = c\gamma_2$ y ${}^{(i-1)}\rho_1 c \rho_2 \rho_1^{(n-i)} \in AP_{n+m-1}$. En este caso,

$$({}^{(i-1)}\rho_1 c \rho_2 \rho_1^{(n-i)}, \gamma_1) \circ_i (\rho_2, \gamma_2) = ({}^{(i-1)}\rho_1 c \rho_2 \rho_1^{(n-i)}, \gamma_1).$$

Observación 4.1.11. No hemos incluido en nuestros resultados los casos en que $n = 1$ ó $m = 1$. Por el Lema 2.2.2 sabemos que si el elemento base $f_{(\rho, \gamma)} \in \text{Nu } D_2$ debe ser $(\rho, \gamma) \in {}^-(0, 0)_1^-$ ó $(\rho, \gamma) \in (1, 1)_1$. Ya hemos hecho el análisis para los elementos base del primer tipo. Si $(\rho, \gamma) \in (1, 1)_1$ entonces $(\rho, \gamma) = (\alpha, \alpha) \in (Q_1//Q_1)$ y este caso fue analizado en la Sección 3.5.2.

Ejemplo 4.1.12. Sea $A = kQ/I$ el álgebra de cuerdas dada por el siguiente carcaj Q :



donde $I = \langle \alpha_{2j-1}\alpha_{2j}\alpha_{2j+1}, \beta_{2j-1}\beta_{2j}, \alpha_{2j-1}\beta_{2j-1}, \beta_{2j}\alpha_{2j+1} \rangle_{\{j=1,2,3\}}$.

Tenemos los elementos base:

$$\begin{aligned} {}^-(0, 0)_4^- &= \{ (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \} \\ {}^-(0, 0)_6^- &= \{ (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2), (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2), \\ &\quad (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \} \\ {}^-(0, 0)_8^- &= \{ (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2), (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2), \\ &\quad (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \} \\ {}^-(0, 0)_{10}^- &= \{ (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \} \\ (1, 0)_3^+ &= \{ (\alpha_1\beta_1\beta_2, \alpha_1\alpha_2), (\alpha_3\beta_3\beta_4, \alpha_3\alpha_4), (\alpha_5\beta_5\beta_6, \alpha_5\alpha_6) \}. \end{aligned}$$

En este caso las operaciones bilineales \circ_i no nulas son:

$$\begin{aligned}
(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_1 (\alpha_1\beta_1\beta_2, \alpha_1\alpha_2) &= (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_2 (\alpha_3\beta_3\beta_4, \alpha_3\alpha_4) &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_3 (\alpha_5\beta_5\beta_6, \alpha_5\alpha_6) &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
\\
(\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_4 (\alpha_3\beta_3\beta_4, \alpha_3\alpha_4) &= (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_1 (\alpha_1\beta_1\beta_2, \alpha_1\alpha_2) &= (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
(\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_5 (\alpha_5\beta_5\beta_6, \alpha_5\alpha_6) &= (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_1 (\alpha_1\beta_1\beta_2, \alpha_1\alpha_2) &= (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_5 (\alpha_5\beta_5\beta_6, \alpha_5\alpha_6) &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_2 (\alpha_3\beta_3\beta_4, \alpha_3\alpha_4) &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
\\
(\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_7 (\alpha_5\beta_5\beta_6, \alpha_5\alpha_6) &= (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
(\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_4 (\alpha_3\beta_3\beta_4, \alpha_3\alpha_4) &= (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \\
(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2) \circ_1 (\alpha_1\beta_1\beta_2, \alpha_1\alpha_2) &= (\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3\beta_3\beta_4\alpha_5\beta_5\beta_6\alpha_7, \gamma_1\gamma_2).
\end{aligned}$$

Usando las dimensiones de los grupos de cohomología obtenidas en el Teorema 2.2.4 (y de acuerdo al Lema 2.2.2(d), que nos dice que $|(1, 0)_n^{-+}| = |^{-+}(0, 1)_n|$) podemos ver que

$$[\mathrm{HH}^n(A), \mathrm{HH}^m(A)] = \mathrm{HH}^{n+m-1}(A).$$

4.2. Álgebras de cuerdas cuadráticas

En esta sección calcularemos el producto cup y el corchete de Lie sobre la cohomología de Hochschild en el caso de álgebras de cuerdas cuadráticas y hallaremos condiciones sobre el carcaj asociado a estas álgebras con el objetivo de obtener estructuras no triviales.

La técnica usada para definir los productos \cup y $[-, -]$ utilizando la resolución minimal de Bardzell se hará por medio de los morfismos de comparación entre dicha resolución y la resolución bar definidos en la Sección 3.5.1.

4.2.1. Los morfismos de comparación

Comenzaremos describiendo los morfismos de comparación construidos en las Secciones 3.3 y 3.4 en el caso particular de álgebras cuadráticas.

Recordemos que un álgebra A es cuadrática si es de la forma $A = kQ/I$, con I un ideal admisible generado por caminos de longitud 2. Como fue indicado en la Sección 2.3, los espacios vectoriales kAP_n usados para construir los A -bimódulos proyectivos $A \otimes kAP_n \otimes A$ en la resolución de Bardzell tienen la siguiente descripción:

$$AP_n = \{\alpha_1 \dots \alpha_n : \alpha_i \alpha_{i+1} \in I, 1 \leq i < n\}, n \geq 2.$$

Para la definición del morfismo $\mathbf{F} : \mathbf{Ap} \rightarrow \mathbf{Bar}$ necesitamos analizar los conjuntos $\text{Sub}(w)$ para $w \in AP_n$, $n \geq 2$. Si $w = \alpha_1 \dots \alpha_n$ entonces

$$\text{Sub}(w) = \{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}, \alpha_2 \dots \alpha_n\}$$

luego en este caso

$$F_n(1 \otimes \alpha_1 \dots \alpha_n \otimes 1) = 1 \otimes \alpha_1 F_{n-1}(1 \otimes \alpha_2 \dots \alpha_n \otimes 1).$$

Tenemos así que

$$\begin{aligned} F_0(1 \otimes e \otimes 1) &= e \otimes 1 \\ F_1(1 \otimes \alpha \otimes 1) &= 1 \otimes \alpha \otimes 1 \\ F_2(1 \otimes \alpha_1 \alpha_2 \otimes 1) &= 1 \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes 1 \end{aligned}$$

y de manera inductiva

$$F_n(1 \otimes \alpha_1 \dots \alpha_n \otimes 1) = 1 \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n \otimes 1, \quad \text{si } n \geq 2.$$

Para la definición del morfismo $\mathbf{V} : \mathbf{Bar} \rightarrow \mathbf{Ap}$, (recuérdese que habíamos notado al morfismo \mathbf{V} cuando pensábamos al morfismo \mathbf{G} sobre la resolución \mathbf{Bar}) considerábamos n -uplas (v_1, \dots, v_n) bien concatenadas en \mathcal{P}^n . Distinguíamos estas n -uplas en malas ó buenas, y en este último caso analizábamos el conjunto $\chi(v_1, \dots, v_n)$.

El siguiente lema describe las n -uplas (v_1, \dots, v_n) bien concatenadas de elementos en \mathcal{P}^n tales que $\chi(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$.

Lema 4.2.1. *Si $w = \alpha_1 \dots \alpha_n \in \chi(v_1, \dots, v_n)$ entonces $v_1 = a_1 \alpha_1, v_n = \alpha_n b_n$ y $v_i = \alpha_i$ para todo $i = 2, \dots, n-1$, donde $a_1, b_n \in \mathcal{P}$.*

Demostración. Como $\alpha_i \alpha_{i+1} \in \mathcal{R}$, es claro que ninguna de estas relaciones puede dividir a v_j pues los caminos $v_j \in \mathcal{P}$. Luego el lema sigue de observar que $\alpha_1 \dots \alpha_n$ divide a $v_1 \dots v_n$. \square

Corolario 4.2.2. *Sea (v_1, \dots, v_n) una n -upla bien concatenada en \mathcal{P}^n . Entonces $V_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \neq 0$ si y sólo si $v_1 = a_1 \alpha_1, v_n = \alpha_n b_n$ y $\alpha_1 v_2 \dots v_{n-1} \alpha_n \in AP_n$, donde $\alpha_1, \alpha_n \in Q_1$ y $a_1, b_n \in \mathcal{P}$.*

Demostración. Si $V_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) \neq 0$, por definición (v_1, \dots, v_n) es una n -upla buena y $\chi(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$. Luego el resultado sigue del lema anterior. Recíprocamente, es inmediato que

$$\chi(v_1, \dots, v_n) = \{\alpha_1 v_2 \dots v_{n-1} \alpha_n\}$$

y en este caso es $V_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) = a_1 \otimes \alpha_1 v_2 \dots v_{n-1} \alpha_n \otimes b_n \neq 0$. \square

Como consecuencia del lema anterior tenemos que la definición del morfismo \mathbf{V} es:

$$\begin{aligned} V_0(1 \otimes 1) &= 1 \otimes 1 \otimes 1 = \sum_{i \in Q_0} 1 \otimes e_i \otimes 1 \\ V_1(1 \otimes \gamma \otimes 1) &= \begin{cases} 0 & \text{si } |\gamma| = 0 \\ \sum_{i=1}^s \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \dots \alpha_s & \text{si } \gamma = \alpha_1 \dots \alpha_s \end{cases} \\ V_n(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes 1) &= \begin{cases} a_1 \otimes \alpha_1 v_2 \dots v_{n-1} \alpha_n \otimes b_n & \text{si } v_1 = a_1 \alpha_1, v_n = \alpha_n b_n \\ & \text{y } \alpha_1 v_2 \dots v_{n-1} \alpha_n \in AP_n, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

4.2.2. Descripción del producto cup y del corchete de Lie

En esta sección, utilizando el morfismo de comparación para álgebras cuadráticas, describiremos el producto cup y el corchete de Lie en la resolución de Bardzell, y como

$$\begin{aligned} D^{n+m+1}(f \cup g) &= (D^{n+1}f) \cup g + (-1)^n f \cup (D^{m+1}g) \\ D^{n+m}[f, g] &= [f, D^{m+1}g] + (-1)^{m-1}[D^{n+1}f, g] \end{aligned}$$

tendremos productos inducidos \cup y $[-, -]$ en la cohomología $\mathrm{HH}^*(A)$. De acuerdo a la Sección 3.5.1, dados $f \in \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_n, A)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_m, A)$,

$$f \cup g \in \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_{n+m}, A) \quad \text{y} \quad f \circ_i g \in \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_{n+m-1}, A), 1 \leq i \leq n$$

están definidos por

$$f \cup g = F^{n+m}(V^n(f) \cup V^m(g)) \quad \text{y} \quad f \circ_i g = F^{m+n-1}(V^n(f) \circ_i V^m(g)).$$

Tenemos así la definición del producto cup y del corchete de Lie en el complejo de Bardzell:

$$f \cup g(\alpha_1 \cdots \alpha_{n+m}) = f(\alpha_1 \cdots \alpha_n)g(\alpha_{n+1} \cdots \alpha_{n+m})$$

y, si $g \in \mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_m, A)$ es un elemento base, esto es, $g = g_{(\rho, \gamma)}$ con

$$g_{(\rho, \gamma)}(w) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } w = \rho; \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \text{entonces}$$

$$\begin{aligned} f \circ_1 g(\alpha_1 \cdots \alpha_{n+m-1}) &= \mu f(\beta \alpha_{m+1} \cdots \alpha_{n+m-1}) && \text{si } g(\alpha_1 \cdots \alpha_m) = \mu \beta \in \mathcal{P}_2 \\ & && \text{y } \beta \alpha_{m+1} \in I, \\ f \circ_n g(\alpha_1 \cdots \alpha_{n+m-1}) &= f(\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \beta) \mu && \text{si } g(\alpha_n \cdots \alpha_{n+m-1}) = \beta \mu \in \mathcal{P}_2 \\ & && \text{y } \alpha_{n-1} \beta \in I, \\ f \circ_i g(\alpha_1 \cdots \alpha_{n+m-1}) &= f(\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \beta \alpha_{i+m} \cdots \alpha_{n+m-1}) && \text{si } g(\alpha_i \cdots \alpha_{i+m-1}) = \beta \in Q_1 \\ & && \text{y } \beta \alpha_{i+m}, \alpha_{i-1} \beta \in I \end{aligned}$$

y cero en caso contrario.

Nos será muy útil, a la hora de describir estas estructuras, dar su definición a partir de pares de caminos paralelos visualizados en el carcaj con relaciones asociados a estas álgebras. Para esto usaremos la identificación $\mathrm{Hom}_{E-E}(kAP_{m+n}, A) \simeq k(AP_{m+n} // \mathcal{P})$ dada por

$$f_{(\rho, \gamma)} \longleftrightarrow (\rho, \gamma),$$

entonces tenemos que, dada $(\rho, \gamma) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n, \gamma) \in (AP_n // \mathcal{P})$, $(\rho', \gamma') = (\beta_1 \cdots \beta_m, \gamma') \in (AP_m // \mathcal{P})$, vale

$$\begin{aligned} (\rho, \gamma) \cup (\rho', \gamma') &= (\rho \rho', \gamma \gamma') \\ (\rho, \gamma) \circ_i (\rho', \gamma') &= 0 \quad \text{si } \gamma' \in Q_0. \end{aligned}$$

$$\text{Si } \gamma' \in Q_1, (\rho, \gamma) \circ_i (\rho', \gamma') = \begin{cases} (\rho_1 \rho' \rho_2, \gamma) & \text{si } \rho = \rho_1 \gamma' \rho_2, \rho_1 \in AP_{i-1}, \rho_2 \in AP_{n-i} \\ & \text{y } \rho_1 \rho' \rho_2 \in AP_{n+m-1}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si $\gamma' \in \mathcal{P}_2$, y $\gamma' = \mu \beta = \beta' \mu'$, $\beta, \beta' \in Q_1$, entonces

$$\begin{aligned} (\rho, \gamma) \circ_1 (\rho', \gamma') &= (\rho' \alpha_2 \cdots \alpha_n, \mu \gamma) && \text{si } \alpha_1 = \beta \text{ y } \rho' \alpha_2 \cdots \alpha_n \in AP_{n+m-1}, \\ (\rho, \gamma) \circ_n (\rho', \gamma') &= (\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \rho', \gamma \mu') && \text{si } \alpha_n = \beta' \text{ y } \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \rho' \in AP_{n+m-1} \end{aligned}$$

y cero en todos los demás casos.

4.2.3. Estructuras no triviales

Nuestro objetivo es ahora describir el producto cup y el corchete de Lie definido en la sección anterior. Particularmente nos interesa hallar condiciones sobre el carcaj asociado a estas álgebras con el propósito de obtener estructuras no triviales. Para esto necesitaremos todas las cuentas y notaciones hechas en la Sección 2.3. Las definiciones de los conjuntos de pares gentiles \mathcal{G}_n y pares vacíos \mathcal{E}_n dadas en 2.3.4 serán elementales para nuestro objetivo. La siguiente observación nos será muy necesaria para la descripción del producto cup y el corchete de Lie.

Observación 4.2.3. Cada $f = \sum_i \lambda_i(\rho_i, \gamma_i)$ en $\text{HH}^n(A)$ puede ser escrita como $f = f_1 + f_2$ con

$$f_1 = \sum_{|\gamma_i|=0} \lambda_i(\rho_i, \gamma_i) \in \text{Nu } D_{n+1}^0, \quad f_2 = \sum_{|\gamma_i|>0} \lambda_i(\rho_i, \gamma_i) \in \text{Nu } D_{n+1}^1$$

Además de los lemas 2.3.1 y 2.3.6 tenemos que $f_1 \in k(\mathcal{E}_n \sqcup \mathcal{G}_n)$ y

$$f_2 \in k((0,0)_n^- \sqcup (1,0)_n^- \sqcup (0,1)_n \sqcup (1,1)_n \sqcup (id + (-1)^n \phi_n)((1,0)_n^+)).$$

Comencemos describiendo el producto cup.

Teorema 4.2.4. Sea $A = kQ/I$ un álgebra de cuerdas cuadráticas, $n, m > 0$. Si $\mathcal{G}_n = \emptyset = \mathcal{G}_m$ entonces $\text{HH}^n(A) \cup \text{HH}^m(A) = 0$.

Demostración. Sea $f = f_1 + f_2 \in \text{HH}^n(A)$, $g = g_1 + g_2 \in \text{HH}^m(A)$ con $f_1 \in \text{Nu } D_{n+1}^0$, $f_2 \in \text{Nu } D_{n+1}^1$, $g_1 \in \text{Nu } D_{m+1}^0$, $g_2 \in \text{Nu } D_{m+1}^1$. Debemos mostrar que, para cualquier $i, j = 1, 2$,

$$f_i \cup g_j = f_i \cup g_j = 0 \quad \text{en } \text{HH}^{n+m}(A).$$

La hipótesis $\mathcal{G}_n = \emptyset$ junto al Lema 2.3.6 implica que $f_1 = \sum_i \lambda_i(\rho_i, \gamma_i) \in k(\mathcal{E}_n)$, luego para cualquier $(\rho', \gamma') \in (AP_m // \mathcal{P})$ tenemos que

$$(\rho_i, \gamma_i) \cup (\rho', \gamma') = 0$$

pues $\rho_i \rho' \notin AP_{n+m}$. Así $f_1 \cup g_j = 0$. Similarmente, $f_i \cup g_1 = 0$. Finalmente consideremos $f_2 \cup g_2$ donde

$$f_2 = \sum_i \mu_i(\rho_i, \gamma_i) \in \text{Nu } D_{n+1}^1, \quad g_2 = \sum_j \mu'_j(\rho'_j, \gamma'_j) \in \text{Nu } D_{m+1}^1.$$

Recordemos que

$$^-(0,0)_n^- \sqcup (1,0)_n^- \sqcup (0,1)_n \sqcup (1,1)_n \sqcup (id + (-1)^n \phi_n)((1,0)_n^+)$$

es base de $\text{Nu } D_{n+1}^1$ y observemos que $f_2 \cup g_2 \in \text{Nu } D_{n+m+1}^1 \cap k(AP_{n+m} // \mathcal{P}_2)$. Si $(\rho_i, \gamma_i) \in ^-(0,0)_n^-$ ó $(\rho'_j, \gamma'_j) \in ^-(0,0)_m^-$ entonces $\gamma_i \gamma'_j \in I$ y así $(\rho_i \rho'_j, \gamma_j \gamma'_j) = 0$. Si $(\rho_i, \gamma_i) \in ^-(0,1)_n$ y $(\rho'_j, \gamma'_j) \in (1,0)_m^-$ tenemos que

$$(\rho_i, \gamma_j) = (\hat{\rho}_i \alpha_1, \hat{\gamma}_i \alpha_1) \quad \text{y} \quad (\rho'_j, \gamma'_j) = (\alpha_2 \hat{\rho}'_j, \alpha_2 \hat{\gamma}'_j)$$

con $\alpha_1, \alpha_2 \in Q_1$. Entonces $(\rho_i \rho'_j, \gamma_i \gamma'_j) = (\hat{\rho}_i \alpha_1 \alpha_2 \hat{\rho}'_j, \hat{\gamma}_i \alpha_1 \alpha_2 \hat{\gamma}'_j) = 0$ pues $\alpha_1 \alpha_2 \in I$ ó $\hat{\rho}_i \alpha_1 \alpha_2 \hat{\rho}'_j \notin AP_{n+m}$. En todos los demás casos $(\rho_i \rho'_j, \gamma_i \gamma'_j) \notin ^-(0,0)_{n+m}^-$, y el resultado buscado sigue de la Proposición 2.3.16. \square

Observación 4.2.5. *En el caso particular de que A sea un álgebra de cuerdas cuadrática y triangular, será $\mathcal{G}_n = \emptyset = \mathcal{G}_m$ para $n, m > 0$. Así obtenemos el resultado de Juan Carlos Bustamente dado en [Bu, Teorema 3.1].*

Corolario 4.2.6. *Sea $A = kQ/I$ un álgebra de cuerdas cuadráticas, $\text{car } k \neq 2$. Entonces $\text{HH}^n(A) \cup \text{HH}^m(A) = 0$ para cualquier $n, m > 0$ números naturales impares.*

Demostración. La afirmación sigue de la proposición anterior, pues como n es impar tenemos que $\text{Nu } D_{n+1}^0 = k\mathcal{E}_n$ y entonces la hipótesis $\mathcal{G}_n = \emptyset$ es superflua en este caso. \square

Teorema 4.2.7. *Sea $A = kQ/I$ un álgebra de cuerdas cuadráticas y $\mathcal{G}_n \neq \emptyset$ para algún $n > 0$. Entonces el producto cup definido en $\text{HH}^*(A)$ es no trivial. Más precisamente,*

- (i) *si n es par y $\text{car } k \neq 2$, $\text{HH}^{s_1 n}(A) \cup \text{HH}^{s_2 n}(A) \neq 0$;*
- (ii) *si n es impar y $\text{car } k \neq 2$, $\text{HH}^{2s_1 n}(A) \cup \text{HH}^{2s_2 n}(A) \neq 0$;*
- (iii) *si $\text{car } k = 2$, $\text{HH}^{s_1 n}(A) \cup \text{HH}^{s_2 n}(A) \neq 0$*

para cualquier $s_1, s_2 \geq 1$.

Demostración. Por hipótesis existe $\omega = (\alpha_1 \cdots \alpha_n, e) \in \mathcal{G}_n$. Si este elemento tiene orden k y $\text{car } k = 2$ ó $\text{car } k \neq 2$ y n es par, vimos en la demostración del Lema 2.3.6 que

$$N(\omega) = N(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e) = \sum_{i=0}^{k-1} t^i(\alpha_1 \cdots \alpha_n, e) \in \text{Nu } D_{n+1}^0.$$

Además, para todo $s \geq 1$, el elemento $\omega^s = ((\alpha_1 \cdots \alpha_n)^s, e)$ perteneciente a \mathcal{G}_{sn} tiene orden k y

$$N(\omega^s) = N((\alpha_1 \cdots \alpha_n)^s, e) = \sum_{i=0}^{k-1} t^i((\alpha_1 \cdots \alpha_n)^s, e) \in \text{Nu } D_{sn+1}^0.$$

El elemento $N(\omega^s)$ no es cero en $\text{HH}^{sn}(A)$ pues $\text{Im } D_{sn} \subseteq k(AP_{sn}/\mathcal{P}_1)$. Para cualquier $s_1, s_2 \geq 1$ y $0 \leq i, j < k$, tenemos que

$$t^i(\omega^{s_1}) \cup t^j(\omega^{s_2}) = \delta_{ij} t^i(\omega^{s_1+s_2})$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker. Entonces

$$N(\omega^{s_1}) \cup N(\omega^{s_2}) = N(\omega^{s_1+s_2})$$

y así

$$\text{HH}^{s_1 n}(A) \cup \text{HH}^{s_2 n}(A) \neq (0).$$

Si n es impar y $\text{car } k \neq 2$, consideramos los elementos ω^{2s} y tenemos que

$$\text{HH}^{2s_1 n}(A) \cup \text{HH}^{2s_2 n}(A) \neq (0)$$

para cualquier $s_1, s_2 \geq 1$. \square

Describiremos ahora el corchete de Lie en álgebras de cuerdas cuadráticas. Al igual que con el producto cup, nuestro objetivo es encontrar condiciones sobre esta familia de álgebras de manera que este producto sea no trivial. Para tal descripción necesitaremos considerar la familia de álgebras gentiles.

Lema 4.2.8. *Sea $A = kQ/I$ un álgebra gentil, $n, m > 1$ y $g \in {}^-(0, 0)_m^-$. Entonces $f \circ g = 0$ para cualquier $f \in (AP_n//\mathcal{P})$.*

Demostración. Como $f \circ g = \sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} f \circ_i g$, es suficiente calcular $f \circ_i g$ para cada i con $1 \leq i \leq n$. Sea $g = (\rho, \gamma) = (\beta_1 \cdots \beta_m, \gamma)$, con $\gamma = \mu\gamma' = \gamma''\nu$, $\mu, \nu \in Q_1$, $\beta_1 \neq \mu$ y $\beta_m \neq \nu$ y sea $f = (\alpha_1 \cdots \alpha_n, \delta) \in (AP_n//\mathcal{P})$. Si fuera $f \circ_i g$ distinto de cero, implicaría que

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \beta_1 \cdots \beta_m \alpha_{i+1} \cdots \alpha_n \in AP_{n+m-1} \text{ y } \alpha_i = \mu$$

ó

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \beta_1 \cdots \beta_m \alpha_{i+1} \cdots \alpha_n \in AP_{n+m-1} \text{ y } \alpha_i = \nu.$$

En este caso

$$\alpha_{i-1} \beta_1 \in I \text{ y } \alpha_{i-1} \mu \in I$$

ó

$$\beta_m \alpha_{i+1} \in I \text{ y } \nu \alpha_{i+1} \in I.$$

Pero $\beta_1 \neq \mu$, $\beta_m \neq \nu$ y por hipótesis A es gentil. Esto es una contradicción. \square

Teorema 4.2.9. *Si $A = kQ/I$ es un álgebra gentil, $n, m > 1$, y $\mathcal{G}_{n-1} = \emptyset = \mathcal{G}_{m-1}$ entonces $[\text{HH}^n(A), \text{HH}^m(A)] = 0$.*

Demostración. Sea $f = f_1 + f_2 \in \text{HH}^n(A)$, $g = g_1 + g_2 \in \text{HH}^m(A)$, con $f_1 \in \text{Nu } D_{n+1}^0$, $f_2 \in \text{Nu } D_{n+1}^1$, $g_1 \in \text{Nu } D_{m+1}^0$, $g_2 \in \text{Nu } D_{m+1}^1$. Debemos mostrar que $[f_i, g_j] = 0$ en $\text{HH}^{n+m-1}(A)$ para cualquier i, j . Como $f_1 \in k(AP_n//Q_0)$ y $g_1 \in k(AP_m//Q_0)$, es claro que $f_i \circ g_1 = 0 = g_i \circ f_1$ para cualquier i . La afirmación es clara si $f_2 = 0 = g_2$ en $\text{HH}^*(A)$. Si $f_2 \neq 0$ en $\text{HH}^m(A)$, por el Corolario 2.3.18 podemos asumir que el representante f_2 pertenece a $k({}^-(0, 0)_n^-)$. En este caso el Lema 4.2.8 implica que $g_i \circ f_2 = 0$ para cualquier i . El caso $g_2 \neq 0$ en $\text{HH}^m(A)$ es análogo. \square

Observación 4.2.10. *En el caso particular de que A sea un álgebra de cuerdas cuadrática triangular, será $\mathcal{G}_{n-1} = \emptyset = \mathcal{G}_{m-1}$ para $n, m > 1$. Así obtenemos el resultado de Juan Carlos Bustamente dado en [Bu, Teorema 3.2].*

Corolario 4.2.11. *Sea $A = kQ/I$ un álgebra gentil, $\text{car } k \neq 2$. Entonces*

$$[\text{HH}^{n+1}(A), \text{HH}^{m+1}(A)] = 0$$

para cualquier $n, m \geq 1$ número naturales impares.

Demostración. De la demostración previa y la Proposición 2.3.17 se deduce que sólo debemos considerar el caso $f_2 \in k(1, 1)_{n+1} \cap k(AP_{n+1}//Q_1)$ y $g_2 \in k(1, 1)_{m+1} \cap k(AP_{m+1}//Q_1)$. Como A es gentil $(1, 1)_{2s} \cap (AP_{2s}//Q_1) = (1, 1)_{2s}^{\mathcal{G}}$, y la demostración de la Proposición 2.3.6 nos muestra que $k(1, 1)_{2s}^{\mathcal{G}} = \text{Im } U_{2s}^2 \subset \text{Im } D_{2s}$, así $f_2 = 0$ y $g_2 = 0$ en $\text{HH}^*(A)$ en este caso. \square

Teorema 4.2.12. Sea $\text{car } k = 0$ y $A = kQ/I$ un álgebra gentil tal que $\mathcal{G}_n \neq \emptyset$ para algún $n > 0$. Entonces el corchete de Lie definido en $\text{HH}^*(A)$ es no trivial. Más precisamente,

(i) si n es par, $[\text{HH}^{s_1 n+1}(A), \text{HH}^{s_2 n+1}(A)] \neq 0$;

(ii) si n es impar, $[\text{HH}^{2s_1 n+1}(A), \text{HH}^{2s_2 n+1}(A)] \neq 0$

para cualquier $s_1, s_2 \geq 1$, $s_1 \neq s_2$.

Demostración. Por hipótesis existe $\omega = (\alpha_1 \cdots \alpha_n, e) \in \mathcal{G}_n$; sea k el orden de este elemento. Del Lema 2.3.1 tenemos que

$$\psi(\omega) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_1, \alpha_1) \in \text{Nu } D_{n+2}^1$$

pues $(\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_1, \alpha_1) \in (1, 1)_{n+1}$. Además, para cualquier $s \geq 1$, el elemento

$$\omega^s = ((\alpha_1 \cdots \alpha_n)^s, e) \in \mathcal{G}_{sn}$$

tiene orden k y

$$\psi(\omega^s) = ((\alpha_1 \cdots \alpha_n)^s \alpha_1, \alpha_1) \in \text{Nu } D_{sn+2}^1.$$

Si n es par, el elemento $\psi(\omega^s)$ no es cero en $\text{HH}^{sn+1}(A)$, pues vimos en la demostración del Lema 2.3.6 que $\psi(\omega^s) \in \text{Im } D_{sn+1}$ si y sólo si $\omega^s \in \text{Im}(1-t)$. Pero $\text{Im}(1-t) = \text{Nu } N$ y $\omega^s \notin \text{Nu } N$. Para cualquier $s_1, s_2 \geq 1$, tenemos que

$$\psi(\omega^{s_1}) \circ_i \psi(\omega^{s_2}) = \begin{cases} \psi(\omega^{s_1+s_2}), & \text{si } i = lk + 1, \text{ para } l = 0, \dots, s_1 \frac{n}{k}; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \psi(\omega^{s_1}) \circ \psi(\omega^{s_2}) &= \sum_{i=1}^{s_1 n+1} (-1)^{(i-1)(s_2 n)} \psi(\omega^{s_1}) \circ_i \psi(\omega^{s_2}) = \sum_{l=0}^{s_1 \frac{n}{k}} (-1)^{(lk)(s_2 n)} \psi(\omega^{s_1+s_2}) \\ &= (s_1 \frac{n}{k} + 1) \psi(\omega^{s_1+s_2}) \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} [\psi(\omega^{s_1}), \psi(\omega^{s_2})] &= \psi(\omega^{s_1}) \circ \psi(\omega^{s_2}) - (-1)^{(s_1 n)(s_2 n)} \psi(\omega^{s_2}) \circ \psi(\omega^{s_1}) \\ &= (s_1 \frac{n}{k} + 1) \psi(\omega^{s_1+s_2}) - (s_2 \frac{n}{k} + 1) \psi(\omega^{s_1+s_2}) \\ &= \frac{n}{k} (s_1 - s_2) \psi(\omega^{s_1+s_2}). \end{aligned}$$

Luego,

$$[\text{HH}^{ns_1+1}(A), \text{HH}^{ns_2+1}(A)] \neq 0 \text{ si } s_1 \neq s_2.$$

Si n es impar, consideramos el elemento

$$\psi(\omega^{2s}) = ((\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{2s} \alpha_1, \alpha_1) \in \text{Nu } D_{2sn+2}$$

y tenemos que

$$[\text{HH}^{2ns_1+1}(A), \text{HH}^{2ns_2+1}(A)] \neq 0, \text{ si } s_1 \neq s_2.$$

□

Observación 4.2.13. El teorema anterior también vale en cualquier característica si agregamos alguna hipótesis sobre el número $\frac{n}{k}$.

Bibliografía

- [ACT] Ames, G.; Cagliero, L.; Tirao, P. *Comparison morphisms and the Hochschild cohomology ring of truncated quiver algebras*. J. Pure Appl. Algebra **322** (2009), 1466–1497.
- [AF] Anderson, F.; Fuller, K. *Rings and categories of modules*. Graduate Texts in Mathematics, **13**. Springer-Verlag NY, 1973. x+339 pp.
- [ABL] Assem, I.; Bustamante, J. C.; Le Meur, P. *Special biserial algebras with no outer derivations*. Colloq. Math. **125** (2011), no. 1, 83–98.
- [ASS] Assem, I.; Simson, D.; Skowroński, A. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory*. London Mathematical Society Student Texts, **65**. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. x+458 pp.
- [AAG] Avella-Alaminos, D.; Geiss, Ch. *Combinatorial derived invariants for gentle algebras*. J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), no. 1, 228–243.
- [B] Bardzell, M. *The alternating syzygy behavior of monomial algebra*. J. Algebra **188** (1997), no. 1, 69–89.
- [BLM] Bardzell, M.; Locateli, A.; Marcos, E. *On the Hochschild cohomology of truncated cycle algebra*. Comm. Algebra **28** (2000), no. 3, 1615–1639.
- [BGSS] Buchweitz, R.; Green, E.; Snashall, N.; Solberg, O. *Multiplicative structures for Koszul algebras*. Q. J. Math **59** (2008), no. 4, 441–454.
- [Bu] Bustamante, J. *The cohomology structure of string algebras*. J. Pure Appl. Algebra **204** (2006), no. 3, 616–626.
- [BR] Butler, M.; Ringel, C. *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*. Comm. Algebra **15** (1987), no. 1–2, 145–179.
- [CE] Cartan, H.; Eilenberg, S. *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956. xv+390 pp.
- [C1] Cibils, C. *On the Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*. Comm. Algebra **16** (1988), no. 3, 645–649.
- [C2] Cibils, C. *Cohomology of incidence algebras and simplicial complexes*. J. Pure Appl. Algebra **56** (1989), no. 3, 221–232.

-
- [C3] Cibils, C. *Hochschild cohomology of radical square zero algebras*. Algebras and Modules II, CMS Conf. Proceedings, no. **24**, 93–101, 1998.
- [CRS] Cibils, C.; Redondo, M.; Saorín, M. *The first cohomology group of the trivial extension of a monomial algebra*. J. Algebra Appl. **3** (2004), no. 2, 143–159.
- [EH] Erdmann, K.; Holm, T. *Twisted bimodules and Hochschild Cohomology for self injective algebras of class An* . Forum Math **11** (1999), no. 2, 177–201.
- [FFG] Farkas, D.; Feustel, C.; Green, E. *Synergy in the theories of Grobner bases and path algebras*. Canad. J. Math. **45** (1993), 727–739.
- [F] Fuller, K. *Biserial rings*. Lect. Notes Math. **734** (1974), 64–90.
- [GR] Gatica, M. A.; Redondo, M. J. *Hochschild cohomology of incidence algebras as one-point extensions*. Linear Algebra and its Applications **365**, 169–181 (2003).
- [GP] Gelfand, M.; Ponomarev, V. *Indecomposable representations of the Lorentz group*. Uspehi Mat. Nauk **23**(1968), no. 2 (140), 3–60.
- [G] Gerstenhaber, M. *The cohomology structure of an associative ring*. Ann. of Math. **78** (1963), no. 2, 267– 288.
- [Ha] Happel, D. *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*. Séminaire d’Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin, 39ème Année (Paris, 1987/1988), 108–126, Lecture Notes in Math., **1404**, Springer, Berlin, 1989.
- [H] Hilton, P. J.; Stammach, U. *A course in homological algebra*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **4**. Springer-Verlag, New York, 1997. xii+364 pp.
- [Ho] Hochschild, G. *On the cohomology groups of an associative algebra*. Ann. of Math. (2) **46**, (1945). 58–67.
- [K] Keller, B. *Hochschild cohomology and derived Picard group*. J. Pure Appl. Algebra **109** (2004), no. 1-3, 177–196.
- [L] Ladkani, S. *Hochschild cohomology of gentle algebra*. Disponible en arXiv:1208.2230v1 [math.RT].
- [Lo] Locateli, A. *Hochschild cohomology of truncated quiver algebras*. Comm. Algebra **27** (1999), no. 2, 645–664.
- [R1] Redondo, M. J. *Hochschild cohomology via incidence algebras*. J. Lond. Math. Soc. (2) **77** (2008), no. 2, 465–480.
- [RR] Redondo, M. J.; Román, L. *Hochschild cohomology of triangular string algebras and its ring structure*. J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), no. 5, 925–936.
- [RR1] Redondo, M. J.; Román, L. *Gerstenhaber algebra of quadratic string algebras*. Disponible en arXiv:1504.02495v1 [math.RA].

-
- [R] Rickard, J. *Derived equivalences as derived functors*. J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), no. 1, 37–48.
- [SF] Sánchez-Flores, S. *The Lie module structure on the the Hochschild cohomology groups of monomial of algebras of radical square zero*. J. Algebra **320** (2008), 4249–4269.
- [Sk] Sköldberg, E. *A contracting homotopy for Bardzell’s resolution*. Math. Proc. R. Ir. Acad. **108** (2008), no. 2, 111–117.
- [SW] Skowroński, A.; Waschbüsch, J. *Representation-finite biserial algebras*. J. Reine und Angew. Math. **345** (1983), 172–181.
- [S] Strametz, C. *The Lie algebra structure on the first Hochschild cohomology group of a monomial algebra*. J. Algebra Appl. **5** (2006), no. 3, 245–270.
- [W] Weibel, Ch. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. xiv+450 pp.