UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctora en Matemática

Teoría de representación para las álgebras de Hilbert y para las álgebras de Hilbert con operadores modales

Lidia Daniela Montangie

Bahía Blanca Argentina

2015

Dedicado a
la memoria de mi madre
y a mis tres soles: Camila, Lucas y Marco

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Comahue y del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro durante el período comprendido entre los meses de mayo de 2009 y diciembre de 2014, bajo la dirección del Dr. Sergio Celani de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro.

Agradecimientos

Desde estas líneas pretendo expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que durante estos años de trabajo han estado a mi lado, que de una u otra forma han contribuído a que esta tesis haya llegado a su fin.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento y con especial cariño a mi director de tesis, Dr. Sergio Celani. Por creer en mí, aceptándome bajo su dirección, lo que me trajo un sin número de enseñanzas, tanto académicas como personales. Le agradezco profundamente el gran apoyo intelectual, compartiendo conmigo generosamente cada idea que pudiera hacer de mi tesis un mejor trabajo, lo que fue un aporte invalorable no solo para el desarrollo de esta tesis, sino también para mi desarrollo como investigadora. No solo ha sido el mejor Director de Tesis que haya podido tener, sino que es un ejemplo a seguir.

También deseo mostrar mi agradecimiento a diversas instituciones. Principalmente, al Departamento de Matemática de la Facultad de Economía y Administración de la Universidad Nacional del Comahue, en el que me formé académicamente y permanentemente me formo como docente e investigadora. Agradezco especialmente a su actual directora, Dra. Raquel Crescimbeni, por todo lo que significó su llegada al departamento y por su constante preocupación y empuje. Al grupo de investigación que integro, particularmente al director del mismo, Dr. Patricio Díaz Varela, que además aceptó ser supervisor de mis estudios de doctorado. Al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur por permitirme realizar mis estudios de doctorado en matemática y al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro por posibilitarme trabajar con el Dr. Sergio Celani.

A mis queridos compañeros y amigos de oficina, Valeria, Marcela, David, Cachy y Luis, les agradezco toda la ayuda que me han prestado. Un agracedimiento especial merece el Dr. Leonardo Cabrer por su desinteresada ayuda y generosidad.

A mi marido Javier, por estar incondicionalmente siempre a mi lado, en los buenos y malos momentos, animándome siempre a continuar, porque sin su apoyo, hubiese sido imposible llevar adelante esta memoria. Por todo eso y mucho más esta tesis también le pertenece.

A mis padres, por el gran esfuerzo que han realizado para darme la educación que hoy me ha permitido llegar hasta aquí, por apoyarme en todas las decisiones que he tomado y por enseñarme a luchar por lo que quiero.

Resumen

Esta tesis tiene dos objetivos fundamentales. El primer objetivo es presentar y desarrollar una representación y dualidad topológica para variedades de álgebras que corresponden a los reductos $\{\to\}$ y $\{\to, \vee\}$ de la variedad de las álgebras de Heyting. Estas representaciones están basadas en un clase particular de espacios topológicos conocidos como espacios sober. Es un hecho bien conocido que toda álgebra de Heyting es representable como subálgebra del álgebra de Heyting de todos los subconjuntos crecientes de un conjunto ordenado. También es sabido que un álgebra de Heyting es representable como una subálgebra del conjunto de todos los abiertos de un espacio topológico T_0. Estas representaciones tienen muchas aplicaciones tanto en el estudio algebraico de estas estructuras como en las aplicaciones de la lógica intuicionista $\mathbf{Int}$ y algunas de sus extensiones. Además, estas representaciones son la base para las conocidas dualidades topológicas de Priestley y de Stone para las álgebras de Heyting. Cuando miramos algún subreducto de las álgebras de Heyting, como por ejemplo, en las álgebras que corresponden al fragmento implicativo, conocidas como álgebras de Hilbert, la teoría de representación y dualidad desarrollada para las álgebras de Heyting no es directamente aplicable a estos fragmentos. El primer resultado que conocemos sobre representación de un álgebra de Hilbert se encuentra en la tesis de A. Diego [29]. En dicha tesis aparece un teorema de representación tipo Stone, pero este resultado no tuvo un impacto muy significativo ya que es insuficiente para desarrollar una dualidad categórica. El primer objetivo de esta tesis es, justamente, presentar una dualidad topológica completa para las álgebras de Hilbert y extender esta dualidad a la variedad de las álgebras de Hilbert con supremo. Estos resultados están basados en los espacios topológicos conocidos como espacios sober y extienden a los dados por M. Stone [67]. Primero probamos que la categoría formada por álgebras de Hilbert con semi-homomorfismos como morfismos es dualmente equivalente a la categoría de espacios de Hilbert con ciertas relaciones binarias. También obtenemos una dualidad para las álgebras de Hilbert con homomorfismos. Aplicamos estos resultados para demostrar que el retículo de sistemas deductivos de un álgebra de Hilbert y el retículo de subconjuntos abiertos de su espacio de Hilbert dual, son isomorfos. Exploramos cómo esta dualidad está relacionada con la dada en [18] para álgebras de Hilbert finitas, y con la dualidad topológica desarrollada en [19] para álgebras de Tarski. Todos

estos resultados son presentados en el Capítulo 3.

La otra variedad asociada a un fragmento de la lógica $\mathbf{Int}$ que estudiamos es la variedad de las álgebras de Hilbert con supremo, i.e., álgebras de Hilbert donde el orden asociado es un supremo-semiretículo. Extendemos la dualidad encontrada para las álgebras de Hilbert al caso de las álgebras de Hilbert con supremo. Probamos que el conjunto ordenado de todos los ideales de un álgebra de Hilbert con supremo tiene estructura de retículo. Demostramos que en este retículo es posible definir una implicación, pero la estructura resultante no es un álgebra de Heyting ni tampoco es un semiretículo implicativo. Damos una descripción dual para el retículo de ideales de un álgebra de Hilbert con supremo. Estos resultados son presentados en el Capítulo 5.

El segundo objetivo fundamental de esta memoria está centrado en estudiar algunas extensiones modales de las álgebras de Hilbert y de las álgebras de Hilbert con supremo. Estas extensiones corresponden a fragmentos de algunas extensiones modales de la lógica intuicionista $\mathbf{Int}$. En esta memoria nos hemos centrado únicamente en dos fragmentos. Primero introducimos la variedad de álgebras de Hilbert con un operador modal $\Box$, llamadas $H\Box$-álgebras. La variedad de $H\Box$-álgebras es la contraparte algebraica del $\{\to, \Box\}$-fragmento de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IntK}_\Box$, al cual denotamos con $\mathbf{IntK}_\Box^\to$. Estudiamos la teoría de representación y damos una dualidad topológica para la variedad de $H\Box$-álgebras. Aplicamos estos resultados para probar que la lógica modal implicativa $\mathbf{IntK}_\Box^\to$ es canónica y por lo tanto es completa. Determinamos las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en algunas subvariedades de $H\Box$-álgebras. Tambien estudiamos una interesante variedad de álgebras, llamadas álgebras de Hilbert Lax. Todos estos resultados son presentados en el Capítulo 4.

El otro fragmento que investigamos es el fragmento $\{\to, \vee, \Diamond\}$ de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IntK}_\Diamond$. Introducimos y estudiamos la variedad de $H_\Diamond^\vee$-álgebras, las cuales son álgebras de Hilbert con supremo enriquecidas con un operador modal $\Diamond$. Damos una representación topológica para estas álgebras usando la representación topológica obtenida para las álgebras de Hilbert con supremo. Consideramos algunas subvariedades particulares de $H_\Diamond^\vee$-álgebras. Estas variedades son la contraparte algebraica de algunas extensiones del fragmento implicativo de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IntK}_\Diamond$. Usamos la representación topológica obtenida para las $H_\Diamond^\vee$-álgebras para probar que la lógica modal implicativa $\mathbf{IntK}_\Diamond^\to$ es canónica, y en consecuencia la lógica $\mathbf{IntK}_\Diamond^\to$ es completa. También determinamos las congruencias de las $H_\Diamond^\vee$-álgebras en términos de ciertos subconjuntos cerrados del espacio asociado, y en términos de una clase particular de sistemas deductivos. Estos resultados nos permitieron caracterizar las $H_\Diamond^\vee$-álgebras simples y subdirectamente irreducibles. Estos resultados son presentados en el Capítulo 6.

Abstract

This thesis has two main objectives. The first objective is to present and develop a representation and a topological duality for some varieties of algebras corresponding to the reducts $\{\rightarrow\}$ and $\{\rightarrow, \vee\}$ of the variety of Heyting algebras. These representations are based on a particular class of topological spaces known as sober spaces. It is well-known that every Heyting algebra is representable as a subalgebra of Heyting algebra of all increasing subsets of a poset. Also, a Heyting algebra is representable as a subalgebra of the set of all open subsets of a topological space T_0. These representations have many applications the algebraic study of these structures and applications of intuitionistic logic $\mathbf{Int}$ and some of its extensions. Moreover, these representations are the basis for the known topological dualities of Priestley and Stone for Heyting algebras. When we look at some subreduct of Heyting algebras, for example, algebras corresponding to the implicative fragment, known as Hilbert algebras, representation theory and duality developed for Heyting algebras is not directly applicable to these fragments. The first result we know about representation of a Hilbert algebra is the thesis of A. Diego [29]. In this thesis a theorem of Stone representation type appears, but this result did not have a significant impact because this theorem is insufficient to develop a categorical duality. The first objective of this thesis is precisely present a complete topological duality for Hilbert algebras and extend this duality to the variety of Hilbert algebras with supremum. These results are based on topological spaces known as sober spaces and extend those given by M. Stone [67]. First we prove that the category of Hilbert algebras with semi-homomorphisms is dually equivalent to the category of Hilbert spaces with certain relations. We also obtained a duality for Hilbert algebras with homomorphisms. We apply these results to prove that the lattice of the deductive systems of a Hilbert algebra and the lattice of open subsets of its dual Hilbert space, are isomorphic. We explore how this duality is related to the duality given in [18] for finite Hilbert algebras, and with the topological duality developed in [19] for Tarski algebras. All these results are presented in Chapter 3.

The other variety associated to a fragment of the logic $\mathbf{Int}$ that we study is the variety of Hilbert algebras with supremum, i.e., Hilbert algebras where the associated order is a join-semilattice. We extend the duality for Hilbert algebras to the case of Hilbert algebras with supremum. We prove that the ordered set of all ideals of a Hilbert algebra with supremum has a lattice structure. We also see that in this lattice it is possible to define

an implication, but the resulting structure is neither a Heyting algebra nor an implicative semilattice. We give a dual description of the lattice of ideals of a Hilbert algebra with supremum. These results are presented in Chapter 5.

The second main objective of this memory is centered on studying some modal extensions of Hilbert algebras and Hilbert algebras with supremum. These extensions correspond to fragments of some modal extensions of intuitionistic logic $\mathbf{Int}$. In this memory we have focused on only two fragments. First we introduce the variety of Hilbert algebras with a modal operator $\Box$, called $H\Box$-algebras. The variety of $H\Box$-algebras is the algebraic counterpart of the $\{\to, \Box\}$-fragment of the intuitionitic modal logic $\mathbf{IntK}_{\Box}$, which we denoted by $\mathbf{IntK}_{\Box}^{\to}$. We study the theory of representation and we give a topological duality for the variety of $H\Box$-algebras. We use these results to prove that the basic implicative modal logic $\mathbf{IntK}_{\Box}^{\to}$ is canonical and therefore is complete. We also determine the simple and subdirectly irreducible algebras in some subvarieties of $H\Box$-algebras. These results are presented in Chapter 4.

The other fragment investigated is the fragment $\{\to, \vee, \Diamond\}$ of intuitionistic modal logic $\mathbf{IntK}_{\Diamond}$. We introduce and study the variety of $H_{\Diamond}^{\vee}$-algebras, which are Hilbert algebras with supremum endowed with a modal operator $\Diamond$. We give a topological representation for these algebras using the topological spectral-like representation for Hilbert algebras with supremum given in [22]. We consider some particular varieties of $H_{\Diamond}^{\vee}$-algebras. These varieties are the algebraic counterpart of extensions of the implicative fragment of the intuitionistic modal logic $\mathbf{IntK}_{\Diamond}$. We use the topological representation for $H_{\Diamond}^{\vee}$-algebras to prove that the implicative modal logic $\mathbf{IntK}_{\Diamond}^{\to}$ is canonical, and consequently the logic $\mathbf{IntK}_{\Diamond}^{\to}$ is complete. We also determine the congruences of $H_{\Diamond}^{\vee}$-algebras in terms of certain closed subsets of the associated space, and in terms of a particular class of deductive systems. These results enable us to characterize the simple and subdirectly irreducible $H_{\Diamond}^{\vee}$-algebras. These results are presented in Chapter 6.

Introducción

El fuerte progreso y avance en las últimas décadas en el estudio sobre algunas lógicas proposicionales está fuertemente marcado por el desarrollo de adecuadas semánticas. Es decir, estructuras matemáticas que permiten interpretar los teoremas y/o reglas de deducción de las lógicas asociadas. El ejemplo más conocido es el Cálculo Proposicional Clásico **CPC** y su relación con las álgebras de Boole. Otro importante ejemplo está representado por la Lógica Proposicional Intuicionista **Int**. La lógica **Int** se puede estudiar semánticamente a través de los conjuntos parcialmente ordenados o por medio de ciertas estructuras algebraicas ordenadas llamadas álgebras de Heyting. Los conjuntos parcialmente ordenados son un caso particular de lo que en la actualidad se conoce como marcos de Kripke. Un marco de Kripke es un conjunto no vacío dotado de una o varias relaciones, donde dichas relaciones se utilizan para interpretar en el conjunto a los conectivos de la lógica proposicional en cuestión. Muchas de las lógicas modales normales basadas tanto en **CPC** como en la lógica **Int**, pueden ser estudiadas por apropiados marcos de Kripke.

Como mencionamos anteriormente, otra posibilidad de abordar una lógica es a través de adecuadas semánticas algebraicas. Es decir, se intenta asociar a una lógica una estructura algebraica de tal forma que los teoremas y las reglas de deducción de la lógica correspondan a ciertas fórmulas, ecuaciones o cuasi ecuaciones en la estructura algebraica asociada. Por ejemplo, y confundiendo el lenguaje algebraico con el lenguaje lógico, podemos decir que los teoremas del **CPC** son fórmulas φ tal que la ecuación $\varphi \approx 1$ es válida en la clase de las álgebras de Boole. Consideraciones semejantes se pueden hacer entre entre la lógica **Int** y la clase de las álgebras de Heyting.

En la mayoría de los casos, cuando existe una semántica relacional y una semántica algebraica para una lógica proposicional, estas semánticas están íntimamente conectadas, y en algunos casos estas conexiones son tan fuertes que es posible pasar de una semántica a otra por medio de adecuadas construcciones. Este tipo de conexiones permiten encarar la solución de un problema desde varios puntos de vistas. Por ejemplo, es bien conocida la dualidad que existe entre las álgebras de Boole y los espacios de Stone, también llamados espacios Booleanos. Éste es el ejemplo más conocido de lo que se conoce como teoría de dualidad. Esta teoría surge alrededor de 1930 con los trabajos de M. Stone ([67] , [68]) sobre la representación topológica para álgebras de Boole, retículos distributivos y álgebras de Heyting. Luego Jónsson y Tarski en sus artículos [44] y [45] extienden los resultados de Stone a las álgebras de Boole con operadores, los cuáles son conocidos más adelante como operadores modales. A comienzo de los años 70, H. Priestley ([59], [60]) desarrolla una nueva dualidad topológica entre retículos distributivos acotados y espacios topológicos ordenados, compactos y totalmente disconexos en el orden, conocidos hoy como espacios de Priestley. Desde entonces, establecer dualidades se ha convertido en un importante problema metodológico en álgebra y en lógica, y actualmente existen muchas estructuras algebraicas ordenadas que tienen una buena teoría de dualidad que permiten transferir problemas lógicos o algebraicos al campo de la topología y viceversa.

En general, las estructuras algebraicas ordenadas para las cuales se logró desarrollar una buena representación y dualidad topológica, tienen una estructura subyacente de retículo o retículo distributivo. Pero, para álgebras con estructura subyacente de semiretículo, o para álgebras correspondientes a semánticas algebraicas de fragmentos implicativos de $\mathbf{Int}$, no existían aceptables teoremas de representación que permitiesen un estudio semántico relacional de las lógicas asociadas, y menos una adecuada dualidad topológica. Hasta donde tenemos noticias, la primera representación topológica para semiretículos distributivos, es la representación desarrollada por G. Grätzer en su libro [38]. Como se demuestra en [38, Sec. II.5, Thm. 8], un semiretículo es distributivo si el conjunto ordenado de todos los filtros forma un retículo distributivo. En [21] se pueden encontrar varias formas equivalentes de caracterizar a los semiretículos distributivos. La representación de Grätzer no alcanza a ser una dualidad categórica, pues no dice nada acerca de cómo son los objetos duales a los homomorfismos entre semiretículos distributivos. Esta representación sirvió como punto de partida para una serie de trabajos sobre representación y dualidad de semiretículos distributivos y semiretículos implicativos en [12], [16] y [21]. Entre los principales aportes de estos trabajos se encuentra la caracterización de los objetos duales a los semi-homomorfismos entre semiretículos y semiretículos implicativos. En [12] se demuestra que los duales de los homomorfismos de semiretículos distributivos no son necesariamente alguna forma de función continua entre los espacios topológicos asociados, sino que son relaciones o ciertas funciones parciales. En el mencionado artículo se prueba que la categoría cuyos objetos son semiretículos distributivos y cuyos morfismos son los homomorfismos de semiretículos es dualmente equivalente a una categoría de espacios topológicos sober especiales (llamados DS-espacios en [12] o [21]) y cuyos morfismos son relaciones entre los espacios topológicos satisfaciendo ciertas condiciones adicionales. Posteriormente, G. Bezhanishvil y R. Jansana, en un par de extensos artículos ([5], [6]), desarrollan una dualidad para los semiretículos distributivos acotados y para los semiretículos implicativos acotados utilizando ciertos espacios de Priestley dotados de un subconjunto que sirve como parámetro y algunas propiedades adicionales. Estos espacios son llamados *espacios de Priestley generalizados*. Esta dualidad es bastante más complicada que la dualidad encontrada por medio de DS-espacios, pero tiene la ventaja de que se basa en los muy estudiados espacios de Priestley.

En 1923 es D. Hilbert el primero en observar que el tomar como axiomas a un conjunto de fórmulas del **CPC** donde sólo figurase el conectivo implicación, le permitía obtener un fragmento interesante del mismo, el que se conoce como *Cálculo Proposicional Implicativo Positivo*. Y es en 1950, cuando L. Henkin ([40]) introduce la noción de *Modelo Implicativo* como contraparte algebraica a este fragmento. En la década del 60, A. Monteiro llama *Álgebras de Hilbert* a las álgebras asociadas al modelo implicativo. Las álgebras de Hilbert fueron intensamente estudiadas por A. Diego ([29]), A. Monteiro ([55]) y más recientemente por D. Busneag ([11]), I. Chajda y R. Halas ([26], [27]), S. Celani ([15], [17]), S. Celani y L. Cabrer ([18], [19]), y D. Gluschankof y M. Tilli ([35]).

En [29], A. Diego obtiene una representación topológica para las álgebras de Hilbert y prueba que toda álgebra de Hilbert es isomorfa a la subálgebra del reducto implicativo de un álgebra de Heyting generada por cierto espacio topológico, generalizando los resultados de representación dados por M. Stone para las álgebras de Heyting ([1], [67]). Otro teorema de representación para las álgebras de Hilbert puede darse usando conjuntos ordenados, como se hace en [15], donde se prueba que para toda álgebra de Hilbert A existe un conjunto ordenado $\langle X, \leq \rangle$ tal que A es isomorfa a la subálgebra del reducto implicativo del álgebra de Heyting $\mathcal{P}_{\leq}(X)$ de todos los subconjuntos crecientes de $\langle X, \leq \rangle$. Desafortunadamente, éstas representaciones no dan una dualidad total. Para semiretículos implicativos se pueden hacer consideraciones similares, aunque en el caso finito si es posible probar una dualidad categórica, como lo demuestra P. Köhler en [47].

Consideremos un semiretículo implicativo $A = \langle A, \wedge, \rightarrow, 1 \rangle$. Es un hecho conocido que un subconjunto F de A es un filtro si y sólo si F contiene al último elemento 1 y además es cerrado bajo la regla de Modus Ponens, es decir, si $a, a \rightarrow b \in F$, entonces $b \in F$. Por lo tanto, en la definición de un filtro podemos prescindir de la operación $\wedge$. Si $\mathrm{Fi}(A)$ es el conjunto de todos los filtros de A, entonces el conjunto ordenado $\langle \mathrm{Fi}(A), \subseteq \rangle$ es un retículo distributivo ([26]). Como consecuencia de este hecho y apelando a la caracterización dada por G. Grätzer en [38], podemos deducir que $\langle A, \wedge, 1 \rangle$ es un semiretículo distributivo. Por otra parte, es conocido que el reducto implicativo $\langle A, \rightarrow, 1 \rangle$ es un álgebra de Hilbert ([29], [55]). Por lo tanto, el conjunto ordenado de los filtros, ahora vistos solamente en el reducto implicativo, sigue siendo un retículo distributivo. Teniendo en cuenta que esta propiedad es esencial para la dualidad dada en [12] se torna natural plantear la siguiente pregunta:

¿es posible desarrollar una dualidad topológica para las álgebras de Hilbert utilizando las técnicas desarrolladas en la dualidad para los semiretículos distributivos por medio de DS-espacios?

Responder a esta pregunta es el primer objetivo de esta memoria. Usando algunos resultados de [19], y algunas ideas de [12], [13], [16] y [19], veremos que es posible desarrollar una dualidad categórica entre álgebras de Hilbert y ciertos espacios topológicos, llamados espacios de Hilbert. Estos resultados son presentados en el Capítulo 3 del presente trabajo y son utilizados en los restantes capítulos de esta memoria.

Para formular la segunda pregunta que motiva esta memoria, debemos recordar que las *lógicas modales clásicas* son extensiones de la lógica clásica con nuevos operadores, generalmente llamados modalidades u operadores modales ([25]). Similarmente, las *lógicas modales intuicionistas* son extensiones de la lógica Intuicionista $\mathbf{Int}$ con nuevos operadores modales. Esto es, una lógica modal intuicionista es cualquier subconjunto de fórmulas en el lenguaje proposicional intuicionista $\mathcal{L}$ enriquecida por un conjunto de operadores modales unarios M conteniendo todos los teoremas de la lógica $\mathbf{Int}$, y cerrado bajo las reglas de Modus Ponens, substitución y la regla de regularidad $\phi \rightarrow \alpha/m\phi \rightarrow m\alpha$, para cada operador $m \in M$.

Siguiendo con esta idea, podemos extender a la lógica $\mathbf{Int}$ con un operador cuadrado $\Box$, y/o con un operador rombo $\Diamond$. En el caso caso de la lógica clásica, estos operadores son interdefinibles. Esto no ocurre en el caso intuicionista, pues la negación intuicionista no es involutiva. La modalidad cuadrado intuicionista $\Box$ y la modalidad rombo intuicionista $\Diamond$ no son interdefinibles, es decir, la fórmula $\Diamond\phi$ no es equivalente a $\neg\Box\neg\phi$, o la fórmula $\Box\phi$ no es equivalente a la fórmula $\neg\Diamond\neg\phi$. En consecuencia, esto abre un abanico de posibilidades para definir extensiones modales de la lógica $\mathbf{Int}$. Es posible considerar lógicas modales intuicionistas con un operador modal $\Box$, como por ejemplo la lógica $\mathbf{IntK}_{\Box}$ en el lenguaje $\mathcal{L}_{\Box} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \Box, \bot, \top\}$, y axiomatizada agregando a los axiomas que definen a la lógica $\mathbf{Int}$ los siguientes axiomas:

- $\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$,
- $\top \rightarrow \Box\top$.

También podemos considerar lógicas modales intuicionistas con un operador modal $\Diamond$, como por ejemplo la lógica $\mathbf{IntK}_{\Diamond}$ en el lenguaje $\mathcal{L}_{\Diamond} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \Diamond, \bot, \top\}$, y definida como la menor lógica que contiene los axiomas

- $\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow \Diamond p \vee \Diamond q$,
- $\neg\Diamond\bot$.

En los artículos [2], [9], [30], [33], [34], [48], [54] y [66] se pueden encontrar diversas lógicas intuicionistas modales. Extensiones de $\mathbf{IntK}_{\Box}$ e $\mathbf{IntK}_{\Diamond}$ fueron estudiadas en [9], [30], [48] y [66].

También es posible estudiar lógicas modales intuicionistas con los dos operadores modales $\Box$ y $\Diamond$. Por ejemplo, podemos definir la lógica $\mathbf{IntK}_{\Box\Diamond}$ como la menor lógica en el lenguaje $\mathcal{L}_{\Box\Diamond} = \mathcal{L}_{\Box} \cup \mathcal{L}_{\Diamond}$ conteniendo a la vez a las lógicas $\mathbf{IntK}_{\Box}$ e $\mathbf{IntK}_{\Diamond}$. Extensiones de $\mathbf{IntK}_{\Box\Diamond}$ fueron estudiadas en [2], [9], [30], [33] y [34].

Así como las álgebras de Heyting son la contraparte algebraica de la lógica $\mathbf{Int}$, las álgebras de Heyting con operadores modales son la contraparte algebraica de las lógicas modales intuicionistas $\mathbf{IntK}_\Box$, $\mathbf{IntK}_\Diamond$ e $\mathbf{IntK}_{\Box\Diamond}$. Teniendo en cuenta que la variedad Hil de álgebras de Hilbert es la semántica algebraica del fragmento implicativo positivo del cálculo proposicional intuicionista $\mathbf{Int}$ (ver [26], [29], o [55]), es natural formular el siguiente objetivo general:

Estudiar los reductos implicativos de algunas lógicas modales intuicionistas.

Al intentar responder a este objetivo y de igual modo que en el caso intuicionista, nos encontramos con múltiples posibilidades. Por ejemplo, podemos estudiar los fragmentos $\{\rightarrow, \Box\}$ y $\{\rightarrow, \vee, \bot, \Diamond\}$ de las lógicas modales intuicionistas $\mathbf{IntK}_\Box$ e $\mathbf{IntK}_\Diamond$, respectivamente. Otra interesante posibilidad es estudiar algunos $\{\rightarrow, \vee, \Box, \Diamond\}$-fragmentos de $\mathbf{IntK}_{\Box\Diamond}$ o de la lógica modal intuicionista $\mathbf{FS}_{\Box\Diamond}$ definida por Fischer-Servi en [34]. En este trabajo sólo nos abocaremos a estudiar desde un punto de vista algebraico y relacional ciertas lógicas definidas en los fragmentos $\{\rightarrow, \Box\}$ y $\{\rightarrow, \vee, \bot, \Diamond\}$ correspondientes a extensiones de las lógicas modales normales intuicionistas $\mathbf{IntK}_\Box$ e $\mathbf{IntK}_\Diamond$, respectivamente. Dichos fragmentos son denotados por $\mathbf{IntK}_\Box^\rightarrow$ e $\mathbf{IntK}_\Diamond^\rightarrow$, respectivamente. La clase de álgebras asociadas con $\mathbf{IntK}_\Box^\rightarrow$ es la variedad $\mathrm{Hil}_\Box$ de álgebras de Hilbert con un operador modal necesidad $\Box$, las cuales son estudiadas en el Capítulo 4 de este trabajo. En este capítulo también se prueba que cualquier extensión de $\mathbf{IntK}_\Box^\rightarrow$ es completa con respecto a cierta clase de marcos generales llamados $H\Box$-espacios. Es importante notar que la variedad de álgebras de Tarski modales estudiadas en [13] es la semántica algebraica del $\{\rightarrow, \Box\}$-fragmento de la lógica modal clásica $\mathbf{K}$, y por lo tanto, es una subvariedad de $\mathrm{Hil}_\Box$.

La clase de álgebras asociadas con $\mathbf{IntK}_\Diamond^\rightarrow$ son estudiadas en el Capítulo 6 y es la variedad $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$ de álgebras de Hilbert acotadas con supremo con un operador modal $\Diamond$. Análogamente al caso de la lógica $\mathbf{IntK}_\Box^\rightarrow$, también se prueba que cualquier extensión de $\mathbf{IntK}_\Diamond^\rightarrow$ es completa con respecto a cierta clase de marcos generales llamados $H\Diamond$-espacios.

Organización de la memoria

Este trabajo está organizado de la siguiente manera.

En el Capítulo 1 recordamos las definiciones y propiedades básicas sobre retículos, semiretículos y álgebras de Heyting que utilizaremos en el resto del trabajo.

El Capítulo 2 está dedicado a repasar los conceptos más importantes de las álgebras de Hilbert. En la Sección 2.2, estudiamos los sistemas deductivos y los ideales de orden de un álgebra de Hilbert. Revisamos algunas clases de sistemas deductivos, como los sistemas deductivos irreducibles, maximales y completamente irreducibles, y algunas caracterizaciones de los mismos. Mostramos un resultado análogo al Teorema del Filtro Primo, también conocido como Teorema de Birkhoff-Stone, para el caso de álgebras de Hilbert probado originalmente en [15]. En la Sección 2.3 presentamos los semi-homomorfismos y los homomorfismos de Hilbert, y damos una caracterización para los semi-homomorfismos, que es de gran utilidad en el trabajo. En la Sección 2.4 mostramos una representación para las álgebras de Hilbert por medio de conjuntos ordenados, la cual fue probada originalmente en [15]. En la siguiente sección recordamos el conocido resultado que afirma que el retículo de congruencias de un álgebra de Hilbert es isomorfo al retículo formado por sus sistemas deductivos ([29], [35], [55]). Terminamos el capítulo estudiando brevemente el fragmento implicativo de la lógica proposicional Intuicionista, estableciendo los resultados que permiten conectar este fragmento con las álgebras de Hilbert.

En el Capítulo 3 estudiamos la teoría de representación y dualidad para las álgebras de Hilbert. Los resultados de este capítulo han sido publicados en [20] y [22]. En la primera sección del capítulo definimos el espacio dual de un álgebra de Hilbert, llamado espacio de Hilbert o H-espacio. Mostramos que la definición dada de espacio de Hilbert puede enunciarse de tres maneras equivalentes cambiando una condición en la definición, logrando de esta manera conectarla con la definición de H-espacio dada inicialmente en [20], que incluye una relación de orden. En la Sección 3.2 probamos que cualquier álgebra de Hilbert A es isomorfa al álgebra de Hilbert dual de algún H-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$, y recíprocamente, mostramos que para cualquier espacio de Hilbert $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ existe un álgebra de Hilbert A tal que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es homeomorfo al espacio de Hilbert dual de A. En la siguiente sección probamos dos dualidades categóricas para dos categorías diferentes, pero cuyos objetos son álgebras de Hilbert. Una de las categorías tiene como morfismos a los semi-homomorfismos entre álgebras de Hilbert y la otra tiene como morfismos a los homomorfismos entre álgebras de Hilbert. En la Sección 3.4 estudiamos el caso de álgebras de Hilbert finitas, mostrando que a partir de un H-espacio finito podemos construir un H-espacio ideal finito sobre el mismo universo cuya álgebras de Hilbert asociadas respectivamente coinciden, y recíprocamente. En la Sección 3.5 usamos la dualidad encontrada para probar que el retículo de sistemas deductivos de un álgebra de Hilbert A es isomorfo al retículo formado por los subconjuntos abiertos del espacio dual.

En el Capítulo 4, estudiamos las álgebras de Hilbert con un operador modal necesidad $\Box$, a las que llamamos $H\Box$-álgebras y cuya variedad denotamos por $\mathrm{Hil}_{\Box}$. Esta clase de álgebras es la contraparte algebraica del $\{\to, \Box\}$-fragmento de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IntK}_\Box$. Las cinco secciones que conforman este capítulo se encuentran mayormente publicadas en [23]. En la primer sección introducimos y estudiamos a las $H\Box$-álgebras y a los $H\Box$-marcos. En la Sección 4.2 introducimos la noción de $H\Box$-espacios. Determinamos una representación y dualidad topológica para la variedad $\mathrm{Hil}_\Box$, aplicando los resultados obtenidos para las álgebras de Hilbert en el Capítulo 3. La Sección 4.3 está dedicada al estudio de la lógica $\mathbf{IntK}_\Box^\to$, es decir, del $\{\to, \Box\}$-fragmento de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IntK}_\Box$. Mostramos que cualquier extensión de $\mathbf{IntK}_\Box^\to$ es completa con respecto a la clase de $H\Box$-marcos generales. En la Sección 4.4 caracterizamos a las $H\Box$-álgebras que satisfacen ciertas ecuaciones por medio de condiciones de primer orden definidas en sus espacios duales correspondientes. Cada una de estas subvariedades de $\mathrm{Hil}_\Box$ se corresponden con una extensión axiomática de lógica modal implicativa $\mathbf{IntK}_\Box^\to$. En la Sección 4.5, aplicando la representación topológica obtenida para las $H\Box$-álgebras, caracterizamos las congruencias correspondientes a la variedad $\mathrm{Hil}_\Box$ y consecuentemente, determinamos sus álgebras simples y subdirectamente irreducibles. También caracterizamos las álgebras simples y subdirectamente irreducibles correspondientes a algunas subvariedades de $\mathrm{Hil}_\Box$. En la última sección de este capítulo estudiamos la variedad particular de $H\Box$-álgebras que satisfacen las identidades $x \to \Box x = 1$ y $\Box x = \Box^2 x$, a las que denominamos *álgebras de Hilbert Lax*. Esta clase de álgebras es sumamente interesante ya que está en correspondencia con el fragmento implicativo de la *Lógica Intuicionista Modal Lax*, definida en [31] y estudiada en diversos trabajos ([36], [37], [49]). La lógica Lax es una lógica con interesantes aplicaciones, como se puede ver [31] y en las referencias citadas en este artículo. Estudiamos la representación y dualidad topológica para la variedad formada por álgebras de Hilbert Lax, introduciendo nuevos espacios topológicos con especiales relaciones binarias llamados espacios de Hilbert Lax. Definimos a los submarcos en un espacio de Hilbert y a las variedades submarco. Probamos que existe una correspondencia uno a uno entre los submarcos de un espacio de Hilbert $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}\rangle$ y las relaciones binarias $Q \subseteq X \times X$ tales que $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, Q\rangle$ es un espacio de Hilbert Lax.

Una variedad $\mathbb{V}$ de álgebras de Hilbert se dice *nuclear* si cuando $A \in \mathbb{V}$ y $\Box$ es un operador modal definido sobre A, resulta $A_\Box = \{a \in A : \Box a = a\} \in \mathbb{V}$. Finalizamos este capítulo mostrando que una variedad de álgebras de Hilbert es nuclear si y sólo si es una variedad cerrada bajo submarcos.

En el Capítulo 5 estudiamos a las álgebras de Hilbert con supremo, a las que llamamos $H^\vee$-álgebras para abreviar. Son álgebras de Hilbert donde el supremo de cualquier par de elementos siempre existe y es una operación algebraica. Esta clase de álgebras es una clase particular de BCK-álgebras con operaciones de retículo estudiadas por P. M. Idziak en [41]. Mostramos que las $H^\vee$-álgebras forman una clase ecuacional. La dualidad topológica se determina extendiendo la dualidad desarrollada en el Capítulo 3 para álgebras de Hilbert. Definimos relaciones binarias adecuadas en el espacio dual de una $H^\vee$-álgebra mostrando que son las descripciones duales de los semi-homomorfismos y homomorfismos definidos entre álgebras de Hilbert que preservan $\vee$. En este caso tenemos la operación de supremo, la noción de ideal de orden colapsa con la noción usual de ideal en supremo-semiretículos. Estudiamos a los ideales en un $H^{\vee}$-álgebra y mostramos que el conjunto ordenado de todos los ideales de un álgebra de Hilbert con supremo tiene estructura de retículo, el cual no es distributivo. También mostramos que en dicho retículo podemos definir una implicación, pero sin embargo la estructura resultante no es un semiretículo implicativo. Finalizamos este Capítulo introduciendo la noción de *subconjunto abierto dirigido* y probamos que estos conjuntos dan una descripción dual del retículo de ideales de un álgebra de Hilbert con supremo. Todo lo presentado en este capítulo se encuentra publicado en [22].

En el Capítulo 6 introducimos el concepto de álgebras de Hilbert con operador modal posibilidad $\Diamond$, o $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebras, las cuales son álgebras de Hilbert acotadas con supremo enriquecidas con un operador modal $\Diamond$. Esta clase de álgebras es la contraparte algebraica del $\{\rightarrow, \vee, \bot, \Diamond\}$-fragmento de la lógica intuicionista modal $\mathbf{IntK}_{\Diamond}$ estudiada en [30] y [66]. En las primeras dos secciones de este capítulo obtenemos una representación y dualidad topológica por medio de espacios sober para estas álgebras utilizando la dualidad presentada en el Capítulo 5. En la tercer sección estudiamos el $\{\rightarrow, \vee, \bot, \Diamond\}$-fragmento de la lógica intuicionista modal $\mathbf{IntK}_{\Diamond}$, que denotamos con $\mathbf{IntK}^{\rightarrow}_{\Diamond}$. Mostramos que cualquier extensión de $\mathbf{IntK}^{\rightarrow}_{\Diamond}$ es canónica y completa con respecto a la clase de $H\Diamond$-marcos generales. En la Sección 6.4 caracterizamos las $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebras que satisfacen ciertas ecuaciones por medio de condiciones de primer orden definidas en sus espacios duales correspondientes. Estudiamos particularmente a la subvariedad $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathbf{S5}$, debido a que esta clase de $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebras está en correspondencia con el reducto $\{\vee, \rightarrow, \bot, \Diamond\}$ de las álgebras de Heyting monádicas, estas últimas estudiadas por A. Monteiro y O. Varsavsky ([54]), por G. Bezhanishvili ([2], [3]), y por Gisele Fischer Servi ([33], [34]). Mostramos una dualidad topológica para esta clase de $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebras a través de una categoría formada por marcos de Kripke argumentados perfectos, siguiendo las ideas utilizadas por G. Bezhanisvili en [3] para álgebras de Heyting monádicas. En la Sección 6.5 logramos determinar las congruencias de las $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebras en término de ciertos subconjuntos cerrados de los $H^{\vee}_{\Diamond}$-espacios duales siguiendo las ideas de A. Petrovich para retículos distributivos ([58]), y aplicando la representación y dualidad encontrada para las $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebras. Resultado que nos permitió caracterizar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles de la variedad formada por las $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebras, lo cual conforma la última sección del capítulo.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo hacemos un breve repaso de conceptos básicos sobre retículos distributivos acotados, semiretículos distributivos y álgebras de Heyting, los cuales serán usados en los próximos capítulos. Para más detalles se puede consultar [1], [38] y [26].

1.1. Retículos

Recordemos que un *retículo* es un conjunto parcialmente ordenado $\langle L, \leq \rangle$ tal que para todo subconjunto finito $K \subseteq L$ existe el supremo $\bigvee K$ y el ínfimo $\bigwedge K$. Si $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo, entonces para cada par de elementos $a, b \in L$ denotamos al supremo entre a y b como $a \vee b$ y al ínfimo entre ellos como $a \wedge b$.

Los retículos pueden ser caracterizados como estructuras algebraicas. En efecto, si $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo, y definimos las siguientes operaciones binarias internas

$$\vee : L \times L \to L, \quad \text{dada por } \vee(a, b) = a \vee b$$
$$\wedge : L \times L \to L, \quad \text{dada por } \wedge(a, b) = a \wedge b$$

entonces podemos definir el álgebra $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ a través de las siguientes identidades:

1. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, (asociatividad)

2. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,

3. $a \vee b = b \vee a$, (conmutatividad)

4. $a \wedge b = b \wedge a$,

5. $a \vee a = a$, (idempotencia)

6. $a \wedge a = a$,

7. $a \vee (a \wedge b) = a,$ (leyes de absorción)

8. $a \wedge (a \vee b) = a.$

Más aún, si $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ es un álgebra con dos operaciones binarias que cumplen las identidades $1.$- $8.$ entonces para todo $a, b \in L$

$$a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$$

Si en L definimos una relación binaria interna $\leq$ dada por

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$$

entonces $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo siendo $\wedge$ y $\vee$ el ínfimo y supremo del mismo, respectivamente.

A partir de ahora, si no hay lugar a confusión, un retículo $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ será denotado directamente por su conjunto soporte L.

Diremos que un retículo L es *distributivo* si se satisface cualquiera de las dos siguientes *leyes distributivas* equivalentes:

(D1) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, para todo $a, b, c \in L$,

(D2) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, para todo $a, b, c \in L$.

Diremos que un retículo L es *acotado* si existen elementos $0, 1 \in L$ tales que satisfacen las identidades

(A1) $a \wedge 0 = 0,$

(A2) $a \vee 1 = 1.$

De la definición de retículo acotado se desprende que 0 y 1 son el primer y último elemento de L, respectivamente.

Diremos que $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ es un *retículo distributivo acotado* si $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ es un retículo que satisface (D1) o (D2) (y por lo tanto ambas) y $0, 1$ satisfacen (A1) y (A2), respectivamente. También podemos decir que un retículo distributivo acotado es un álgebra de tipo $(2, 2, 0, 0)$ tal que las operaciones binarias satisfacen $1.$- $8.$ junto con (D1) (o bien (D2)), una de las constantes satisface (A1) y la constante restante cumple (A2). Luego podemos concluir que la clase de retículos distributivos acotados forman una variedad.

Ejemplo 1.1.1. Sea X un conjunto no vacío. El retículo $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \emptyset, X)$ es un retículo distributivo acotado.

Para un conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \leq \rangle$ e $Y \subseteq X$, sea

$$[Y) = \{x \in X : \exists y \in Y : y \leq x\} \text{ y } (Y] = \{x \in X : \exists y \in Y : x \leq y\}.$$

Si Y es el conjunto unitario $\{y\}$, entonces escribimos $[y)$ y $(y]$ en lugar de $[\{y\})$ y $(\{y\}]$, respectivamente. Diremos que Y es un *subconjunto creciente* (resp. *decreciente*) si $Y = [Y)$ (resp. $Y = (Y]$). Denotamos con $\mathcal{P}_{\leq}(X)$ al conjunto formado por todos los subconjuntos crecientes de X.

Un subconjunto decreciente no vacío I de un retículo L es llamado un *ideal* si se satisface que $a \vee b \in I$ para todo $a, b \in I$. Si X es un subconjunto de L entonces el *ideal generado* por X (es decir, el menor ideal que contiene a X) es igual a

$$Ig(X) = \{a \in L : a \leq x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n, \text{ para algún } \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X, n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.1)$$

Dualmente, un subconjunto creciente no vacío F de un retículo L es llamado un *filtro* si se satisface que $a \wedge b \in F$ para todo $a, b \in F$. Diremos que F es un *filtro propio* de L si $F \neq L$, y diremos que F es un *filtro primo* de L si F es un filtro propio tal que para $a, b \in L$ se satisface que si $a \vee b \in F$ entonces $a \in F$ o $b \in F$. Si X es un subconjunto de L entonces el *filtro generado* por X (es decir, el menor filtro que contiene a X) es

$$F(X) = \{a \in L : a \geq x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n, \text{ para algún } \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X, n \in \mathbb{N}\}.$$

El siguiente resultado es conocido en la literatura con el nombre de *Teorema de Birkhoff-Stone* (o Teorema del Filtro Primo) (ver [1] para una demostración).

Teorema 1.1.1. *Sea L un retículo distributivo. Sea I un ideal de L y sea F un filtro de L tales que $F \cap I = \emptyset$, entonces existe un filtro primo P de L tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.*

Sea L un retículo y sean $a, b \in L$. Un elemento $c \in L$ es llamado el *pseudocomplemento relativo de a con respecto a b*, y al que notaremos $c = a \to b$, si c es el mayor elemento de L tal que $a \wedge c \leq b$, esto es, para todo $x \in L$,

$$x \leq a \to b \iff x \wedge a \leq b.$$

Si $a \to b$ existe para todo $a, b \in L$, entonces L es llamado *retículo relativamente pseudocomplementado*, *retículo Brouweriano* o *álgebra de Heyting generalizada*.

1.2. Semiretículos

Al igual que en la definición de retículos, podemos definir a un semiretículo como un conjunto ordenado que satisface determinadas propiedades.

Sea $\langle S, \leq \rangle$ un conjunto ordenado. Diremos que $\langle S, \leq \rangle$ es un *supremo-semiretículo*, o simplemente $\vee$-semiretículo, si para todo par de elementos $a, b \in S$, existe el supremo

$a \vee b$. Diremos que $\langle S, \leq \rangle$ es un *ínfimo-semiretículo*, o simplemente $\wedge$-semiretículo, si para todo par de elementos $a, b \in S$, existe el ínfimo $a \wedge b$.

Los semiretículos también pueden ser caracterizados como estructuras algebraicas. Un *semiretículo* es un álgebra $\langle S, \circ \rangle$ del tipo (2) que satisface las siguientes identidades:

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,

2. $a \circ b = b \circ a$,

3. $a \circ a = a$.

Es decir, $\circ$ es una operación binaria asociativa, conmutativa e idempotente.

Dado un semiretículo $\langle S, \circ \rangle$, podemos definir las siguientes relaciones binarias $\leq_\wedge$, $\leq_\vee$ en S como:

$$a \leq_\wedge b \quad \text{si y sólo si} \quad a \circ b = a$$

y

$$a \leq_\vee b \quad \text{si y sólo si} \quad a \circ b = b,$$

respectivamente, siendo ambas órdenes parciales sobre S que se denominan *el orden inducido por* $\circ$. Consecuentemente, $\langle S, \leq_\wedge \rangle$ es un $\wedge$-semiretículo y $\langle S, \leq_\vee \rangle$ es un $\vee$-semiretículo.

Por simple elección, durante el resto de la tesis vamos a considerar $\wedge$-semiretículos. Asimismo, los resultados posteriores también son válidos para $\vee$-semiretículos. A partir de ahora, si no hay lugar a confusión, un semiretículo $\langle S, \wedge \rangle$ será denotado directamente por S.

Ejemplo 1.2.1. Sea un conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \leq \rangle$. Entonces $\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \cap \rangle$ es un semiretículo con último elemento X.

Definición 1.2.1. Sea S un semiretículo. Diremos que S es *distributivo* si para todo $a, b_0, b_1 \in S$ tal que $b_0 \wedge b_1 \leq a$, entonces existen $a_0, a_1 \in S$ tal que $b_0 \leq a_0$, $b_1 \leq a_1$ y $a = a_0 \wedge a_1$.

Notemos que los elementos a_0 y a_1 no necesariamente son únicos. La clase de los semiretículos distributivos no son una variedad.

1.3. Álgebra de Heyting

Las álgebras de Heyting son unas de las generalizaciones de las álgebras de Boole más estudiadas y, como explicamos en la introducción, corresponden a la semántica algebraica de la lógica intuicionista **Int**.

Un *álgebra de Heyting* es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$ donde $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es retículo acotado, y la implicación $\rightarrow$ es una operación binaria que satisface la siguiente condición para todo $a, b, c \in L$:

$$a \wedge b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \rightarrow c.$$

Si L es un álgebra de Heyting y $\bigvee S$ existe para $S \subseteq L$ entonces se satisface la siguiente ley distributiva generalizada:

$$x \wedge \left(\bigvee S\right) = \bigvee \{x \wedge y : y \in S\}.$$

Luego, toda álgebra de Heyting es un retículo distributivo ([1]). La clase de todas las álgebras de Heyting es definible por ecuaciones, es decir, es una variedad. Más precisamente, un álgebra de Heyting es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ que verifica:

H1 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado,

H2 $x \rightarrow x = 1$,

H3 $(x \rightarrow y) \wedge y = y$,

H4 $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$,

H5 $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$,

H6 $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$.

A continuación veremos cómo siempre es posible definir un álgebra de Heyting a partir de un conjunto ordenado.

Dado un conjunto ordenado $\langle X, \leq\rangle$, sobre el conjunto $\mathcal{P}_{\leq}(X)$ podemos definir una estructura de álgebra de Heyting del siguiente modo.

Ejemplo 1.3.1. Sea $\langle X, \leq\rangle$ un conjunto ordenado. La estructura

$$\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \cup, \cap, \Rightarrow_{\leq}, \emptyset, X\rangle$$

es un álgebra de Heyting donde la implicación $\Rightarrow_{\leq}$ está definida de la siguiente manera:

$$U \Rightarrow_{\leq} V = (U \cap V^c]^c \tag{1.2}$$

para $U, V \in \mathcal{P}_{\leq}(X)$. Es inmediato chequear que se cumplen las condiciones $H_1) - H_5)$.

Notemos que $U \Rightarrow_{\leq} V = \{x : [x) \cap U \subseteq V\}$, ya que

$$x \in U \Rightarrow_{\leq} V \iff x \in (U \cap V^c]^c \iff [x) \cap U \cap V^c = \emptyset \iff [x) \cap U \subseteq V.$$

Además, $U \Rightarrow_{\leq} V \in \mathcal{P}_{\leq}(X)$, sin ser necesariamente $U, V \in \mathcal{P}_{\leq}(X)$. En efecto, sea $x, y \in X$ tal que $x \leq y$ y consideremos $x \in U \Rightarrow_{\leq} V$. Entonces $[x) \cap U \subseteq V$. Como $x \leq y$, entonces $[y) \subseteq [x)$ y por lo tanto, $[y) \cap U \subseteq [x) \cap U \subseteq V$. Luego, $y \in U \Rightarrow V$.

A continuación mostramos otros ejemplos de álgebras de Heyting:

Ejemplo 1.3.2. Un álgebra de Boole $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ donde se define $a \to b = a' \vee b$, para todo $a, b \in B$, es un álgebra de Heyting.

Ejemplo 1.3.3. Sea $\langle X, \tau\rangle$ un espacio topológico, entonces $\langle \tau, \cap, \cup \to, \emptyset, X\rangle$ es un álgebra de Heyting donde la implicación $\to$ se define como

$$U \to V = \mathrm{int}((X - U) \cup V),$$

para $U, V \in \tau$.

Capítulo 2

Álgebras de Hilbert

Las álgebras de Hilbert representan la contraparte algebraica del fragmento implicativo de la Lógica Proposicional Intuicionista **Int**. En este capítulo exponemos, sin pretenciones de originalidad, nociones y resultados sobre álgebras de Hilbert que son necesarios para la comprensión del resto del trabajo.

Gran parte de las demostraciones de los resultados dados en el presente capítulo pueden verse en [26], [29] o en [52].

2.1. Definiciones preliminares

Definición 2.1.1. Un *álgebra de Hilbert* es un álgebra $A = \langle A, \to, 1\rangle$ de tipo $(2, 0)$ que verifica los siguientes axiomas:

$(H1)$ $a \to (b \to a) = 1$,

$(H2)$ $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$,

$(H3)$ $a \to b = 1 = b \to a$ implica $a = b$.

Si $A = \{1\}$, diremos que A es trivial.

Lema 2.1.2. *Sea $A = \langle A, \to, 1\rangle$ un álgebra de Hilbert y $a, b, c \in A$. Entonces se satisfacen las siguientes ecuaciones:*

1. $a \to a = 1$,
2. $a \to 1 = 1$,
3. $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$,
4. $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$ *(ley de distributividad a izquierda),*

5. $a \to ((a \to b) \to b) = 1$,

6. $a \to (a \to b) = a \to b$,

7. $((a \to b) \to b) \to b = a \to b$,

8. $(a \to b) \to ((b \to a) \to a) = (b \to a) \to ((a \to b) \to b)$,

9. *Si* $a \leq b$ *entonces* $c \to a \leq c \to b$ *y* $b \to c \leq a \to c$.

En [29], Diego obtiene la siguiente caracterización ecuacional para las álgebras de Hilbert:

$(H5)$ $(a \to a) \to a = a$,

$(H6)$ $a \to a = b \to b$,

$(H7)$ $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$,

$(H8)$ $(a \to b) \to ((b \to a) \to a) = (b \to a) \to ((a \to b) \to b)$,

y prueba que el sistema de axiomas $\{H1, H2, H3, H4\}$ es equivalente al sistema formado por $\{H5, H6, H7, H8\}$, por consiguiente, queda demostrado que la clase de álgebras de Hilbert es una variedad, la cual denotamos con Hil.

Lema 2.1.3. *Sea* $\langle A, \to, 1 \rangle$ *un álgebra de Hilbert. Entonces la relación binaria* $\leq$ *definida por*

$$a \leq b \iff a \to b = 1,$$

es un orden parcial sobre A.

El orden parcial $\leq$ dado en el Lema anterior es llamado el *orden natural* de A. Con respecto a este orden, 1 es el último elemento de A.

Diremos que un álgebra de Hilbert A es *acotada* si tiene primer elemento 0 respecto del orden natural, es decir, si existe $0 \in A$ tal que $0 \to a = 1$, para todo $a \in A$. Denotamos con Hil^0 a la variedad de álgebras de Hilbert acotadas. En las álgebras de Hilbert acotadas podemos definir el *pseudocomplemento de un elemento* a como $\neg a = a \to 0$. Es claro que $\neg 0 = 1$ y $\neg 1 = 0$.

Definición 2.1.4. Una *BCK-álgebra* es un álgebra $A = \langle A, \to, 1 \rangle$ de tipo $(2, 0)$ que verifica los siguientes axiomas para todo $a, b, c \in A$:

1. $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$,

2. $a \to ((a \to b) \to b) = 1$,

3. $a \to a = 1$,

4. $a \to 1 = 1$,

5. $a \to b = 1 = b \to a$ implica $a = b$.

La clase de las álgebras de Hilbert es una subclase de las BCK-álgebras, pues toda álgebra de Hilbert A es una BCK-álgebra que satisface la ecuación

$$a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c),$$

como puede verse en el siguiente resultado (para una prueba ver [26]).

Corolario 2.1.5. *Toda álgebra de Hilbert es una BCK-álgebra. Recíprocamente, una BCK-álgebra es un álgebra de Hilbert si y sólo si se satisface la ley de distributividad a izquierda del Lema 2.1.2.*

El siguiente resultado muestra una caracterización inmediata para las álgebras de Hilbert usando las identidades $1 \to a = a$ y (6) del Lema 2.1.2 en lugar del axioma $(H3)$, y su demostración se puede encontrar en [26].

Teorema 2.1.6. *Un álgebra $A = \langle A, \to, 1\rangle$ de tipo $(2, 0)$ es un álgebra de Hilbert si y sólo si A satisface las identidades $(H1)$, $(H2)$, $1 \to a = a$ y (6) del Lema 2.1.2.*

Definición 2.1.7. Sea $\langle X, \leq\rangle$ un conjunto ordenado. Un subconjunto no vacío $K \subseteq X$ es llamado *directo* (*dualmente directo*) si para cualquier $x, y \in K$ existe $z \in K$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$ ($z \leq x$ y $z \leq y$).

En el Ejemplo 1.3.1, mostramos como es posible definir un álgebra de Heyting a partir de un conjunto ordenado. Considerando únicamente la parte implicativa de esta construcción, obtendremos un álgebra de Hilbert. Es decir, si $\langle X, \leq\rangle$ un conjunto ordenado, entonces la estructura

$$\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \cup, \cap, \Rightarrow_{\leq}, \emptyset, X\rangle$$

es un álgebra de Heyting donde la implicación $\Rightarrow_{\leq}$ está definida según (1.2). Luego,

$$\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Rightarrow_{\leq}, X\rangle$$

es un álgebra de Hilbert.

Ejemplo 2.1.1. Si $\langle H, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Heyting, entonces $\langle H, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert. De igual forma, si $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ es una álgebra de Boole, entonces $\langle B, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert donde $a \to b = a' \vee b$, para $a, b \in B$.

Ejemplo 2.1.2. Sea X un conjunto no vacío y τ una topología sobre X, entonces $\langle \tau, \to, X\rangle$ es un álgebra de Hilbert donde la implicación $\to$ se define como

$$U \to V = \operatorname{int}((X - U) \cup V),$$

para $U, V \in \tau$.

Existen muchos ejemplos de álgebras de Hilbert pero hay uno particularmente muy importante, como mostramos a continuación:

Ejemplo 2.1.3. Todo conjunto ordenado $\langle X, \leq\rangle$ con último elemento 1 induce una estructura de álgebra de Hilbert definiendo la implicación $\to$ sobre X de la siguiente manera:

$$a \to b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ \\ b & \text{si } a \nleq b \end{cases}$$

La implicación $\to$ es llamada la *implicación inducida por el orden*.

Observación 2.1.8. El ejemplo anterior es de suma importancia ya que nos permite definir álgebras de Hilbert sobre semiretículos y también sobre retículos que no son semiretículos implicativos ni álgebras de Heyting. Por ejemplo, el retículo Booleano de cuatro elementos y la implicación inducida por el orden es un álgebra de Hilbert pero no es álgebra de Heyting. Estos casos motivan el estudio de álgebras de Hilbert con operaciones de retículo, las cuales son subclases de BCK-álgebras con operaciones de retículos y han sido consideradas por P. M. Idziak en [41].

El siguiente ejemplo, tomado de [18], es muy importante en el desarrollo del trabajo. Vamos a definir, a partir de un conjunto ordenado y una familia distinguida de subconjuntos, un álgebra de Hilbert que no es un álgebra de Heyting.

Ejemplo 2.1.4. Un *H-conjunto* o *marco de Kripke extendido* (siguiendo la terminología dada por por Kirk en [46]) es una estructura del tipo $\langle X, \leq, \mathcal{K}\rangle$ donde $\langle X, \leq\rangle$ es un conjunto ordenado y $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Cada H-conjunto define la siguiente familia de conjuntos:

$$H_{\mathcal{K}}(X) = \{U \in \mathcal{P}(X) : \exists\, W \in \mathcal{K} \text{ y } \exists V \subseteq W \;\; (U = W \Rightarrow_{\leq} V)\}.$$

En [46] y en [18] se prueba que la estructura

$$H_{\mathcal{K}}(X) = \langle H_{\mathcal{K}}(X), \Rightarrow_{\leq}, X\rangle$$

es un álgebra de Hilbert y una subálgebra del álgebra de Hilbert $\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Rightarrow_{\leq}, X\rangle$. El álgebra $H_{\mathcal{K}}(X)$ es llamada el *álgebra de Hilbert dual* del H-conjunto $\langle X, \leq, \mathcal{K}\rangle$.

2.2. Sistemas Deductivos e Ideales de Orden

Los sistemas deductivos, también llamados filtros implicativos, juegan un rol muy importante en el desarrollo general de la teoría de las álgebras de Hilbert. Por ejemplo, es bien conocido que el conjunto de todos los sistemas deductivos de un álgebra de Hilbert forman un retículo distributivo isomorfo al retículo de sus congruencias. Los sistemas deductivos fueron muy estudiados por A. Monteiro ([52], [55]), A. Diego ([29]) y D. Busneag ([11]), entre otros.

Definición 2.2.1. Sea $A = \langle A, \to, 1\rangle$ un álgebra de Hilbert. Un subconjunto $D \subseteq A$ es un *sistema deductivo* o *filtro implicativo* de A si $1 \in D$, y si $a, a \to b \in D$, implica que $b \in D$.

Sea $A = \langle A, \to, 1\rangle$ un álgebra de Hilbert. Denotamos por $\mathrm{Ds}\,(A)$ al conjunto de todos sus sistemas deductivos. Es claro que $\{1\}$ y A son ejemplos triviales de sistemas deductivos. En [29] se muestra que todo sistema deductivo es un conjunto creciente. Todo sistema deductivo diferente de A será llamado *propio*.

Es fácil probar que $\mathrm{Ds}\,(A)$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias. Por lo tanto, para cada $S \subseteq A$ existe el menor sistema deductivo que contiene a S. Luego, dado $S \subseteq A$, el *sistema deductivo generado* por S es el conjunto

$$\langle S\rangle = \bigcap \{D \in \mathrm{Ds}\,(A) : S \subseteq D\}\,.$$

Dada un álgebra de Hilbert A y una sucesión de elementos $a, a_1, \ldots, a_n \in A$, se define:

$$(a_1, \ldots, a_n; a) = \begin{cases} a_1 \to a & \text{si} \quad n = 1, \\ a_1 \to (a_2, \ldots, a_n; a) & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$$

Dado un subconjunto S de A, podemos caracterizar al sistema deductivo generado por S de la siguiente manera:

Si $S = \emptyset$ entonces $\langle S\rangle = \{1\}$.
Si $S \neq \emptyset$, $\langle S\rangle = \{a \in A | \exists a_1, \ldots, a_n \in S \textit{ tales que } (a_1, \ldots, a_n; a) = 1\}\,.$

Puede verse una demostración de esta caracterización en [26].

Es claro que si $S = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ entonces

$$\langle\{a_1, \ldots, a_n\}\rangle = \{a \in A|\ (a_1, \ldots, a_n; a) = 1\}\,.$$

Más aún, si $S = \{a\}$, $\langle S\rangle = \langle\{a\}\rangle = [a)$ y es el *sistema deductivo principal* generado por a.

En [29], A. Diego muestra que dada un álgebra de Hilbert $A = \langle A, \to, 1\rangle$, el conjunto ordenado $\langle \mathrm{Ds}(A), \subseteq\rangle$ admite una estructura de retículo distributivo completo y acotado, donde el primer elemento es 1, el último elemento es A y donde el ínfimo $\wedge$ y el supremo $\vee$ están definidos de la siguiente manera:

$$D_1 \wedge D_2 = D_1 \cap D_2$$

y

$$D_1 \vee D_2 = \langle D_1 \cup D_2 \rangle\,.$$

Puede encontrarse otra demostración en [26].

En el mismo trabajo, Diego prueba también el siguiente resultado, el cual es una versión del teorema de la deducción.

Lema 2.2.2. *Sea A un álgebra de Hilbert, $a \in A$ y $D \in \mathrm{Ds}(A)$. Entonces*

$$\langle a \rangle \vee D = \langle D \cup \{a\} \rangle = \{b \in A : a \to b \in D\}.$$

Por recurrencia obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.3. *Sea A un álgebra de Hilbert. Entonces*

$$D(a_1) \vee D(a_2) \vee ... \vee D(a_n) = \{b : a_1 \to (a_2 \to (...(a_n \to b)...) = 1\}.$$

Teniendo en cuenta el Lema anterior, podemos observar que por el Lema de Zorn, es posible asegurar que para todo elemento $a \neq 1$ de A existe un sistema deductivo F de A, el cual es maximal con respecto a los sistemas deductivos que no contienen al elemento a. Es decir, si $F \subset D$, con $D \in \mathrm{Ds}(A)$, entonces $a \in D$. Tales sistemas deductivos pueden caracterizarse como se muestra en el siguiente Corolario. La demostración puede verse en [29] o [26].

Corolario 2.2.4. *Sea A un álgebra de Hilbert. Entonces $C \in \mathrm{Ds}(A)$ es maximal con respecto a la propiedad de no contener al elemento $a \in A$, $a \neq 1$ si y sólo si $a \notin C$ y $b \to a \in C$ para todo $b \notin C$.*

Podemos definir en el retículo distributivo $\langle \mathrm{Ds}(A), \subseteq \rangle$ la misma implicación que se definió en el Ejemplo 1.3.1 para el conjunto de partes crecientes de un conjunto ordenado dado, restringido para $\mathrm{Ds}(A)$. Es decir, si $D_1, D_2 \in \mathrm{Ds}(A)$, definimos

$$D_1 \Rightarrow D_2 = \{a \in A : [a) \cap D_1 \subseteq D_2\}.$$

En [11] se demuestra el siguiente resultado.

Lema 2.2.5. *Si A un álgebra de Hilbert y $D_1, D_2 \in \mathrm{Ds}(A)$, entonces*

1. $D_1 \Rightarrow D_2 \in \mathrm{Ds}(A)$.

2. *Si $D \in \mathrm{Ds}(A)$ entonces $D \cap D_1 \subseteq D_2$ si y sólo si $D \subseteq D_1 \Rightarrow D_2$.*

Los resultados anteriores nos permiten afirmar que dada un álgebra de Hilbert $A = \langle A, \to, 1 \rangle$ tenemos que

$$\langle \mathrm{Ds}(A), \vee, \wedge, \Rightarrow, \{1\}, A \rangle$$

es una álgebra de Heyting.

2.2.1. Sistemas Deductivos Irreducibles, Maximales y Completamente Irreducibles

En esta subsección recordamos los distintos tipos de sistemas deductivos que existen en un álgebra de Hilbert. En la teoría de representación de las álgebras de Hilbert juegan un rol central los elementos irreducibles pertenecientes al retículo formado por los sistemas deductivos, que son llamados sistemas deductivos irreducibles.

Definición 2.2.6. Sea A un álgebra de Hilbert. Dado $D \in \mathrm{Ds}(A) - \{A\}$, diremos que:

1. D es *irreducible* si y sólo si para cualesquiera $D_1, D_2 \in \mathrm{Ds}(A)$ de manera que $D = D_1 \cap D_2$, tenemos que $D = D_1$ o $D = D_2$.

   Al conjunto de todos los sistemas deductivos irreducibles de un álgebra de Hilbert A lo denotamos con $X(A)$.

2. D es *completamtente irreducible* si y sólo si para cualquier familia $\{D_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{Ds}(A)$ tal que $D = \bigcap_{i\in I} D_i$, entonces existe $i \in I$ tal que $D = D_i$.

   Denotamos con $X_c(A)$ al conjunto de todos los sistemas deductivos completamente irreducibles del álgebra de Hilbert A.

3. D es *maximal* si y sólo si D no está contenido propiamente en ningún otro sistema deductivo propio.

Es claro que todo sistema deductivo completamente irreducible es irreducible.

Los sistemas deductivos irreducibles D de un álgebra de Hilbert A pueden ser caracterizados por aquellos sistemas deductivos tales que $A - D$ es filtrante superiormente, como se muestra en el siguiente resultado. Se puede ver una demostración del mismo en [29] o en [26].

Teorema 2.2.7. *Sea A un álgebra de Hilbert y sea $D \in \mathrm{Ds}(A) - \{A\}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $D \in X(A)$.

2. *Si $a, b \notin D$, existe $c \notin D$ tal que $a, b \leq c$.*

3. *Si $a, b \notin D$, existe $c \notin D$ tal que $a \to c, b \to c \in D$.*

2.2.2. Ideales de Orden

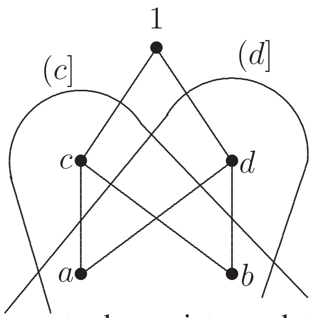
En la literatura sobre conjuntos ordenados existen diversas nociones de ideales. Aquí vamos a considerar una noción de ideal usual en la teoría de conjuntos ordenados o de semi-retículos. Hasta donde conocemos, la primera vez que esta noción se utilizó en el contexto de álgebras de Hilbert fue en el artículo [15]. Este concepto resulta fundamental a la hora de desarrollar la teoría de representación topológica para las álgebras de Hilbert.

Definición 2.2.8. Sea A un álgebra de Hilbert. Un subconjunto I de A es llamado un *ideal de orden* de A si $b \in I$ y $a \leq b$, entonces $a \in I$, y para cada $a, b \in I$ existe $c \in I$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.

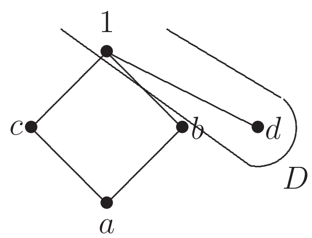
Denotamos con $\mathrm{Id}(A)$ al conjunto ordenado de todos los ideales de orden de A.

A diferencia de lo que sucede con los sistemas deductivos de un álgebra de Hilbert, la intersección no vacía de una familia de ideales de orden puede no ser un ideal de orden, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. La siguiente figura muestra un álgebra de Hilbert finita cuyo universo es $\{a, b, c, d, 1\}$ y donde la operación $\to$ es la inducida por el orden. Es claro que los conjuntos decrecientes $(c]$ y $(d]$ son ideales de orden, pero $(c] \cap (d] = \{a, b\}$ no es un ideal de orden.



Observación 2.2.9. El complemento de un sistema deductivo D, no es necesariamente un ideal de orden. Por ejemplo, la siguiente figura muestra un álgebra de Hilbert finita cuyo universo es $\{a, b, c, d, 1\}$ y donde la operación $\to$ es la inducida por el orden, donde se ve claramente que el complemento del sistema deductivo $D = [d)$ no es un ideal de orden.



Si el sistema deductivo D fuese irreducible, entonces podemos afirmar que D^c es un ideal de orden. En efecto, es claro que D^c es un subconjunto decreciente del álgebra de Hilbert dada, y si $a, b \in D^c$, por Teorema 2.2.7, existe $c \in D^c$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.

El siguiente resultado es análogo al Lema del Filtro Primo de Birkhoff, para el caso de álgebras de Hilbert y está demostrado por S. Celani en [15]. Dada su importancia, en esta memoria vamos a dar una demostración de este resultado.

Teorema 2.2.10. *Sea A un álgebra de Hilbert. Sea $D \in \mathrm{Ds}\,(A)$ y sea $I \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $D \cap I = \emptyset$. Entonces existe $x \in X(A)$ tal que $D \subseteq x$ y $x \cap I = \emptyset$.*

Demostración. Sea $D \in \mathrm{Ds}\,(A)$ y sea $I \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $D \cap I = \emptyset$. Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathrm{Ds}\,(A)$:

$$\mathcal{F} = \{H \in \mathrm{Ds}\,(A) : D \subseteq H \text{ y } H \cap I = \emptyset\}.$$

Observemos que $D \in \mathcal{F}$, por lo tanto $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Es claro que la unión de una cadena de elementos de $\mathcal{F}$ es nuevamente un elemento de $\mathcal{F}$. Aplicando el lema de Zorn, podemos asegurar que existe un sistema deductivo maximal x en $\mathcal{F}$. Veamos que $x \in X(A)$. Sean $a, b \in A$ tal que $a, b \notin x$. Consideremos los sistemas deductivos $P_a = \langle x \cup \{a\}\rangle$ y $P_b = \langle x \cup \{b\}\rangle$. Es claro que $x \subset P_a \cup P_b$ y por lo tanto $P_a, P_b \notin \mathcal{F}$. Como $D \subseteq P_a$ y $D \subseteq P_b$, resulta que

$$P_a \cap I \neq \emptyset \text{ y } P_b \cap I \neq \emptyset.$$

Entonces existen $i, j \in I$ tales que $i \in P_a$ y $j \in P_b$. Por Lema 2.2.2, $a \to i \in x$ y $b \to j \in x$. Además, por definición de ideal de orden, existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$. Por Lema Lema 2.1.2, $a \to i \leq a \to k$ y $b \to j \leq b \to k$, y consecuentemente, $a \to k, b \to k \in x$ donde $k \notin x$ pues $x \cap I = \emptyset$. Por Teorema 2.2.7, $x \in X(A)$. ■

Observemos que en [46] se usa un teorema similar pero con la noción de filtro a-maximal. No es difícil chequear que todo filtro a-maximal es un sistema deductivo irreducible pero la recíproca no es necesariamente válida.

Corolario 2.2.11. *Sea A un álgebra de Hilbert. Entonces*

1. *Para todo $a, b \in A$, si $a \nleq b$, entonces existe $x \in X(A)$ tal que $a \in x$ y $b \notin x$.*

2. *Si $x \in X(A)$, entonces $a \to b \notin x$ si y sólo si existe $y \in X(A)$ tal que $x \subseteq y$, $a \in y$ y $b \notin y$.*

Demostración. 1. Si $a \nleq b$ entonces el sistema deductivo $[a)$ y el ideal de orden $(b]$ son disjuntos. Luego, el resultado es inmediato por Teorema 2.2.10.

2. Asumamos que $a \to b \notin x$. Veamos que $\langle x \cup \{a\}\rangle \cap (b] = \emptyset$. Supongamos que existe $c \in A$ tal que $c \in \langle x \cup \{a\}\rangle$ y $c \in (b]$. Por lo tanto, existe $d \in x$ tal que $d \to (a \to c) = 1$ y $c \leq b$. Luego, $1 = d \to (a \to c) \leq d \to (a \to b)$. Por ende, $d \to (a \to b) = 1 \in x$ y consecuentemente, $a \to b \in x$, lo cual es una contradicción. La

recíproca es inmediata. ■

A continuación mostramos dos resultados sobre sistemas deductivos irreducibles definidos sobre álgebras de Hilbert acotadas.

Lema 2.2.12. *Sea* $A \in \mathrm{Hil}^0$. *Entonces,*

1. *Si* $a \in x$ *entonces* $\neg a \notin x$*, para todo* $x \in X(A)$.
2. *Si* $\neg a \notin y$ *entonces existe* $x \in X(A)$ *tal que* $y \subseteq x$ *y* $a \in x$*, para todo* $y \in X(A)$.

Demostración. *1.* Supongamos que $\neg a \in x$. Por lo tanto, $a \to 0 \in x$. Como $a \in x$, tenemos que $0 \in x$, lo cual es imposible pues x es un sistema deductivo propio de A.

2. Es consecuencia inmediata del Teorema 2.2.10. ■

El siguiente resultado caracteriza a los sistemas deductivos propios de un álgebra de Hilbert acotada.

Lema 2.2.13. *Sea* A *un álgebra de Hilbert acotada y* $D \in \mathrm{Ds}(A)$. *Entonces,* D *es propio si y sólo si* $0 \notin D$.

Demostración. Resulta inmediata de la definición de sistema deductivo propio y del hecho de que todo sistema deductivo es un subconjunto creciente. ■

2.3. Semi-homomorfismos y homomorfismos

En cualquier estructura algebraica la noción de homomorfismo juega un papel central. En ciertas estructuras algebraicas ordenadas, es posible definir funciones entre las álgebras consideradas que cumplen condiciones más débiles que las de un homomorfismo. Por ejemplo, en álgebras de Boole la noción de homomorfismo se puede debilitar y definir los semi-homomorfismos, como aquellas funciones entre dos álgebras de Boole que únicamente preservan, por ejemplo, el ínfimo y el último elemento. Estas funciones pueden actuar como morfismos de una nueva categoría. En el caso Booleano, un estudio completo y detallado de este tipo de semi-homomorfismos y su relación con la lógica modal se puede encontrar en [65].

En esta parte de la memoria vamos a definir los semi-homomorfismos entre dos álgebras de Hilbert. Como veremos más adelante, esta clase de funciones corresponden a ciertos operadores modales definidos en álgebras de Hilbert.

La siguiente noción fue primero considerada en [15] y [16].

Definición 2.3.1. Sean A, B álgebras de Hilbert. Una función $h : A \to B$ es un *semi-homomorfismo* si para todo $a, b \in A$:

1. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b)$,

2. $h(1) = 1$.

Un *homomorfismo* definido entre las álgebras de Hilbert A y B es un semi-homomorfismo h tal que $h(a) \to h(b) \leq h(a \to b)$, para $a, b \in A$.

Observemos que un semi-homomorfismo $h : A \to B$ preserva el orden natural, es decir, si $a \leq b$ entonces $h(a) \leq h(b)$. Por lo tanto, si A, B son dos álgebras de Hilbert acotadas, diremos que la función $h : A \to B$ es un *semi-homomorfismo de álgebras de Hilbert acotadas* si h es un semi-homomorfismo y además $h(0) = 0$.

El siguiente resultado dado en [15], presenta una caracterización clave de semi-homomorfismos que muestra la importancia de éstos en el estudio de las álgebras de Hilbert. Damos su demostración por completitud.

Teorema 2.3.2. *Sean A y B álgebras de Hilbert. Sea $h : A \to B$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *h es un semi-homomorfismo,*

2. *$h^{-1}(D) \in \mathrm{Ds}(A)$ para todo $D \in \mathrm{Ds}(B)$, donde $h^{-1}(D) = \{a \in A : h(a) \in D\}$.*

Demostración. *1.* $\Longrightarrow$ *2.* Sea $D \in \mathrm{Ds}(B)$. Como $h(1) = 1 \in D$, tenemos que $1 \in h^{-1}(D)$. Si $a, a \to b \in h^{-1}(D)$ entonces $h(a), h(a \to b) \in D$. Pero $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b)$, luego $h(a) \to h(b) \in D$. Por Modus Ponens, $h(b) \in D$, y consecuentemente, $b \in h^{-1}(D)$. Por lo tanto, $h^{-1}(D) \in \mathrm{Ds}(A)$.

2. $\Longrightarrow$ *1.* Supongamos que $h^{-1}(D) \in \mathrm{Ds}(A)$ para todo $D \in \mathrm{Ds}(B)$. Si $h(1) \neq 1$ entonces existe $D \in \mathrm{Ds}(B)$ tal que $h(1) \notin D$. Esto es, $1 \notin h^{-1}(D)$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $h(1) = 1$. Supongamos que $h(a \to b) \nleq h(a) \to h(b)$. Por Corolario 2.2.11, existe $x \in X(A)$ tal que $h(a \to b) \in x$ y $h(a) \to h(b) \notin x$. Consideremos el sistema deductivo $\langle x \cup h(a) \rangle$. Por Lema 2.2.2, tenemos que $h(b) \notin \langle x \cup h(a) \rangle$. Entonces existe $y \in X(A)$ tal que $\langle x \cup h(a) \rangle \subseteq y$ y $h(b) \notin y$. Es decir, existe $y \in X(A)$ tal que $x \subseteq y$, $h(a) \in y$ y $h(b) \notin y$. Tenemos entonces que $h(a \to b) \in y$, por lo tanto $a \to b \in h^{-1}(y)$. Como $a \in h^{-1}(y)$, por lo asumido podemos asegurar que $b \in h^{-1}(y)$. Luego, $h(b) \in y$, lo cual es una contradicción. Hemos probado entonces que h es un semi-homomorfismo.
■

Lema 2.3.3. *Sean A y B álgebra de Hilbert. Sea $h : A \to B$ un semi-homomorfismo. Si $x \in X(A)$, entonces $(h(x^c)] \in \mathrm{Id}(B)$.*

Demostración. Sea $x \in X(A)$. Está claro que $(h(x^c)]$ es un subconjunto decreciente de B. Sean $a, b \in (h(x^c)]$. Por lo tanto, existen $c, d \notin x$ tales que $a \leq h(c)$ y $b \leq h(d)$. Como x es un sistema deductivo irreducible, existe $e \notin x$ tal que $c, d \leq e$. Es inmediato que $h(e) \in (h(x^c)]$ y además, como h preserva el orden, $a \leq h(e)$ y $b \leq h(e)$. Luego, $(h(x^c)]$ es un ideal de orden de B. ∎

2.4. Teorema de Representación

A. Diego demostró en su tesis ([29]) que toda álgebra de Hilbert puede ser representada por medio de un álgebra de Heyting de conjuntos definida en un espacio topológico T_0. Por otro lado, es conocido que cualquier álgebra de Heyting (ver, por ejemplo [1] o [56]) es isomorfa a un álgebra de Heyting de subconjuntos crecientes de un conjunto ordenado. Como las álgebras de Hilbert corresponden a los reductos implicativos de las álgebras de Heyting nos podemos preguntar si es posible dar un resultado de representación para las álgebras de Hilbert por medio de conjuntos ordenados. Ahora vamos a presentar un resultado en este sentido. El mismo fue demostrado en [15].

Recordemos que para cualquier conjunto ordenado $\langle X, \leq \rangle$, la estructura

$$\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Rightarrow_{\leq}, X \rangle$$

es un álgebra de Hilbert, donde la implicación $\Rightarrow_{\leq}$ está dada por 1.2.

Para cada álgebra de Hilbert A consideremos el conjunto ordenado de los sistemas deductivos irreducibles $\langle X(A), \subseteq \rangle$, y la función

$$\varphi_A : A \to \mathcal{P}_{\subseteq}(X(A))$$

definida de la siguiente manera:

$$\varphi_A(a) = \{x \in X(A) : a \in x\}.$$

Para simplificar la notación escribiremos φ en lugar de φ_A, y $\Rightarrow$ en lugar de $\Rightarrow_{\subseteq}$, cuando esto no produzca confusiones. Como $\langle X(A), \subseteq \rangle$ es un conjunto ordenado, entonces

$$\langle \mathcal{P}_{\subseteq}(X(A)), \Rightarrow, X(A) \rangle$$

es un álgebra de Hilbert. Ahora damos el teorema de representación y su prueba.

Teorema 2.4.1. *Sea A un álgebra de Hilbert. Entonces φ es un homomorfismo inyectivo de A en $\langle \mathcal{P}_{\subseteq}(X(A)), \Rightarrow, X(A) \rangle$.*

Demostración. Veamos primero que φ es una aplicación inyectiva. Sean $a, b \in A$ con $a \neq b$. Supongamos que $a \nleq b$. Por Corolario 2.2.11, existe $x \in X(A)$ tal que $a \in x$ y $b \notin x$. Esto es, $x \in \varphi(a)$ y $x \notin \varphi(b)$. Por consiguiente, $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. La misma conclusión se obtiene para $b \nleq a$.

Veamos ahora que φ es un homomorfismo, es decir, que

$$\varphi(a \to b) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b),$$

para cualesquiera $a, b \in A$. Supongamos que $x \in X(A)$ es tal que $x \in \varphi(a \to b)$. Esto es, $a \to b \in x$. Consideremos $y \in X(A)$ tal que $y \in [x) \cap \varphi(a)$. Por lo tanto, $x \leq y$ y $a \in y$. Luego, $a \to b \in y$ y consecuentemente, $b \in y$. Es decir, $y \in \varphi(b)$. Hemos probado entonces que $\varphi(a \to b) \subseteq \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b)$.

Supongamos ahora que existe $x \in X(A)$ tal que $x \notin \varphi(a \to b)$. Entonces, $a \to b \notin x$. Por Corolario 2.2.11, existe $y \in X(A)$ tal que $x \subseteq y$, $a \in y$ y $b \notin y$. Luego, $y \in [x) \cap \varphi(a)$ pero $y \notin \varphi(b)$. Entonces, $x \notin \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b)$. ■

Notemos que si A es un álgebra de Hilbert acotada entonces $\varphi(0) = \emptyset$.

2.5. Congruencias

Sea $A = \langle A, \to, 1\rangle$ un álgebra de Hilbert. Una congruencia θ definida sobre A es una relación de equivalencia compatible con $\to$, esto es, si

$$(a, b), (c, d) \in \theta, \text{ entonces } (a \to c, b \to d) \in \theta.$$

Denotamos al conjunto de todas las congruencias definidas en A por $\mathrm{Con}(A, \to)$. El conjunto ordenado $\langle \mathrm{Con}(A, \to), \subseteq\rangle$ admite una estructura de retículo donde el primer elemento es la relación de igualdad ω, el último elemento es $\iota = A \times A$, el ínfimo coincide con la intersección de conjuntos, y el supremo $\vee$ se define como sigue:

para toda $\theta, \Phi \in \mathrm{Con}(A, \to)$ tenemos que $(a, b) \in \theta \vee \Phi$ si y sólo si existe $c_0 = a, c_1, ..., c_n = b$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que $(c_i, c_{i+1}) \in \theta \cup \Phi$ para todo $i = 0, 1, ..., n-1$.

Un resultado bien conocido es que el retículo de congruencias de un álgebra de Hilbert es isomorfo al retículo de los sistemas deductivos de la misma. Esta relación fue probada en primer lugar por A. Monteiro, pero la primer publicación conocida es de Gluschankof y Tilli en [35].

El conjunto $[1]_\theta = \{x \in A : (x, 1) \in \theta\}$ es llamado *núcleo* de θ.

Pueden verse en [29], [35] y [26] los siguientes resultados.

Si A es un álgebra de Hilbert y θ es un congruencia definida sobre A, entonces $[1]_\theta \in \mathrm{Ds}(A)$. Además, si $D \in \mathrm{Ds}(A)$ entonces la relación θ_D definida por

$$(a, b) \in \theta_D \textit{ si y sólo si } a \to b \in D \textit{ y } b \to a \in D$$

es una congruencia sobre A tal que $[1]_{\theta_D} = D$. Luego, el retículo de congruencias definidas sobre A y el formado por todos los sistemas deductivos de A son isomorfos bajo las funciones $\theta \rightarrow [1]_\theta$ y $D \rightarrow \theta_D$, las cuales son una inversa de la otra.

Como el retículo $\langle \mathrm{Ds}(A), \subseteq \rangle$ es distributivo, resulta que el retículo de congruencias definidas sobre A es distributivo, y por lo tanto podemos afirmar que la variedad de álgebras de Hilbert Hil tiene la propiedad de distributividad de congruencias.

2.6. Cálculo Implicativo Positivo $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$

En esta sección revisamos brevemente al fragmento del Cálculo Proposicional Intuicionista ($\mathbf{Int}$) donde sólo figura el conectivo implicación, al cual denotamos con $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$.

El estudio del sistema $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$ se inicia en el primer volumen de los "Grundlagen der Mathematik" de D.Hilbert y P.Bernays (1939). Más tarde, Henkin, en "An Algebraic Characterization of Quantifiers" (1950) mostró que la noción de modelos implicativos es el instrumento algebraico adecuado para el estudio del Cálculo Proposicional Positivo y son las álgebras de Hilbert, siguiendo la nomenclatura usada por D. Hilbert, las álgebras duales de los modelos implicativos.

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje que consiste de un conjunto infinito enumerable de variables proposicionales que denotaremos con Var, para las cuales utilizamos las letras $p, q, r, p_1, \ldots$, los símbolos "(", ")", una constante proposicional $\top$ y el conectivo $\rightarrow$. El conjunto de todas las fórmulas de $\mathcal{L}$, es el menor conjunto *Fm* de sucesiones finitas de expresiones del lenguaje tal que $\mathcal{L} \subseteq$ *Fm* y si ϕ, ψ pertenecen a *Fm* entonces $(\phi \rightarrow \psi)$ pertenece a *Fm*.

Sea $\mathcal{D}$ el menor subconjunto de fórmulas tal que $\mathcal{D} \subseteq$ *Fm* y además contiene a todas las fórmulas de los tipos

$(A1)$ $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$,

$(A2)$ $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \rho)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \rho))$,

está cerrado por sustituciones y por la siguiente regla de inferencia:

Modus Ponens: $\dfrac{\phi, \phi \rightarrow \psi}{\psi}$.

Las fórmulas $(A1), (A2)$ se dicen *axiomas* y $\mathcal{D}$ es el conjunto de los teoremas o fórmulas demostrables. Luego, el sistema $\langle Fm, \mathcal{D}, \rightarrow \rangle$ es el $\{\rightarrow, \top\}$-fragmento del Cálculo Proposicional Intuicionista $\mathbf{Int}$ y lo notamos $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$. La noción de álgebra de Hilbert es el instrumento algebraico adecuado para el estudio de $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$.

El conjunto formado por el conectivo $\rightarrow$ y la constante $\top$ puede ser considerado como los símbolos de operaciones en el lenguaje algebraico de tipo $(2, 0)$, donde las fórmulas son los términos en este lenguaje algebraico. En consecuencia, podemos considerar el *álgebra de los términos*, o *álgebra de las fórmulas* como el álgebra:

$$\left\langle Fm, \rightarrow^{Fm}, \top^{Fm} \right\rangle$$

donde para cualquier $\phi, \psi \in Fm$:

$$\rightarrow^{Fm} (\phi, \psi) = (\phi \rightarrow \psi).$$

$$\top^{Fm} = \top.$$

Definición 2.6.1. Llamaremos *lógica implicacional* $\mathcal{I}$ a cualquier extensión de $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$, es decir, $\mathcal{I}$ es cualquier lógica tal que $\mathbf{Int}^{\rightarrow} \subseteq \mathcal{I}$.

Por ejemplo, en [61], Prior define dos extensiones diferentes de $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$ por medio de los axiomas

$$L = ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \rho) \rightarrow (((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \rho) \rightarrow \rho)$$

y

$$O = (((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow \rho) \rightarrow (((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \rho) \rightarrow \rho).$$

Además, Prior muestra que la extensión $\mathbf{Int}^{\rightarrow} + \{O\}$ está propiamente contenida en la extensión $\mathbf{Int}^{\rightarrow}+\{L\}$, pero sin embargo L es derivable en $\mathbf{Int}^{\rightarrow}+\{O\}$ cuando ésta lógica es enriquecida con la conjunción intuicionista. Es decir, ambas lógicas son idénticas en la lógica intuicionista $\mathbf{Int}$.

La siguiente definición nos muestra un procedimiento para derivar fórmulas a partir de conjuntos de fórmulas utilizando los axiomas $(A1)$, $(A2)$ y Modus Ponens.

Definición 2.6.2. Sea $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq Fm$, decimos que ϕ se *deduce* de Γ en $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$, y escribimos $\Gamma \vdash_{\mathbf{Int}^{\rightarrow}} \phi$, si y sólo si existe una sucesión finita de fórmulas $\phi_1, ..., \phi_n = \phi$ con $n \geq 1$, tal que se verifica alguna de las siguientes condiciones:

1. $\phi_i \in \{(A1), (A2)\} \cup \Gamma$, para $1 \leq i \leq n$,
2. la fórmula ϕ_i se obtiene por aplicación de la regla Modus Ponens de dos fórmulas anteriores, es decir existen índices $k, h < i$ tales que

$$\phi_k = \phi_h \rightarrow \phi_i.$$

Cuando $\Gamma = \emptyset$, escribimos $\vdash_{\mathbf{Int}^{\rightarrow}} \phi$ y decimos que ϕ es un teorema de $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$. Es decir, $\phi \in \mathcal{D}$ pues es una fórmula deducible únicamente a partir de los axiomas de $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$ y la regla de Modus Ponens. Si ϕ es un teorema de $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$, escribimos $\vdash_{\mathbf{Int}^{\rightarrow}} \phi$ o bien $\phi \in$

$\mathbf{Int}^{\rightarrow}$. Omitimos $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$ de $\vdash_{\mathbf{Int}^{\rightarrow}}$ en contextos donde es claro que estamos trabajando en $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$.

Notemos que el Teorema de la Deducción es válido en $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$, pues se cumplen los axiomas A_1 y A_2, y además, la única regla mencionada en la definición anterior es Modus Ponens. Por consiguiente, si $\Gamma \cup \{\phi, \psi\}$ es un conjunto de fórmulas y $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq$ *Fm* con $\phi \notin \Gamma$ y ϕ no es axioma de $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$, tal que $\Gamma \vdash \phi$, entonces existe $\{\phi_1, ..., \phi_n\} \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma \cup \{\phi_1, ..., \phi_n\} \vdash \phi$. Por el Teorema de la Deducción,

$$\Gamma \vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow ... \rightarrow (\phi_n \rightarrow \phi)...)).$$

Definición 2.6.3. Un conjunto de fórmulas T es una *teoría* si está cerrado por la relación $\vdash$. Es decir, si $T \vdash \phi$ entonces $\phi \in T$.

Una teoría es *consistente* si existe una fórmula ϕ tal que $\phi \notin T$.

Usando la definición de teoría obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.6.4. *Sea T una teoría y sean $\phi, \psi \in$ Fm. Entonces:*

1. *$\phi \in T$, para todo teorema ϕ.*
2. *T es cerrada por Modus Ponens.*
3. *$\top \in T$.*
4. *$\phi \in T$ si y sólo si $\top \rightarrow \phi \in T$.*

Sea T una teoría de $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$. Definimos la relación de equivalencia $\equiv_T$ sobre *Fm* de la siguiente manera:

$$\phi \equiv_T \psi \;\; \textit{si y sólo si } \phi \rightarrow \psi \in T \textit{ y } \psi \rightarrow \phi \in T.$$

Se puede ver una demostración del siguiente resultado en [53].

Lema 2.6.5. *Sea T una teoría. La relación $\equiv_T$ definida sobre* Fm *es una relación de congruencia. Además,*

1. *Si $\phi \equiv_T \psi$ y $\phi \in T$, entonces $\psi \in T$, para $\phi, \psi \in Fm$. Más aún, $\equiv_T$ es la mayor congruencia con esta propiedad.*
2. *$\phi \equiv_T \top$ si y sólo si $\phi \in T$.*

Podemos definir la clase de equivalencia $[\phi] = \{\psi \in Fm : \phi \equiv_T \psi\}$. Por lo tanto, si T es una teoría, podemos identificar la teoría con la clase de equivalencia de $\top$, i.e., $[\top] = T$. Luego,

$$Fm/ \equiv_T = \{[\phi] : \phi \in Fm\}.$$

En el conjunto $Fm/ \equiv_T$ definimos la operación $[\phi] \rightarrow [\psi] = [\phi \rightarrow \psi]$. Es sencillo probar que

$$A(\mathcal{L})_T = \langle Fm/ \equiv_T, \rightarrow, T\rangle$$

es un álgebra de Hilbert, llamada álgebra de Lindenbaum-Tarski asociada a la teoría T. Si T es el conjunto de todos los teoremas, esto es, $T = \{\phi \in Fm : \ \vdash \phi\}$, escribimos directamente $\equiv$ y $A(\mathcal{L})$.

Sea $A = \langle A, \rightarrow, 1\rangle \in$ Hil y consideremos al conjunto de variables Var. Una *valuación* definida en A es cualquier función $v : Var \rightarrow A$ que puede extenderse de modo único a un homomorfismo $\overline{v}$ entre el álgebra de las fórmulas $\langle Fm, \rightarrow^{Fm}, \top^{Fm}\rangle$ y $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ de la siguiente forma:

1. $\overline{v}(p) = v(p)$, para todo $p \in Var$,
2. $\overline{v}(\top) = v(\top) = 1$,
3. $\overline{v}(\phi \rightarrow \psi) = \overline{v}(\phi) \rightarrow \overline{v}(\psi)$, para cualquier $\phi, \psi \in Fm$.

Es claro que $\overline{v} \upharpoonright_{Var} = v$ y que la extensión $\overline{v}$ es un homomorfismo del álgebra libre $\langle Fm, \rightarrow^{Fm}, \top^{Fm}\rangle$ en $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$. Como esta extensión es única, escribiremos v tanto para la valuación como para su extensión. Luego, podemos identificar al conjunto de las valuaciones definidas en A con el conjunto de los homomorfismos de Hilbert $Hom(Fm, A)$.

Definición 2.6.6. Sea $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ un álgebra de Hilbert y $v \in Hom(Fm, A)$. Se denomina *modelo algebraico* al par $\langle A, v\rangle$.

A continuación definimos la validez de las fórmulas o conjuntos de fórmulas, y de ecuaciones en un modelo algebraico.

Definición 2.6.7. Sea $\langle A, v\rangle$ un modelo algebraico, $\Gamma \cup \{\phi, \delta\} \subseteq Fm$.

1. Una ecuación $\phi \approx \delta$ es válida en $\langle A, v\rangle$, en símbolos: $\langle A, v\rangle \models \phi \approx \delta$, si $v(\phi) = v(\delta)$.
2. Una fórmula ϕ es válida en $\langle A, v\rangle$ si la ecuación $\phi \approx 1$ es válida en $\langle A, v\rangle$, i.e., $v(\phi) = 1$. Podemos escribirlo simbólicamente: $\langle A, v\rangle \models \phi$.
3. Diremos que el conjunto de fórmulas Γ es válido en $\langle A, v\rangle$, si $v(\psi) = 1$ para toda fórmula ψ en Γ, y escribiremos $\langle A, v\rangle \models \Gamma$ o bien $v(\Gamma) = 1$, para indicarlo.

4. La ecuación $\phi \approx \delta$ es válida en A, en símbolos: $A \models \phi \approx \delta$ o bien $\models_A \phi \approx \delta$, si $\langle A, v\rangle \models \phi \approx \delta$ para toda $v \in Hom(\boldsymbol{Fm}, A)$.

5. Una fórmula ϕ es válida en A si la ecuación $\phi \approx 1$ es válida en A. Simbólicamente: $A \models \phi$ o bien $\models_A \phi$.

Denotamos por $Th(A)$ al conjunto de todas las fórmulas válidas en A, i.e.,

$$Th(A) = \{\phi \in \boldsymbol{Fm} : A \models \phi \approx 1\} = \{\phi \in \boldsymbol{Fm} : \models_A \phi \approx 1\}.$$

Definición 2.6.8. Dada la variedad de álgebras de Hilbert Hil, definimos la *relación de consecuencia algebraica* de la siguiente manera:

1. $\phi_1, ..., \phi_n \models_{\mathrm{Hil}} \phi \Leftrightarrow \forall A \in \mathrm{Hil}\, \forall v \in Hom(\boldsymbol{Fm}, A) : v\left((\phi_1, ..., \phi_n; \phi)\right) = 1.$

2. $\models_{\mathrm{Hil}} \phi \Leftrightarrow \forall A \in \mathrm{Hil}\, \forall v \in Hom(\boldsymbol{Fm}, A) : v\left(\phi\right) = 1.$

Teniendo en cuenta la definición anterior obtenemos que, dada una clase de álgebras de Hilbert $\mathbb{H}$,

$$Th(\mathbb{H}) = \bigcap \{Th(A) : A \in \mathbb{H}\}.$$

Teorema 2.6.9. *Si A es un álgebra de Hilbert, entonces $Th(A)$ es una lógica implicacional. Si $\mathbb{H}$ es una clase de álgebras de Hilbert, entonces $Th(\mathbb{H})$ es una lógica implicacional.*

Demostración. Sea A un álgebra de Hilbert y sea $v \in Hom(\boldsymbol{Fm}, A)$. Por $(H1)$,$(H2)$ de la definición de álgebra de Hilbert y por ser v un homomorfismo de Hilbert, tenemos que $Th(A)$ es cerrado bajo los axiomas $(A1)$ y $(A2)$. Sean $\phi, \psi \in \boldsymbol{Fm}$ tales que $A \models \phi \approx 1$ y $A \models \phi \to \psi \approx 1$. Entonces para todo $v \in Hom(\boldsymbol{Fm}, A)$ se satisface que $v(\phi) = 1$ y $v\left(\phi \to \psi\right) = v\left(\phi\right) \to v(\psi) = 1$. Por lo tanto, $1 = v\left(\phi\right) \leq v(\psi)$, por lo cual $v(\psi) = 1$. Es decir, $A \models \psi \approx 1$. Hemos probado entonces que $Th(A)$ es cerrado por Modus Ponens. Sea $e : \boldsymbol{Fm} \to \boldsymbol{Fm}$ una sustitución y sea $\phi \in \boldsymbol{Fm}$ tal que $A \models \phi \approx 1$. Como $v \circ e \in Hom(\boldsymbol{Fm}, A)$, tenemos que $(v \circ e)\left(\phi\right) = v(e(\phi)) = 1$, esto es $A \models e(\phi) \approx 1$. Por ende, $Th(A)$ es cerrado por sustituciones. Hemos probado entonces que $Th(A)$ es una lógica implicacional. Luego, por la definición de $Th(\mathbb{H})$, es claro que $Th(\mathbb{H})$ es una lógica implicacional. ■

Sea Γ un conjunto de fórmulas. Observemos que para cada fórmula $\phi \in \Gamma$ podemos considerar la ecuación $\phi \approx 1$. Consecuentemente, a cada conjunto de fórmulas Γ podemos definirle el conjunto de ecuaciones de Γ, es decir, $\Gamma^{\approx} = \{\phi \approx 1 : \phi \in \Gamma\}$. La variedad de álgebras de Hilbert definida por el conjunto de ecuaciones $\Gamma^{\approx}$ es denotada por $\mathcal{V}(\Gamma^{\approx})$. Esto es

$$\mathcal{V}(\Gamma^{\approx}) = \{A \in \mathrm{Hil} : A \models \phi \approx 1, \text{ para todo } \phi \in \Gamma\}.$$

Notemos que a cada lógica implicacional $\mathcal{I}$ le corresponde una variedad de álgebras de Hilbert definida como sigue

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}) = \{A \in \text{Hil} : A \models \phi \approx 1, \text{ para todo } \phi \in \mathcal{I}\}.$$

A continuación, mostramos que toda lógica implicacional $\mathcal{I}$ es completa con respecto a la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{I})$. Para ello, probaremos los siguientes resultados previos.

Teorema 2.6.10. *Sea $\mathcal{I}$ una lógica implicacional. Entonces*

$$Th(A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}})) = \mathcal{I}.$$

Es decir,

$$\phi \in \mathcal{I} \textit{ si y sólo si } \models_{A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}} \phi \approx 1.$$

Demostración. Consideremos el homomorfismo canónico $q : \mathit{Fm} \to \mathit{Fm}/\equiv_{\mathcal{I}}$ tal que $q(\phi) = [\phi]$ para $\phi \in \mathit{Fm}$.

Para probar la condición suficiente, asumamos que $\phi \in \mathcal{I}$ y consideremos el modelo algebraico $\langle A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}, v\rangle$ donde $v \in Hom(\mathit{Fm}, \mathit{Fm}/\equiv_{\mathcal{I}})$. Definimos una sustitución de la siguiente manera, $e : \mathit{Fm} \to \mathit{Fm}$ tal que $e(p) = \alpha_p$ para algún $\alpha_p \in \mathit{Fm}$ de manera que $v(p) = q(\alpha_p) = [\alpha_p]$, i.e., $v = q \circ e$. Entonces, para $\phi \in \mathcal{I}$ resulta $v(\phi) = (q \circ e)(\phi) = [e(\phi)]$. Como $\mathcal{I}$ está cerrado por sustituciones, $e(\phi) \in \mathcal{I}$. Luego, $v(\phi) = [e(\phi)] = [\top] = 1$. Como v es una valuación arbitraria, tenemos que ϕ es válida en $A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}$, es decir, $\models_{A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}} \phi$.

Para probar la recíproca, supongamos que $\phi \notin \mathcal{I}$. Entonces $\phi \not\equiv_{\mathcal{I}} \top$, i.e., $q(\phi) \neq 1$. Como $q \in Hom(\mathit{Fm}, \mathit{Fm}/\equiv_{\mathcal{I}})$, q es una valuación de $A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}$ con $q(\phi) \neq 1$. Luego, $\not\models_{A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}} \phi \approx 1$. ■

Corolario 2.6.11. *Sea $\mathcal{I}$ una lógica implicacional. Para cada par de fórmulas ϕ, δ:*

$$\models_{A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}} \phi \approx \delta \iff \phi \to \delta \in \mathcal{I} \text{ y } \delta \to \phi \in \mathcal{I}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\models_{A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}} \phi \approx \delta \quad &\iff \quad v(\phi) = v(\delta), \forall v \in Hom(\text{Fm}, \text{Fm}/\equiv_{\mathcal{I}}) \\
&\iff \quad v(\phi \to \delta) = 1 \text{ y } v(\delta \to \phi) = 1, \forall v \in Hom(\text{Fm}, \text{Fm}/\equiv_{\mathcal{I}}) \\
&\iff \quad \phi \to \delta \approx 1 \text{ y } \delta \to \phi \approx 1 \textit{ son válidas en } A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}} \\
&\iff \quad \phi \to \delta \in \mathcal{I} \text{ y } \delta \to \phi \in \mathcal{I}.
\end{aligned}$$

■

Ahora estamos en condiciones de demostrar la completitud de una lógica implicacional $\mathcal{I}$ respecto de $\mathcal{V}(\mathcal{I})$, es decir, respecto de la variedad de álgebras de Hilbert correspondiente.

Teorema 2.6.12. *(de competitud algebraica) Toda lógica implicacional $\mathcal{I}$ es completa con respecto a la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{I})$, es decir,*

$$\models_{\mathcal{V}(\mathcal{I})} \phi \iff \vdash_{\mathcal{I}} \phi.$$

Demostración. *Debemos mostrar que $Th(\mathcal{V}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$. Es claro que $\mathcal{I} \subseteq Th(\mathcal{V}(\mathcal{I}))$. Para probar la otra inclusión, supongamos que existe $\phi \in \mathrm{Fm}$ tal que $\phi \in Th(\mathcal{V}(\mathcal{I}))$ y $\phi \notin \mathcal{I}$. Si $\phi \notin \mathcal{I}$ por Teorema 2.6.10 tenemos que $\phi \notin Th\left(A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}\right)$, es decir, $A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}} \nvDash \phi$, lo cual es absurdo pues ϕ es válida en toda álgebra de Hilbert perteneciente a la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{I})$, en particular en $A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}$, el álgebra de Lindenbaum-Tarski asociada a $\mathcal{I}$.* ■

2.7. Semántica relacional para $\mathrm{Int}^{\to}$

Es conocido que la lógica intuicionista $\mathbf{Int}$ se puede estudiar semánticamente por medio de marcos de Kripke adecuados. Un marco de Kripke para $\mathbf{Int}$ o un marco intuicionista es simplemente un conjunto ordenado $\langle X, \leq\rangle$ donde por medio de una adecuada noción de valuación se interpretan las fórmulas de $\mathbf{Int}$. Para más detalles se puede consultar el libro [25]. Una generalización de la semántica de Kripke es la semántica representada por marcos generales. Los marcos generales son una semántica intermedia entre los marcos de Kripke y la semántica algebraica. También podríamos decir que los marcos generales son una combinación de una estructura relacional y una estructura algebraica.

Un marco general intuicionista es una estructura $\langle X, \leq, \mathcal{D}\rangle$ donde $\langle X, \leq\rangle$ es un marco intuicionista y $\mathcal{D}$ es una subálgebra de Heyting del álgebra de Heyting de conjuntos $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \Rightarrow, \emptyset, X\rangle$. Las valuaciones de $\langle X, \leq, \mathcal{D}\rangle$ son las valuaciones que se pueden definir en la subálgebra $\mathcal{D}$. Ahora veremos como extender estas nociones al caso de la lógica $\mathbf{Int}^{\to}$.

Consideremos el par $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ donde X es un conjunto y $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Definimos la relación

$$\leq_{\mathcal{K}} \subseteq X \times X$$

por

$$x \leq_{\mathcal{K}} y \text{ si y sólo si } \forall W \in \mathcal{K}(x \notin W \text{ implica } y \notin W). \tag{2.1}$$

Es fácil ver que la relación $\leq_{\mathcal{K}}$ es reflexiva y transitiva. Notemos que en general $\leq_{\mathcal{K}}$ no es un orden. Más adelante veremos que cuando $\mathcal{K}$ sea la base de una topología T_0, entonces $\leq_{\mathcal{K}}$ corresponde al dual del orden asociado a la topología.

A continuación definimos dos operadores:

$$\mathrm{sat} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

y

$$\mathrm{cl} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X),$$

de la siguiente forma. Para cada $Y \subseteq X$, sea

$$\mathrm{sat}(Y) = \bigcap \{W : Y \subseteq W \in \mathcal{K}\} \tag{2.2}$$

y

$$\mathrm{cl}(Y) = \bigcap \{X - W : Y \cap W = \emptyset \;\&\; W \in \mathcal{K}\}\,. \tag{2.3}$$

Vamos a utilizar la relación binaria definida en 2.1 y el operador sat definido en 2.2.

Definición 2.7.1. Un *H-marco general* es un par

$$\langle X, \mathcal{K}\rangle$$

de manera que $\langle X, \leq_{\mathcal{K}}\rangle$ es un conjunto ordenado y $\mathrm{sat}(U \cap V^c) \in \mathcal{K}$ para todo $U, V \in \mathcal{K}$.

Es claro que si $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ es un H-marco general entonces $\langle X, \leq_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}\rangle$ es un H-conjunto (ver Ejemplo 2.1.4).

Observación 2.7.2. Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un H-marco general. Entonces para todo $Y \subseteq X$ se tiene que

$$\mathrm{sat}(Y) = (Y]_{\leq_{\mathcal{K}}} = \{x \in X : \exists y \in Y \; (x \leq_{\mathcal{K}} y)\}$$

y

$$\mathrm{cl}(Y) = [Y)_{\leq_{\mathcal{K}}} = \{x \in X : \exists y \in Y \; (y \leq_{\mathcal{K}} x)\}\,.$$

En efecto. Es claro que $\mathrm{sat}(Y) \subseteq (Y]_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Para probar la otra inclusión, tomemos $x \in (Y]_{\leq_{\mathcal{K}}}$ y supongamos que $x \notin \mathrm{sat}(Y)$. Por lo tanto, existe $W \in \mathcal{K}$ tal que $Y \subseteq W$ y $x \notin W$. Como $x \in (Y]_{\leq_{\mathcal{K}}}$, existe $y \in Y$ tal que $x \leq_{\mathcal{K}} y$. Luego, $y \in V$ para todo $V \in \mathcal{K}$ tal que $Y \subseteq V$. En particular, para $V = W$ tenemos que $x \in W$, lo cual es imposible. Análogamente se prueba que $\mathrm{cl}(Y) = [Y)_{\leq_{\mathcal{K}}}$.

Consecuentemente, podemos probar que para todo $U, V \in \mathcal{P}_{\leq_{\mathcal{K}}}$ se verifica que

$$U \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} V = \mathrm{sat}(U \cap V^c)^c,$$

donde recordemos que $U \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} V = (U \cap V^c]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Asumamos que $x \in X$ tal que $x \in U \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} V$, i.e., $[x)_{\leq_{\mathcal{K}}} \cap U \subseteq V$. Supongamos que $x \in \mathrm{sat}(U \cap V^c) = (U \cap V^c]_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Entonces existe $y \in U \cap V^c$ tal que $x \leq_{\mathcal{K}} y$. Como $y \in U$ y $U \in \mathcal{P}_{\leq_{\mathcal{K}}}$, resulta que $x \in U$. Luego, $x \in [x)_{\leq_{\mathcal{K}}} \cap U$ y consecuentemente, $x \in V$ lo cual es imposible. Por lo tanto,$U \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} V \subseteq \mathrm{sat}(U \cap V^c)^c$. Consideremos ahora que $x \in \mathrm{sat}(U \cap V^c)^c$, entonces existe $W \in \mathcal{K}$ tal que $U \cap V^c \subseteq W$ y $x \notin W$. Veamos que $x \in U \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} V$. Sea $y \in [x)_{\leq_{\mathcal{K}}} \cap U$. Esto es $x \leq_{\mathcal{K}} y$ e $y \in U$. Como $x \notin W$ y $W \in \mathcal{K}$, resulta que $y \notin W$ y por lo tanto, $y \notin U \cap V^c$. Como $y \in U$, tenemos que $y \in V$.

Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un H-marco general. Consideremos el conjunto

$$D(X) = \{U : U^c \in \mathcal{K}\}.$$

Lema 2.7.3. *Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un H-marco general. Entonces*

$$\langle D(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$$

es una subálgebra del álgebra de Hilbert dual $\langle H_{\mathcal{K}}(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$ del H-conjunto $\langle X, \leq_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}\rangle$. Más aún, $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$ es subálgebra del álgebra de Hilbert $\langle \mathcal{P}_{\leq_{\mathcal{K}}}(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$.

Demostración. Sea $U \in D(X)$. Veamos que $U = U^c \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} \emptyset$, es decir, que $U = (U^c]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$ usando la observación anterior. Como $U^c \subseteq (U^c]_{\leq_{\mathcal{K}}}$, resulta $(U^c]^c_{\leq_{\mathcal{K}}} \subseteq U$. Supongamos que $x \notin (U^c]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Existe $y \in U^c$ tal que $x \leq_{\mathcal{K}} y$. Como $U^c \in \mathcal{K}$ e $y \in U^c$, resulta que $x \in U^c$. Tenemos entonces que $U \in H_{\mathcal{K}}(X)$. Luego, $D(X) \subseteq H_{\mathcal{K}}(X)$. Además, por la observación anterior, para todo $U, V \in D(X), U \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} V = \mathrm{sat}(U \cap V^c)^c \in D(X)$. Por lo tanto, $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$ subálgebra de Hilbert de $\langle H_{\mathcal{K}}(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$. Por el Ejemplo 2.1.4, $\langle H_{\mathcal{K}}(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$ es subálgebra del álgebra de Hilbert $\langle \mathcal{P}_{\leq_{\mathcal{K}}}(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$. Por consiguiente, $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$ es subálgebra del álgebra de Hilbert $\langle \mathcal{P}_{\leq_{\mathcal{K}}}(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$.
■

El Lema anterior nos dice que dado un H-marco general $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ se pueden definir tres álgebras de Hilbert diferentes.

Una valuación V definida sobre un H-marco general $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ es una función V definida de Var en $D(X)$. Toda valuación V puede extenderse recursivamente a *Fm* por medio de las siguientes cláusulas:

1. $\overline{V}(p) = V(p)$ para cada variable $p \in Var$,
2. $\overline{V}(\top) = X$,
3. $\overline{V}(\phi \to \psi) = \overline{V}(\phi) \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} \overline{V}(\psi) = \mathrm{sat}(\overline{V}(\phi) \cap \overline{V}(\psi)^c)^c$.

Es claro que $\overline{V}_{1_{Var}} = V$ y como $\overline{V}$ es una extensión única de V desde el álgebra libre $\langle Fm, \to^{Fm}, \top^{Fm}\rangle$ a $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$, podemos utilizar el mismo símbolo para la valuación y su extensión. Notemos que toda función V es una valuación en un H-marco general $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}\rangle$ si y sólo si es un homomorfismo entre el álgebra de todas las fórmulas $\langle Fm, \to^{Fm}, \top^{Fm}\rangle$ y $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$. Es decir, el conjunto de todas las valuaciones definidas en el H-marco general $\mathcal{F}$ es $Hom(Fm, D(X))$.

Llamaremos *modelo general* a toda estructura $\mathcal{M} = \langle X, \mathcal{K}, V\rangle$ donde $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ es un H-marco general y V es una valuación definida sobre $\langle X, \mathcal{K}\rangle$.

Sea $\langle X, \mathcal{K}, V\rangle$ un modelo general y sea Γ un conjunto de fórmulas. Definimos:

$$V(\Gamma) = \bigcap_{\phi\in\Gamma} V(\phi).$$

Si $\Gamma = \emptyset$ entonces $V(\Gamma) = X$.

En la siguiente definición introducimos las nociones semánticas de validez de fórmulas en un H-marco general $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}\rangle$ y las nociones de verdad y validez de fórmulas del correspondiente modelo $\langle \mathcal{F}, V\rangle$.

Definición 2.7.4. Sea $\mathcal{F}$ un H-marco general, V una valuación definida sobre $\mathcal{F}$ y $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ su correspondiente modelo general. Sea $\phi \in$ *Fm*. Entonces

1. Una fórmula ϕ es verdadera en un punto $x \in X$ del modelo general $\langle \mathcal{F}, V\rangle$, y escribimos $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_x \phi$, si $x \in V(\phi)$.
2. Una fórmula ϕ es válida en el modelo general $\langle \mathcal{F}, V\rangle$, y escribimos $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models \phi$, si es válida en todo punto de X, i.e., $V(\phi) = X$.
3. Una fórmula ϕ es válida en el H-marco general $\mathcal{F}$, en símbolos $\mathcal{F} \models \phi$, si para cualquier valuación V definida sobre $\mathcal{F}$, ϕ es válida en el modelo general $\langle \mathcal{F}, V\rangle$.

Luego, si Γ es un conjunto de fórmulas, tenemos que $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models \Gamma$ si $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models \phi$ para cada $\phi \in \Gamma$.

Notemos que $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models \phi \rightarrow \psi$ es equivalente a afirmar que

$$V(\phi \rightarrow \psi) = V(\phi) \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} V(\psi) = X.$$

Es decir, $V(\phi) \subseteq V(\psi)$.

A continuación, probamos que toda lógica implicacional $\mathcal{I}$ es completa con respecto a $\mathcal{V}(\mathcal{I})$, es decir, a la variedad de álgebras de Hilbert que ella genera, y además mostramos que es completa con respecto a la clase de todos los H-marcos generales donde las fórmulas de $\mathcal{I}$ son válidas. Para ello definimos previamente los siguientes conceptos.

Definición 2.7.5. Sea $\mathcal{I}$ una lógica implicacional. Denotaremos con $\mathrm{GFr}(\mathcal{I})$ a la clase de todos los H- marcos generales donde las fórmulas de $\mathcal{I}$ son válidas. Es decir,

$$\mathrm{GFr}(\mathcal{I}) = \{\mathcal{F} \textit{ marco general} : \mathcal{F} \models \phi \textit{ para toda } \phi \in \mathcal{I}\}.$$

Sea $\mathcal{F}$ un H-marco general y $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V\rangle$ un modelo general. La *teoría* de $\mathcal{F}$ y la *teoría* de $\mathcal{M}$ son los conjuntos de fórmulas

$$Th(\mathcal{F}) = \{\phi \in \textit{Fm} : \mathcal{F} \models \phi\}$$

y

$$Th(\mathcal{M}) = \{\phi \in \mathit{Fm} : \mathcal{M} \models \phi\},$$

respectivamente. La *teoría* de una clase de H-marcos generales F son las fórmulas válidas en todo marco de F, es decir:

$$Th(\mathrm{F}) = \{\phi \in \mathit{Fm} : \mathcal{F} \models \phi, \textit{ para todo } \mathcal{F} \in \mathrm{F}\}.$$

Diremos que una lógica implicacional $\mathcal{I}$ es *completa* respecto a la clase F de H-marcos generales, cuando $\phi \in \mathcal{I}$ si y sólo si $\phi \in Th(\mathrm{F})$.

Observación 2.7.6. Como cualquier valuación V definida en un H-marco general $\mathcal{F}$ es un homomorfismo entre el álgebra de Hilbert de todas las fórmulas $\langle \mathit{Fm}, \rightarrow^{\mathit{Fm}}, \top^{\mathit{Fm}}\rangle$ y el álgebra de Hilbert $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, X\rangle$, tenemos que $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ es un modelo general si y sólo si $\langle D(X), V\rangle$ es un modelo algebraico. Por lo tanto, ϕ es válida en un H-marco general $\mathcal{F}$ si y sólo si la ecuación $\phi \approx 1$ es válida en $D(X)$.

De la observación anterior, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado:

Teorema 2.7.7. *Sea $\mathcal{F}$ un H-marco general. Entonces, $Th(\mathcal{F}) = Th(D(X))$, esto es,*

$$\mathcal{F} \models \phi \textit{ si y sólo si } \models_{D(X)} \phi \approx 1.$$

Ahora bien, tomemos un álgebra de Hilbert A y consideremos la familia de conjuntos

$$\mathcal{K}_A = \{X(A) - \varphi(a) = \varphi(a)^c : a \in A\} \subseteq \mathcal{P}_{\leq_{\mathcal{K}_A}}(X(A)). \tag{2.4}$$

Teorema 2.7.8. *Sea A un álgebra de Hilbert. Entonces*

$$\mathcal{F}(A) = \langle X(A), \mathcal{K}_A\rangle$$

es un H-marco general.

Demostración. Notemos que la relación $\leq_{\mathcal{K}_A}$coincide con la relación de orden inclusión $\subseteq$. En efecto. Sean $x, y \in X(A)$.

$$\begin{aligned} x \leq_{\mathcal{K}_A} y &\iff \forall a \in A : x \in \varphi(a) \textit{ implica } y \in \varphi(a) \\ &\iff \forall a \in A : a \in x \textit{ implica } a \in y \\ &\iff x \subseteq y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}(A)$ es un conjunto ordenado. Sólo resta probar que para todo $U, V \in \mathcal{K}_A$, $\mathrm{sat}(U \cap V^c) \in \mathcal{K}_A$. Como $U, V \in \mathcal{K}_A$, existen $a, b \in A$ tales que $U = \varphi(a)^c$ y $V = \varphi(b)^c$. Por Teorema 2.4.1 sabemos que para todo $a, b \in A, \varphi(a \rightarrow b) = \varphi(a) \Rightarrow_{\subseteq} \varphi(b)$. Luego,

$$\mathrm{sat}(\varphi(a) \cap \varphi(b)^c) = (\varphi(a) \cap \varphi(b)^c]_{\subseteq} = (\varphi(a) \Rightarrow_{\subseteq} \varphi(b))^c = \varphi(a \rightarrow b)^c \in \mathcal{K}_A.$$

■

Por lo tanto tenemos que si A es un álgebra de Hilbert, $\mathcal{F}(A) = \langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ es un H-marco general y por el Teorema 2.4.1, $\langle D(X(A)), \Rightarrow_{\subseteq}, X(A) \rangle$ es la subálgebra del álgebra de Hilbert $\langle \mathcal{P}_{\subseteq}(X(A)), \Rightarrow_{\subseteq}, X(A) \rangle$ isomorfa a A, donde $D(X(A)) = \{\varphi(a) : a \in A\}$.

Como mostramos al comienzo de la sección, Prior define dos extensiones diferentes de $\mathbf{Int}^{\rightarrow}$, éstas son $\mathbf{Int}^{\rightarrow} + \{O\}$ y $\mathbf{Int}^{\rightarrow} + \{L\}$, las cuales son incompletas con respecto a la semántica de Kripke usual para la lógica intuicionista. Teniendo en cuenta esta situación, Kirk define en [46] la *clase de marcos de Kripke extendidos* y muestra que toda lógica implicacional es completa respecto a esta clase de marcos. Puede fácilmente comprobarse que un marco de Kripke extendido $\mathcal{F} = \langle X, \leq, \mathcal{K} \rangle$ es exactamente igual a un H-conjunto y que una valuación en un marco de Kripke extendido $\mathcal{F}$ es una función $V : Var \rightarrow H_{\mathcal{K}}(X)$. Como es usual, toda valuación puede extenderse al conjunto de todas las fórmulas *Fm*. Entonces una fórmula ϕ es válida en un marco de Kripke extendido $\mathcal{F}$ si y sólo si ϕ es válida en el álgebra de Hilbert $\langle H_{\mathcal{K}}(X), \Rightarrow_{\leq}, X \rangle$. Como puede verse, la noción de marco de Kripke extendido es un tipo de generalización de H-marcos generales.

El siguiente resultado es análogo al probado en [46] para marcos de Kripke extendidos y prueba que cualquier lógica implicacional es completa respecto a una clase de marcos generales.

Teorema 2.7.9. *Toda lógica implicacional $\mathcal{I}$ es completa respecto a* $\mathrm{GFr}(\mathcal{I})$. *Es decir,*

$$\mathcal{I} = Th\,(\mathrm{GFr}(\mathcal{I}))\,.$$

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ una lógica implicacional. Es claro que $\mathcal{I} \subseteq Th\,(\mathrm{GFr}(\mathcal{I}))$. Probemos la otra inclusión. Para ello supongamos que existe $\phi \in Fm$ tal que $\phi \notin \mathcal{I}$. Por Teorema 2.6.10, $A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}} \nvDash \phi$, esto es, la ecuación $\phi \approx 1$ no es válida en el álgebra de Hilbert $A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}$. Por lo tanto, existe un homomorfismo $h : Fm \rightarrow A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}$ tal que $h(\phi) \neq 1$, i.e., $1 \nleq h(\phi)$. Por Corolario 2.2.11, existe $x \in X\,(A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}})$ tal que $h(\phi) \notin x$. Sea $\left\langle X\,(A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}})\,, \mathcal{K}_{A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}} \right\rangle$ el H-marco general correspondiente a $A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}$. Sabemos que $\varphi : A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}} \rightarrow D\,(X\,(A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}))$ es un homomorfismo inyectivo, por lo tanto $\varphi \circ h$ es un homomorfismo de *Fm* en $D\,(X\,(A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}))$ y por consiguiente, $\varphi \circ h$ es una valuación definida en el H-marco general $\left\langle X\,(A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}})\,, \mathcal{K}_{A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}} \right\rangle$. Como $h(\phi) \notin x$ entonces $x \notin \varphi\,(h(\phi))$. Luego,

$$(\varphi \circ h)(\phi) = \varphi\,(h(\phi)) \neq X\,(A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}})\,.$$

Por lo tanto, la fórmula ϕ es refutada en el modelo general $\left\langle X\,(A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}})\,, \mathcal{K}_{A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}}, \varphi \circ h \right\rangle$. Como $\left\langle X\,(A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}})\,, \mathcal{K}_{A(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}} \right\rangle \in \mathrm{GFr}(\mathcal{I})$, hemos probado que $\phi \notin Th\,(\mathrm{GFr}(\mathcal{I}))$. ■

Capítulo 3

Teoría de Representación y Dualidad

El principal objetivo del presente capítulo es la obtención de una teoría de representación topológica y una dualidad total para las álgebras de Hilbert. Como recordamos en la introducción, existen representaciones topológicas para las álgebras de Hilbert, como la encontrada por A. Diego en [29], donde prueba que toda álgebra de Hilbert es isomorfa a la subálgebra del reducto implicativo de un álgebra de Heyting generada por cierto espacio topológico. O la dada por S. Celani en [15], a través de conjuntos ordenados. Pero éstas representaciones no dan una dualidad total. Nosotros lo pudimos lograr generalizando para el caso de las álgebras de Hilbert, la representación topológica dada en [19] para las álgebras de Tarski. Dicha representación y dualidad topológica fue recientemente desarrollada en [20] por S. Celani, L. Cabrer y la autora de la presente memoria, para lo cual definimos el espacio dual de un álgebra de Hilbert dada como un espacio topológico ordenado $\langle X, \leq, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ llamado *espacio de Hilbert ordenado*, donde $\mathcal{K}$ es una base de subconjuntos abiertos, compactos y decrecientes para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, la cual satisface condiciones adicionales. Como el orden $\leq$ de un espacio de Hilbert ordenado es el orden dual del orden de especialización topológico, es decir, el orden $\leq$ queda definido automáticamente de la siguiente manera: $x \leq y$ si y sólo si y pertenece a la clausura topológica de $\{x\}$ para cada par $x, y \in X$, pudimos simplificar la dualidad encontrada para las álgebras de Hilbert. El nuevo espacio dual asociado a las álgebras de Hilbert son los espacios topológicos sober con una base formada por subconjuntos abiertos y compactos que satisfacen una condición adicional. Esta representación y dualidad simplificada para las álgebras de Hilbert se encuentra publicada en [22] por S. Celani y la autora de la presente memoria.

3.1. Representación Topológica

Comenzaremos recordando algunas nociones topológicas que nos serán de gran utilidad.

Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico. Si $\mathcal{K}$ es una base del espacio topológico $X = \langle X, \mathcal{T} \rangle$ entonces lo denotaremos por $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ o simplemente $\langle X, \mathcal{K} \rangle$. Indicamos con $\mathcal{O}(X)$ y $\mathcal{C}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos abiertos y cerrados, respectivamente, de $\langle X, \mathcal{T} \rangle$.

Denotamos la clausura de un conjunto $Y \subseteq X$ con $\mathrm{cl}(Y)$ y el interior con $int(Y)$. Diremos que un subconjunto $Y \subseteq X$ es *saturado* si es intersección de conjuntos abiertos de X. Además, diremos que la *saturación* de un subconjunto Y es el menor conjunto saturado que contiene a Y. Por las definiciones (2.2) y (2.3), para cualquier subconjunto Y de X tenemos que $\mathrm{sat}(Y)$ coincide con la saturación de Y y $\mathrm{cl}(Y)$ coincide con la clausura topológica de Y.

Notemos que la relación $\leq_{\mathcal{K}}$ definida en (2.1), puede definirse en términos del operador cl de la siguiente manera:

$$x \leq_{\mathcal{K}} y \Leftrightarrow y \in \mathrm{cl}(\{x\}) = \mathrm{cl}(x).$$

En efecto, observemos que

$$\begin{aligned} x \leq_{\mathcal{K}} y &\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{K} \ (y \notin U \text{ implica que } x \notin U) \\ &\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{K} \ (y \in X - U \text{ implica que } x \in X - U) \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcap \{X - U : x \notin U \ \& \ U \in \mathcal{K}\} \\ &\Leftrightarrow y \in \mathrm{cl}(x). \end{aligned}$$

Recordemos que el *orden de especialización* de un espacio topológico está definido por $x \preceq y$ si $x \in \mathrm{cl}(\{y\}) = \mathrm{cl}(y)$, por lo tanto la relación $\leq_{\mathcal{K}}$ definida en $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es el orden dual de especialización de X.

Observaciones 3.1.1. Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un espacio T_0. Entonces:

1. La relación $\leq_{\mathcal{K}}$ es un orden parcial. En efecto. Sabemos que $\leq_{\mathcal{K}}$ es transitiva y reflexiva. Sólo resta probar que la relación $\leq_{\mathcal{K}}$ es antisimétrica. Supongamos que $x \neq y$. Entonces $x \not\leq y$ o $y \not\leq x$. Por lo asumido, existe $U \in \mathcal{K}$ tal que $y \in U$ y $x \notin U$ o bien existe $V \in \mathcal{K}$ tal que $x \in V$ e $y \notin V$. Con lo cual resulta que $x \not\leq_{\mathcal{K}} y$ o $y \not\leq_{\mathcal{K}} x$. Queda probado entonces que $\leq_{\mathcal{K}}$ es un orden parcial. Luego, podemos concluir que
$$\mathrm{cl}(x) = [x)_{\leq_{\mathcal{K}}}$$
para todo $x \in X$.

2. Todo subconjunto abierto (cerrado) es un subconjunto decreciente (creciente) respecto de $\leq_{\mathcal{K}}$. En efecto, sea W un subconjunto abierto de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$. Esto es, existe $L \subseteq \mathcal{K}$ tal que $W = \bigcup \{U : U \in L\}$. Sean $x, y \in X$ tales que $x \in W$ e $y \leq_{\mathcal{K}} x$. Entonces existe $U \in L$ tal que $x \in U$. Por la definición de $\leq_{\mathcal{K}}$, $y \in U$

y consecuentemente, $y \in W$. Análogamente se muestra que todo subconjunto cerrado es creciente con respecto a $\leq_{\mathcal{K}}$. Luego, como la intersección de subconjunto decrecientes (crecientes) es decreciente (creciente) entonces $\mathrm{sat}(Y)$ es decreciente ($\mathrm{cl}(Y)$ es creciente).

Definición 3.1.2. Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico. Un subconjunto no vacío Y de X es *irreducible* si $Y \subseteq Z \cup W$ para subconjuntos cerrados Z y W, implica que $Y \subseteq Z$ o $Y \subseteq W$.

Definición 3.1.3. Diremos que un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es *sober* si para todo conjunto cerrado e irreducible Y, existe un único $x \in X$ tal que $\mathrm{cl}(x) = Y$.

Es claro que todo espacio topológico sober es T_0. Recordemos que la relación $\leq_{\mathcal{K}}$ definida en (2.1) es un orden parcial cuando el espacio es T_0. Por lo tanto, de ahora en más y cuando no haya lugar a confusiones, para cada espacio topológico sober $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ escribiremos $\leq$ en lugar de $\leq_{\mathcal{K}}$.

Ahora estamos en condiciones de definir los espacios topológicos que serán los duales de las álgebras de Hilbert y que juegan un papel central en esta memoria.

Definición 3.1.4. Un *espacio de Hilbert,* o H*-espacio* para abreviar, es un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ tal que:

$(E1)$ $\mathcal{K}$ es una base de subconjuntos abiertos y compactos para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ definida sobre X,

$(E2)$ Para todo $U, V \in \mathcal{K}$, $\mathrm{sat}(U \cap V^c) \in \mathcal{K}$,

$(E3)$ $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es sober.

Es inmediato que si $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un H-espacio entonces $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ es un H-marco general. Luego, por Lema 2.7.3, para todo H-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$,

$$\langle D(X), \Rightarrow_{\leq}, X \rangle$$

es un álgebra de Hilbert llamada el *álgebra de Hilbert dual* del H-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$, donde $\leq$ es el orden dual de especialización y

$$U \Rightarrow V = (\mathrm{sat}(U \cap V^c))^c = (U \cap V^c]^c = \{x : [x) \cap U \subseteq V\}.$$

Observación 3.1.5. La definición 3.1.4 es una modificación de la definición que inicialmente se presentó en el artículo [20]. En la definición original se incluía una relación de orden. Pero como se observó en el artículo [22], este orden es el orden definible a partir de la topología. Por lo tanto el orden es redundante.

El siguiente resultado nos muestra que la definición de espacio de Hilbert puede enunciarse de tres maneras equivalentes, cambiando la condición $(E3)$ de la Definición 3.1.4.

Teorema 3.1.6. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un espacio topológico con una base $\mathcal{K}$ formada por subconjuntos abiertos y compactos para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ definida sobre X. Supongamos que para todo $U, V \in \mathcal{K}$, $\operatorname{sat}(U \cap V^c) \in \mathcal{K}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ es T_0 y para cada subconjunto cerrado Y de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ y cada subconjunto $L \subseteq \mathcal{K}$ dualmente directo tal que $Y \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in L$, entonces $\bigcap\{U \mid U \in L\} \cap Y \neq \emptyset$.*
2. *$\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ es T_0, y la aplicación $\varepsilon_X : X \to X\left(D\left(X\right)\right)$ definida por*

$$\varepsilon_X(x) = \{U \in D\left(X\right) \mid x \in U\}$$

   para cada $x \in X$, está bien definida y es sobreyectiva.
3. *$\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ es sober.*

Demostración. *1. $\Longrightarrow$ 2.* Comencemos probando que ε_X está bien definida. *Sea* $x \in X$. Claramente, $X \in \varepsilon_X(x)$. Sean $U, U \Rightarrow V \in \varepsilon_X(x)$. Entonces, $x \in U$ y $x \in (U \cap V^c]^c$. Es decir, $x \notin U \cap V^c$ y como $x \in U$ resulta que $x \in V$, i.e., $V \in \varepsilon_X(x)$. Tenemos entonces que $\varepsilon_X(x)$ es un sistema deductivo de $D\left(X\right)$. Para probar que $\varepsilon_X(x)$ es irreducible, tomemos $U, V \in D\left(X\right)$ tales que $U, V \notin \varepsilon_X\left(x\right)$. Luego, $x \in U^c \cap V^c$. Como $U^c, V^c \in \mathcal{K}$, y $\mathcal{K}$ es una base para la topología en X, existe $O^c \in \mathcal{K}$ tal que $x \in O^c \subseteq U^c \cap V^c$. Esto es, $U \cup V \subseteq O$ y $O \notin \varepsilon_X\left(x\right)$. Por lo tanto, existe $O \notin \varepsilon_X\left(x\right)$ tal que $U, V \subseteq O$. Por Teorema 2.2.7, $\varepsilon_X\left(x\right) \in X\left(D\left(X\right)\right)$. Veamos que ε_X es sobreyectiva, para ello tomamos $P \in X\left(D(X)\right)$. Consideremos el conjunto $L = \left\{U_j^c \mid U_j \notin P\right\} \subseteq \mathcal{K}$. Como P es un sistema deductivo irreducible tenemos que L es dualmente directo. Tomemos el conjunto

$$Y = \bigcap\{V_i \in D(X) \mid V_i \in P\}.$$

Es claro que Y es un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$. Además $Y \cap U_j^c \neq \emptyset$ para cada $U_j^c \in L$. En efecto, consideremos lo contrario, es decir, supongamos que existe $U_j^c \in L$ tal que $Y \cap U_j^c = \emptyset$. Entonces, $U_j^c \subseteq \bigcup\{V_i^c \mid V_i \in P\}$. Como U_j^c es compacto, $U_j^c \subseteq V_0^c \cup V_1^c \cup ... \cup V_n^c$, para $V_0, V_1, ..., V_n \in P$. Luego

$$(V_1, V_2, ..., V_n; U_j) = \left(V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n \cap U_j^c\right]^c = (\emptyset]^c = X.$$

Como $V_1, V_2, ..., V_n \in P$, tenemos que $U_j \in P$, lo cual es una contradicción. Luego, por lo asumido, $Y \cap \bigcap\left\{U_j^c \mid U_j \notin P\right\} \neq \emptyset$, i.e., existe $x \in \bigcap\{V_i \mid V_i \in P\} \cap \bigcap\left\{U_j^c \mid U_j \notin P\right\}$. Veamos que $P = \varepsilon_X\left(x\right)$. Es claro que $P \subseteq \varepsilon_X\left(x\right)$. Sea $U \in D(X)$ tal que $U \in \varepsilon_X\left(x\right)$, i.e., $x \in U$. Supongamos que $U \notin P$, entonces $x \in U^c$, contradicción. Luego, $\varepsilon_X(x) \subseteq P$.

2. $\Longrightarrow$ *3.* Sea Y un subconjunto cerrado e irreducible de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$. Consideremos el conjunto

$$P_Y = \{U \in D(X) \mid Y \subseteq U\}.$$

Es fácil ver que P_Y es un subconjunto creciente de $D(X)$. Supongamos que $U, U \Rightarrow V \in P_Y$. Entonces, $Y \subseteq U$ y $Y \subseteq (U \cap V^c]^c$. Esto es, $Y \cap U \cap V^c = Y \cap V^c = \emptyset$ y por lo tanto $V \in P_Y$. Luego, P_Y es un sistema deductivo de $D(X)$. Veamos que P_Y es irreducible. Sean $U, V \in D(X)$ tales que $U, V \notin P_Y$. Entonces, $Y \nsubseteq U$ e $Y \nsubseteq V$, y como Y es irreducible, $Y \nsubseteq U \cup V$. Por lo tanto, existe $x \in Y$ tal que $x \in U^c$ y $x \in V^c$. Como $U^c, V^c \in \mathcal{K}$, y $\mathcal{K}$ es base de subconjuntos abiertos y compactos para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, podemos asegurar que existe $W \in D(X)$ tal que $x \in W^c \subseteq U^c \cap V^c$. Entonces, $Y \nsubseteq W$. Luego, existe $W \notin P_Y$ tal que $W^c \subseteq U^c$ y $W^c \subseteq V^c$. Queda probado entonces que $P_Y \in X(D(X))$. Como X es T_0, ε_X es injectiva, y como ε_X es sobreyectiva, podemos asegurar que existe un único $y \in X$ tal que $\varepsilon_X(y) = P_Y$. Por último, veamos que $Y = \mathrm{cl}(y)$. Supongamos que $x \notin \mathrm{cl}(y)$. Esto es, existe $U \in D(X)$ tal que $y \in U$ y $x \notin U$. Entonces, $U \in \varepsilon_X(y) = P_Y$ y $x \notin U$. Luego, $x \notin Y$. Por lo que hemos probado que $Y \subseteq \mathrm{cl}(y)$. Ahora, supongamos que existe $x \in X$ tal que $x \in \mathrm{cl}(y)$ y $x \notin Y$. Como Y es un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$, existe $U \in D(X)$ tal que $Y \subseteq U$ y $x \notin U$. Entonces, $U \in P_Y$ y consecuentemente, $y \in U$ pero $x \notin U$. Absurdo, pues $x \in \mathrm{cl}(y)$. Hemos probado entonces que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es sober.

3. $\Longrightarrow$ *1.* Sea Y un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ y sea $L = \{U_i \mid i \in I\}$ una subfamilia dualmente directa de $\mathcal{K}$ tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$. Como Y^c es un subconjunto abierto y $\mathcal{K}$ es una base, $Y = \bigcap \{V \mid V \in B \subseteq D(X)\}$. Consideremos ahora el conjunto

$$H = \{U_i^c \mid U_i \in L\} \subseteq D(X).$$

Como L es dualmente directo, el subconjunto

$$(H] = \{W \in D(X) \mid W \subseteq U_i^c, \text{ para algún } U_i^c \in H\}$$

es un ideal de orden de $D(X)$. Sea $\langle B \rangle$ el sistema deductivo generado por B. Probaremos que $\langle B \rangle \cap (H] = \emptyset$. Supongamos lo contrario. Por lo tanto, existe $U_k^c \in H$ y existen $V_1, ..., V_n \in B$ tal que $V_1 \Rightarrow (V_2 \Rightarrow ...(V_n \Rightarrow U_k^c)...) = X$. Como $Y \cap U_k \neq \emptyset$, podemos afirmar que existe $x \in X$ tal que $x \in Y$ y $x \in U_k$. Como $x \in V_1, ..., V_n$, resulta que $x \in U_k^c$, lo cual es una contradicción. Luego, existe $P \in X(D(X))$ tal que $\langle B \rangle \subseteq P$ y $P \cap (H] = \emptyset$. Consideremos el conjunto

$$Z = \bigcap \{V \in D(X) \mid V \in P\}.$$

Es claro que Z es un conjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ y además, como $B \subseteq P$, tenemos que $Z \subseteq Y$. Veamos ahora que Z es un subconjunto irreducible de X. Sean Z_1, Z_2 dos subconjuntos cerrados de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ tales que $Z \subseteq Z_1 \cup Z_2$. Supongamos que $Z \nsubseteq Z_1$ y $Z \nsubseteq Z_2$. Por lo tanto, existen $x, y \in Z$ tales que $x \notin Z_1$ y $y \notin Z_2$. Por ser Z_1, Z_2 subconjuntos cerrados de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$, existen $W_1, W_2 \in D(X)$ tales que $Z_1 \subseteq W_1, x \notin W_1$ y $Z_2 \subseteq W_2, y \notin W_2$. Por lo tanto, $Z \nsubseteq W_1$ y $Z \nsubseteq W_2$, y consecuentemente, $W_1, W_2 \notin P$. Como $P \in X\,(D(X))$, existe $M \in D(X)$ tal que $M \notin P$ y $W_1 \subseteq M, W_2 \subseteq M$. Luego, $Z \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq M$, i.e., $\bigcap \{V \mid V \in P\} \subseteq M$. Por ende, $M^c \subseteq \bigcup \{V^c \mid V \in P\}$. Y como M^c es compacto, resulta $M^c \subseteq V_1^c \cup ... \cup V_n^c$ con $V_1, ..., V_n \in P$. Luego,

$$(V_1, V_2, ..., V_n; M) = (V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n \cap M^c]^c = (\emptyset]^c = X \in P.$$

Como P es un sistema deductivo, $M \in P$, lo cual es imposible. Hemos probado entonces que Z es irreducible. Como $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es sober, podemos asegurar que existe $z \in X$ tal que $Z = \mathrm{cl}(z)$. Como $Z \subseteq Y$, tenemos que $z \in Y$. Además, $z \in V$, para todo $V \in P$ y como $P \subseteq H^c$, $V \notin H$. Luego, $z \in U_i$ para todo $i \in I$, i.e., $z \in \bigcap \{U \mid U \in L\} \cap Y$. ∎

Observación 3.1.7. Por el Teorema anterior, es inmediato ver que la Definición 3.1.4 de espacio de Hilbert dada es equivalente a la utilizada en [20], donde se definen los espacios de Hilbert a través de espacios ordenados que verifican las condiciones $(E1)$ y $(E2)$, y se reemplaza a la condición $(E3)$ por la primer condición dada en el Teorema 3.1.6.

Lema 3.1.8. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un H-espacio. Entonces, $X \in \mathcal{K}$ si y sólo si $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq}, X \rangle$ es un álgebra de Hilbert acotada.*

Demostración. Es inmediato que $X \in \mathcal{K}$ si y sólo si $\emptyset \in D(X)$. ∎

Luego, si $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un H-espacio tal que $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq}, X \rangle$ es un álgebra de Hilbert acotada, entonces $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es compacto.

3.2. Espacio dual de un álgebra de Hilbert

Ahora mostraremos que cualquier álgebra de Hilbert A es (salvo isomorfismos) el álgebra de Hilbert dual de algún H-espacio. Sea A un álgebra de Hilbert y consideremos la familia de conjuntos $\mathcal{K}_A = \{\varphi(a)^c : a \in A\}$ definida en (2.4).

Es claro que $\bigcup\limits_{a \in A} \{\varphi(a)^c\} \subseteq X(A)$. Sea $x \in X(A)$. Por lo tanto x es un subconjunto propio de A, esto es, existe $a \in A$ tal que $a \notin x$ y consecuentemente, $x \in \varphi(a)^c$. Luego,

$$X(A) = \bigcup_{a \in A} \{\varphi(a)^c\}.$$

Esto nos dice que la familia $\mathcal{K}_A$ sirve como una subbase para una topología definida en $X(A)$. Pero, como veremos a continuación, esta familia es en realidad una base para una topología.

Sea $x \in X(A)$ y sean $a, b \in A$. Por Teorema 2.2.7 tenemos que $x \in \varphi(a)^c \cap \varphi(b)^c$ si y sólo si existe $c \in A$ tal que $a, b \leq c$ y $c \notin x$, i.e., $x \in \varphi(c)^c \subseteq \varphi(a)^c \cap \varphi(b)^c$.

Esto nos permite asegurar que $\mathcal{K}_A$ es una base para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}$ definida sobre $X(A)$.

Definición 3.2.1. Sea A un álgebra de Hilbert. El espacio topológico

$$\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$$

se llama el *espacio dual* de A.

Si A es un álgebra de Hilbert acotada entonces $\varphi(0) = \emptyset$. Por lo tanto, $X(A) = \varphi(0)^c \in \mathcal{K}_A$ y consecuentemente el H-espacio $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$ es compacto.

Por lo demostrado en el Teorema 2.7.8, podemos ver que el dual del orden de especialización de $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$ es la relación inclusión $\subseteq$.

Teorema 3.2.2. ([20]) *Sea A un álgebra de Hilbert. Entonces,*

$$\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$$

es un H-espacio y

$$\varphi : A \to D(X(A))$$

es un isomorfismo de álgebras de Hilbert, siendo $D(X(A)) = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$.

Demostración. Veamos primero que $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$ es un H-espacio. Por Teorema 2.7.8 sabemos que $\langle X(A), \mathcal{K}_A \rangle$ es un H-marco general, por lo tanto sólo nos resta probar las condiciones $(E1)$ y $(E3)$ de la Definición 3.1.4.

$(E1)$ Sabemos que $\mathcal{K}_A$ es una base para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}$ definida sobre $X(A)$. Veamos que todo subconjunto abierto $\varphi(a)^c$ es compacto, para $a \in A$. Para ello consideremos

$$\varphi(a)^c = \bigcup \{\varphi(b)^c \mid b \in B\}$$

para algún $B \subseteq A$. Supongamos que $a \notin \langle B \rangle$. Por lo tanto por Teorema 2.2.10, existe $x \in X(A)$ tal que $\langle B \rangle \subseteq x$ y $a \notin x$. Entonces $x \in \varphi(a)^c = \bigcup \{\varphi(b)^c \mid b \in B\}$. Luego existe un $b \in B$ tal que $x \in \varphi(b)^c$, es decir, $b \notin x$, pero como $B \subseteq x$, tenemos que $b \in x$, lo cual es imposible. Luego, $a \in \langle B \rangle$. Podemos asegurar entonces que existen $b_1, \ldots, b_n \in B$ tal que $(b_1, \ldots, b_n; a) = 1$, esto es, $\varphi(b_1, \ldots, b_n; a) = X$. Luego,

$$\varphi(b_1) \cap \ldots \cap \varphi(b_n) \cap \varphi(a)^c = \emptyset.$$

Entonces

$$\varphi(a)^c \subseteq \varphi(b_1)^c \cup \ldots \cup \varphi(b_n)^c.$$

Luego, $\varphi(a)^c$ es compacto.

$(E3)$ Para probar esta condición usaremos la equivalencia dada por el Teorema 3.1.6, es decir, probaremos que $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$ es T_0, y que para cada subconjunto cerrado Y de $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$ y cada subconjunto $L \subseteq \mathcal{K}_A$ dualmente directo tal que $Y \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in L$, se satisface que $\bigcap \{U \mid U \in L\} \cap Y \neq \emptyset$.

Sean $x, y \in X(A)$ tal que $x \nleq y$. Por lo tanto existe $a \in x$ tal que $a \notin y$. Luego, existe $\varphi(a)^c \in \mathcal{K}_A$ tal que $y \in \varphi(a)^c$ y $x \notin \varphi(a)^c$. Es decir, $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$ es T_0.

Sea Y un subconjunto cerrado de $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$. Como $\mathcal{K}_A$ es una base para $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}$, existe $B \subseteq A$ tal que

$$Y = \bigcap \{\varphi(b) : b \in B\}.$$

Consideremos el conjunto

$$D = \{a \in A : Y \subseteq \varphi(a)\}.$$

Es claro que $D \in \mathrm{Ds}(A)$. Veamos que $D = \langle B\rangle$. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \notin \langle B\rangle$. Entonces existe $x \in X(A)$ tal que $B \subseteq \langle B\rangle \subseteq x$ y $a \notin x$. Por lo tanto, $x \in Y$ y $x \notin \varphi(a)$, esto es, $a \notin D$. Sea $a \in \langle B\rangle$. Entonces existen $b_1, ..., b_n \in B$ tal que $(b_1, \ldots, b_n; a) = 1$. Tomemos $x \in Y$. Por ende, $b \in x$ para todo $b \in B$. En particular, $b_1, ..., b_n \in x$. Por consiguiente, $a \in x$ y entonces $x \in \varphi(a)$. Hemos probado que $Y \subseteq \varphi(a)$ implicando que $a \in D$. Ahora es fácil ver que

$$Y = \bigcap \{\varphi(a) : a \in D\}.$$

Supongamos que $L \subseteq \mathcal{K}_A$ es un subconjunto dualmente directo y sea

$$I = \{a \in A : \varphi(a)^c \in L\}.$$

Es fácil ver que $(I]$ es un ideal de orden de A. Supongamos que $Y \cap \varphi(a)^c \neq \emptyset$ para cada $a \in I$, entonces existe $x_a \in X(A)$ tal que $a \notin x_a$ y $x_a \in Y$. Luego, $a \notin D$ para cada $a \in I$, y entonces $(I] \cap D = \emptyset$. Por Teorema 2.2.10, existe $x \in X(A)$ tal que $D \subseteq x$ y $(I] \cap x = \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \bigcap \{\varphi(b) : b \in D\} = Y$ y como $I \cap x = \emptyset$, $x \in \varphi(a)^c$ para todo $a \in I$, es decir, $x \in \bigcap \{\varphi(a)^c : a \in I\}$. Luego, $Y \cap \bigcap \{\varphi(a)^c : a \in I\} \neq \emptyset$.

Finalmente, si $a \in A$, entonces $\varphi(a) \in D(X(A))$, y $U \in D(X(A))$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $U = \varphi(a)$. Luego, $\varphi : A \to D(X(A))$ es un isomorfismo de álgebras de Hilbert. ■

A continuación demostramos que todo H-espacio es homeomorfo al espacio dual del álgebra asociado al H-espacio inicial. Más adelante, este resultado es crucial pues nos permite completar la dualidad entre las álgebras de Hilbert y los H-espacios.

Teorema 3.2.3. ([20]) *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un H-espacio. Entonces, los espacios topológicos $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ y $\left\langle X(D(X)), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}}\right\rangle$ son homeomorfos por medio de la aplicación*

$$\varepsilon_X : X \to X(D(X))$$

definida por

$$\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) \mid x \in U\}$$

para cada $x \in X$.

Demostración. Como $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ es un H-espacio, por Teorema 3.1.6 podemos asegurar *que* ε_X está bien definida y es sobreyectiva. El hecho de que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ es T_0 nos permite deducir que ε_X es una función inyectiva que preserva el orden. Luego, teniendo en cuenta que ε_X es una biyección de X sobre $X(D(X))$ y que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}_{D(X)} = \{\varphi(U)^c : U \in D(X)\}$ son bases para sus respectivos espacios topológicos, la prueba de que ε_X es un homeomorfismo sigue directamente de la siguiente observación:

$$x \in U \;\Leftrightarrow\; U \in \varepsilon_X(x) \;\Leftrightarrow\; \varepsilon_X(x) \in \varphi(U),$$

para cada $x \in X$ y para todo $U \in D(X)$. ■

3.3. Dualidad Topológica

Consideraremos las siguientes dos categorías donde los objetos son álgebras de Hilbert, pero difieren los morfismos.

		Objetos		Morfismos
$\mathrm{Hil}\mathcal{S}$	$=$	álgebras de Hilbert	$+$	semi-homomofismos,
$\mathrm{Hil}\mathcal{H}$	$=$	álgebras de Hilbert	$+$	homomorfismos.

Denotamos con $\mathrm{Hil}\mathcal{S}[A, B]$ al conjunto de todos los morfismos del álgebra de Hilbert A en B de la categoría $\mathrm{Hil}\mathcal{S}$, i.e., $h \in \mathrm{Hil}\mathcal{S}[A, B]$ si y sólo si h es un semi-homomorfismo de A en B. Usamos una notación similar para la categoría $\mathrm{Hil}\mathcal{H}$. Claramente, $\mathrm{Hil}\mathcal{H}[A, B] \subseteq \mathrm{Hil}\mathcal{S}[A, B]$ cualesquiera sean A, B álgebras de Hilbert. Luego, podemos asegurar que $\mathrm{Hil}\mathcal{H}$ es una subcategoría de $\mathrm{Hil}\mathcal{S}$.

En la sección previa hemos visto que las álgebras de Hilbert están relacionadas con los H-espacios. Para lograr establecer una dualidad total entre las álgebras de Hilbert y los espacios de Hilbert, investigamos a continuación los morfismos de las categorías siguiendo las ideas de [15], [18] and [19].

3.3.1. Dualidad para $\mathrm{Hil}\mathcal{S}$

Comenzamos estableciendo algunas notaciones que nos serán de gran utilidad.

Sean X_1 y X_2 conjuntos y sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una relación binaria dada. Para cada $C \subseteq X_1$, denotamos

$$R(C) = \{y \in X_2 \mid \exists x \in C\ ((x, y) \in R)\}.$$

Si $C = \{x\}$ escribimos simplemente $R(x)$ en lugar de $R(\{x\})$. Similarmente, para cada $D \subseteq X_2$, denotamos

$$R^{-1}(D) = \{x \in X_1 \mid \exists y \in D\, ((x, y) \in R)\}.$$

Sean X_1, X_2 y X_3 conjuntos, $R \subseteq X_1 \times X_2$ y $S \subseteq X_2 \times X_3$, entonces la composición de las relaciones R y S se define de la siguiente manera:

$$R \circ S = \{(x, z) : \exists y \in X_2, ((x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S)\}.$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "R"] \arrow[dr, "R \circ S"'] & X_2 \arrow[d, "S"] \\
& X_3
\end{tikzcd}$$

Tomemos ahora una relación binaria R definida sobre un conjunto X. Para cada natural $n \geq 0$ definimos inductivamente la relación binaria R^n como sigue:

$$(x, y) \in R^0 \textit{ si y sólo si } x = y, \text{ y } (x, y) \in R^{n+1} = R^n \circ R.$$

También definimos la relación binaria

$$R^* = \bigcup \{R^n : n \geq 0\}. \tag{3.1}$$

Ahora estamos en condiciones de estudiar la contrapartida topológica de los semi-homomorfismos.

Definición 3.3.1. Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ H-espacios. Consideremos la relación $R \subseteq X_1 \times X_2$. Diremos que R es una H-*relación* de X_1 en X_2 si satisface las siguientes condiciones:

$(HR1)$ $R^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$, para todo $U \in \mathcal{K}_2$.

$(HR2)$ $R(x)$ es un subconjunto cerrado de $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$, para todo $x \in X_1$.

Veamos algunos ejemplos de H-relaciones.

Ejemplo 3.3.1. Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un H-espacio. Como cada $U \in \mathcal{K}$ es un subconjunto decreciente de X, $(\leq^{-1})(U) = U$. Además, como $[x) = \mathrm{cl}(x)$, $[x)$ es un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$. Luego, $\leq$ es una H-relación.

Lema 3.3.2. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ H-espacios. Sea $f : X_1 \to X_2$ una función tal que $f^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$, para cada $U \in \mathcal{K}_2$. Entonces la relación $f^* \subseteq X_1 \times X_2$ definida por*

$$(x, y) \in f^* \text{ si y sólo si } f(x) \leq_2 y,$$

es una H-relación.

Demostración. Como $f^*(x) = [f(x)) = \mathrm{cl}(f(x))$ tenemos que f^* satisface $(HR2)$. Probemos ahora $(HR1)$. Sea $U \in \mathcal{K}_2$. Usando que U es un conjunto decreciente y que $f^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$, resulta:

$$\begin{aligned}
(f^*)^{-1}(U) &= \{x \in X_1 : (x, y) \in f^* \text{ para algún } y \in U\} \\
&= \{x \in X_1 : [f(x)) \cap U \neq \emptyset\} \\
&= \{x \in X_1 : f(x) \in U\} \\
&= f^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1.
\end{aligned}$$

■

Usando el Lema anterior y el Teorema 3.2.3 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.3.3. *Sea $\varepsilon : X \to X(D(X))$ la aplicación definida en el Teorema 3.2.3. Entonces, la relación $\varepsilon^* \subseteq X \times X(D(X))$ dada por*

$$(x, P) \in \varepsilon^* \text{ si y sólo si } \varepsilon(x) \subseteq P.$$

es una H-relación.

El siguiente resultado nos permite asegurar que

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Objetos} & & \text{Morfismos} \\ \mathcal{SR} & = & H\text{-espacios} & + & H\text{-relaciones} \end{array}$$

es una categoría. Denotamos con $\mathcal{SR}[X_1, X_2]$ al conjunto de todos los morfismos existentes entre los H-espacios $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ pertenecientes a $\mathcal{SR}$, i.e., $R \in \mathcal{SR}[X_1, X_2]$ si y sólo si R es una H-relación entre los H-espacios $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$.

Teorema 3.3.4. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}\rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ y $\langle X_3, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_3}\rangle$ H-espacios. Sea $R \in \mathcal{SR}[X_1, X_2]$ y $S \in \mathcal{SR}[X_2, X_3]$. Entonces:*

1. *La relación* $\leq_2 \in \mathcal{SR}[X_2, X_2]$ *satisface que*

$$R\circ \leq_2 = R \text{ y } \leq_2 \circ S = S.$$

2. $R \circ S \in \mathcal{SR}[X_1, X_3]$.

Demostración. *1.* Por la reflexividad de $\leq_2$, podemos asegurar que $R \subseteq (R\circ \leq_2)$ y que $S \subseteq (\leq_2 \circ S)$.

Probemos ahora las otras inclusiones. Como $R(x)$ es un conjunto cerrado de $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ para cada $x \in X_2$, $R(x)$ es un subconjunto creciente de X_2, con lo cual resulta $(R\circ \leq_2) \subseteq R$.

Para probar que $(\leq_2 \circ S) \subseteq S$, consideremos $x, y \in X_2, z \in X_3$ tales que $x \leq_2 y$ y $z \in S(y)$. Supongamos que $(x, z) \notin S$. Como $S(x)$ es cerrado de $\langle X_3, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_3}\rangle$, existe $U \in \mathcal{K}_3$ tal que $z \in U$ y $S(x) \subseteq U^c$, i.e., $x \notin S^{-1}(U)$. Como $(y, z) \in S$, tenemos que $y \in S^{-1}(U)$. Pero por $(HR1)$, $S^{-1}(U) \in \mathcal{K}_2$ y por ende, $S^{-1}(U)$ es un conjunto decreciente de X_2. Luego, $x \in S^{-1}(U)$, lo cual es una contradicción.

2. Sea $U \in \mathcal{K}_3$. Como $R \in \mathcal{SR}[X_1, X_2]$ y $S \in \mathcal{SR}[X_2, X_3]$,

$$(R \circ S)^{-1}(U) = R^{-1}\left(S^{-1}(U)\right) \in \mathcal{K}_1.$$

Luego, $R \circ S$ satisface $(HR1)$.

Para probar que $R\circ S$ satisface $(HR2)$, tomemos $x \in X_1$ y supongamos que existe $z \in X_3$ tal que $z \notin (R \circ S)(x) = S(R(x))$. Esto es, $z \notin S(y)$ para todo $y \in R(x)$. Sabemos que para cada $y \in R(x)$, $S(y)$ es un subconjunto cerrado de $\langle X_3, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_3}\rangle$. Entonces, para cada $y \in R(x)$ existe $U_y \in \mathcal{K}_3$ tal que $z \in U_y$ y $S(y) \subseteq U_y^c$, i.e., $y \notin S^{-1}(U_y)$. Luego,

$$R(x) \cap \bigcap \left\{S^{-1}(U) : z \in U \,\&\, U \in \mathcal{K}_3\right\} = \emptyset.$$

Como $\mathcal{K}_3$ es una base de $\langle X_3, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_3}\rangle$, el conjunto $\{U : z \in U \,\&\, U \in \mathcal{K}_3\}$ es dualmente directo. Entonces el conjunto $\{S^{-1}(U) : z \in U \,\&\, U \in \mathcal{K}_3\}$ es dualmente directo pues S^{-1} preserva la inclusión de conjuntos. Como $R(x)$ es un conjunto cerrado del H-espacio $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$, por Teorema 3.1.6, existe $U \in \mathcal{K}_3$ tal que $z \in U$ y $R(x) \cap S^{-1}(U) = \emptyset$. Esto es, $R(x) \subseteq S^{-1}(U)^c$. Luego, para cada $y \in R(x)$ tenemos que $y \in S^{-1}(U)^c$ y consecuentemente, $S(y) \subseteq U^c$, i.e, $(R \circ S)(x) \subseteq U^c$ y $z \in U$. Por lo tanto, $(R \circ S)(x)$ es un conjunto cerrado de $\langle X_3, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_3}\rangle$. Luego, $R \circ S$ satisface $(HR2)$. ■

El Teorema anterior nos permite concluir que $\mathcal{SR}$ es una categoría donde el morfismo identidad de un H-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ es $\leq$. Es importante observar que la notación de la composición de las relaciones invierte el orden de la composición real de la categoría. Decidimos conservar esta notación usual, en lugar de dar una nueva, con el fin de hacer esta memoria más legible.

Teorema 3.3.5. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ H-espacios y $R \in \mathcal{SR}[X_1, X_2]$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R es un isomorfismo en la categoría $\mathcal{SR}$.*

2. *$R = f^*$ para alguna función biyectiva $f : X_1 \to X_2$ que satisface la condición:*

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1 \text{ si y sólo si } U \in \mathcal{K}_2.$$

Demostración. *1. $\Longrightarrow$ 2.* Sea $S \in \mathcal{SR}[X_2, X_1]$ tal que $R \circ S \ = \leq_1$ y $S \circ R = \leq_2$. Entonces, para todo $x \in X_1$, $(R \circ S)(x) = S(R(x)) = [x)$. Por lo tanto, existe $y \in R(x)$ tal que $S(y) = [x)$. Probemos que y es única. Supongamos que existen $y_1, y_2 \in X_2$ tales que $S(y_1) = [x) = S(y_2)$. Como $S \circ R = \leq_2$,

$$[y_1) = (S \circ R)(y_1) = R(S(y_1)) = R(S(y_2)) = (S \circ R)(y_2) = [y_2).$$

Luego, $y_1 = y_2$. Podemos concluir que para cada $x \in X_1$ existe una única $y \in X_2$ tal que $S(y) = [x)$. Denotemos con f la función definida de X_1 en X_2 tal que:

$$f(x) = y \text{ si y sólo si } S(y) = S(f(x)) = [x),$$

para cada $x \in X$. Similarmente podemos probar que existe una función $g : X_2 \to X_1$ tal que $R(g(y)) = [y)$ para cada $y \in X_2$. Como $\leq_2 \circ S = S$, $S([y)) = S(y)$ para cada $y \in X_2$. Entonces, para todo $x \in X_1$ tenemos que

$$\begin{aligned}[g(f(x))) &= (R \circ S)(g(f(x))) = S(R(g(f(x)))) \\ &= S([f(x))) = S(f(x)) = [x).\end{aligned}$$

Luego, $g(f(x)) = x$ para cada $x \in X_1$, i.e., $g \circ f$ es la función identidad en X_1. Cambiando los roles de f y g, obtenemos que $f \circ g$ es la función identidad en X_2. Concluímos que f es una función inyectiva definida de X_1 sobre X_2 y g es su inversa. Observemos que $R(x) = R(g(f(x))) = [f(x))$, entonces $R = f^*$. Similarmente, $S = g^*$.

Ahora, tomemos $U \in \mathcal{K}_2$. Como R es una H-relación y U es un conjunto decreciente,

$$\begin{aligned}R^{-1}(U) &= \{x \in X_1 : R(x) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X_1 : [f(x)) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X_1 : f(x) \in U\} = f^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1.\end{aligned}$$

Supongamos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$ para algún $U \subseteq X_2$. Como f y g son funciones una inversa de la otra y S es una H-relación,

$$S^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) = g^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) = U \in \mathcal{K}_2.$$

La implicación *2.* $\Longrightarrow$ *1.* es consecuencia inmediata del Lema 3.3.2 y la definición de isomorfismo. ■

Para completar la dualidad, necesitamos ver cómo definimos una H-relación a partir de un semi-homomorfismo definido entre dos álgebras de Hilbert. Sean A y B álgebras de Hilbert y sea $h \in \mathrm{Hil}\mathcal{S}\,[A, B]$. Definimos la relación binaria $R_h \subseteq X(B) \times X(A)$ de la siguiente manera:

$$(x, y) \in R_h \text{ si y sólo si } h^{-1}(x) \subseteq y. \tag{3.2}$$

Lema 3.3.6. *Sean A y B álgebras de Hilbert y sea $h \in \mathrm{Hil}\mathcal{S}\,[A, B]$. Entonces, para todo $x \in X(B)$, $h(a) \in x$ si y sólo si $R_h(x) \subseteq \varphi(a)$.*

Demostración. Sea $a \in A$ y $x \in X(B)$. Consideremos $h(a) \in x$ y sea $y \in X(A)$ tal que $y \in R_h(x)$. Como $a \in h^{-1}(x)$, por definición de R_h, resulta $a \in y$ y por lo tanto, $y \in \varphi(a)$.

Para probar la recíproca, supongamos que existe $a \in A$ tal que $h(a) \notin x$. Entonces $a \notin h^{-1}(x)$. Por Teorema 2.3.2, $h^{-1}(x) \in \mathrm{Ds}(A)$ y consecuentemente, por Teorema 2.2.10 tenemos que existe $y \in X(A)$ tal que $h^{-1}(x) \subseteq y$ y $a \notin y$. Luego, existe $y \in R_h(x)$ tal que $y \notin \varphi(a)$. ■

Teorema 3.3.7. *Sean A, B álgebras de Hilbert. Sea $h \in \mathrm{Hil}\mathcal{S}\,[A, B]$. Entonces:*

1. $R_h \in \mathcal{SR}\,[X(B), X(A)]$.
2. *Sea C un álgebra de Hilbert y $g \in \mathrm{Hil}\mathcal{S}\,[B, C]$, entonces $R_{g \circ h} = R_g \circ R_h$.*

Demostración. *1.* Probemos la condición $(HR1)$. Sea $U \in \mathcal{K}_A$. Por lo tanto, existe $a \in A$ tal que $U = \varphi_A(a)^c$. Veamos que $(R_h)^{-1}(\varphi_A(a)^c) = \varphi_B(h(a))^c$. Sea $x \in X(B)$ tal que $x \in (R_h)^{-1}(\varphi_A(a)^c)$, entonces existe $y \in X(A)$ tal que $a \notin y$ y $h^{-1}(x) \subseteq y$. Por lo tanto, $h(a) \notin x$, i.e., $x \in \varphi_B(h(a))^c$. Para probar la otra inclusión, supongamos que existe $x \in X(B)$ tal que $h(a) \notin x$. Por Lema 3.3.6 podemos asegurar que existe $y \in X(A)$ tal que $(x, y) \in R_h$ y $a \notin y$. Esto es, $y \in R_h(x)$ con $y \in \varphi_A(a)^c$, i.e., $x \in (R_h)^{-1}(\varphi_A(a)^c)$. Concluímos que

$$(R_h)^{-1}(U) = (R_h)^{-1}(\varphi_A(a)^c)) = \varphi_B(h(a))^c \in \mathcal{K}_B.$$

Luego, $(HR1)$ se cumple.

Para probar la condición $(HR2)$, observemos que por Lema 3.3.6 tenemos que

$$R_h(x) = \bigcap\{\varphi_A(a) : h(a) \in x\},$$

para cada $x \in X(B)$. Entonces $R_h(x)$ es un subconjunto cerrado de $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$. Luego, $R_h \in \mathcal{SR}\,[X(B), X(A)]$.

2. Sea $x \in X(C)$ e $y \in X(A)$. Si $(x, y) \in R_{g \circ h}$ entonces $(g \circ h)^{-1}(x) = h^{-1}(g^{-1}(x)) \subseteq y$. Veamos que el sistema deductivo $g^{-1}(x)$ y el ideal de orden $(h(y^c)]$ de B son disjuntos. Supongamos lo contrario. Sea $a \in g^{-1}(x) \cap (h(y^c)]$. Esto es, $a \in g^{-1}(x)$ y existe $b \in y^c$ tal que $a \leq h(b)$. Por ende, $h(b) \in g^{-1}(x)$ y por lo tanto, $b \in h^{-1}(g^{-1}(x))$. Luego, $b \in y$, lo cual es imposible. Podemos asegurar entonces que existe $z \in X(B)$ tal que $g^{-1}(x) \subseteq z$ y $z \cap (h(y^c)] = \emptyset$, por lo cual, $h^{-1}(z) \subseteq y$. Luego, $(x, y) \in R_g \circ R_h$.

Para probar la otra inclusión, tomamos $(x, y) \in R_g \circ R_h$. Entonces existe $z \in X(B)$ tal que $g^{-1}(x) \subseteq z$ y $h^{-1}(z) \subseteq y$. Veamos que $(g \circ h)^{-1}(x) = h^{-1}(g^{-1}(x)) \subseteq y$. Sea $a \in (g \circ h)^{-1}(x)$. Por lo tanto $h(a) \in g^{-1}(x)$. Por lo asumido, $h(a) \in z$, es decir, $a \in h^{-1}(z)$ y consecuentemente, $a \in y$. Hemos probado entonces que $(x, y) \in R_{g \circ h}$. ■

Observación 3.3.8. Sea A un álgebra de Hilbert y sea $Id : A \to A$ la función identidad. Entonces

$$R_{Id} = \{(x, y) \in X(A) \times X(A) : Id^{-1}(x) \subseteq y\} = \subseteq .$$

De los Teoremas 3.2.3 y 3.3.7, y la Observación 3.3.8, podemos concluir que

$$\mathbb{X} : \mathrm{Hil}\mathcal{S} \to \mathcal{SR}$$

definida por

$$\begin{array}{ll} \mathbb{X}(A) = \langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle & \text{si } \langle A, \to, 1 \rangle \text{ es un } H\text{-álgebra,} \\ \mathbb{X}(h) = R_h & \text{si } h \text{ es un semi-homomorfismo,} \end{array}$$

es un funtor contravariante .

A continuación probaremos que existe un funtor contravariante de $\mathcal{SR}$ en Hil$\mathcal{S}$. Para hacerlo, tomamos los H-espacios $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ y consideramos $R \in \mathcal{SR}\,[X_1, X_2]$. Denotamos con h_R a la aplicación definida de $D\,(X_2)$ en $D\,(X_1)$ tal que

$$h_R(U) = \{x \in X_1 : R(x) \subseteq U\}.$$

Como R es una H-relación y $U^c \in \mathcal{K}_2$, para cada $U \in D\,(X_2)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} h_R(U) &= \{x \in X_1 : R(x) \subseteq U\} = \{x \in X_1 : R(x) \cap U^c = \emptyset\} \\ &= \{x \in X_1 : x \notin R^{-1}\,(U^c)\} = \left(R^{-1}\,(U^c)\right)^c \in D\,(X_1)\,. \end{aligned}$$

Luego, h_R está bien definida.

Teorema 3.3.9. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ y $\langle X_3, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_3} \rangle$ H-espacios. Sea $R \in \mathcal{SR}\,[X_1, X_2]$ y $S \in \mathcal{SR}\,[X_2, X_3]$. Entonces:*

1. $h_R \in \mathrm{Hil}\mathcal{H}\,[D(X_2), D(X_1)]$.

2. $h_{R\circ S} = h_R \circ h_S$.

Demostración. *1.* Primero notemos que $h_R\,(X_2) = \{x \in X_1 : R\,(x) \subseteq X_2\} = X_1$. Por lo tanto, h_R satisface la condición (2) de la Definición 2.3.1. Sean $U, V \in D\,(X_2)$, y $x \in h_R\,(U \Rightarrow V)$. Por lo tanto, $R(x) \subseteq U \Rightarrow V$ y consecuentemente, $R\,(x) \cap U \subseteq V$. En efecto, sea $y \in R\,(x) \cap U$. Por ende, $y \in U \Rightarrow V$ e $y \in U$. Entonces, $[y) \cap U \subseteq V$ y por lo tanto, $y \in V$. Para mostrar que $x \in h_R\,(U) \Rightarrow h_R\,(V)$, tomemos $y \in [x) \cap h_R\,(U)$, i.e., $x \leq y$ y $R\,(y) \subseteq U$. Como $x \leq y$, por el item (1) del Teorema 3.3.4 obtenemos que $R\,(y) \subseteq R\,(x)$. Luego,

$$R\,(y) = R\,(y) \cap U \subseteq R\,(x) \cap U \subseteq V.$$

Entonces, $y \in h_R\,(V)$. Podemos concluir que $h_R\,(U \Rightarrow V) \subseteq h_R\,(U) \Rightarrow h_R\,(V)$, y consecuentemente, h_R es un semi-homomorfismo.

2. Sea $U \in D\,(X_3)$. Entonces,

$$\begin{aligned} h_{R\circ S}\,(U) &= \{x \in X_1 : (R \circ S)\,(x) \subseteq U\} \\ &= \{x \in X_1 : S\,(R\,(x)) \subseteq U\} \\ &= \{x \in X_1 : \forall y \in R\,(x)\,,\ S\,(y) \subseteq U\} \\ &= \{x \in X_1 : R\,(x) \subseteq h_S\,(U)\} = h_R\,(h_S\,(U)) = (h_R \circ h_S)\,(U)\,. \end{aligned}$$

■

A partir del Teorema 3.3.9 podemos definir un funtor contravariante

$$\mathbb{D} : \mathcal{SR} \to \mathrm{Hil}\mathcal{S}$$

de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{D}(X) = \langle D(X), \Rightarrow, X\rangle & \text{si } \langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle \text{ es un } H\text{-espacio,} \\ \mathbb{D}(R) = h_R & \text{si } R \text{ es una } H\text{-relación.} \end{array}$$

Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un H-espacio. Recordemos que la función $\varepsilon : X \to X\,(D(X))$ está definida por $\varepsilon\,(x) = \{U \in D\,(X) : x \in U\}$. Por el Corolario 3.3.3, la relación $\varepsilon^* \subseteq X \times X\,(D(X))$ dada por $(x, P) \in \varepsilon^*$ si y sólo si $\varepsilon(x) \subseteq P$, es una H-relación.

Lema 3.3.10. *ε^* es una equivalencia natural entre el funtor identidad de $\mathcal{SR}$ y $\mathbb{X} \circ \mathbb{D}$.*

Demostración. Sea $R \in \mathcal{SR}\,[X_1, X_2]$. Probaremos que:

$$(x, y) \in R \textit{ si y sólo si } (\varepsilon_{X_1}(x), \varepsilon_{X_2}(y)) \in R_{h_R}.$$

Para demostrarlo, tomamos $(x, y) \in R$. Sea $U \in D(X_2)$ tal que $U \in h_R^{-1}(\varepsilon_{X_1}(x))$. Notemos que

$$\begin{aligned} U \in h_R^{-1}(\varepsilon_{X_1}(x)) &\iff h_R(U) \in \varepsilon_{X_1}(x) \\ &\iff x \in h_R(U) \\ &\iff R(x) \subseteq U. \end{aligned}$$

Como $y \in R(x)$, tenemos que $y \in U$, i.e., $U \in \varepsilon_{X_2}(y)$. Por lo tanto, $h_R^{-1}(\varepsilon_{X_1}(x)) \subseteq \varepsilon_{X_2}(y)$, i.e., $(\varepsilon_{X_1}(x), \varepsilon_{X_2}(y)) \in R_{h_R}$.

Para probar la recíproca, sea $(\varepsilon_{X_1}(x), \varepsilon_{X_2}(y)) \in R_{h_R}$ y supongamos que $(x, y) \notin R$. Como R es una H-relación, $R(x)$ es un subconjunto cerrado de $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$. Por lo tanto, existe $U \in \mathcal{K}_2$ tal que $y \in U$ y $R(x) \subseteq U^c$. Esto es, $x \in h_R(U^c)$. Entonces, $h_R(U^c) \in \varepsilon_{X_1}(x)$, i.e., $U^c \in h^{-1}(\varepsilon_{X_1}(x))$. Por hipótesis, $U^c \in \varepsilon_{X_2}(y)$. Es decir, $y \notin U$, lo cual es imposible. Luego, $(x, y) \in R$.

Probemos que

$$\varepsilon_{X_1}^* \circ R_{h_R} = R \circ \varepsilon_{X_2}^*.$$

Sean $x \in X_1$ y $Q \in X(D(X_2))$. Asumamos que $(x, Q) \in \varepsilon_{X_1}^* \circ R_{h_R}$. Es decir, existe $P \in X(D(X_1))$ tal que $(x, P) \in \varepsilon_{X_1}^*$ y $(P, Q) \in R_{h_R}$. Como $\varepsilon_{X_1}, \varepsilon_{X_2}$ son sobreyectivas, existen $y \in X_1$ y $z \in X_2$ tales que $P = \varepsilon_{X_1}(y)$ y $Q = \varepsilon_{X_2}(z)$. Luego, $\varepsilon_{X_1}(x) \subseteq \varepsilon_{X_1}(y)$ y $(\varepsilon_{X_1}(y), \varepsilon_{X_2}(z)) \in R_{h_R}$. Por lo tanto, $(\varepsilon_{X_1}(x), \varepsilon_{X_2}(z)) \in (\subseteq \circ R_{h_R}) = R_{h_R}$ y por lo probado antes resulta $(x, z) \in R$. Es claro que $(z, \varepsilon_{X_2}(z)) \in \varepsilon_{X_2}^*$. Resulta entonces que $(x, Q) \in R \circ \varepsilon_{X_2}^*$.

Para probar la otra inclusión, supongamos que $(x, Q) \in R \circ \varepsilon_{X_2}^*$. Existe entonces $y \in X_2$ tal que $(x, y) \in R$ y $(y, Q) \in \varepsilon_{X_2}^*$. Usando la sobreyectividad de ε_{X_2} y lo probado antes, tenemos que $(\varepsilon_{X_1}(x), \varepsilon_{X_2}(y)) \in R_{h_R}$ y $\varepsilon_{X_1}(y) \subseteq \varepsilon_{X_1}(z) = Q$. Es decir, $(\varepsilon_{X_1}(x), \varepsilon_{X_2}(z)) \in R_{h_R} \circ \subseteq \ = R_{h_R}$ y como es trivial que $(x, \varepsilon_{X_1}(x)) \in \varepsilon_{X_1}^*$, probamos que $(x, Q) \in \varepsilon_{X_1}^* \circ R_{h_R}$.

Luego, hemos probado que ε^* es una equivalencia natural. ■

Lema 3.3.11. *φ es una equivalencia natural entre el funtor identidad de* Hil$\mathcal{S}$ *y* $\mathbb{D} \circ \mathbb{X}$.

Demostración. Necesitamos probar que $h_{R_h} \circ \varphi_A = \varphi_B \circ h$ para todo $h \in \mathrm{Hil}\mathcal{S}\,[A, B]$. Sea $h \in \mathrm{Hil}\mathcal{S}\,[A, B]$ y $a \in A$. Por Lema 3.3.6, tenemos que

$$x \in h_{R_h}(\varphi_A(a)) \iff R_h(x) \subseteq \varphi_A(a) \iff h(a) \in x \iff x \in \varphi_B(h(a)).$$

Luego, φ es una transformación natural. Por Teorema 3.2.2, φ_A es un isomorfismo de A en $\mathbb{D}(\mathbb{X}(A))$. Esto concluye la demostración. ■

Hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 3.3.12. *Los funtores contravariantes $\mathbb{X}$ y $\mathbb{D}$ y las equivalencias naturales ε^* y φ definen una equivalencia dual entre la categoría de álgebras de Hilbert con semi-homomorfismos y la categoría de espacios de Hilbert con H-relaciones.*

3.3.2. Dualidad para $\mathrm{Hil}\mathcal{H}$

Sean A y B álgebras de Hilbert y sea $h : A \to B$ un semi-homomorfismo. Sea $x \in X(B)$, e $y \in X(A)$. Notemos que

$$R_h(x) = [y) \text{ si y sólo si } h^{-1}(x) = y.$$

En efecto. Asumamos que $R_h(x) = [y)$, entonces $y \in R_h(x)$ y por ende, $h^{-1}(x) \subseteq y$. Para probar la otra inclusión supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \notin h^{-1}(x)$, es decir, $h(a) \notin x$. Por Lema 3.3.6, $R_h(x) \nsubseteq \varphi(a)$, es decir, existe $z \in R_h(x) = [y)$ y $a \notin z$. Consecuentemente, $a \notin y$. Luego, $h^{-1}(x) = y$. La recíproca es inmediata.

El siguiente Teorema, probado en [15, Theorem 3.3], nos da la descripción dual de los semi-homomorfismos que son también homomorfismos.

Teorema 3.3.13. *Sean A y B álgebras de Hilbert y sea $h : A \to B$ un semi-homomorfismo. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *h es un homomorfismo.*
2. *Si $(x, y) \in R_h$, existe $z \in X(B)$ tal que $x \subseteq z$ y $R_h(z) = [y)$.*

Del Teorema anterior obtenemos la siguiente definición (ver también [18]).

Definición 3.3.14. Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ H-espacios. Diremos que $R \subseteq X_1 \times X_2$ es una *H-relación funcional* si R es una H-relación y satisface la siguiente condición:

(HF) Si $(x, y) \in R$ existe $z \in X_1$ tal que $x \leq z$ y $R(z) = [y)$.

Usando los Teoremas 3.3.12, 3.3.13 y la definición anterior obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.15. *La categoría algebraica $\mathrm{Hil}\mathcal{H}$ es dualmente isomorfa a la categoría de espacios de Hilbert con H-relaciones funcionales.*

3.4. Espacios de Hilbert finitos

En [18], S. Celani y L. Cabrer obtienen una representación y dualidad topológica para las álgebras de Hilbert finitas, introduciendo la noción de *H-espacio ideal*, o IH-espacio para abreviar. En esta sección investigamos la relación existente entre la noción de H-espacio finito e IH-espacio finito. La clase de los IH-espacios no son un caso particular de los H-espacios finitos, pero veremos que estas clases están estrechamente relacionadas. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en [18], probaremos que para cada H-espacio finito existe un IH-espacio finito, el cual se obtiene a partir del H-espacio finito dado, tal que las álgebras de Hilbert asociadas son isomorfas, y recíprocamente. Comenzamos recordando la definición de IH-espacios introducida en [18].

Definición 3.4.1. $\langle X, \leq, \mathcal{S}\rangle$ es llamado un *espacio de Hilbert ideal finito*, o *IH-espacio finito*, si se satisfacen las siguientes propiedades:

$(IH1)$ $\langle X, \leq\rangle$ es un conjunto ordenado finito y $\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

$(IH2)$ Para cada $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{S}$.

$(IH3)$ Para cada $W \in \mathcal{S}$ y cada $x, y \in W$, si $x \leq y$, entonces $x = y$.

$(IH4)$ Si $W \in \mathcal{S}$, y $V \subseteq W$, entonces $V \in \mathcal{S}$.

Claramente, cada espacio de Hilbert ideal finito $\langle X, \leq, \mathcal{S}\rangle$ es un H-conjunto. Más aún, el álgebra de Hilbert asociada con $\langle X, \leq, \mathcal{S}\rangle$ es el álgebra $\langle H_{\mathcal{S}}(X), \Rightarrow_{\leq}, X\rangle$ definida en el Ejemplo 2.1.4. En [18] fue probado que cualquier álgebra de Hilbert finita $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ es isomorfa al álgebra de Hilbert $\langle H_{\mathcal{S}_A}(X(A)), \Rightarrow_{\leq}, X(A)\rangle$ de un IH-espacio finito $\langle X(A), \subseteq, \mathcal{S}_A\rangle$. Y recíprocamente, para cada IH-espacio finito $\langle X, \leq, \mathcal{S}\rangle$ existe un álgebra de Hilbert finita $\langle H_{\mathcal{S}}(X), \Rightarrow_{\leq}, X\rangle$ tal que su IH-espacio finito es isomorfo a $\langle X, \leq, \mathcal{S}\rangle$.

Indicamos con $\max Y$ al conjunto de elementos maximales de Y con respecto a la relación de orden $\leq$, es decir,

$$\max Y = \{x \in Y : \text{para todo } z \in Y, \text{ si } x \leq z \text{ entonces } z = x\}.$$

Los siguientes resultados referentes a ciertas propiedades que poseen los IH-espacios finitos y los H-espacios finitos, serán de gran utilidad en el resto de la presente sección.

Lema 3.4.2. *Sea $\langle X, \leq, \mathcal{S}\rangle$ es un IH-espacio finito. Entonces para cualquier $U \in \mathcal{S}$ tenemos que*

$$U = \max(U].$$

Demostración. Sea $U \in \mathcal{S}$ y tomemos $x \in U$. Por ende, $x \in (U]$. Sea $y \in (U]$ tal que $x \leq y$. Entonces existe $z \in U$ tal que $y \leq z$ y $x \leq y$, y consecuentemente, $x \leq z$. Por $(IH3)$, $x = z$. Por ende, $y = x$ y consecuentemente, $x \in \text{máx}(U]$. Para probar la otra inclusión, supongamos que $x \in \text{máx}(U]$. Por lo tanto, $x \in (U]$ y entonces existe $y \in U$ tal que $x \leq y$. Como $y \in (U]$ resulta que $x = y$. Luego, $x \in U$. ■

Lema 3.4.3. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un H-espacio finito. Entonces para cualquier subconjunto finito decreciente W de X tenemos que*

$$W = (\text{máx}\, W]_{\leq_{\mathcal{K}}}.$$

Demostración. Como W es decreciente, $(W]_{\leq_{\mathcal{K}}} = W$. Sabemos que $\text{máx}\, W \subseteq W$. Entonces $(\text{máx}\, W]_{\leq_{\mathcal{K}}} \subseteq (W]_{\leq_{\mathcal{K}}} = W$. Sea $x \in W$. Como W es finito, existe $m \in \text{máx}\, W$ tal que $x \leq_{\mathcal{K}} m$. Por lo tanto, $x \in (\text{máx}\, W]_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Luego, $W \subseteq (\text{máx}\, W]_{\leq_{\mathcal{K}}}$. ■

Lema 3.4.4. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un H-espacio finito. Entonces*

1. *Para cada $x \in X$, $(x]_{\leq_{\mathcal{K}}} \in \mathcal{K}$.*
2. *Si $W \in \mathcal{K}$ y $V \subseteq \text{máx}\, W$, entonces $(V]_{\leq_{\mathcal{K}}} \in \mathcal{K}$.*

Demostración. *1.* Sea $x \in X$. Si $X = (x]_{\leq_{\mathcal{K}}}$, tenemos que $(x]_{\leq_{\mathcal{K}}} \in \mathcal{K}$. Consideremos $X \neq (x]_{\leq_{\mathcal{K}}}$, i.e., $(x]^c_{\leq_{\mathcal{K}}} \neq \emptyset$. Como X es un conjunto finito, podemos determinar un subconjunto finito $\{y_1, ..., y_n\}$ tal que $\{y_1, ..., y_n\} = (x]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Como cada $y_i \nleq_{\mathcal{K}} x$ para $1 \leq i \leq n$, existe $U_i \in \mathcal{K}$ tal que $x \in U_i$ e $y_i \notin U_i$. Por lo tanto, existen $U_1, ..., U_n \in \mathcal{K}$ tal que $x \in U_1 \cap ... \cap U_n$ e $y_i \notin U_1 \cap ... \cap U_n$ para $1 \leq i \leq n$, i.e., $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq (U_1 \cap ... \cap U_n)^c$. Luego,

$$x \in U_1 \cap ... \cap U_n \subseteq \{y_1, ..., y_n\}^c = (x]_{\leq_{\mathcal{K}}}.$$

Como $\mathcal{K}$ es base, existe $V \in \mathcal{K}$ tal que $x \in V \subseteq U_1 \cap ... \cap U_n \subseteq (x]_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Por ser V decreciente con respecto a $\leq_{\mathcal{K}}$, $(x]_{\leq_{\mathcal{K}}} \subseteq V$. Luego, $V = (x]_{\leq_{\mathcal{K}}} \in \mathcal{K}$.

2. Sea $W \in \mathcal{K}$ y $V \subseteq \text{máx}\, W$. Consideremos $V = \text{máx}\, W$. Como W es un conjunto finito decreciente, por Lema anterior, $W = (V]_{\leq_{\mathcal{K}}} \in \mathcal{K}$. Supongamos que $V \neq \text{máx}\, W$, esto es, $\text{máx}\, W \setminus V \neq \emptyset$. Entonces existen $y_1, \ldots, y_n \in X$ tal que $\text{máx}\, W \setminus V = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Como $V \subseteq \text{máx}\, W$, tenemos que

$$V \subseteq W \cap (y_1]^c_{\leq_{\mathcal{K}}} \cap ... \cap (y_n]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}.$$

En efecto. Supongamos que existe $x \in V$ tal que $x \notin W \cap (y_1]^c_{\leq_{\mathcal{K}}} \cap ... \cap (y_n]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Como $V \subseteq \text{máx}\, W \subseteq W$, existe algún $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \notin (y_i]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$, esto es, $x \leq_{\mathcal{K}} y_i$. Como

$x \in V$ tenemos que $x \in \text{máx}\, W$ y por lo tanto, $x = y_i$, lo cual es imposible. Luego, $(V]_{\leq_\mathcal{K}} \subseteq \big(W \cap (y_1]^c_{\leq_\mathcal{K}} \cap ... \cap (y_n]^c_{\leq_\mathcal{K}}\big]$.

Sea $x \in (W \cap (y_1]^c_{\leq_\mathcal{K}} \cap ... \cap (y_n]^c_{\leq_\mathcal{K}}]$. Entonces existe $y \in W \cap (y_1]_{\leq_\mathcal{K}} \cap ... \cap (y_n]^c_{\leq_\mathcal{K}}$ tal que $x \leq_\mathcal{K} y$. Como W es un conjunto finito e $y \in W$, existe $m \in \text{máx}\, W$ tal que $y \leq_\mathcal{K} m$. Consecuentemente, $m \in \text{máx}\, W \setminus \{y_1, ..., y_n\} = V$ pues $y \in (y_1]^c_{\leq_\mathcal{K}} \cap \ldots \cap (y_n]^c_{\leq_\mathcal{K}}$. Por lo tanto, $x \in (V]_{\leq_\mathcal{K}}$. Luego,

$$(V]_{\leq_\mathcal{K}} = (W \cap (y_1]^c_{\leq_\mathcal{K}} \cap ... \cap (y_n]^c_{\leq_\mathcal{K}}]_{\leq_\mathcal{K}}.$$

Por item (1) de este Lema, $(y_1]_{\leq_\mathcal{K}}, \ldots, (y_n]_{\leq_\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$ y como $W \in \mathcal{K}$, por condición (2) de Definición 3.1.4, resulta

$$\text{sat}(W \cap (y_1]^c_{\leq_\mathcal{K}} \cap ... \cap (y_n]^c_{\leq_\mathcal{K}}) = (W \cap (y_1]^c_{\leq_\mathcal{K}} \cap ... \cap (y_n]^c_{\leq_\mathcal{K}}]_{\leq_\mathcal{K}} = (V]_{\leq_\mathcal{K}} \in \mathcal{K}.$$

■

Ahora estamos en condiciones de mostrar la manera de obtener un H-espacio ideal finito a partir de un H-espacio finito $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}\rangle$ dado, de forma tal que las álgebras de Hilbert asociadas coincidan.

Teorema 3.4.5. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}\rangle$ un H-espacio finito. Entonces la estructura $\langle X, \leq_\mathcal{K}, \mathcal{S}_\mathcal{K}\rangle$, donde $\mathcal{S}_\mathcal{K} = \{\text{máx}\, W : W \in \mathcal{K}\}$ y $\leq_\mathcal{K}$ es el orden dual de especialización, es un H-espacio ideal finito tal que*

$$\langle H_{\mathcal{S}_\mathcal{K}}(X), \Rightarrow_{\leq_\mathcal{K}}, X\rangle = \mathbb{D}(\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}\rangle).$$

Demostración. Veamos que $\langle X, \leq_\mathcal{K}, \mathcal{S}_\mathcal{K}\rangle$ es un IH-espacio finito mostrando las condiciones de la Definición 3.4.1.

$(IH1)$ Como $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}\rangle$ un H-espacio finito, $\langle X, \leq_\mathcal{K}\rangle$ es un conjunto ordenado finito donde $\leq_\mathcal{K}$ es el orden dual de especialización y además, como $\mathcal{K} \neq \emptyset$, existe $W \in \mathcal{K}$. Por consiguiente, $\text{máx}\, W \in \mathcal{S}_\mathcal{K}$. Luego, $\emptyset \neq \mathcal{S}_\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

$(IH2)$ Sea $x \in X$. Por Lema 3.4.4, $(x]_{\leq_\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$. Luego, $\{x\} = \text{máx}(x]_{\leq_\mathcal{K}} \in \mathcal{S}_\mathcal{K}$.

$(IH3)$ Sea $W \in \mathcal{S}_\mathcal{K}$ y sean $x, y \in W$ tal que $x \leq_\mathcal{K} y$. Por lo tanto, existe $W_1 \in \mathcal{K}$ tal que $W = \text{máx}\, W_1$. Luego, $x, y \in \text{máx}\, W_1$ con $x \leq_\mathcal{K} y$. Lo que implica que $x = y$.

$(IH4)$ Sea $W \in \mathcal{S}_\mathcal{K}$ y $V \subseteq W$. Esto es, existe $W_1 \in \mathcal{K}$ tal que $V \subseteq W = \text{máx}\, W_1$. Por Lema 3.4.4, $(V]_{\leq_\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$. Por Lema 3.4.3, $(\text{máx}(V]_{\leq_\mathcal{K}}]_{\leq_\mathcal{K}} = (V]_{\leq_\mathcal{K}}$. Por lo tanto, $\text{máx}(V]_{\leq_\mathcal{K}} = V \in \mathcal{S}_\mathcal{K}$.

Sabemos que $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq_\mathcal{K}}, X\rangle$ y $\langle H_{\mathcal{S}_\mathcal{K}}(X), \Rightarrow_{\leq_\mathcal{K}}, X\rangle$ son subálgebras de Hilbert de $\langle \mathcal{P}_{\leq_\mathcal{K}}(X), \Rightarrow_{\leq_\mathcal{K}}, X\rangle$. Sólo resta probar que $H_{\mathcal{S}_\mathcal{K}}(X) = D(X)$. Sea $U \in D(X)$. Por lo tanto $U^c \in \mathcal{K}$ y consecuentemente, por Lema 3.4.3, $(\text{máx}\, U^c]_{\leq_\mathcal{K}} = U^c$. Luego, existe $\emptyset \subseteq U^c$ tal que

$$U = (\text{máx}\, U^c \cap \emptyset^c]^c_{\leq_\mathcal{K}} = U^c \Rightarrow_{\leq_\mathcal{K}} \emptyset \in H_{\mathcal{S}_\mathcal{K}}(X).$$

Sea $U \in H_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}}}(X)$. Existe $W \in \mathcal{K}$, y $V \subseteq \text{máx}\, W$ tal que $U = (\text{máx}\, W \cap V^c]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Veamos que

$$(\text{máx}\, W \cap V^c]_{\leq_{\mathcal{K}}} = (W \cap (V]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}]_{\leq_{\mathcal{K}}}.$$

Para ello veamos primero que $\text{máx}\, W \cap V^c \subseteq (V]^c$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe $m \in \text{máx}\, W \cap V^c$ tal que $m \notin (V]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Entonces $m \in (V]_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Por lo tanto, existe $x \in V$ tal que $m \leq_{\mathcal{K}} x$. Como $V \subseteq \text{máx}\, W$, $x \in \text{máx}\, W$. Luego, $\text{máx}\, W \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ con $x, m \in \text{máx}\, W$. Por Definición 3.4.1, $x = m \in V$, lo cual es imposible. Como $\text{máx}\, W \subseteq W$, se sigue que $\text{máx}\, W \cap V^c \subseteq W \cap (V]^c$. Por lo tanto,

$$(\text{máx}\, W \cap V^c]_{\leq_{\mathcal{K}}} \subseteq (W \cap (V]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}]_{\leq_{\mathcal{K}}}.$$

Para probar la otra inclusión, tomamos $x \in (W \cap (V]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}]_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Entonces existe $y \in W \cap (V]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$ tal que $x \leq_{\mathcal{K}} y$. Como W es un conjunto finito, existe $m \in \text{máx}\, W$ tal que $y \leq_{\mathcal{K}} m$ y consecuentemente, $m \notin V$ pues $y \notin (V]_{\leq_{\mathcal{K}}}$. Por lo tanto, $m \in \text{máx}\, W \cap V^c$. Luego, $x \in (\text{máx}\, W \cap V^c]_{\leq_{\mathcal{K}}}$.

Como $W \in \mathcal{K}$ y $V \subseteq \text{máx}\, W$, por item (2) de Lema 3.4.4, $(V]_{\leq_{\mathcal{K}}} \in \mathcal{K}$. Luego, $\text{sat}(W \cap (V]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}) = (\text{máx}\, W \cap V^c]_{\leq_{\mathcal{K}}} \in \mathcal{K}$ y por lo tanto $U \in D(X)$. ■

El próximo resultado muestra la construcción recíproca a la dada en el resultado anterior.

Teorema 3.4.6. *Sea $\langle X, \leq, \mathcal{S}\rangle$ un IH-espacio finito. Entonces la estructura $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}\rangle$, donde $\mathcal{K}_{\mathcal{S}} = \{(W] : W \in \mathcal{S}\}$, es un H-espacio finito y*

$$\langle H_{\mathcal{S}}(X), \Rightarrow, X\rangle = \mathbb{D}(\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}\rangle).$$

Demostración. Primero probemos que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}\rangle$ es un H-espacio finito probando las condiciones de la Definición 3.1.4.

(E_1) Sea $x \in X$. Como $\langle X, \leq, \mathcal{S}\rangle$ es un IH-espacio finito, $\{x\} \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, para cada $x \in X$ existe $(x] \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ tal que $x \in (x]$. Sean $W, V \in \mathcal{S}$ tal que $x \in (W] \cap (V]$. Entonces existen $w \in W$, $v \in V$ tales que $x \leq w$ y $x \leq v$. Luego, $x \in (x] \subseteq (W] \cap (V]$, donde $(x] \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}}$. Como X es un conjunto finito, para cada $W \in \mathcal{S}$ tenemos que $(W]$ es finito y por consiguiente, $(W]$ es compacto. Hemos probado que $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ es una base subconjuntos abiertos y compactos para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}$ definida en X.

(E_2) Sean $W, V \in \mathcal{S}$. Veamos que $\text{sat}((W] \cap (V]^c) = ((W] \cap (V]^c]_{\leq_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}}$, donde $\leq_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}$ es el orden dual de especialización. Como $W \cap (V]^c \subseteq W$ y $W \in \mathcal{S}$, por $(IH4)$ de la Definición 3.4.1, resulta $W \cap (V]^c \in \mathcal{S}$. Por lo cual $(W \cap (V]^c] \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}}$. Mostraremos entonces que

$$(W \cap (V]^c] = ((W] \cap (V]^c]_{\leq_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}}.$$

Primero observemos que $\leq \ \subseteq \ \leq_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}$. En efecto. Sean $x, y \in X$ tal que $x \leq y$. Sea $U \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ con $y \in U$. Por lo tanto, existe $V \in \mathcal{S}$ tal que $U = (V]$ con $y \in U$. Esto es, existe $w \in V$ tal que $y \leq w$. Luego, $x \leq y \leq w$ con $w \in V$. Por ende, $x \in U$. Luego, $x \leq_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}} y$.

Consecuentemente, como $W \subseteq (W]$, tenemos que

$$(W \cap (V]^c] \subseteq ((W] \cap (V]^c] \subseteq ((W] \cap (V]^c]_{\leq_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}}.$$

Para probar la otra inclusión, tomemos $x \in ((W] \cap (V]^c]_{\leq_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}}$. Esto es, existe $y \in (W] \cap (V]^c$ tal que $x \leq_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}} y$. Entonces existe $z \in W$ tal que $y \leq z$. Además $z \notin (V]$, pues si suponemos lo contrario, existe $w \in V$ tal que $z \leq w$, con lo cual $y \in (V]$, contradicción. Luego, $y \in (W \cap (V]^c]$ y como $(W \cap (V]^c] \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}}$, resulta $x \in (W \cap (V]^c]$. Hemos probado entonces que

$$\mathrm{sat}((W] \cap (V]^c) = ((W] \cap (V]^c]_{\leq_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}} = (W \cap (V]^c] \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}}.$$

(E_3) Para probar que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}\rangle$ es sober, usaremos la equivalencia dada por el Teorema 3.1.6. Por la definición de $\leq_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}$ es inmediato que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}\rangle$ es T_0. Supongamos que existe un subconjunto cerrado Y de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}\rangle$ y una familia dualmente directa $L = \{(U] \mid U \in \mathcal{S}_0\} \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{S}}$, con $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, tal que $Y \cap \bigcap\{(U] : (U] \in L\} = \emptyset$. Entonces $Y \subseteq \bigcup\{(U]^c : (U] \in L\}$. Como Y es un conjunto finito, Y es compacto. Por lo tanto, existen $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{S}_0$ tal que $Y \subseteq (U_1]^c \cup (U_2]^c \cup ... \cup (U_n]^c$. Como L es dualmente directo, existe $U \in \mathcal{S}_0$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$ y por lo tanto $Y \subseteq (U]^c$. Esto es, existe $(U] \in L$ tal que $Y \cap (U] = \emptyset$.

Hemos probado entonces que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}\rangle$ es un H-espacio finito. Veamos ahora que $\langle H_{\mathcal{S}}(X), \Rightarrow, X\rangle = \mathbb{D}(\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}\rangle)$. Sea $U \in H_{\mathcal{S}}(X)$. En [18], Teorema 38, se prueba que existe $Z \in \mathcal{S}$ tal que $U = (Z]^c$, como mostramos a continuación. Como $U \in H_{\mathcal{S}}(X)$, existe $W \in \mathcal{S}$ y $V \subseteq W$ tal que

$$\begin{aligned} U &= W \Rightarrow V &&= \{x \in X : [x) \cap W \subseteq V\} \\ &= \{x \in X : [x) \cap W \cap V^c = \emptyset\} &&= \{x \in X : [x) \cap W \backslash V = \emptyset\} \\ &= W \backslash V \Rightarrow \emptyset &&= (W \backslash V]^c. \end{aligned}$$

Como $W \backslash V \subseteq W$, resulta $W \backslash V \in \mathcal{S}$. Luego, $U^c \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}}$. Para probar la otra inclusión, tomamos $V \in \mathcal{S}$ tal que $U = (V]^c = (V \cap \emptyset^c]^c = V \Rightarrow \emptyset$, con $\emptyset \subseteq V$. Por lo tanto, $U \in H_{\mathcal{S}}(X)$. Hemos probado entonces que $\langle H_{\mathcal{S}}(X), \Rightarrow, X\rangle = \mathbb{D}(\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}}\rangle)$. ■

Teniendo en cuenta los Lemas 3.4.2 y 3.4.3, es claro ver que si $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ es un H-espacio finito

$$\mathcal{K}_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}}} = \{(W] : W \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}}\} = \left\{(\text{máx}\, U]_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}}} : U \in \mathcal{K}\right\} = \mathcal{K}$$

y si $\langle X, \leq, \mathcal{S}\rangle$ es un IH-espacio finito

$$\mathcal{S}_{\mathcal{K}_{\mathcal{S}}} = \{\text{máx}\, W : W \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}}\} = \{\text{máx}(U] : U \in \mathcal{S}\} = \mathcal{S}.$$

3.5. Sistemas Deductivos y Conjuntos Abiertos

La caracterización dada en esta sección para los sistemas deductivos de un álgebra de Hilbert por medio de los conjuntos abiertos del H-espacio dual correspondiente, se encuentra publicada en [20]. Realizando una pequeña modificación, hallamos una caracterización análoga en correspondencia con los subconjuntos cerrados del H-espacio dual correspondiente, resultado que usaremos en el capítulo siguiente.

Sea A un álgebra de Hilbert. Recordemos que $\langle \mathrm{Ds}(A), \vee, \wedge, \Rightarrow, \{1\}, A\rangle$ es una álgebra de Heyting, donde $D_1 \Rightarrow D_2 = \{a \in A : [a) \cap D_1 \subseteq D_2\}$ para $D_1, D_2 \in \mathrm{Ds}(A)$.

En [1] (ver también [29]) se demuestra que dado un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T}\rangle$, sus conjuntos abiertos tienen naturalmente una estructura de álgebra de Heyting

$$\langle \mathcal{T}, \cap, \cup, \rightarrowtail, \emptyset, X\rangle$$

donde la implicación de dos conjuntos abiertos U, V de $\langle X, \mathcal{T}\rangle$, se define de la siguiente manera:

$$U \rightarrowtail V = \mathrm{int}\,(U^c \cup V)\,.$$

El siguiente resultado muestra el isomorfismo existente entre los sistemas deductivos de un álgebra de Hilbert y los conjuntos abiertos de su correspondiente espacio dual.

Proposición 3.5.1. *Sea A un álgebra de Hilbert y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ su espacio dual. Entonces las álgebras de Heyting $\langle \mathrm{Ds}(A), \wedge, \vee, \Rightarrow, \{1\}, A\rangle$ y $\langle \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \cap, \cup, \rightarrowtail, \emptyset, X\rangle$ son isomorfas bajo la aplicación*

$$\psi : \mathrm{Ds}(A) \to \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$$

definida por

$$\psi\,(D) = \bigcup \{\varphi^c\,(a) : a \in D\}\,.$$

Demostración. Como $\psi\,(D) = \bigcup \{\varphi\,(a)^c : a \in D\} \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, ψ está bien definida. Mas aún, si $D_1, D_2 \in \mathrm{Ds}(A)$ y $D_1 \subseteq D_2$, entonces $\psi(D_1) \subseteq \psi(D_2)$. En efecto, sea $x \in X$ tal que $x \in \psi(D_1)$. Esto es, existe $a \in D_1$ tal que $x \in \varphi\,(a)^c$. Por lo asumido, $a \in D_2$ y por lo tanto, $x \in \psi(D_2)$. Tenemos entonces que ψ preserva la inclusión.

Sea $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. Consideremos el conjunto $\xi\,(O) = \{a \in A : \varphi\,(a)^c \subseteq O\}$. Veamos que $\xi\,(O) \in \mathrm{Ds}(A)$ para cada $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. Sean $a, b \in A$ tales que $a \in \xi\,(O)$ y $a \leq b$. Entonces, $\varphi(a) \subseteq \varphi(b)$ y consecuentemente, $\varphi^c(b) \subseteq \varphi^c(a) \subseteq O$. Luego, $b \in \xi\,(O)$. Claramente $\varphi\,(1)^c = \emptyset \subseteq O$, i.e., $1 \in \xi\,(O)$. Sean $a, a \to b \in \xi\,(O)$. Por lo tanto, $\varphi\,(a)^c \subseteq O$ y $(\varphi\,(a) \cap \varphi\,(b)^c] \subseteq O$. Luego

$$\varphi\,(b)^c = (\varphi\,(b)^c \cap \varphi\,(a)) \cup (\varphi\,(b)^c \cap \varphi\,(a)^c) \subseteq (\varphi\,(b)^c \cap \varphi\,(a)] \cup \varphi\,(a)^c \subseteq O,$$

concluyendo que $b \in \xi\,(O)$.

Ahora probaremos que ψ y ξ son uno inverso del otro. Sea $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. Entonces

$$\psi\left(\xi\left(O\right)\right) = \bigcup\left\{\varphi^{c}\left(a\right) : a \in \pi\left(O\right)\right\} = \bigcup\left\{\varphi^{c}\left(a\right) : \varphi\left(a\right)^{c} \subseteq O\right\} \subseteq O.$$

Sea $x \in O$. Como $\mathcal{K}$ es base de $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, existe $a \in A$ tal que $x \in \varphi^{c}(a) \subseteq O$ y consecuentemente, $x \in \psi\left(\xi\left(O\right)\right)$. Luego, $\psi\left(\xi\left(O\right)\right) = O$.

Sea $D \in \mathrm{Ds}(A)$. Entonces

$$\xi\left(\psi\left(D\right)\right) = \left\{a \in A : \varphi^{c}\left(a\right) \subseteq \bigcup\left\{\varphi\left(b\right)^{c} : b \in D\right\}\right\} = D.$$

Luego, como ψ preserva la inclusión, deducimos que es un isomorfismo entre retículos, y por lo tanto, podemos concluir que ψ es un isomorfismo entre las álgebras de Heyting $\langle \mathrm{Ds}(A), \wedge, \vee, \Rightarrow, \{1\}, A\rangle$ y $\langle \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \cap, \cup, \rightarrowtail, \emptyset, X\rangle$. ■

Para cada álgebra de Hilbert A y cada $a \in A$, se tiene que el conjunto $\varphi\left(a\right)^{c}$ es un subconjunto abierto y compacto de su espacio dual $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$. Pero no todo subconjunto abierto y compacto de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ debe ser necesariamente un subconjunto de $\mathcal{K}$. En el siguiente resultado caracterizamos los subconjuntos abiertos y compactos del H-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$.

Dado un espacio de Hilbert $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$, denotamos con

$$\mathcal{KO}\left(X\right)$$

al conjunto de todos los subconjuntos abiertos y compactos de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$. Notemos que

$$\langle \mathcal{KO}\left(X\right), \cup, \emptyset\rangle$$

es un semiretículo superior con primer elemento $\emptyset$.

Teorema 3.5.2. *Sea A un álgebra de Hilbert y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ su espacio dual. Sea $D \in \mathrm{Ds}(A)$. Entonces $\psi\left(D\right) \in \mathcal{KO}\left(X\right)$ si y sólo si D es finitamente generado.*

Demostración. Sea $D \in \mathrm{Ds}(A)$. Asumamos que $\psi\left(D\right) \in \mathcal{KO}(X)$. Como $\psi\left(D\right) = \bigcup\limits_{a \in D} \varphi\left(a\right)^{c}$ y $\psi(D)$ es compacto, existe un subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq D$ tal que $\psi\left(D\right) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \varphi\left(a_i\right)^{c}$. Luego,

$$\begin{aligned}
a \in D &\Leftrightarrow \varphi\left(a\right)^{c} \subseteq \psi\left(D\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi\left(a_i\right)^{c} \\
&\Leftrightarrow \varphi\left(a\right)^{c} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \varphi\left(a_i\right) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow \left(\varphi\left(a\right)^{c} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \varphi\left(a_i\right)\right]^{c} = \varphi\left(\left(a_1, \ldots, a_n; a\right)\right) = X \\
&\Leftrightarrow \left(a_1, \ldots, a_n; a\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow a \in \langle\{a_1, \ldots, a_n\}\rangle .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D = \langle\{a_1, \ldots, a_n\}\rangle$.

Probemos la recíproca. Asumamos que $D \in \mathrm{Ds}(A)$ tal que D es finitamente generado. Supongamos que $D = \langle\{a_1, \ldots, a_n\}\rangle$. Notemos que por lo probado, $a \in D$ si y sólo si $\varphi(a)^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(a_i)^c$. Por Proposición 3.5.1, $\psi(D) \in \mathcal{O}(X)$. Sólo nos resta probar que $\psi(D)$ es compacto. Sea $x \in \psi(D)$. Por lo tanto, existe $a \in D$ tal que $x \in \varphi(a)^c$ y consecuentemente, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \varphi^c(a_i)$. Luego, $\psi(D) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \varphi^c(a_i)$. La otra inclusión es trivial. Hemos probado que $\psi(D) \in \mathcal{KO}(X)$. ■

Si L es un retículo, entonces L^d es el retículo con el orden dual. Sean L_1 y L_2 dos retículos. Escribiremos $L_1 \cong L_2$ para indicar que L_1 y L_2 son isomorfos.

Observación 3.5.3. Sea A un álgebra de Hilbert y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ su correspondiente espacio dual. El conjunto $\mathcal{C}(X)$ formado por los conjuntos cerrados de X, ordenados con la relación inclusión, forman un retículo donde el primer elemento es $\emptyset$, el último elemento es X, el ínfimo es la intersección y el supremo es la unión de subconjuntos cerrados de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$. El retículo $\langle \mathrm{Ds}(A), \subseteq\rangle$, formado por los sistemas deductivos de A es dualmente isomorfo al retículo $\langle \mathcal{C}(X), \subseteq\rangle$. En efecto. Tomemos la aplicación

$$\mu : \mathrm{Ds}(A) \to \mathcal{C}(X)$$

definida por

$$\mu(D) = \bigcap\{\varphi(a) : a \in D\} = \{x \in X : D \subseteq x\}.$$

Para cada $D \in \mathrm{Ds}(A)$, $\mu(D) \in \mathcal{C}(X)$ por ser intersección de subconjuntos cerrados de X. Por lo tanto, μ está bien definida. Es claro que para $F, D \in \mathrm{Ds}(A)$ tales que $F \subseteq D$ se satisface que $\mu(D) \subseteq \mu(F)$.

Veamos ahora que la aplicación $\pi : \mathcal{C}(X) \to \mathrm{Ds}(A)$ definida por

$$\pi(Y) = \{a \in A : Y \subseteq \varphi(a)\},$$

está bien definida. Tomemos $Y \in \mathcal{C}(X)$. Como $\varphi(1) = X$, tenemos que $1 \in \pi(Y)$. Sean $a, b \in A$ tal que $a, a \to b \in \pi(Y)$. Esto es, $Y \subseteq \varphi(a)$ y $Y \subseteq \varphi(a \to b) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b) = (\varphi(a) \cap \varphi(b)^c]^c$. Por lo probado en la Proposición anterior, $Y \subseteq (\varphi(a) \cap \varphi(b)^c]^c \cap \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$ y consecuentemente, $b \in \pi(Y)$. Luego, $\pi(Y) \in \mathrm{Ds}(A)$, con lo cual tenemos que π está bien definida.

Sólo nos resta probar que μ y π son inversas entre sí. Sea $Y \in \mathcal{C}(X)$.

$$\begin{aligned} \mu(\pi(Y)) &= \bigcap\{\varphi(a) \mid a \in \pi(Y)\} &&= \bigcap\{\varphi(a) \mid a \in Y \subseteq \varphi(a)\} \\ &= \mathrm{cl}(Y) &&= Y. \end{aligned}$$

Ahora tomemos $D \in \mathrm{Ds}(A)$. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \in \pi(\mu(D)) = \{b \in A : \mu(D) \subseteq \varphi(b)\}$ y $a \notin D$, esto es, $(a] \cap D = \emptyset$. Por Teorema 2.2.10, existe $x \in X$

tal que $D \subseteq x$ y $a \notin x$, lo cual contradice lo asumido. Por lo tanto, $\pi\left(\mu(D)\right) \subseteq D$. Por otro lado, como $\mu\left(D\right) = \bigcap\left\{\varphi\left(b\right) \mid b \in D\right\} \subseteq \varphi\left(a\right)$ para cada $a \in D$, tenemos que $D \subseteq \pi\left(\mu\left(D\right)\right)$.

Consecuentemente,

$$\left\langle \mathrm{Ds}\left(A\right), \subseteq \right\rangle \cong \left\langle \mathcal{C}(X), \subseteq \right\rangle^{d}.$$

Capítulo 4

$H\Box$-álgebras

En este capítulo introducimos la variedad $\mathrm{Hil}_\Box$ de álgebras de Hilbert con operador modal necesidad $\Box$, llamadas $H\Box$-álgebras, las cuales están asociadas al fragmento $\{\rightarrow, \Box\}$ de la lógica modal normal intuicionista $\mathbf{IntK}_\Box$, denotado por $\mathbf{IntK}_\Box^{\rightarrow}$. El objetivo principal del presente capítulo es estudiar la teoría de representación y dar una dualidad topológica para la variedad $\mathrm{Hil}_\Box$. Estos resultados nos permiten probar que $\mathbf{IntK}_\Box^{\rightarrow}$ y algunas extensiones axiomáticas son canónicas. También nos permiten caracterizar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en algunas subvariedades de $H\Box$-álgebras. Gran parte de lo presentado en este capítulo se encuentra publicado en [23].

4.1. Álgebras y marcos

Definición 4.1.1. Un *álgebra de Hilbert con un operador modal* $\Box$, o $H\Box$*-álgebra* para abreviar, es un par $A = \langle A, \Box \rangle$ donde A es un álgebra de Hilbert y $\Box$ es un semi-homomorfismo definido sobre A. Es decir,

1. $\Box 1 = 1$,
2. $\Box(a \rightarrow b) \leq \Box a \rightarrow \Box b$, para todo $a, b \in A$.

Denotamos con $\mathrm{Hil}_\Box$ a la variedad de las $H\Box$-álgebras. La variedad $\mathrm{Hil}_\Box$ se corresponde con el $\{\Box, \rightarrow\}$-reducto de la variedad de álgebras de Heyting con un operador modal $\Box$ (ver, por ejemplo, [14]). Más aún, la variedad de álgebras de Tarski modales introducidas en [13] es una subvariedad de $\mathrm{Hil}_\Box$.

Definición 4.1.2. Sean $A, B \in \mathrm{Hil}_\Box$. Una función $h : A \rightarrow B$ es un $\Box$*-semi-homomorfismo* ($\Box$*-homomorfismo*) si h es un semi-homomorfismo (homomorfismo) tal que $h(\Box a) = \Box(h(a))$, para todo $a \in A$.

Denotamos con $\mathrm{Hil}_\Box\mathcal{S}$ la categoría de $H\Box$-álgebras con $\Box$-semi-homomorfismos y con $\mathrm{Hil}_\Box\mathcal{H}$ la categoría de $H\Box$-álgebras con $\Box$-homomorfismos.

Sea X un conjunto y Q una relación binaria definida sobre X. Para cada $U \in \mathcal{P}(X)$ consideramos el siguiente conjunto

$$\Box_Q(U) = \{x \in X : Q(x) \subseteq U\}.$$

Ejemplo 4.1.1. ([30]) Un *marco de Kripke intuicionista modal* es una estructura relacional

$$\mathcal{F} = \langle X, \leq, Q\rangle\,,$$

donde $\langle X, \leq\rangle$ es un conjunto ordenado, y Q es una relación binaria definida sobre X tal que

$$\leq \circ Q \subseteq Q\circ \leq,$$

donde $\circ$ es la composición de relaciones. Si $\mathcal{F} = \langle X, \leq, Q\rangle$ es un marco de Kripke intuicionista modal entonces

$$\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Rightarrow_{\leq}, \Box_Q, X\rangle$$

es un $H\Box$-álgebra. En efecto. Sabemos que $\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \cup, \cap, \Rightarrow_{\leq}, \emptyset, X\rangle$ es un álgebra de Heyting (ver Ejemplo 1.3.1). Sólo resta probar que $\Box_Q$ es un operador modal definido en dicha álgebra. Comencemos mostrando que $\Box_Q(U) \in \mathcal{P}_{\leq}(X)$, para todo $U \in \mathcal{P}_{\leq}(X)$. Sea $x \in \Box_Q(U)$ y sea $y \in X$ tal que $x \leq y$. Veamos que $Q(y) \subseteq U$. Tomemos $z \in X$ tal que $z \in Q(y)$. Resulta entonces $(x, z) \in (\leq \circ Q)$ y como $(\leq \circ Q) \subseteq (Q\circ \leq)$, tenemos que existe $w \in X$ tal que $w \in Q(x)$ y $w \leq z$. Como $Q(x) \subseteq U$, $w \in U$ y como U es subconjunto creciente de X, $z \in U$. Luego, $y \in \Box_Q(U)$. Mostremos ahora que $\Box_Q$ es un semi-homomorfismo definido en $\mathcal{P}_{\leq}(X)$. Es claro que $\Box_Q(X) = X$. Ahora tomemos $x \in \Box_Q(U \Rightarrow_{\leq} V)$, con $U, V \in \mathcal{P}_{\leq}(X)$. Por lo tanto, $Q(x) \subseteq U \Rightarrow_{\leq} V$ y consecuentemente, para todo $z \in Q(x)$ resulta $[z) \cap U \subseteq V$. Probaremos que $x \in \Box_Q(U) \Rightarrow_{\leq} \Box_Q(V)$ mostrando que $[x) \cap \Box_Q(U) \subseteq \Box_Q(V)$. Sea $y \in [x) \cap \Box_Q(U)$. Veamos que $Q(y) \subseteq V$. Para ello tomamos $w \in Q(y)$, entonces $w \in U$ y además $(x, w) \in (\leq \circ Q)$. Luego, $(x, w) \in Q\circ \leq$ lo cual implica la existencia de $k \in X$ tal que $k \in Q(x)$ y $k \leq w$. Por lo asumido, $[k) \cap U \subseteq V$. Como $w \in [k) \cap U$, tenemos que $w \in V$. Queda probado que $\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \cup, \cap, \Rightarrow_{\leq}, \emptyset, X\rangle$ es un álgebra de Heyting con operador modal $\Box_Q$. Luego, $\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Rightarrow_{\leq}, \Box_Q, X\rangle$ es un $H\Box$-álgebra.

Definición 4.1.3. La terna $\langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ es un $H\Box$-*marco* si $\langle X, \leq_{\mathcal{K}}\rangle$ es un conjunto ordenado y $(\leq_{\mathcal{K}} \circ Q) \subseteq (Q\circ \leq_{\mathcal{K}})$.

Un $H\Box$-marco $\langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ es un $H\Box$-*marco general* si:

1. $\mathrm{sat}(U \cap V^c) \in \mathcal{K}$, para todo $U, V \in \mathcal{K}$.

2. $Q^{-1}(U) \in \mathcal{K}$, para todo $U \in \mathcal{K}$.

Observemos que usando la definición 2.7.1, podemos decir que $\langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ es un *$H\Box$-marco general* si $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ es un H-marco general tal que $(\leq_{\mathcal{K}} \circ Q) \subseteq (Q\circ \leq_{\mathcal{K}})$ y $Q^{-1}(U) \in \mathcal{K}$, para todo $U \in \mathcal{K}$.

Lema 4.1.4. *Si $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ es un $H\Box$-marco general, entonces*

$$A(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Rightarrow_{\leq}, \Box_Q, X\rangle \in \mathrm{Hil}_{\Box}$$

y $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq}, \Box_Q, X\rangle$ es subálgebra de $A(\mathcal{F})$.

Demostración. Como $\langle X, \leq\rangle$ es un conjunto ordenado, del Ejemplo 1.3.1 tenemos que $\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Rightarrow_{\leq}, X\rangle$ es un álgebra de Hilbert. Además, como $(\leq \circ Q) \subseteq (Q\circ \leq)$ resulta $\Box_Q(U) \in \mathcal{P}_{\leq}(X)$, para todo $U \in \mathcal{P}_{\leq}(X)$. Más aún, como $\Box_Q(U) = Q^{-1}(U^c)^c$ tenemos que $\Box_Q(U) \in D(X)$, pues $Q^{-1}(U^c) \in \mathcal{K}$ para todo $U \in D(X)$. Finalmente, por Lema 2.7.3, podemos asegurar que $\langle D(X), \Rightarrow_{\leq}, \Box_Q, X\rangle$ es subálgebra de $A(\mathcal{F})$. ■

Sea $A \in \mathrm{Hil}_{\Box}$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, definimos inductivamente la fórmula $\Box^n a$ como $\Box^0 a = a$ y $\Box^{n+1} a = \Box(\Box^n a)$. Sea S un subconjunto de A. Definimos los siguientes subconjuntos de A:

$$\Box(S) = \{\Box a \in A : a \in S\} \text{ y } \Box^{-1}(S) = \{a \in A : \Box a \in S\}.$$

Es fácil ver que $\Box^{-1}(D) \in \mathrm{Ds}(A)$ cuando $D \in \mathrm{Ds}(A)$. Notemos además que, por Lema 2.3.3, $(\Box(x^c)]$ es un ideal de orden cuando $x \in X(A)$.

Lema 4.1.5. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_{\Box}$. Sea $D \in \mathrm{Ds}(A)$ y $a \in A$. Entonces, $\Box a \notin D$ si y sólo si existe $x \in X(A)$ tal que $\Box^{-1}(D) \subseteq x$ y $a \notin x$.*

Demostración. Sea $D \in \mathrm{Ds}(A)$ y $a \in A$. Asumamos que $\Box a \notin D$. Esto es, $(\Box a] \cap D = \emptyset$. Por Teorema 2.2.10, existe $y \in X(A)$ tal que $D \subseteq y$ y $\Box a \notin y$. Por Lema 3.3.6, existe $x \in X(A)$ tal que $\Box^{-1}(y) \subseteq x$ y $a \notin x$. Como $\Box^{-1}(D) \subseteq \Box^{-1}(y)$, queda probada la condición suficiente. La recíproca es inmediata. ■

Sea A una $H\Box$-álgebra. Teniendo en cuenta que $\Box$ es un semi-homomorfismo definido sobre A y el Teorema 3.3.7, podemos asegurar que la relación binaria $Q_A \subseteq X(A)\times X(A)$ definida por

$$(x, y) \in Q_A \text{ si y sólo si } \Box^{-1}(x) \subseteq y,$$

para cada par $x, y \in X(A)$, es la H-relación asociada con el operador modal $\Box$. Por lo tanto, $Q_A^{-1}(U) \in \mathcal{K}_A$, para todo $U \in \mathcal{K}_A$ y además, por Teorema 3.3.4, Q_A satisface la condición $Q_A = (\subseteq \circ Q_A) = (Q_A \circ \subseteq)$. Más aún, por Lema 2.7.3, tenemos que $\mathrm{sat}(U \cap V^c) \in \mathcal{K}_A$ para todo $U, V \in \mathcal{K}_A$. Luego, la estructura

$$\mathcal{F}(A) = \langle X(A), \mathcal{K}_A, Q_A \rangle,$$

es un $H\Box$-marco general.

4.2. $H\Box$-espacios

En la sección anterior vimos que las $H\Box$-álgebras son representables por medio de $H\Box$-marco generales. Ahora vamos a definir los $H\Box$-espacios (casos particulares de $H\Box$-marcos) los cuales resultan ser las estructuras relacionales duales a las $H\Box$-álgebras.

Definición 4.2.1. Una estructura $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q \rangle$ es un $H\Box$-*espacio* si $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un H-espacio y $Q \subseteq X \times X$ es una H-relación.

Como en todo $H\Box$-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q \rangle$, Q es una H-relación, por Teorema 3.3.4, la condición $(\leq \circ Q) \subseteq (Q \circ \leq)$ es válida en cualquier $H\Box$-espacio. Hecho por el cual obtenemos el siguiente resultado:

Lema 4.2.2. *Todo $H\Box$-espacio es un $H\Box$-marco general.*

Resulta entonces que si $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q \rangle$ es un $H\Box$-espacio, entonces $\langle D(X), \Box_Q \rangle$ es un $H\Box$-álgebra.

Teorema 4.2.3. *Para cada $H\Box$-álgebra $\langle A, \Box \rangle$ existe un $H\Box$-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q \rangle$ tal que $\langle A, \Box \rangle$ es isomorfo a $\langle D(X), \Box_Q \rangle$.*

Demostración. Como $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$ es un H-espacio y Q_A es una H-relación, tenemos que $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, Q_A \rangle$ es un $H\Box$-espacio, y consecuentemente, $\langle D(X\,(A)), \Box_{Q_A} \rangle$ es un $H\Box$-álgebra. Por Teorema 3.2.2, φ es un isomorfismo entre las álgebras de Hilbert A y $D(X(A))$. Por otro lado, como $\Box$ es un semi-homomorfismo, resulta como consecuencia inmediata del Lema 3.3.6 que $\varphi(\Box a) = \Box_{Q_A}(\varphi(a))$, para cada $a \in A$ y por lo tanto, podemos concluir que φ es un isomorfismo entre las $H\Box$-álgebras $\langle A, \Box \rangle$ y $\langle D(X\,(A)), \Box_Q \rangle$. ■

Ahora estamos en condiciones de definir la contrapartida topológica de los $\Box$-semi-homomorfismos y $\Box$-homomorfismos definidos entre $H\Box$-álgebras.

Definición 4.2.4. Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, Q_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, Q_2 \rangle$ $H\Box$-espacios y sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una H-relación. Diremos que R es una $H\Box$-*relación* si R conmuta con Q, i.e., $Q_1 \circ R = R \circ Q_2$.

Si $R \subseteq X_1 \times X_2$ es una H-relación funcional tal que R conmuta con Q, entonces R es una $H\Box$-*relación funcional.*

Denotamos con $\mathcal{M}_{\Box}\mathcal{SR}$ a la categoría formada por $H\Box$-espacios y $H\Box$-relaciones. Vamos a probar que esta categoría es dualmente equivalente a $\mathrm{Hil}_{\Box}\mathcal{S}$.

Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un H-espacio y consideremos la función definida en el Teorema 3.1.6:

$$\varepsilon : X \to X\,(D(X)) \text{ tal que } \varepsilon\,(x) = \{U \in D\,(X) : x \in U\}\,.$$

Por Corolario 3.3.3, tenemos que la relación $\varepsilon^* \subseteq X \times X\,(D(X))$ dada por

$$(x, P) \in \varepsilon^* \text{ si y sólo si } \varepsilon(x) \subseteq P$$

es una H-relación. Probaremos ahora que ε^* es un morfismo de $\mathcal{M}_{\Box}\mathcal{SR}$.

Teorema 4.2.5. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ un $H\Box$-espacio. Entonces, la función ε es un homeomorfismo definido entre los $H\Box$-espacios $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ y $\left\langle X(D(X)), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}}, Q_{D(X)}\right\rangle$ tal que*

$$(x, y) \in Q \text{ si y sólo si } (\varepsilon(x), \varepsilon(y)) \in Q_{D(X)},$$

donde $Q_{D(X)}$ es la $H\Box$-relación asociada con el operador modal $\Box_Q$. Más aún, la relación ε^* es una $H\Box$-relación.

Demostración. Como $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ es un $H\Box$-espacio, $\langle D\,(X)\,, \Box_Q\rangle$ es un $H\Box$-álgebra. Luego, $\left\langle X\,(D\,(X))\,, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}}\right\rangle$ es un H-espacio. Sea $Q_{D(X)} \subseteq D(X) \times D(X)$ tal que

$$(F, P) \in Q_{D(X)} \textit{ si y sólo si } \Box_Q^{-1}(F) \subseteq P,$$

para todo $F, P \in X(D(X))$. Como $\Box_Q$ es un semi-homomorfismo definido en $D(X)$, por Teorema 3.3.7 tenemos que $Q_{D(X)}$ es una H-relación, y por lo tanto, podemos afirmar que la estructura $\left\langle X\,(D\,(X))\,, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}}, Q_{D(X)}\right\rangle$ es un $H\Box$-espacio. Como sabemos por Teorema 3.2.3 que ε es un homeomorfismo definido entre los H-espacios $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ y $\left\langle X\,(D\,(X))\,, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}}\right\rangle$, siendo $\mathcal{K}_{D(X)} = \{\varphi(U)^c : U \in D(X)\}$, tenemos probada la primer parte del Teorema.

Sea $(x, y) \in Q$. Probemos que $(\varepsilon(x), \varepsilon(y)) \in Q_{D(X)}$, i.e., $\Box_Q^{-1}(\varepsilon(x)) \subseteq \varepsilon(y)$. Sea $U \in D(X)$ tal que $U \in \Box_Q^{-1}(\varepsilon(x))$. Esto es, $Q(x) \subseteq U$ y como $y \in Q(x)$, tenemos que $y \in U$. Es decir, $U \in \varepsilon(y)$. Ahora, asumamos que $\Box_Q^{-1}(\varepsilon(x)) \subseteq \varepsilon(y)$ y supongamos que $(x, y) \notin Q$. Como $Q(x)$ es un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$, existe $U \in D(X)$ tal que $Q(x) \subseteq U$ e $y \notin U$. Por lo tanto, $U \in \Box_Q^{-1}(\varepsilon(x))$ con $U \notin \varepsilon(y)$, lo cual contradice lo asumido.

Por último, para probar que ε^* es una $H\Box$-relación, sólo resta mostrar que $Q \circ \varepsilon^* = \varepsilon^* \circ Q_{D(X)}$. Sea $x \in X$ y $P \in X\,(D(X))$ tal que $(x, P) \in Q \circ \varepsilon^*$. Por lo tanto, existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Q$ y $(y, P) \in \varepsilon^*$, esto es, $\varepsilon(y) \subseteq P$. Como $(x, y) \in Q$, tenemos que $(\varepsilon(x), \varepsilon(y)) \in Q_{D(X)}$, i.e., $\Box_Q^{-1}(\varepsilon(x)) \subseteq \varepsilon(y) \subseteq P$. Luego, $(\varepsilon(x), P) \in Q_{D(X)}$. Es claro que $(x, \varepsilon(x)) \in \varepsilon^*$. Resulta entonces $(x, P) \in \varepsilon^* \circ Q_{D(X)}$. Luego, $Q \circ \varepsilon^* \subseteq \varepsilon^* \circ Q_{D(X)}$.

Supongamos que $(x, P) \in \varepsilon^* \circ Q_{D(X)}$. Existe entonces $F \in X\ (D(X))$ tal que $\varepsilon(x) \subseteq F$ y $\Box_Q^{-1}(F) \subseteq P$. Como ε es sobreyectiva, existen $f, p \in X$ tal que $F = \varepsilon(f)$ y $P = \varepsilon(p)$. Tenemos entonces que $\Box_Q^{-1}(\varepsilon(x)) \subseteq \Box_Q^{-1}(\varepsilon(f)) \subseteq \varepsilon(p)$. Luego, $(\varepsilon(x), \varepsilon(p)) \in Q_{D(X)}$ y consecuentemente, $(x, p) \in Q$. Es claro que $(p, P) \in \varepsilon^*$. Por ende, $(x, P) \in Q \circ \varepsilon^*$. ■

Sabemos por Teorema 3.3.9 que si $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ son H-espacios y $R \subseteq X_1 \times X_2$ es una H-relación, entonces la aplicación $h_R : D(X_2) \to D(X_1)$ definida por

$$h_R(U) = \{x \in X_1 \mid R(x) \subseteq U\}$$

es un semi-homomorfismo. Veamos ahora que dicha aplicación es $\Box$-semi-homomorfismo cuando R es una $H\Box$-relación definida entre $H\Box$-espacios.

Teorema 4.2.6. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, Q_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, Q_2\rangle$ $H\Box$-espacios y $R \subseteq X_1 \times X_2$ una $H\Box$-relación. Entonces, h_R es un morfismo de* $\mathrm{Hil}_\Box\mathcal{S}$.

Demostración. Probaremos que $h_R(\Box_{Q_2}(U)) = \Box_{Q_1}(h_R(U))$, para cada $U \in D(X_2)$. Sea $x \in X_1$. Entonces

$$\begin{array}{llllll} x \in h_R(\Box_{Q_2}(U)) & \iff & R(x) \subseteq \Box_{Q_2}(U) & \iff & Q_2(R(x)) \subseteq U \\ & \iff & R(Q_1(x)) \subseteq U & \iff & \forall z \in Q_1(x)(R(z) \subseteq U) \\ & \iff & Q_1(x) \subseteq h_R(U) & \iff & x \in \Box_{Q_1}(h_R(U)). \end{array}$$

■

Usando el resultado anterior y el Teorema 3.3.15, obtenemos el siguiente Corolario.

Corolario 4.2.7. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, Q_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, Q_2\rangle$ $H\Box$-espacios y $R \subseteq X_1 \times X_2$ una $H\Box$-relación funcional. Entonces, h_R es un morfismo de* $\mathrm{Hil}_\Box\mathcal{H}$.

Sean A, B álgebras de Hilbert y $h : A \to B$ un semi-homomorfismo. Por Teorema 3.3.7 sabemos que la relación binaria $R_h \subseteq X(B) \times X(A)$ definida por

$$(x, y) \in R_h \iff h^{-1}(x) \subseteq y$$

es una H-relación. A continuación estudiamos a R_h siendo h un $\Box$-semi-homomorfismo definido entre $H\Box$-álgebras.

Teorema 4.2.8. *Sean $A, B \in \mathrm{Hil}_\Box$ y sea $h : A \to B$ un $\Box$-semi-homomorfismo. Entonces, R_h es un morfismo de $\mathcal{M}_\Box\mathcal{SR}$.*

Demostración. Sólo nos resta probar que $R_h \circ Q_A = Q_B \circ R_h$. Sea $x \in X(B)$ e $y \in X(A)$ tal que $(x, y) \in R_h \circ Q_A$. Existe entonces $z \in X(A)$ tal que $z \in R_h(x)$ y $(z, y) \in Q_A$, i.e., $h^{-1}(x) \subseteq z$ y $\Box^{-1}(z) \subseteq y$. Consideremos en B el sistema deductivo $\Box^{-1}(x)$ y el ideal de orden $(h(y^c)]$. Supongamos que existe $a \in \Box^{-1}(x) \cap (h(y^c)]$. Entonces, $\Box a \in x$ y existe $b \in y^c$ tal que $a \leq h(b)$. Como $\Box a \leq \Box(h(b)) = h(\Box b)$, tenemos que $h(\Box b) \in x$. Luego, $\Box b \in z$ y por lo tanto, $b \in y$, lo cual es una contradicción. Resulta entonces que $\Box^{-1}(x) \cap (h(y^c)] = \emptyset$ y por Teorema 2.2.10, podemos asegurar que existe $w \in X(B)$ tal que $\Box^{-1}(x) \subseteq w$ y $(h(y^c)] \cap w = \emptyset$. Es decir, existe $w \in X(B)$ tal que $w \in Q_B(x)$ y $h^{-1}(w) \subseteq y$, i.e., $(w, y) \in R_h$. Lo cual implica que $y \in R_h(Q_B(x))$. Luego, $R_h \circ Q_A \subseteq Q_B \circ R_h$. De manera similar se demuestra la otra inclusión. ■

Por los Teoremas 4.2.8 y 3.3.15, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.2.9. *Sean $A, B \in \mathrm{Hil}_\Box$ y sea $h : A \to B$ un $\Box$-homomorfismo. Entonces R_h es una $H\Box$-relación funcional.*

Usando el Lema 4.2.6, el Lema 4.1.4 y el Teorema 4.2.6, concluímos que $\mathbb{D} : \mathcal{M}_\Box\mathcal{SR} \to \mathrm{Hil}_\Box\mathcal{S}$ definido por

$$\begin{array}{ll} \mathbb{D}(X) = \langle D(X), \Box_Q \rangle & \text{si } \langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, Q\rangle \text{ es un } H\Box\text{-espacio,} \\ \mathbb{D}(R) = h_R & \text{si } R \text{ es una } H\Box\text{-relación,} \end{array}$$

es un funtor contravariante. De la Observación 3.3.8, Teorema 4.2.3 y Teorema 4.2.8, podemos concluir que $\mathbb{X} : \mathrm{Hil}_\Box\mathcal{S} \to \mathcal{M}_\Box\mathcal{SR}$ definido por

$$\begin{array}{ll} \mathbb{X}(A) = \langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, Q_A \rangle & \text{si } A \text{ es un } H\Box\text{-álgebra,} \\ \mathbb{X}(h) = R_h & \text{si } h \text{ es un } \Box\text{-semi-homomorfismo} \end{array}$$

es un funtor contravariante. De los Lemas 3.3.10 y 3.3.11, los Teoremas 4.2.3 y 4.2.5, y los Corolarios 4.2.7 y 4.2.9, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 4.2.10. *Las categorías $\mathrm{Hil}_\Box\mathcal{S}$ y $\mathcal{M}_\Box\mathcal{SR}$ son dualmente equivalentes.*

Corolario 4.2.11. *La categoría $\mathrm{Hil}_\Box\mathcal{H}$ es dualmente isomorfa a la categoría formada por $H\Box$-espacios y $H\Box$-relaciones funcionales.*

4.3. Algunas subvariedades de $H\Box$-álgebras

Denotamos con $\mathrm{Hil}_\Box + \{\Gamma\}$ a la variedad de $H\Box$-álgebras generada por un conjunto finito de identidades Γ. En esta sección consideramos algunas variedades particulares de $H\Box$-álgebras. Estas variedades son la contrapartida algebraica de extensiones del fragmento implicativo de la lógica intuicionista modal $\mathbf{IntK}_\Box$.

Consideremos las siguientes identidades:

$$\begin{array}{ll}
\Box\mathbf{S} & a \to \Box a \approx 1, \\
\Box\mathbf{S}_n & a \to \Box^n a \approx 1, \\
\Box\mathbf{T} & \Box a \to a \approx 1, \\
\Box\mathbf{4} & \Box a \to \Box^2 a \approx 1, \\
\Box\mathbf{wD} & \Box^2 a \to \Box a \approx 1, \\
\Box\mathbf{5} & (\Box a \to \Box b) \to \Box(\Box a \to \Box b) \approx 1,
\end{array}$$

Observación 4.3.1. Las variedades $\mathrm{Hil}_\Box + \{\Box\mathbf{5}\}$ y $\mathrm{Hil}_\Box + \{\Box\mathbf{S}\}$ son subvariedades de $\mathrm{Hil}_\Box + \{\Box\mathbf{4}\}$. En efecto. Por la monotonía de $\Box$ es fácil ver que $\mathcal{M}_\Box\mathcal{H} + \{\Box\mathbf{S}\}$ satisface la identidad $\Box a \to \Box^2 a \approx 1$. Dicha identidad también se satisface para toda $A \in \mathcal{M}_\Box\mathcal{H} + \{\Box\mathbf{5}\}$, pues cualquiera sea $b \in A$:

$$1 = (\Box 1 \to \Box b) \to \Box(\Box 1 \to \Box b) = \Box b \to \Box\Box b.$$

Siguiendo la notación estándar, identificamos a continuación dos subvariedades importantes de $\mathrm{Hil}_\Box$:

$$\mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S4} = \mathrm{Hil}_\Box + \{\Box\mathbf{T}, \Box\mathbf{4}\},$$

$$\mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S5} = \mathrm{Hil}_\Box + \{\Box\mathbf{T}, \Box\mathbf{5}\}.$$

Es claro que $\mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S5}$ es subvariedad de $\mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S4}$. La variedad $\mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S4}$ es una generalización de las álgebras de Boole de clausura (ver [63]), y la variedad $\mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S5}$ es una generalización de las álgebras de Boole monádicas (ver [39]). Similarmente a lo realizado en [13], cada una de la identidades anteriores será caracterizada por medio de condiciones de primer orden.

El siguiente resultado es una generalización del Lema 4.1.5 aplicado a sistemas deductivos irreducibles.

Lema 4.3.2. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_\Box$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, Q\rangle$ su espacio dual. Sea $x \in X$ y $a \in A$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Box^n a \notin x$ si y sólo si existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Q^n$ y $a \notin y$.*

Demostración. Realizamos la demostración haciendo inducción sobre $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es inmediato para $n = 0$. Sea $x \in X$. Asumamos que si $\Box^n a \notin x$ entonces existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Q^n$ y $a \notin y$. Supongamos que $\Box^{n+1} a \notin x$. Esto es, $\Box(\Box^n a) \notin x$. Por Lema 4.1.5, existe $z \in X$ tal que $\Box^{-1}(x) \subseteq z$ y $\Box^n a \notin z$. Por lo asumido, existe $y \in X$ tal que $(z, y) \in Q^n$ y $a \notin y$. Como $(x, z) \in Q$ y $(z, y) \in Q^n$, tenemos que $(x, y) \in Q^{n+1}$, con $a \notin y$.

Consideremos ahora el hecho de que si existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Q^n$ y $a \notin y$, entonces $\Box^n a \notin x$. Supongamos que $(x, y) \in Q^{n+1}$ y $a \notin x$. Por lo tanto, existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in Q^n$ y $(z, y) \in Q$. Esto es, $\Box^{-1}(z) \subseteq y$ y como $a \notin y$, resulta $\Box a \notin z$. Como $(x, z) \in Q^n$ y $\Box a \notin z$, por lo asumido resulta $\Box^{n+1} a \notin x$. ■

Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ un $H\Box$-espacio. Siguiendo la notación usada en [30], denotamos con Φ y Φ' las siguientes condiciones de primer orden:

$$\Phi \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \forall y \forall z \, [xQy \wedge yQz \Rightarrow \exists w(x \leq w \wedge wQz \wedge \forall v(wQv \Rightarrow yQv))] \,.$$

$$\Phi' \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \forall y \forall z \, [xQy \wedge yQz \Rightarrow \exists w(x \leq w \wedge wQz \wedge yQw)] \,.$$

Observación 4.3.3. Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ un $H\Box$-espacio. Observemos que Φ' implica la transitividad de Q (análogamente sucede con Φ). En efecto. Sean $x, y, z \in X$ tales que xQy e yQz. Por Φ', existe $w \in X$ tal que $x \leq w$, wQz y yQw. Por Definición 4.2.1 y Teorema 3.3.4, tenemos que $Q\circ \leq = Q = \leq \circ Q$, y consecuentemente, $(x, z) \in Q$. Este resultado nos permite probar que si Q es reflexiva entonces Φ' y Φ son equivalentes. Para ello es suficiente probar que $\forall v(wQv \Rightarrow yQv) \Leftrightarrow yQw$. Usando que wQw, obtenemos la condición suficiente. Para probar la condición necesaria, se supone que yQw y wQv, para todo $v \in X$ y luego se usa que Φ' implica la transitividad de Q.

Teorema 4.3.4. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_{\Box}$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ su espacio dual. Entonces:*

1. $A \models a \to \Box^n a \approx 1$ *si y sólo si* $\forall x \forall y(xQ^n y \Rightarrow x \subseteq y)$*, con* $n \in \mathbb{N}$.
2. $A \models \Box a \to a \approx 1$ *si y sólo si Q es reflexiva.*
3. $A \models \Box a \to \Box^2 a \approx 1$ *si y sólo si Q es transitiva.*
4. $A \models \Box^2 a \to \Box a \approx 1$ *si y sólo si Q es débilmente densa, i.e.,*$\forall x \forall y(xQy \Rightarrow \exists z(xQz \wedge zQy))$.
5. $A \models \Box(\Box a \to a) \approx 1$ *si y sólo si* $\forall x \forall y(xQy \Rightarrow yQy)$.
6. $A \models (\Box a \to \Box b) \to \Box(\Box a \to \Box b) \approx 1$ *si y sólo si Φ se satisface en* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$.

Demostración.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $Q^n \not\subseteq \subseteq$. Por lo tanto, existen $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in Q^n$ y $x \not\subseteq y$. Esto es, existe $a \in A$ tal que $a \in x$ y $a \notin y$. Como $(x, y) \in Q^n$ y $a \notin y$, por Lema 4.3.2, $\Box^n a \notin x$. Como $a \leq \Box^n a$, tenemos que $a \notin x$, lo cual es una contradicción. Recíprocamente, supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \not\leq \Box^n a$. Por lo tanto, existe $x \in X$ tal que $a \in x$ y $\Box^n a \notin x$. Por Lema 4.3.2, existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Q^n$ y $a \notin y$. Por lo asumido, $x \subseteq y$ y por lo tanto $a \notin x$, lo cual es imposible.

2. $$\begin{aligned} \exists a \in A : \Box a \not\leq a &\iff \exists x \in X : \Box a \in x \text{ y } a \notin x \\ &\iff \exists x \in X : \Box^{-1}(x) \not\subseteq x \\ &\iff \exists x \in X : (x, x) \notin Q. \end{aligned}$$

3. Asumamos que $\Box a \leq \Box^2 a$ para todo $a \in A$. Supongamos que existen $x, y, z \in X$ tales que $(x, y), (y, z) \in Q$ y $(x, z) \notin Q$. Por ende, existe $a \in \Box^{-1}(x)$ tal que $a \notin z$. Como $(x, z) \in Q^2$ y $a \notin z$, por Lema 4.3.2, $\Box^2 a \notin x$. Como $\Box a \leq \Box^2 a$, resulta $\Box a \notin x$, lo cual es imposible. Recíprocamente, supongamos que Q es transitiva y que existe $a \in A$ tal que $\Box a \nleq \Box^2 a$. Existe $x \in X$ tal que $\Box a \in x$ y $\Box^2 a \notin x$. Por Lema 4.3.2, existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Q^2$ con $a \notin y$. Por lo asumido, $(x, y) \in Q$, i.e., $\Box^{-1}(x) \subseteq y$. Como $a \notin y$, resulta que $\Box a \notin x$. Contradicción.

4. Asumamos que $\Box^2 a \leq \Box a$ para todo $a \in A$. Sean $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in Q$. Consideremos el sistema deductivo $\Box^{-1}(x)$ y el ideal de orden $(\Box(y^c)]$ definidos en A. Supongamos que existe $a \in \Box^{-1}(x) \cap (\Box(y^c)]$. Por lo tanto, $\Box a \in x$ y existe $p \in y^c$ tal que $a \leq \Box p$. Por la monotonía de $\Box$, $\Box a \leq \Box^2 p \leq \Box p$ y consecuentemente, $\Box p \in x$. Por lo tanto, $p \in \Box^{-1}(x)$. Como $(x, y) \in Q$, entonces $p \in y$, lo cual es imposible. Luego, $\Box^{-1}(x) \cap (\Box(y^c)] = \emptyset$. Por Teorema 2.2.10, existe $z \in X$ tal que $\Box^{-1}(x) \subseteq z$ y $z \cap (\Box(y^c)] = \emptyset$. Esto es, $z \subseteq \Box(y^c)^c$ lo cual implica que $\Box^{-1}(z) \subseteq y$. Por ende, existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in Q$ y $(z, y) \in Q$. Recíprocamente. Asumamos que Q es débilmente densa y supongamos que existe $a \in A$ tal que $\Box^2 a \nleq \Box a$. Por lo tanto, existe $x \in X$ tal que $\Box^2 a \in x$ y $\Box a \notin x$. Por Lema 4.1.5, existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Q$ y $a \notin y$. Por lo asumido, $(x, y) \in Q^2$ y como $a \notin y$, tenemos que $\Box^2 a \notin x$, lo cual es una contradicción.

5. Consideremos que $\Box(\Box a \to a) = 1$ cualquiera sea $a \in A$ y sean $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in Q$, i.e., $\Box^{-1}(x) \subseteq y$. Tomemos $a \in \Box^{-1}(y)$. Como $1 \in x$, resulta $\Box a \to a \in \Box^{-1}(x)$ y consecuentemente, $\Box a \to a \in y$. Como $\Box a \in y$, tenemos $a \in y$. Luego, $\Box^{-1}(y) \subseteq y$. Recíprocamente, supongamos que existe $a \in A$ tal que $\Box(\Box a \to a) \neq 1$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\Box(\Box a \to a) \notin x$, i.e., $\Box a \to a \notin \Box^{-1}(x)$. Por Lema 4.1.5, existe $y \in X$ tal que $\Box^{-1}(x) \subseteq y$ y $\Box a \to a \notin y$. Por Corolario 2.2.11, existe $z \in X$ tal que $y \subseteq z$, $\Box a \in z$ y $a \notin z$. Luego, $\Box^{-1}(x) \subseteq z$ y entonces, por lo asumido, $\Box^{-1}(z) \subseteq z$. Como $a \in \Box^{-1}(z)$, resulta $a \in z$, lo cual es imposible.

6. Asumamos que $(\Box a \to \Box b) \leq \Box(\Box a \to \Box b)$, para todo $a, b \in A$. Sean $x, y, z \in X$ tales que $(x, y) \in Q$ y $(y, z) \in Q$. Notemos que el sistema deductivo $\langle x \cup \Box(\Box^{-1}(y))\rangle$ y el ideal de orden $(\Box(z^c)]$ definidos en A son disjuntos. En efecto. Si existe $a \in \langle x \cup \Box(\Box^{-1}(y))\rangle$ y $a \in (\Box(z^c)]$ entonces existe $b \in x, c \in \Box^{-1}(y)$ y $d \notin z$ tal que $b \to (\Box c \to \Box d) = 1 \in x$. Luego, $\Box c \to \Box d \in x$. Como $\Box c \to \Box d \leq \Box(\Box c \to \Box d)$, tenemos que $\Box(\Box c \to \Box d) \in x$. Esto es, $\Box c \to \Box b \in \Box^{-1}(x)$ y por como $(x, y) \in Q$ resulta $\Box c \to \Box d \in y$. Como $\Box c \in y$, resulta $\Box d \in y$ y por lo tanto $d \in z$, lo cual es una contradicción. Podemos afirmar entonces la existencia de $w \in X$ tal que $x \subseteq w$, $\Box(\Box^{-1}(y)) \subseteq w$ y $(\Box(z^c)] \cap w = \emptyset$. Por lo tanto, $\Box^{-1}(y) \subseteq \Box^{-1}(w)$ y $\Box^{-1}(w) \subseteq z$. Para toda $v \in X$ tal que $(w, v) \in Q$, tenemos

que $\Box^{-1}(y) \subseteq \Box^{-1}(w) \subseteq v$. Luego, $(y, v) \in Q$. Hemos probado que Φ se satisface en $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$. Para probar la recíproca, supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $\Box a \to \Box b \nleq \Box(\Box a \to \Box b)$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\Box a \to \Box b \in x$ y $\Box(\Box a \to \Box b) \notin x$. Luego, existe $y \in X$ tal que $\Box^{-1}(x) \subseteq y$ y $\Box a \to \Box b \notin y$. Por lo tanto, existe $z \in X$ tal que $y \subseteq z, \Box a \in z$ y $\Box b \notin z$. Por Lema 4.1.5, existe $w \in X$ tal que $\Box^{-1}(z) \subseteq w$ y $b \notin w$. Como $\Box^{-1}(x) \subseteq y$ e $y \subseteq z$, resulta que $(x, z) \in Q$. Luego, como $(x, z) \in Q$ y $(z, w) \in Q$, existe $v \in X$ tal que $x \subseteq v$, $(v, w) \in Q$ y para todo $u \in X$ tal que $(v, u) \in Q$, podemos afirmar que $(z, u) \in Q$. Como $\Box a \to \Box b \in x$, tenemos que $\Box a \to \Box b \in v$. Por otro lado, $b \notin w$, por lo tanto $\Box b \notin v$. Luego, $\Box a \notin v$ y consecuentemente, existe $u \in X$ tal que $(v, u) \in Q$ con $a \notin u$. Resulta, $(z, u) \in Q$ lo cual implica que $\Box a \notin z$. Contradicción.

■

Diremos que un $H\Box$-álgebra $\langle A, \Box\rangle$ es *acotada* si el álgebra de Hilbert A es acotada. Denotamos con $\mathrm{Hil}^0_\Box$ a la variedad de $H\Box$-álgebras acotadas.

Teorema 4.3.5. *Sea $A \in \mathrm{Hil}^0_\Box$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ su correspondiente espacio dual. Entonces,*

1. *$A \vDash \Box 0 \to 0 \approx 1$ si y sólo si Q es serial, i.e., $\forall x \exists y : (x, y) \in Q$.*
2. *Si Q es reflexiva y transitiva, tenemos que $A \vDash \neg\Box a \to \Box\neg\Box a \approx 1$ si y sólo si $Q \subseteq (\subseteq \circ Q^{-1})$.*

Demostración. 1. Sea $\Box 0 = 0$. Por Lema 2.2.13, $0 \notin x$ para todo $x \in X$, entonces $0 \notin \Box^{-1}(x)$. Luego, para cada $x \in X$ existe $y \in X$ tal que $\Box^{-1}(x) \subseteq y$ y $0 \notin y$. Por lo tanto, Q es serial. Para probar la recíproca, supongamos que $\Box 0 \nleq 0$. Existe $x \in X$ tal que $\Box 0 \in x$ y $0 \notin x$. Por lo tanto, $0 \in \Box^{-1}(x)$ y por lo asumido, existe $y \in X$ tal que $\Box^{-1}(x) \subseteq y$. Luego, $0 \in y$ lo cual es imposible ya que y es un sistema deductivo propio de A.

2. Sea Q reflexiva y transitiva. Asumamos que $\neg\Box a \leq \Box\neg\Box a$ para todo $a \in A$ y sean $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in Q$. Supongamos que $0 \in \langle x \cup \Box(\Box^{-1}(y))\rangle$. Es decir, existe $a \in x$ y $b \in \Box^{-1}(y)$ tal que $a \to (\Box b \to 0) = 1$, o sea, $a \leq \neg\Box b$. Luego, $\neg\Box b \in x$ y por lo tanto, $\Box\neg\Box b \in x$. Esto es, $\neg\Box b \in \Box^{-1}(x)$ y consecuentemente, $\Box b \to 0 \in y$. Como $\Box b \in y$, tenemos que $0 \in y$, lo cual es imposible. Por lo tanto, existe $z \in X$ tal que $\langle x \cup \Box(\Box^{-1}(y))\rangle \subseteq z$ y $0 \notin z$. Entonces, $x \subseteq z$ y $\Box(\Box^{-1}(y)) \subseteq z$. Luego, $\Box^{-1}(y) \subseteq \Box^{-1}(z)$. Como Q es reflexiva, $\Box^{-1}(z) \subseteq z$ y entonces $(y, z) \in Q$. Resulta, $(x, y) \in (\subseteq \circ Q^{-1})$. Para probar la recíproca, supongamos que existe $a \in A$ tal que $\neg\Box a \nleq \Box\neg\Box a$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\neg\Box a \in x$ y $\Box\neg\Box a \notin x$. Por Lema 4.1.5, existe $y \in X$ tal que $\Box^{-1}(x) \subseteq y$ y $\neg\Box a \notin y$. Por Lema 2.2.12, existe $y \subseteq z$ con

$\Box a \in z$. Luego, $(x,z) \in Q$ con $\Box a \in z$. Por lo asumido, existe $w \in X$ tal que $x \subseteq w$ y $(z,w) \in Q$. Como $\neg\Box a \in x$, tenemos que $\neg\Box a \in w$. Por lo tanto, $\Box a \notin w$ implicando que $\Box^2 a \notin z$. Como Q es transitiva, por Teorema 4.3.4, $\Box a \leq \Box^2 a$ para todo $a \in A$. Por lo tanto, $\Box a \notin z$, lo cual es una contradicción. ∎

A continuación identificaremos algunas subvariedades de $\mathrm{Hil}^0_\Box$:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5} & = & \mathrm{Hil}^0_\Box + \{\Box\mathbf{T}, \Box\mathbf{5}\}, \\ \mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5{,}1} & = & \mathrm{Hil}^0_\Box + \{\Box\mathbf{T}, \Box\mathbf{4}, \neg\Box a \to \Box\neg\Box a \approx 1\}, \\ \mathrm{Hil}^w_\Box\mathbf{S5} & = & \mathrm{Hil}^0_\Box + \{\Box\mathbf{5}, \Box 0 \to 0 \approx 1\}. \end{array}$$

Observemos que $\mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5}$ es subvariedad de $\mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5{,}1}$ y $\mathrm{Hil}^w_\Box\mathbf{S5}$. En efecto. Si $A \in \mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5}$, tenemos que $\Box a \to a \approx 1$, en particular, $\Box 0 \to 0 \approx 1$. Luego, $A \in \mathrm{Hil}^w_\Box\mathbf{S5}$. Más aún, por Observación 4.3.1, $\Box a \to \Box^2 a \approx 1$ y como para toda $a \in A$, $1 = (\Box a \to 0) \to \Box(\Box a \to 0) = \neg\Box a \to \Box\neg\Box a$, resulta $A \in \mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5{,}1}$. Es claro que $\mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5{,}1}$ es subvariedad de $\mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S4}$ y consecuentemente, $\mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5}$ es subvariedad de $\mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S4}$.

Corolario 4.3.6. *Sea $A \in \mathrm{Hil}^0_\Box$ y $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, Q\rangle$ su correspondiente espacio dual. Entonces, $A \in \mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5{,}1}$ si y sólo si Q es reflexiva, transitiva y $Q \subseteq (\subseteq \circ Q^{-1})$.*

Demostración. Es inmediato por Teorema 4.3.4 y el Teorema anterior. ∎

4.4. El $\{\to,\Box\}$-fragmento de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IntK}_\Box$

Comenzamos esta sección recordando que la lógica normal modal intuicionista $\mathbf{IntK}_\Box$ está axiomatizada adicionando a $\mathbf{Int}$ los siguientes axiomas: $\Box(\phi \wedge \psi) = \Box\phi \wedge \Box\psi$ y $\Box\top = \top$ (ver [30], [9], [48] o [66]). Trabajamos en esta sección con el $\{\to,\Box\}$-fragmento de $\mathbf{IntK}_\Box$ y algunas de sus extensiones.

Sea $\mathcal{L}_\Box$ el lenguaje proposicional modal necesidad, el cual consiste del lenguaje $\mathcal{L}$, definido en la sección 2.6, más el operador unario $\Box$. La lógica $\mathbf{IntK}^\to_\Box$ es una lógica en el lenguaje $\mathcal{L}_\Box$ caracterizada por la siguiente lista de axiomas y reglas:

1. $\phi \to (\psi \to \phi)$,
2. $(\phi \to (\psi \to \varepsilon)) \to ((\phi \to \psi) \to ((\phi \to \varepsilon))$,
3. $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$,

$(MP)\dfrac{\phi, \phi \to \psi}{\psi}$, $(R_\Box)\dfrac{\phi \to \psi}{\Box\phi \to \Box\psi}$.

Es claro que $\mathbf{IntK}_\Box^\to$ es el $\{\Box, \to\}$-fragmento de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IntK}_\Box$. Una *lógica implicativa modal necesidad* $\mathcal{I}_\Box$ es cualquier extensión de $\mathbf{IntK}_\Box^\to$.

Sea $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ un $H\Box$-marco o un $H\Box$-marco general (ver Definición 4.1.3), una *valuación* definida sobre $\mathcal{F}$ es una función $V : Var \to \mathcal{P}_\leq(X)$ ($V : Var \to D(X)$). V puede extenderse recursivamente al álgebra de todas las fórmulas Fm por medio de las cláusulas:

1. $V(\top) = X$,
2. $V(\phi \to \psi) = V(\phi) \Rightarrow_{\leq_\mathcal{K}} V(\psi) = \mathrm{sat}(V(\phi) \cap V(\psi)^c)^c$,
3. $V(\Box\phi) = \Box_Q(\phi) = \{x \in X : Q(x) \subseteq V(\phi)\}$.

Llamamos *$H\Box$-modelo general* a toda estructura $\mathcal{M} = \langle X, \mathcal{K}, Q, V\rangle$ donde $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ es un $H\Box$-marco o un $H\Box$-marco general y V es una valuación definida sobre $\mathcal{F}$. De manera análoga a como lo hicimos en la Sección 2.6 para H-marcos generales, podemos notar que una función V es una valuación en un $H\Box$-marco o en un $H\Box$-marco general $\mathcal{F}$ si y sólo si V es un homomorfismo entre el álgebra de todas las fórmulas Fm y $A(\mathcal{F})$ ($D(X)$). Entonces tenemos que una fórmula ϕ es válida en un $H\Box$-marco ($H\Box$-marco general) si y sólo si la ecuación $\phi \approx 1$ es válida en el álgebra de Hilbert $A(\mathcal{F})$ ($D(X)$). Luego, si $\mathcal{F}$ es un $H\Box$-marco ($H\Box$-marco general), entonces

$$\mathcal{F} \models \phi \text{ si y sólo si } A(\mathcal{F}) \models \phi \approx 1 \ (D(X) \models \phi \approx 1).$$

Como un $H\Box$-marco general $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ es también un $H\Box$-marco, podemos considerar las fórmulas válidas en $A(\mathcal{F})$ o en $D(X)$ cuando estamos considerando $H\Box$-marcos generales. Sea $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$ es un $H\Box$-marco general. Como $D(X)$ es una subálgebra de $A(\mathcal{F})$, toda fórmula válida en $A(\mathcal{F})$ es también válida en $D(X)$, pero la recíproca en general no es cierta.

Sea $\mathcal{I}_\Box$ una lógica implicativa modal necesidad. Denotamos con $\mathrm{Fr}(\mathcal{I}_\Box)$ a la clase de todos los $H\Box$-marcos generales donde las fórmulas de $\mathcal{I}_\Box$ son válidas. Sea $\mathrm{HSp}(\mathcal{I}_\Box)$ la clase de todos los $H\Box$-espacios $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, Q\rangle$ tal que $\mathcal{F} \models \phi$, para toda $\phi \in \mathcal{I}_\Box$. Claramente la clase $\mathrm{HSp}(\mathcal{I}_\Box)$ es una subclase de $\mathrm{Fr}(\mathcal{I}_\Box)$.

Definición 4.4.1. Sea $\mathcal{I}_\Box$ una lógica implicativa modal necesidad. Diremos que $\mathcal{I}_\Box$ está *caracterizada* por una clase F de $H\Box$-marcos generales, cuando $\phi \in \mathcal{I}_\Box$ si y sólo si ϕ es válida en todo $H\Box$-marco general $\langle X, \mathcal{K}, Q\rangle \in \mathsf{F}$. Más aún, $\mathcal{I}_\Box$ es *completa respecto a marcos* cuando $\phi \in \mathcal{I}_\Box$ si y sólo si ϕ es válida en todo $H\Box$-marco general $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}, Q\rangle$, para cualquier $\mathcal{F} \in \mathrm{Fr}(\mathcal{I}_\Box)$.

Es claro que una lógica implicativa modal necesidad $\mathcal{I}_\Box$ es completa respecto a marcos si y sólo si está caracterizado por alguna clase de $H\Box$-marcos generales.

Sea $\mathcal{I}_\Box$ una lógica implicativa modal necesidad. Consideremos la variedad de álgebras de Hilbert con operador modal $\Box$:

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box) = \{A \in \mathrm{Hil}_\Box : A \vDash \phi \approx 1, \text{ para todo } \phi \in \mathcal{I}_\Box\}.$$

Con los mismos argumentos usados en la lógica clásica modal, se puede probar que

$$\mathcal{F} \in \mathrm{HSp}(\mathcal{I}_\Box) \text{ si y sólo si } D(X) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box).$$

Luego, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.4.2. *Toda lógica implicativa modal necesidad $\mathcal{I}_\Box$ está caracterizada por la clase* $\mathrm{HSp}(\mathcal{I}_\Box)$.

Definición 4.4.3. Diremos que la variedad $\mathcal{V}$ de $H\Box$-álgebras es *canónica* si $A(\mathcal{F}(A)) \in \mathcal{V}$, cuando $A \in \mathcal{V}$.

Una lógica implicativa modal necesidad $\mathcal{I}_\Box$ es *canonica* si la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box)$ es canónica.

Una lógica implicativa modal necesidad $\mathcal{I}_\Box$ es *H-persistente* si $A(\mathcal{F}) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box)$, cuando $D(X) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box)$, para todo $H\Box$-espacio $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, Q\rangle$.

La noción de lógica implicativa modal H-persistente es una generalización de la noción de lógica modal d-persistente de la lógica modal clásica (ver [8] o [65]).

De los resultados sobre dualidad obtenidos entre $H\Box$-espacios y $H\Box$-álgebras, podemos dar el siguiente resultado que prueba que las nociones de canonicidad y persistencia son equivalentes.

Proposición 4.4.4. *Una lógica implicativa modal necesidad $\mathcal{I}_\Box$ es H-persistente si y sólo si es canónica.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{I}_\Box$ es H-persistente. Sea $A \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box)$. Como A es isomorfa a $D(X(A))$, tenemos que $D(X(A)) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box)$. Como $\mathcal{I}_\Box$ es H-persistente y teniendo en cuenta que $\mathcal{P}_\subseteq(X(D(X(A))))$ es isomorfo a $\mathcal{P}_\subseteq(X(A))$, podemos asegurar que $\mathcal{P}_\subseteq(X(A)) = A(\mathcal{F}(A)) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box)$.

Para probar la recíproca tomemos un $H\Box$-espacio $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, Q\rangle$, y supongamos que $D(X) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box)$. Como $\mathcal{F}$ es un $H\Box$-espacio, X es homeomorfa (y también isomorfa con respecto al orden) a $X(D(X))$. Entonces $\mathcal{P}_\leq(X)$ es isomorfa a $\mathcal{P}_\leq(X(D(X)))$. Luego las $H\Box$-álgebras $A(\mathcal{F})$ y $A(\mathcal{F}(D(X)))$ son isomorfas, y consecuentemente $A(\mathcal{F}) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box)$. ■

Proposición 4.4.5. *Toda lógica implicativa modal necesidad $\mathcal{I}_\Box$ canónica es completa con respecto a* $\mathrm{Fr}(\mathcal{I}_\Box)$.

Demostración. La demostración es como en el caso de la lógica modal clásica. Necesitamos probar que para cada fórmula $\phi \notin \mathcal{I}_\Box$ existe un $H\Box$-marco $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}_\Box$ tal que ϕ es refutada en $\mathcal{F}$. Sea $\phi \notin \mathcal{I}_\Box$. Entonces existe un $H\Box$-álgebra A tal que $A \nvDash \phi \approx 1$. Entonces existe un homomorfismo $h : Fm \to A$ tal que $h(\phi) \neq 1$. Por Teorema 2.2.10 existe $x \in X(A)$ tal que $h(\phi) \notin x$. Sea $\mathcal{F}(A) = \langle X(A), \mathcal{K}_A, Q_A \rangle$ el $H\Box$-marco de A. Como $\mathcal{I}_\Box$ es canónica, $A(\mathcal{F}(A)) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Box)$, i.e., $\mathcal{F}(A)$ es un $H\Box$-marco de $\mathcal{I}_\Box$. Como la función $\varphi : A \to D(X(A))$ es un homomorfismo uno a uno, la composición $\varphi \circ h$ es un homomorfismo de Fm sobre $D(X(A))$, i.e., $\varphi \circ h$ es una valuación definida sobre $\mathcal{F}(A)$. Por lo tanto, $(\varphi \circ h)(\phi) = \varphi(h(\phi)) \neq \varphi(1) = X(A)$, pues $x \notin \varphi(h(\phi))$. Luego, la fórmula ϕ es refutada en el modelo $\langle X(A), \mathcal{K}_A, \varphi \circ h \rangle$. Entonces ϕ es refutada en el $H\Box$-marco $\mathcal{F}(A)$. ∎

Tomando en cuenta las caracterizaciones probadas en la Sección 4.3, podemos asegurar que la variedad de $H\Box$-álgebras axiomatizadas por algún subconjunto del siguiente conjunto de ecuaciones

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \Box\mathbf{S}, \Box\mathbf{S}_n, \Box\mathbf{T}, \Box\mathbf{wD}, \Box\mathbf{4}, \Box\mathbf{5}, \Box\mathbf{6}, \\ \Box 0 \to 0 \approx 1, \neg\Box a \to \Box\neg\Box a \approx 1, \Box(\Box a \to a) \approx 1 \end{array} \right\}.$$

es canónica. Luego, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.4.6. *Cualquier variedad de $H\Box$-álgebras axiomatizadas por medio de las fórmulas pertenecientes al conjunto P son canónicas. Más aún, las lógicas asociadas son canónicas y completas respecto a $H\Box$-marcos.*

4.5. $H\Box$-álgebras simples y subdirectamente irreducibles

Por lo señalado en la Sección 2.5, sabemos que los retículos $\langle \mathrm{Ds}(A), \subseteq \rangle$ y $\langle \mathrm{Con}(A, \to), \subseteq \rangle$ de un álgebra de Hilbert A son isomorfos vía las aplicaciones $\theta \to [1]_\theta$ y $D \to \theta_D$. En esta sección estudiamos los retículos de congruencias y de sistemas deductivos correspondientes a las $H\Box$-álgebras.

Sea $A = \langle A, \Box \rangle \in \mathrm{Hil}_\Box$. Diremos que θ es una $\Box$-*congruencia* de A si $\theta \in \mathrm{Con}(A, \to)$ y además satisface que si $(a, b) \in \theta$ entonces $(\Box a, \Box b) \in \theta$, para $a, b \in A$. Denotamos con $\mathrm{Con}(A, \to, \Box)$ al conjunto de todas las $\Box$-congruencias definidas en A. Luego, el retículo de las congruencias definidas sobre A es $\langle \mathrm{Con}(A, \to, \Box), \subseteq \rangle$.

Sea $D \in \mathrm{Ds}(A)$. Diremos que D es un $\Box$-*sistema deductivo* si $\Box a \in D$, cuando $a \in D$, i.e., $D \subseteq \Box^{-1}(D)$. El conjunto de todos los $\Box$-sistemas deductivos definidos sobre el $H\Box$-álgebra A es denotado con $\mathrm{Ds}_\Box(A)$. Consecuentemente, el retículo formado por todos los $\Box$-sistemas deductivos definidos en A es $\langle \mathrm{Ds}_\Box(A), \subseteq \rangle$.

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Definimos el símbolo

$$(\alpha_n(a); b) = (a, \Box a, ..., \Box^n a; b)$$

para todo $a, b \in A$. Para cada subconjunto no vacío X de A, definimos el conjunto $\langle X \rangle_\Box$ de la siguiente manera,

$$\langle X \rangle_\Box = \{a \in A : \exists x_1, ..., x_k \in X, n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}_0 [(\alpha_{n_1}(x_1); ...; (\alpha_{n_k}(x_k); a))...) = 1]\}.$$

Notemos que si $X = \{a\}$, entonces

$$\langle \{a\} \rangle_\Box = \langle a \rangle_\Box = \{b \in A : \exists n \in \mathbb{N}_0 : (\alpha_n(a); b) = 1\}.$$

Observación 4.5.1. Como cualquier álgebra de Hilbert A satisface la ley de cambio, i.e., $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$ para todo $a, b, c \in A$, tenemos que cualquier $H\Box$-álgebra $\langle A, \Box \rangle$ satisface

$$(\alpha_{n_1}(a); (\alpha_{n_2}(b); c)) = (\alpha_{n_2}(b); (\alpha_{n_1}(a); c)),$$

para todo $a, b, c \in A$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$. Más aún, notemos que si $A \in \mathrm{Hil}_\Box$ y $a, b \in A$ son tales que $a \leq b$, entonces $(\alpha_n(c); a) \leq (\alpha_n(c); b)$, para todo $c \in A$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Sea $A \in \mathrm{Hil}_\Box$ y $X \subseteq A$. Nuestro próximo propósito es caracterizar al menor $\Box$-sistema deductivo que contenga a X. Para ello, mostramos los siguientes resultados.

Lema 4.5.2. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_\Box$. Entonces,*

$$x \to \Box(\alpha_n(x); a) \leq (\alpha_{n+1}(x); \Box a),$$

para todo $x, a \in A$ y con $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Por Definición 4.1.1,

$$\begin{aligned}
\Box(\alpha_n(x); a) &= \Box(x, \Box x, ..., \Box^n x; a) \\
&\leq \Box x \to \Box(\Box x, ..., \Box^n x; a) \\
&\leq \Box x \to (\Box^2 x \to (\Box^3 x \to ...(\Box^{n+1} x \to \Box a)...)).
\end{aligned}$$

Luego,

$$x \to \Box(\alpha_n(x); a) \leq x \to \big(\Box x \to (\Box^2 x \to ...(\Box^{n+1} x \to \Box a)...))\big) = (\alpha_{n+1}(x); \Box a).$$

■

Corolario 4.5.3. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_\Box$. Entonces,*

$$\begin{aligned} &x_k \to (x_{k-1} \to ... (x_1 \to \Box [(\alpha_{n_1}(x_1); (... (\alpha_{n_k}(x_k); a)) ...)]) ...) \leq \\ &\quad \leq (\alpha_{n_1+1}(x_1); (... (\alpha_{n_k+1}(x_k); \Box a)) ...) \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}, a, x_1, ..., x_k \in A, n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Por Lema 4.5.2,

$$x_k \to \Box(\alpha_{n_k}(x_k); a) \leq (\alpha_{n_k+1}(x_k); \Box a)\,.$$

Por Observación anterior,

$$\big(\alpha_{n_{k-1}+1}(x_{k-1}); (x_k \to \Box(\alpha_k(x_k); a)\ )\big) \leq \big(\alpha_{n_{k-1}+1}(x_{k-1}); (\alpha_{n_k+1}(x_k); \Box a)\big)$$

y por Ley de Cambio,

$$x_k \to \big(\alpha_{n_{k-1}+1}(x_{k-1}); \Box(\alpha_k(x_k); a)\big) \leq \big(\alpha_{n_{k-1}+1}(x_{k-1}); (\alpha_{n_k+1}(x_k); \Box a)\big)\,.$$

Nuevamente, por Lema 4.5.2,

$$x_{k-1} \to \Box\left(\alpha_{n_{k-1}}(x_{k-1}); (\alpha_k(x_k); a)\right) \leq \big(\alpha_{n_{k-1}+1}(x_{k-1}); \Box(\alpha_k(x_k); a)\big)\,.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_k \to \big(x_{k-1} \to \Box\left(\alpha_{n_{k-1}}(x_{k-1}); (\alpha_k(x_k); a)\right)\big) &\leq x_k \to \big(\alpha_{n_{k-1}+1}(x_{k-1}); \Box(\alpha_k(x_k); a)\big) \\ &\leq \big(\alpha_{n_{k-1}+1}(x_{k-1}); (\alpha_{n_k+1}(x_k); \Box a)\big). \end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento, obtenemos que

$$\begin{aligned} &x_k \to (x_{k-1} \to ... (x_1 \to \Box [(\alpha_{n_1}(x_1); (... (\alpha_{n_k}(x_k); a)) ...)]) ...) \leq \\ &\quad \leq (\alpha_{n_1+1}(x_1); (... (\alpha_{n_k+1}(x_k); \Box a)) ...)\,. \end{aligned}$$

■

Lema 4.5.4. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_\Box$ y sea $X \subseteq A$. Entonces, $\langle X\rangle_\Box$ es el menor $\Box$-sistema deductivo que contiene a X.*

Demostración. Es claro que $\langle X\rangle_\Box \in \mathrm{Ds}(A)$. Sea $a \in \langle X\rangle_\Box$. Por ende, existe $k \in \mathbb{N}$ y existen $x_1, ..., x_k \in X, n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$(\alpha_{n_1}(x_1); (\alpha_{n_2}(x_2); ...((\alpha_{n_k}(x_k); a))...) = 1.$$

Por lo tanto, $\Box(\alpha_{n_1}(x_1); (\alpha_{n_2}(x_2); ...((\alpha_{n_k}(x_k); a))...) = \Box 1 = 1$. Luego,

$$x_k \to (x_{k-1} \to ... (x_1 \to \Box\,(\alpha_{n_1}(x_1); (... (\alpha_{n_k}(x_k); a)) ...)) ...) = 1.$$

Por Corolario anterior, $1 \leq (\alpha_{n_1+1}(x_1); (\ldots (\alpha_{n_k+1}(x_k); \Box a)) \ldots)$ y consecuentemente,

$$(\alpha_{n_1+1}(x_1); (\ldots (\alpha_{n_k+1}(x_k); \Box a)) \ldots) = 1,$$

con $x_1, ..., x_k \in X$ y $n_1 + 1, ..., n_k + 1 \in \mathbb{N}_0$. Luego, $\Box a \in \langle X \rangle_\Box$ y por lo tanto, $\langle X \rangle_\Box \in \mathrm{Ds}_\Box(A)$.

Finalmente, supongamos que $F \in \mathrm{Ds}_\Box(A)$ con $X \subseteq F$. Tomemos $a \in \langle X \rangle_\Box$. Es decir, existe $\{x_1, ..., x_k\} \subseteq X$ y $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}_0$ tal que $(\alpha_{n_1}(x_1); (...(\alpha_{n_k}(x_k); a)...) = 1 \in F$. Como $X \subseteq F$, tenemos que $\{x_1, ..., x_k\} \subseteq F$ y para cada i, con $1 \leq i \leq k$, $\Box x_i \in F$ pues $F \in \mathrm{Ds}_\Box(A)$. Luego, $\Box^m x_i \in F$, para todo $m \geq 0$ y consecuentemente, $a \in F$. Por lo tanto, $\langle X \rangle_\Box \subseteq F$. ■

En algunas subvariedades de $\mathrm{Hil}_\Box$ podemos dar expresiones simplificadas de $\langle X \rangle_\Box$ como mostramos a continuación:

Lema 4.5.5. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_\Box + \{\Box 4\}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$(\alpha_n(a); b) = (\alpha_1(a); b). \tag{4.1}$$

Demostración. Observemos que $\Box a \leq \Box^2 a \leq \ldots \leq \Box^n a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostraremos el resultado mediante inducción sobre n. Es inmediato para $n = 1$. Supongamos que es válido para $k \in \mathbb{N}$, y lo probamos para $k + 1$.

$$(\alpha_{k+1}(a); b) = (a, \Box a, ..., \Box^k a, \Box^{k+1} a; b) = (\alpha_k(a); (\Box^{k+1} a \to b)).$$

Por lo asumido, $(\alpha_k(a); (\Box^{k+1} a \to b)) = (\alpha_1(a); (\Box^{k+1} a \to b))$. Luego

$$\begin{array}{rclcl}
(\alpha_{k+1}(a); b) & = & (\alpha_1(a); (\Box^{k+1} a \to b)) & = & a \to (\Box a \to (\Box^{k+1} a \to b)) \\
& = & a \to ((\Box a \to \Box^{k+1} a) \to (\Box a \to b)) & = & a \to (1 \to (\Box a \to b)) \\
& = & a \to (\Box a \to b) & = & (\alpha_1(a); b).
\end{array}$$

■

Lema 4.5.6. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S4}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$(\alpha_n(a); b) = \Box a \to b. \tag{4.2}$$

Demostración. Notemos que $\Box a = \Box^2 a = ... = \Box^n a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S4}$ es subvariedad de $\mathrm{Hil}_\Box + \{\Box 4\}$, tenemos que $A \in \mathrm{Hil}_\Box + \{\Box 4\}$. Entonces por el Lema anterior, $(\alpha_n(a); b) = (\alpha_1(a); b)$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y para todo $a, b \in A$. Más aún,

$$\begin{array}{rclcl}
(\alpha_1(a); b) & = & a \to (\Box a \to b) & = & \Box a \to (a \to b) \\
& = & (\Box a \to a) \to (\Box a \to b) & = & 1 \to (\Box a \to b) \\
& = & \Box a \to b. & &
\end{array}$$

■

A continuación estudiamos los conjuntos cerrados pertenecientes al espacio dual correspondiente a una $H\Box$-álgebra dada, y mostramos que dichos conjuntos forman un retículo que se encuentra en correspondencia con el retículo formado por los $\Box$-sistemas deductivos y con el retículo de las $\Box$-congruencias, ambos retículos definidos en dicha $H\Box$-álgebra.

Definición 4.5.7. Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ un $H\Box$-espacio. Un subconjunto cerrado Y de X será llamado *Q-cerrado* si $Q(Y) = \bigcup \{Q(y) : y \in Y\} \subseteq Y$.

Denotamos con $\mathcal{C}_Q(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos Q-cerrados de un $H\Box$-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$. Consecuentemente, el retículo formado por todos los subconjuntos Q-cerrados de un $H\Box$-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ es $\langle \mathcal{C}_Q(X), \subseteq\rangle$.

Proposición 4.5.8. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_{\Box}$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ su correspondiente espacio dual. Entonces,*

$$\langle \mathrm{Con}(A, \rightarrow, \Box), \subseteq\rangle \cong \langle \mathrm{Ds}_{\Box}(A), \subseteq\rangle \cong \langle \mathcal{C}_Q(X), \subseteq\rangle^d.$$

Demostración. Sea $\theta \in \mathrm{Con}(A, \rightarrow, \Box)$. Es claro que $[1]_\theta \in \mathrm{Ds}(A)$. Si $a \in [1]_\theta$ entonces $(a, 1) \in \theta$ y por lo tanto, $(\Box a, \Box 1) = (\Box a, 1) \in \theta$. Luego, $[1]_\theta \in \mathrm{Ds}_{\Box}(A)$. Ahora, tomemos $D \in \mathrm{Ds}_{\Box}(A)$. Sabemos que $\theta_D \in \mathrm{Con}(A, \rightarrow)$.Si $(a, b) \in \theta_D$ entonces $a \rightarrow b, b \rightarrow a \in D$. Luego, $\Box(a \rightarrow b), \Box(b \rightarrow a) \in D$. Como $\Box(a \rightarrow b) \leq \Box a \rightarrow \Box b$, tenemos que $\Box a \rightarrow \Box b \in D$. Análogamente se prueba que $\Box b \rightarrow \Box a \in D$ y por lo tanto, $(\Box a, \Box b) \in \theta_D$. Hemos probado entonces que $\langle \mathrm{Con}(A, \rightarrow, \Box), \subseteq\rangle \cong \langle \mathrm{Ds}_{\Box}(A), \subseteq\rangle$.

Ahora probaremos que $\langle \mathrm{Ds}_{\Box}(A), \subseteq\rangle \cong \langle \mathcal{C}_Q(X), \subseteq\rangle^d$. Sea $D \in \mathrm{Ds}_{\Box}(A)$. Por Observación 3.5.3,

$$\mu(D) = \{x \in X : D \subseteq x\} = \bigcap \{\varphi(a) \mid a \in D\} \in \mathcal{C}(X).$$

Veamos que $\mu(D)$ es un Q-cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$. Para ello tomamos $y \in Q(\mu(D))$. Entonces existe $x \in \mu(D)$ tal que $y \in Q(x)$. Como D es un $\Box$-sistema deductivo, $D \subseteq \Box^{-1}(D) \subseteq \Box^{-1}(x) \subseteq y$, lo que implica, $y \in \mu(D)$, como queríamos mostrar. Es claro ver que si $D, F \in \mathrm{Ds}_{\Box}(A)$ tal que $D \subseteq F$ entonces $\mu(F) \subseteq \mu(D)$.

Veamos que $\pi : \mathcal{C}_Q(X) \rightarrow \mathrm{Ds}_{\Box}(A)$ tal que

$$\pi(Y) = \{a \in A : Y \subseteq \varphi(a)\}$$

está bien definido. Por Observación 3.5.3, $\pi(Y) \in \mathrm{Ds}(A)$ para cada $Y \in \mathcal{C}_Q(X)$. Veamos que $\pi(Y)$ es un $\Box$-sistema deductivo. Sea $a \in A$ tal que $Y \subseteq \varphi(a)$. Como Y es Q-cerrado, $Q(Y) \subseteq Y \subseteq \varphi(a)$. Supongamos que $Y \nsubseteq \varphi(\Box a)$, i.e., existe $x \in Y$ tal que $\Box a \notin x$. Por Lema 4.1.5, existe $y \in X$ tal que $y \in Q(x)$ y $a \notin y$. Como $x \in Y$, tenemos que $y \in Q(Y)$ y consecuentemente, $y \in Y$ con $y \notin \varphi(a)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $Y \in \mathrm{Ds}_{\Box}(A)$.

Sabemos por Observación 3.5.3 que μ y π son inversas entre sí. Por lo tanto, queda probado que μ es un anti-isomorfismo de retículos y por ende, $\langle \mathrm{Ds}_{\Box}(A), \subseteq\rangle \cong \langle \mathcal{C}_Q(X), \subseteq\rangle^d$.
■

Sea $A \in \mathrm{Hil}_{\Box}$. Las álgebras subdirectamente irreducibles y simples de A están caracterizadas a partir de sus congruencias: A es *subdirectamente irreducible* si y sólo si existe una única $\Box$-congruencia no trivial mínima θ en A. Además, A es *simple* si y sólo si A tiene solamente dos $\Box$-congruencias. Por Proposición 4.5.8 tenemos que A es subdirectamente irreducible si y sólo si existe un $\Box$-sistema deductivo no trivial mínimo en A, o equivalentemente, si en su correspondiente $H\Box$-espacio dual $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ existe un único subconjunto Q-cerrado máximo distinto de X y $\emptyset$. Más aún, A es simple si y sólo si $\mathrm{Ds}_{\Box}(A) = \{\{1\}, A\}$, o equivalentemente, $\mathcal{C}_Q(X) = \{\emptyset, X\}$. A continuación daremos una caracterización de las álgebras subdirectamente irreducibles y simples en la variedad $\mathrm{Hil}_{\Box}$. Previamente mostraremos el siguiente resultado que nos será de gran utilidad.

Lema 4.5.9. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ un $H\Box$-espacio. Entonces, $V_x = \mathrm{cl}(Q^*(x))$ es el menor conjunto Q-cerrado que contiene al elemento x.*

Demostración. Por (3.1) tenemos que $Q^* = \bigcup\{Q^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Como Q^* es una relación reflexiva y $Q^*(x) \subseteq \mathrm{cl}(Q^*(x))$ para cada $x \in X$, tenemos que $x \in \mathrm{cl}(Q^*(x))$. Más aún, como $\mathrm{cl}(Q^*(x))$ es un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$, sólo nos resta probar que $Q(\mathrm{cl}(Q^*(x))) \subseteq \mathrm{cl}(Q^*(x))$ para cada $x \in X$. Sea $y \in X$ tal que $y \in Q(\mathrm{cl}(Q^*(x)))$. Esto es, existe $z \in \mathrm{cl}(Q^*(x))$ tal que $(z, y) \in Q$. Supongamos que $y \notin \mathrm{cl}(Q^*(x))$, entonces existe $a \in A$ tal que $y \notin \varphi(a)$ y $\mathrm{cl}(Q^*(x)) \subseteq \varphi(a)$. Como $Q^*(x) \subseteq \mathrm{cl}(Q^*(x)) \subseteq \varphi(a)$, tenemos que $Q^n(x) \subseteq \varphi(a)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es decir, $a \in w$ para todo $w \in Q^n(x)$. Por Lema 4.3.2, $\Box^n a \in x$ para todo $n \geq 0$. Por otro lado, como $a \notin y$, resulta $\Box a \notin z$ y como $z \in \mathrm{cl}(Q^*(x))$, tenemos que $\varphi(\Box a)^c \cap Q^*(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $v \in X$ tal que $(x, v) \in Q^m$ para algún $m \geq 0$ y $\Box a \notin v$. Por Lema 4.3.2, $\Box^m a \notin x$ para algún $m \geq 0$, lo cual es imposible. Luego, $\mathrm{cl}(Q^*(x)) \in \mathcal{C}_Q(X)$. Sea $V \in \mathcal{C}_Q(X)$ tal que $x \in V$. Entonces $Q^n(x) \subseteq V$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pues V es un Q-cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$. Por lo tanto, $Q^*(x) = \bigcup\{Q^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subseteq V$. Luego, $V_x = \mathrm{cl}(Q^*(x)) \subseteq \mathrm{cl}(V) = V$, con lo cual queda probado el resultado. ■

Por lo probado anteriormente, es claro que $\mathrm{cl}(Q^*(x)) = \bigcap\{V : V \in \mathcal{C}_Q(X)$ y $x \in V\}$.

Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ un $H\Box$-espacio. Definimos los siguientes subconjuntos de X:

$$I_X = \{x \in X \mid V_x = X\} \text{ y } H_X = X - I_X,$$

donde $V_x = \mathrm{cl}(Q^*(x))$, para cada $x \in X$.

El próximo es uno de los principales resultados de esta Sección, donde caracterizamos a las $H\Box$-álgebras simples como aquellas cuyo espacio dual está generado por cada punto del mismo.

Teorema 4.5.10. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_{\Box}$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ su correspondiente espacio dual. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es simple,*

2. *$I_X = X$, i.e., $V_x = X$, para cada $x \in X$,*

3. *$\langle a\rangle_{\Box} = A$, para todo $a \in A - \{1\}$.*

Demostración. *1.* $\Longrightarrow$ *2.* Es consecuencia inmediata del Lema 4.5.9.

2. $\Longrightarrow$ *3.* Supongamos que existe $a \in A - \{1\}$ tal que $\langle a\rangle_{\Box} \neq A$. Entonces existe $b \in A$ tal que $b \notin \langle a\rangle_{\Box}$. Es decir, $(\alpha_n(a); b) \neq 1$ para todo $n \geq 0$. Aplicando n sucesivas veces el Teorema 2.2.10, podemos afirmar que existe $x \in X$ tal que $\Box^n a \in x$ para todo $n \geq 0$ y $b \notin x$. Como $\mathrm{cl}(Q^*(x)) = X$, tenemos que $\varphi(a)^c \cap Q^*(x) \neq \emptyset$. Luego, existe $z \in Q^*(x)$ tal que $a \notin z$. Por ende, existe $m \geq 0$ tal que $(x, z) \in Q^m$ y $a \notin z$. Por Lema 4.3.2, $\Box^m a \notin x$, lo cual es una contradicción.

3. $\Longrightarrow$ *1.* Sea $D \in \mathrm{Ds}_{\Box}(A)$. Tomemos $a \in D$ tal que $a \neq 1$. Entonces $\langle a\rangle_{\Box} = A \subseteq D$. Luego, $D = A$, y consecuentemente, $\mathrm{Ds}_{\Box}(A) = \{\{1\}, A\}$. Por lo tanto, A es simple. ■

Es importante observar que el Teorema anterior afirma que A es un $H\Box$-álgebra simple si y sólo si $H_X = \emptyset$.

Nuestro segundo resultado importante en esta Sección es la caracterización de las $H\Box$-álgebras subdirectamente irreducibles.

Teorema 4.5.11. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_{\Box}$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ su espacio dual. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es subdirectamente irreducible,*

2. *$H_X = \{x \in X \mid V_x \neq X\} \in \mathcal{C}_Q(X) - \{X\}$,*

3. *Existe $a \in A - \{1\}$ tal que para todo $b \in A - \{1\}$ existe $n \geq 0$ tal que $(\alpha_n(b); a) = 1$.*

Demostración. *1.* $\Longrightarrow$ *2.* Por lo asumido, existe en $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ un único elemento máximo $V \in \mathcal{C}_Q(X) - \{X\}$. Probaremos que $V = H_X$. Let $x \in V$. Como $V \in \mathcal{C}_Q(X)$, por Lema 4.5.9, $V_x \subseteq V$. Como $V \neq X$, entonces $V_x \neq X$ y por ende, $x \in H_X$. Por lo tanto, $V \subseteq H_X$. Para probar la otra inclusión, tomamos $x \in H_X$, esto significa que $V_x \neq X$.

Como $V_x \in \mathcal{C}_Q(X) - \{X\}$, resulta $V_x \subseteq V$. Por lo cual, $x \in V$. Luego, $H_X = V$ y consecuentemente, $H_X \in \mathcal{C}_Q(X) - \{X\}$.

2. $\Longrightarrow$ *3.* Como $H_X \neq X$, existe $x \in X$ tal que $x \notin H_X$. Como H_X es cerrado, existe $a \in A - \{1\}$ tal que $H_X \subseteq \varphi(a)$ y $x \notin \varphi(a)$. Demostremos que para todo $b \in A - \{1\}$ existe $n \geq 0$ tal que $(\alpha_n(b); a) = 1$. Por el contrario, supongamos que existe $b \in A - \{1\}$ tal que $(\alpha_n(b); a) \neq 1$ para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, existe $w \in X$ tal que $\Box^n b \in w$ para todo $n \geq 0$ y $a \notin w$. Como $w \notin \varphi(a)$, tenemos que $w \notin H_X$ y consecuentemente, $\mathrm{cl}(Q^*(w)) = X$. Luego, $Q^*(w) \cap \varphi(b)^c \neq \emptyset$, por lo cual podemos afirmar que existe $z \in Q^*(w)$ con $b \notin z$. Por lo tanto, existe $m \geq 0$ tal que $(w, z) \in Q^m$ y $b \notin z$. Por Lema 4.3.2, $\Box^m b \notin w$, lo cual es imposible.

3. $\Longrightarrow$ *1.* Por lo asumido, $a \in \langle b \rangle_\Box$ para todo $b \in A - \{1\}$. Como $\langle b \rangle_\Box \in \mathrm{Ds}_\Box(A)$, tenemos que $\langle a \rangle_\Box \subseteq \langle b \rangle_\Box$ para todo $b \in A - \{1\}$. Como $a \neq 1$, tenemos que $\langle a \rangle_\Box \neq \{1\}$. Probemos que $\langle a \rangle_\Box$ es el único $\Box$-sistema deductivo no trivial mínimo de A. Sea $F \in \mathrm{Ds}_\Box(A) - \{1\}$. Por lo tanto, existe $b \neq 1$ tal que $b \in F$. Como $\langle b \rangle_\Box$ es el menor $\Box$-sistema deductivo que contiene a b, resulta $\langle a \rangle_\Box \subseteq \langle b \rangle_\Box \subseteq F$. Luego, A es subdirectamente irreducible. ■

A continuación estudiamos las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en las variedades $\mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S4}$, $\mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S4}$, $\mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5{,}1}$ y $\mathrm{Hil}^w_\Box\mathbf{S5}$.

Lema 4.5.12. *Sea* $A \in \mathrm{Hil}_\Box + \{\Box 4\}$. *Entonces,* $\langle a \rangle_\Box = \{b \in A : a \to (\Box a \to b) = 1\}$.

Demostración. Sean $a, b \in A$ tales que $b \in \langle a \rangle_\Box$. Entonces existe $n \geq 0$ tal que $(\alpha_n(a), b) = 1$. Si $n = 0$ entonces $a \to b = 1$. Luego, $a \to (\Box a \to b) = \Box a \to (a \to b) = 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, por (4.1),

$$1 = (\alpha_n(a), b) = (\alpha_1(a); b) = a \to (\Box a \to b).$$

Por lo tanto, $\langle a \rangle_\Box \subseteq \{b \in A : a \to (\Box a \to b) = 1\}$. La otra inclusión es inmediata. ■

Corolario 4.5.13. *Sea* $A \in \mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S4}$. *Entonces,* $\langle a \rangle_\Box = \{b \in A : \Box a \to b = 1\}$.

Demostración. Resulta inmediatamente de aplicar Lema 4.5.12 y (4.2). ■

Observaciones 4.5.14. Sea $A \in \mathrm{Hil}_\Box\mathbf{S4}$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, Q \rangle$ su espacio dual.

1. De los items 3 y 4 del Teorema 4.3.4, tenemos que Q es transitiva y reflexiva. Luego, $Q^*(x) = Q(x)$, para cada $x \in X$, y como $Q(x)$ es un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K} \rangle$, resulta que $Q(x) = V_x$, para cada $x \in X$.

2. Si $H_X \neq \emptyset$, entonces $H_X = \bigcup\{\varphi(\Box a) : a \in A - \{1\}\}$. En efecto:

$$\begin{array}{lll} x \in H_X & \iff & Q(x) = V_x \neq X \\ & \iff & \exists y \in X : y \notin Q(x) \\ & \iff & \exists y \in X \exists a \in A : Q(x) \subseteq \varphi(a) \ \&\ y \notin \varphi(a) \\ & \iff & \exists y \in X \exists a \in A : x \in \Box_Q(\varphi(a)) = \varphi(\Box a) \ \&\ a \notin y \\ & \iff & x \in \bigcup\{\varphi(\Box a) : a \in A - \{1\}\}. \end{array}$$

Proposición 4.5.15. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_{\Box}\mathbf{S4}$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ su espacio dual. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es simple,*
2. *$Q(x) = X$, para cada $x \in X$,*
3. *$\langle \Box a\rangle = A$ para todo $a \in A - \{1\}$. Esto es, A es acotada.*

Demostración. *1.* $\iff$ *2.* Resulta por Teorema 4.5.10 y por item *1* de Observación 4.5.14.

1. $\Longrightarrow$ *3.* Sea $a \in A$. Probemos que $\langle \Box a\rangle = \langle a\rangle_{\Box}$. Como $\Box a \in \langle a\rangle_{\Box}$ y $\langle a\rangle_{\Box} \in \mathrm{Ds}_{\Box}(A)$, tenemos $\langle \Box a\rangle \subseteq \langle a\rangle_{\Box}$. Sea $b \in \langle a\rangle_{\Box}$. Por Corolario 4.5.13, $\Box a \to b = 1$ y por ende, $b \in \langle \Box a\rangle$. Luego, por Teorema 4.5.10, $\langle \Box a\rangle = A$, para todo $a \in A - \{1\}$.

3. $\Longrightarrow$ *2.* Supongamos que existe $x \in X$ tal que $Q(x) \neq X$. Entonces existe $y \in X$ tal que $y \notin Q(x)$. Como $Q(x)$ es cerrado, existe $a \in A - \{1\}$ tal que $Q(x) \subseteq \varphi(a)$ con $y \notin \varphi(a)$. Es decir, para todo $w \in Q(x)$ tenemos que $a \in w$. Por Lema 4.1.5, $\Box a \in x$ y consecuentemente, $A = \langle \Box a\rangle \subseteq x$, lo cual es imposible. ■

Proposición 4.5.16. *Sea $A \in \mathrm{Hil}_{\Box}\mathbf{S4}$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ su espacio dual. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es subdirectamente irreducible,*
2. *$H_X \in D(X) - \{X\}$,*
3. *Existe $a \in A - \{1\}$ tal que para todo $b \in A - \{1\}$ se satisface que $\Box b \leq a$.*

Demostración. *1.* $\Longrightarrow$ *2.* Por Teorema 4.5.11, $H_X \in \mathcal{C}_Q(X) - \{X\}$. Entonces existe $x \in X$ tal que $x \notin H_X$. Por lo tanto, existe $c \in A - \{1\}$ tal que $H_X \subseteq \varphi(c)$ y $x \notin \varphi(c)$. Usando lo demostrado en Proposición 4.5.8, si $H_X \in \mathcal{C}_Q(X)$ y $H_X \subseteq \varphi(c)$ entonces $H_X \subseteq \varphi(\Box c)$. Si $H_X \neq \emptyset$, por Observación 4.5.14, $H_X = \bigcup\{\varphi(\Box b) : b \in A - \{1\}\}$. Como $c \neq 1$, $\varphi(\Box c) \subseteq H_X$. Luego, $H_X = \varphi(\Box c) \in D(X) - \{X\}$.

2. $\Longrightarrow$ *3.* Sea $H_X \in D(X) - \{X\}$. Por lo tanto, existe $a \in A - \{1\}$ tal que $H_X = \varphi(a)$. Si $H_X = \emptyset$, entonces $Q(x) = X$ para todo $x \in X$ y por Proposición 4.5.15, $\langle \Box b \rangle = A$ para todo $b \in A - \{1\}$. Sea $a \in A - \{1\}$. Entonces $a \in \langle \Box b \rangle$ para todo $b \in A - \{1\}$. Por lo tanto, $\Box b \leq a$, para todo $b \in A - \{1\}$. Ahora bien, si $H_X \neq \emptyset$, por Observación 4.5.14, $H_X = \bigcup \{\varphi(\Box b) : b \in A - \{1\}\} = \varphi(a)$. Luego, $\varphi(\Box b) \subseteq \varphi(a)$ y consecuentemente, $\Box b \leq a$ para todo $b \in A - \{1\}$ pues φ es un isomorfismo.

3. $\Longrightarrow$ *1.* Es consecuencia inmediata de la fórmula (4.2) y de Teorema 4.5.11. ■

Corolario 4.5.17. *Sea $A \in \mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S4}$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, Q \rangle$ su espacio dual. Entonces,*

1. *A es simple si y sólo si $\Box a = 0$, para todo $a \in A - \{1\}$.*

2. *A es subdirectamente irreducible si y sólo si $H_X \in D(X) - \{X\}$ si y sólo si existe $a \in A - \{1\}$ tal que para todo $b \in A - \{1\}$ se satisface que $\Box b \leq a$.*

Demostración. *1.* Como A es acotada, $A = \langle 0 \rangle$. Luego, por Proposición 4.5.15, A es simple si y sólo si $\langle \Box a \rangle = \langle 0 \rangle$ para $a \in A - \{1\}$ si y sólo si $\Box a = 0$ para $a \in A - \{1\}$.

2. Por Proposición 4.5.16. ■

Proposición 4.5.18. *Sea $A \in \mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5{,}1}$. Entonces,*

1. *A es simple si y sólo si $\Box a = 0$, para todo $a \in A - \{1\}$.*

2. *A es subdirectamente irreducible no simple si y sólo si existe $a \in A - \{1\}$ tal que para todo $b \in A - \{1\}$ se satisface que $\Box b \leq a$ y $\neg\Box a = 0$.*

Demostración. *1.* Por Corolario 4.5.17, pues $\mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S5{,}1}$ es subvariedad de $\mathrm{Hil}^0_\Box\mathbf{S4}$.

2. Sea A subdirectamente irreducible. Por Corolario 4.5.17, existe $a \in A - \{1\}$ para todo $b \in A - \{1\}$ tal que $\Box b \leq a$. Sólo nos resta probar que $\neg\Box a = 0$ si y sólo si A es no simple. Si A es no simple entonces existe $b \neq 1$ tal que $\Box b \neq 0$, i.e., $\Box b \nleq 0$. Esto es, $\neg\Box b \neq 1$ por lo cual, $\Box\neg\Box b \leq a$. Pero $\neg\Box b \leq \Box\neg\Box b$, entonces $\neg\Box b \leq a$ y consecuentemente, $\Box\neg\Box b \leq \Box a$. Luego, $\neg\Box b \leq \Box a$ y por lo cual, $\neg\Box a \leq \neg\neg\Box b$. Como en cualquier álgebra de Hilbert se satisface que para todo $c, d \in A$, $(c \to d) \to ((d \to c) \to c) = (d \to c) \to ((c \to d) \to d)$, reemplazando c por 0 resulta $\neg\neg d = \neg d \to d$. Luego, $\neg\Box a \leq \neg\Box b \to \Box b \leq \neg\Box b \to b$ y por lo tanto,

$$\neg\Box a \to (\neg\Box b \to b) = (\neg\Box a \to \neg\Box b) \to (\neg\Box a \to b) = 1.$$

Como $b \neq 1$, tenemos que $\Box b \leq a$ y por lo tanto, $\Box b = \Box^2 b \leq \Box a$. Seguidamente, $\neg\Box a \to \neg\Box b = 1$ y reemplazando en la igualdad anterior resulta, $\neg\Box a \to b = 1$. Como $\neg\Box a \leq b \neq 1$, tenemos que $\neg\Box a \neq 1$ y entonces, $\neg\Box a \leq \Box\neg\Box a \leq a$. Por ende,

$(\alpha_0(\neg\Box a); a) = 1$. Luego, $a \in \langle\neg\Box a\rangle_\Box$. Como $\langle\neg\Box a\rangle_\Box \in \mathrm{Ds}_\Box(A)$, $\Box a \in \langle\neg\Box a\rangle_\Box$ y del hecho que, $\neg\Box a \in \langle\neg\Box a\rangle_\Box$, por Modus Ponens tenemos que $0 \in \langle\neg\Box a\rangle_\Box$. Luego, $\neg\Box a = 0$. Recíprocamente, si existe $a \neq 1$ tal que $\neg\Box a = 0$ entonces $\Box a \to 0 \neq 1$. Esto es, $\Box a \not\leq 0$ y entonces, $\Box a \neq 0$. Luego, A es no simple. ■

Proposición 4.5.19. *Sea $A \in \mathrm{Hil}^w_\Box\mathbf{S5}$. Entonces,*

1. *A es simple si y sólo si $\Box a = 0$, para todo $a \in A - \{1\}$.*
2. *A es subdirectamente irreducible si y sólo si existe $a \in A - \{1\}$ tal que $(\alpha_1(b); a) = 1$ para todo $b \in A - \{1\}$.*

Demostración. Sea $A \in \mathrm{Hil}^w_\Box\mathbf{S5}$. Por Observación 4.3.1, $\Box a \leq \Box^2 a$ para todo $a \in A$.

1. $\Longrightarrow$) Sea $a \in A$. Como $\Box a \leq \Box^2 a$, tenemos que $\Box b \in \langle\Box a\rangle$ cuando $b \in \langle\Box a\rangle$. Luego, $\langle\Box a\rangle \in \mathrm{Ds}_\Box(A)$. Como A es simple, $\langle\Box a\rangle = A$ o $\langle\Box a\rangle = \{1\}$. Esto es, $\Box a = 0$ o $\Box a = 1$. Demostremos la proposición mostrando que $\Box a = 1$ es equivalente a afirmar que $a = 1$. Es claro que si $a = 1$ entonces $\Box a = 1$. Supongamos que existe $a \in A, a \neq 1$ tal que $\Box a = 1$. Por ser $a \neq 1$ y A simple, por Teorema 4.5.10, tenemos que $\langle a\rangle_\Box = A$. Veamos que para dicho elemento se satisface que $\langle a\rangle_\Box = \langle a\rangle$. Es claro que $\langle a\rangle \subseteq \langle a\rangle_\Box$. Probemos la otra inclusión. Sea $b \in \langle a\rangle_\Box$. Por Lema 4.5.12 resulta $1 = a \to (\Box a \to b) = a \to (1 \to b) = a \to b$. Por lo cual, $b \in \langle a\rangle$. Luego, $A = \langle a\rangle$, y consecuentemente, $a = 0$. Como $\Box 0 = 0$, resulta $\Box a = 0$, lo cual es una contradicción.

$\Longleftarrow$) Es claro que $\Box a \in \langle a\rangle_\Box$. Por lo tanto, $\langle\Box a\rangle \subseteq \langle a\rangle_\Box$ para todo $a \in A$. En particular, para $a \in A - \{1\}$. Por lo asumido, $A = \langle 0\rangle = \langle\Box a\rangle \subseteq \langle a\rangle_\Box$ para $a \in A - \{1\}$ y consecuentemente, $A = \langle a\rangle_\Box$ para cada $a \in A - \{1\}$. Luego, por Teorema 4.5.10, A es simple.

2. Por Teorema 4.5.11, existe $a \in A - \{1\}$ tal que para todo $b \in A - \{1\}$ existe $n \geq 0$ tal que $(\alpha_n(b); a) = 1$. Por lo tanto, $(\alpha_0(b); a) = 1$ o $(\alpha_n(b); a) = 1$ para $n \in \mathbb{N}$. Por (4.1), $b \leq a$ o $(\alpha_1(b); a) = 1$. Si $b \leq a$, como $a \leq \Box b \to a$, resulta $b \leq \Box b \to a$ y por lo tanto, $(\alpha_1(b); a) = 1$. La recíproca es consecuencia inmediata de Teorema 4.5.11. ■

4.6. Álgebras de Hilbert Lax

El objetivo de esta sección es estudiar la variedad de $\Box H$-álgebras que satisfacen las identidades adicionales $a \to \Box a = 1$ y $\Box a = \Box^2 a$, a las cuales llamamos álgebras de Hilbert Lax siguiendo la nomenclatura utilizada por Fairtlough y Mendler en [31] para la Lógica Modal Intuicionista denominada Lógica Proposicional Lax (usaremos su abreviatura en inglés $\mathcal{PLL}$). La lógica $\mathcal{PLL}$ tiene interesantes aplicaciones sobre los comportamientos de los circuitos de hardware como se muestra en [31]. La semántica algebraica de

$\mathcal{PLL}$ son las álgebras de Heyting equipadas con un operador modal que satisface ciertas ecuaciones y fueron estudiadas por D. S. Macnab en [49], R. Goldblatt en [36] y [37], y por G. Bezhanishvili y S. Ghilardi en [4].

Consideramos a esta clase de álgebras como una extensión de la variedad de las $\Box H$-algebras. Pero es interesante notar, como está fundamentado en [31] y en [37], que el operador lax $\Box$ tiene un compartamiento parecido al de un operador modal $\Diamond$.

Definición 4.6.1. Sea A un álgebra de Hilbert. Un *núcleo* sobre A es un operador unario $\Box : A \to A$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $a \leq \Box a$,
2. $\Box^2 a \leq \Box a$,
3. $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$.

Definición 4.6.2. Un *álgebra de Hilbert Lax*, o LH-álgebra, es un par $\langle A, \Box\rangle$ tal que A es un álgebra de Hilbert y $\Box$ es un núcleo sobre A.

Observación 4.6.3. Notemos que si $\langle A, \Box\rangle$ es un LH-álgebra, entonces $\Box 1 = 1$ y por la monotonía de $\Box$, tenemos que $\Box^2 a = \Box a$, para todo $a \in A$. Luego, $\Box^n a = \Box a$, para todo $a \in A$, y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Denotamos con $\mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box$ a la variedad formada por LH-álgebras y con $\mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box\mathcal{S}$ a la categoría formada por LH-álgebras y $\Box$-semi-homomorfismos.

De manera similar a lo realizado para álgebras de Heyting por Macnab en [49], obtenemos el siguiente resultado que muestra que para toda álgebra de Hilbert Lax se puede dar una caracterización alternativa.

Teorema 4.6.4. *Sea A un álgebra de Hilbert. La siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\Box$ es un operador modal de manera tal que $\langle A, \Box\rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box$.*
2. *$\Box$ es una función definida sobre A tal que para todo $a, b \in A$:*

$$a \to \Box b = \Box a \to \Box b.$$

Demostración. *1. $\Longrightarrow$ 2.* Sean $a, b \in A$. Como $a \leq \Box a$ para cada $a \in A$, entonces $\Box a \to \Box b \leq a \to \Box b$. Supongamos que existen $a, b \in A$ tal que $a \to \Box b \nleq \Box a \to \Box b$. Por Corolario 2.2.11, existe $x \in X(A)$ tal que $a \to \Box b \in x$ y $\Box a \to \Box b \notin x$. Por lo tanto, existe $y \in X(A)$ tal que $x \subseteq y$, $\Box a \in y$ y $\Box b = \Box^2 b \notin y$. Por Lema 4.3.2, existe $z \in X(A)$ tal que $(y, z) \in Q_A$ y $\Box b \notin z$. Como $\Box^{-1}(y) \subseteq z$ y $\Box a \in y$, tenemos que $a \in z$. Más aún, por item (1) del Teorema 4.3.4, tenemos que $y \subseteq z$. Por lo tanto, $x \subseteq z$

y consecuentemente, $a \to \Box b \in z$. Luego, $\Box b \in z$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a \to \Box b = \Box a \to \Box b$ para todo $a, b \in A$.

2. $\Longrightarrow$ *1.* Como $a \to \Box b = \Box a \to \Box b$ para todo $a, b \in A$, en particular, $a \to \Box a = \Box a \to \Box a = 1$. Es decir, $a \leq \Box a$ para cada $a \in A$. Más aún, como $1 = \Box a \to \Box a = \Box^2 a \to \Box a$, tenemos que $\Box^2 a \leq \Box a$ para cada $a \in A$.

Por último, probemos que $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$. Como $b \leq \Box b$, tenemos que $a \to b \leq a \to \Box b = \Box a \to \Box b$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1 &= (a \to b) \to (\Box a \to \Box b) = \Box a \to ((a \to b) \to \Box b) \\ &= \Box a \to (\Box(a \to b) \to \Box b) = \Box(a \to b) \to (\Box a \to \Box b)\,. \end{aligned}$$

Es decir, $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$. ■

En el próximo resultado mostramos que en cualquier álgebra de Hilbert es posible definir al menos dos estructuras de álgebras de Hilbert Lax.

Lema 4.6.5. *Sea A un álgebra de Hilbert. Para cualquier elemento a de A, definimos dos funciones*

$$v_a : A \to A \text{ y } w_a : A \to A$$

como

$$v_a(x) = a \to x$$

y

$$w_a(x) = (x \to a) \to a,$$

respectivamente. Entonces, $\langle A, v_a\rangle$ y $\langle A, w_a\rangle$ son álgebras de Hilbert Lax.

Demostración. Sean $x, y \in A$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rclcl} x \to v_a(y) & = & x \to (a \to y) & = & a \to (x \to y) \\ & = & (a \to x) \to (a \to y) & = & v_a(x) \to v_a(y). \end{array}$$

Por otro lado,

$$\begin{array}{rclcl} w_a(x) \to w_a(y) & = & ((x \to a) \to a) \to ((y \to a) \to a) & & \\ & = & (y \to a) \to (((x \to a) \to a) \to a) & = & (y \to a) \to (x \to a) \\ & = & x \to ((y \to a) \to a) & = & x \to w_a(y). \end{array}$$

Luego, por Teorema 4.6.4, $\langle A, v_a\rangle$ y $\langle A, w_a\rangle$ son álgebras de Hilbert Lax. ■

Sea $\langle A, \Box\rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_{\Box}$. Consideremos el conjunto

$$A_{\Box} = \{\Box a \in A : a \in A\}.$$

El conjunto $A_{\Box}$ es llamado el *conjunto de elementos abiertos de A*. Mostramos que $A_{\Box}$ es subálgebra de Hilbert de A.

Lema 4.6.6. *Si* $\langle A, \Box \rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_{\Box}$, *entonces* $A_{\Box} = \{a \in A : \Box a = a\}$ *y* $A_{\Box}$ *es una subálgebra de Hilbert de* A.

Demostración. Es claro que $\{a \in A : \Box a = a\} \subseteq A_{\Box}$. Para probar la otra inclusión, tomemos $c \in A_{\Box}$. Por lo tanto, existe $a \in A$ tal que $c = \Box a$. Luego, $\Box c = \Box^2 a = \Box a = c$ y consecuentemente, $c \in \{a \in A : \Box a = a\}$.

Veamos ahora que $A_{\Box}$ es una subálgebra de Hilbert de A. Es claro que $A_{\Box} \subseteq A$. Como $\Box 1 = 1$ tenemos que $1 \in A_{\Box}$. Sean $a, b \in A_{\Box}$. Esto es, $\Box a = a$ y $\Box b = b$. Entonces,

$$a \to b \leq \Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b = a \to b.$$

Luego, $a \to b = \Box(a \to b)$ y por lo tanto, $a \to b \in A_{\Box}$. ■

Sea $\langle A, \Box \rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_{\Box}$. Denotamos con $\mathrm{Ds}(A_{\Box})$ al conjunto de todos los sistemas deductivos de $A_{\Box}$. Consideremos el conjunto

$$\mathrm{Ds}^{*}(A) = \left\{F \in \mathrm{Ds}(A) : \Box^{-1}(F) = F\right\}.$$

Lema 4.6.7. *Let* $\langle A, \Box \rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_{\Box}$.

1. *Si* $F \in \mathrm{Ds}(A)$, $\Box^{-1}(\Box^{-1}(F)) = \Box^{-1}(F)$.
2. *Si* $F \in \mathrm{Ds}(A_{\Box})$, *entonces* $\Box^{-1}(F) \in \mathrm{Ds}^{*}(A)$.

Demostración. *1.* Sea $F \in \mathrm{Ds}(A)$. Como $\Box^2 a = \Box a$ para todo $a \in A$, resulta que

$$a \in \Box^{-1}(F) \iff \Box a = \Box^2 a \in F \iff a \in \Box^{-1}(\Box^{-1}(F)).$$

Por lo tanto, $\Box^{-1}(\Box^{-1}(F)) = \Box^{-1}(F)$.

2. Sea $F \in \mathrm{Ds}(A_{\Box})$. Sean $a, a \to b \in \Box^{-1}(F)$. Esto es, $\Box a, \Box(a \to b) \in F$. Como $\Box a, \Box b \in A_{\Box}$, tenemos que $\Box a \to \Box b \in A_{\Box}$ y como $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$, resulta $\Box a \to \Box b \in F$. Como $F \in \mathrm{Ds}(A_{\Box})$, podemos asegurar que $\Box b \in F$, i.e., $b \in \Box^{-1}(F)$. Luego, $\Box^{-1}(F) \in \mathrm{Ds}(A)$.

Por el item *1.* anterior, $\Box^{-1}(\Box^{-1}(F)) = \Box^{-1}(F)$. Por ende, $\Box^{-1}(F) \in \mathrm{Ds}^{*}(A)$. ■

Teorema 4.6.8. *Sea* $\langle A, \Box \rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_{\Box}$. *Entonces, los conjuntos ordenados* $\langle \mathrm{Ds}^{*}(A), \subseteq \rangle$ *y* $\langle \mathrm{Ds}(A_{\Box}), \subseteq \rangle$ *son isomorfos.*

Demostración. Definimos

$$\alpha : \mathrm{Ds}^{*}(A) \to \mathrm{Ds}(A_{\Box})$$

tal que

$$\alpha(F) = \langle F \cap A_{\Box} \rangle_{A_{\Box}},$$

donde $\langle Y\rangle_{A_\Box}$ denota el sistema deductivo de $A_\Box$ generado por el subconjunto $Y\subseteq A_\Box$. Probemos que α es 1-1. Sean $F_1,F_2\in \mathrm{Ds}^*(A)$ tales que $\langle F_1\cap A_\Box\rangle_{A_\Box}=\langle F_2\cap A_\Box\rangle_{A_\Box}$. Tomemos $a\in F_1$. Entonces $\Box a\in F_1$, y por lo tanto $\Box a\in F_1\cap A_\Box\subseteq \langle F_1\cap A_\Box\rangle_{A_\Box}=\langle F_2\cap A_\Box\rangle_{A_\Box}$. Luego, existe $f\in F_2\cap A_\Box$ tal que $f\leq \Box a$. Por lo tanto, $\Box a\in F_2$, i.e., $a\in \Box^{-1}(F_2)=F_2$. Luego, $F_1\subseteq F_2$. Similarmente se prueba que $F_2\subseteq F_1$.

Probemos ahora que α es sobreyectiva. Para ello tomemos $F\in \mathrm{Ds}(A_\Box)$. Por item *2.* del Lema 4.6.7, $\Box^{-1}(F)\in \mathrm{Ds}^*(A)$. Probemos que $\alpha(\Box^{-1}(F))=F$. Sea $a\in\alpha(\Box^{-1}(F))$. Existe $f\in\Box^{-1}(F)\cap A_\Box$ tal que $f\leq a$. Como $\Box^{-1}(F)\in \mathrm{Ds}(A)$, resulta $a\in\Box^{-1}(F)$ y consecuentemente, $\Box a\in F$. Como $a\in\langle \Box^{-1}(F)\cap A_\Box\rangle_{A_\Box}\subseteq A_\Box$, tenemos que $\Box a=a$ y por ende, $a\in F$. Luego, $\langle\Box^{-1}(F)\cap A_\Box\rangle_{A_\Box}\subseteq F$. Para probar la otra inclusión, tomamos $a\in F\subseteq A_\Box$. Es decir, $\Box a=a\in F$. Por lo tanto $a\in\Box^{-1}(F)\cap A_\Box\subseteq\langle\Box^{-1}(F)\cap A_\Box\rangle_{A_\Box}$. Luego, α es sobreyectiva. ■

Sea $\langle A,\Box\rangle\in\mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box$. Al conjunto de todos los sistemas deductivos irreducibles de la subálgebra $A_\Box$ lo denotamos $X(A_\Box)$. Consideremos el conjunto

$$X^*(A)=\left\{x\in X(A):\Box^{-1}(x)=x\right\}.$$

Observación 4.6.9. Sea $\langle A,\Box\rangle\in\mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box$. Como $a\leq\Box a$ para todo $a\in A$, es inmediato que $x\subseteq\Box^{-1}(x)$ para todo $x\in X(A)$. Entonces, $X^*(A)=\{x\in X(A):(x,x)\in Q_A\}$, i.e., el conjunto $X^*(A)$ es el subconjunto de los puntos reflexivos de $X(A)$.

Lema 4.6.10. *Sea $\langle A,\Box\rangle\in\mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box$. Si $x\in X(A_\Box)$, entonces*

1. $(x^c\cap A_\Box]\in\mathrm{Id}(A)$.

2. *Existe $y\in X(A)$ tal que $x=y\cap A_\Box$.*

3. $\Box^{-1}(x)\in X^*(A)$.

Demostración. Sea $x\in X(A_\Box)$.

1. Es claro que $(x^c\cap A_\Box]$ es un subconjunto decreciente de A. Sean $a,b\in A$ tales que $a,b\in(x^c\cap A_\Box]$. Por lo tanto existen $c,d\in x^c\cap A_\Box$ tales que $a\leq c$ y $b\leq d$. Como $x\in X(A_\Box)$ y $c,d\notin x$, existe $f\in x^c\cap A_\Box$ tal que $c\leq f$ y $d\leq f$. Por lo tanto, existe $f\in(x^c\cap A_\Box]$ tal que $a\leq f$ y $b\leq f$. Luego, $(x^c\cap A_\Box]\in\mathrm{Id}(A)$.

2. Consideremos el sistema deductivo $\langle x\rangle$ en A generado por x y el ideal de orden $(x^c\cap A_\Box]$ de A. Probemos que

$$\langle x\rangle\cap(x^c\cap A_\Box]=\emptyset.$$

Por el contrario, supongamos que existe $a\in\langle x\rangle\cap(x^c\cap A_\Box]$. Esto significa que existen $p\in x$ y $q\in x^c\cap A_\Box$ tales que $p\to a=1\in x$ y $a\leq q$. Por Modus Ponens $q\in x$, lo cual es una contradicción. Luego, existe $y \in X(A)$ tal que $\langle x \rangle \subseteq y$ y $(x^c \cap A_\Box] \cap y = \emptyset$. Por consiguiente, $x \subseteq y$ y $x^c \cap A_\Box \cap y = \emptyset$, i.e., $y \cap A_\Box \subseteq x$. Más aún, como $x \subseteq A_\Box$ y $x \subseteq y$, tenemos que $x \subseteq y \cap A_\Box$. Luego, existe $y \in X(A)$ tal que $A_\Box \cap y = x$.

3. Por Lema 4.6.7 tenemos que $\Box^{-1}(x) \in \mathrm{Ds}^*(A)$. Como x es un sistema deductivo propio de $A_\Box$, existe $a = \Box a \in A_\Box$ tal que $a \notin x$. Esto es, $\Box a \notin x$ y consecuentemente, $a \notin \Box^{-1}(x)$, i.e., $\Box^{-1}(x)$ es propio. Sean $a, b \in A$ tales que $a, b \notin \Box^{-1}(x)$. Por consiguiente, $\Box a, \Box b \notin x$ y consecuentemente, existe $c \in x^c \cap A_\Box$ tal que $\Box a \leq c$ y $\Box b \leq c$. Como $c \in A_\Box$, $\Box c = c \notin x$ y por lo tanto, $c \notin \Box^{-1}(x)$. Es decir, existe $c \notin \Box^{-1}(x)$ tal que $a \leq \Box a \leq c$ y $b \leq \Box b \leq c$. Luego, $\Box^{-1}(x) \in X^*(A)$. ■

Lema 4.6.11. *Sea* $\langle A, \Box \rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box$. *Si* $x \in X^*(A)$*, entonces* $\langle x \cap A_\Box \rangle_{A_\Box} \in X(A_\Box)$.

Demostración. Es claro que $\langle x \cap A_\Box \rangle_{A_\Box} \in \mathrm{Ds}(A_\Box)$. Sean $a, b \in A_\Box$ tales que $a, b \notin \langle x \cap A_\Box \rangle_{A_\Box}$. Entonces, $a, b \notin x \cap A_\Box$, pues $x \cap A_\Box \subseteq \langle x \cap A_\Box \rangle_{A_\Box}$. Por ende, $a, b \notin x$, y consecuentemente, existe $c \notin x$ tal que $a, b \leq c$. Como $c \notin x = \Box^{-1}(x)$, resulta $\Box c \notin x$. Notemos que $\Box c \notin \langle x \cap A_\Box \rangle_{A_\Box}$, caso contrario, existe $p \in x \cap A_\Box$ tal que $p \to \Box c = 1 \in x$. Por Modus Ponens, $\Box c \in x$, lo cual es imposible. Luego, existe $\Box c \notin \langle x \cap A_\Box \rangle_{A_\Box}$ tal que $a, b \leq c \leq \Box c$. ■

Teorema 4.6.12. *Sea* $\langle A, \Box \rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box$. *Entonces, los conjuntos ordenados* $\langle X^*(A), \subseteq \rangle$ *y* $\langle X(A_\Box), \subseteq \rangle$ *son isomorfos.*

Demostración. Por Lema 4.6.10, para cada $x \in X(A_\Box)$, tenemos que $\Box^{-1}(x) \in X^*(A)$, y por Lema 4.6.11, $\langle y \cap A_\Box \rangle_{A_\Box} \in X(A_\Box)$, para cada $y \in X^*(A)$. Por Teorema 4.6.8 tenemos que la aplicación

$$\psi = \alpha\,|_{X^*(A)}\colon X^*(A) \to X(A_\Box)$$

dada por $\psi(x) = \langle x \cap A_\Box \rangle_{A_\Box}$ es un isomorfismo de orden sobreyectivo. Luego, $\langle X^*(A), \subseteq \rangle$ y $\langle X(A_\Box), \subseteq \rangle$ son isomorfos. ■

4.6.1. Espacios de Hilbert Lax

En esta sección construímos una categoría dualmente equivalente a $\mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box\mathcal{S}$. Notemos que si $\langle A, \Box \rangle$ es un álgebra de Hilbert Lax y $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, Q_A \rangle$ es su $H\Box$-espacio dual entonces, por Teorema 4.3.4, la relación binaria $Q_A \subseteq X(A) \times X(A)$ es transitiva, débilmente densa y además, Q_A está incluída en $\subseteq$. Por lo tanto, podemos establecer la siguiente definición:

Definición 4.6.13. Un $H\Box$-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ es un *espacio de Hilbert Lax* si Q satisface las siguientes condiciones:

(Q_1) Si $(x,y) \in Q$ entonces $x \leq y$.

(Q_2) $Q = Q \circ Q$.

Sea $\langle A, \Box\rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_{\Box}$. El Lema 4.6.10 nos permite probar la siguiente caracterización de la relación Q_A definida sobre el $H\Box$-espacio asociado a $\langle A, \Box\rangle$.

Proposición 4.6.14. *Sea $\langle A, \Box\rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_{\Box}$ y sea $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, Q_A\rangle$ su $H\Box$-espacio dual. Entonces,*

$$(x,y) \in Q_A \iff \exists z \in X(A) : (z,z) \in Q_A \;\&\; x \subseteq z \subseteq y,$$

para todo $x, y \in X(A)$.

Demostración. $\Longrightarrow$) Sean $x, y \in X(A)$ tales que $(x,y) \in Q_A$. Notemos que $(\Box\,(y^c)]_{A_\Box} \in \mathrm{Id}(A_\Box)$. En efecto. Es claro que $(\Box\,(y^c)]_{A_\Box}$ es un subconjunto decreciente de $A_\Box$. Sean $a, b \in (\Box\,(y^c)]_{A_\Box}$. Por lo tanto, existen $c, d \in A$ tales que $c, d \notin y$ y $a \leq \Box c, b \leq \Box d$. Como $c, d \notin y$, existe $t \notin y$ tal que $c \leq t$ y $d \leq t$. Consecuentemente, $a \leq \Box c \leq \Box t, b \leq \Box d \leq \Box t$ con $\Box t \in \Box\,(y^c)$. Luego,existe $\Box t \in (\Box\,(y^c)]_{A_\Box}$ y $a, b \leq \Box t$. Hemos probado entonces que $(\Box\,(y^c)]_{A_\Box} \in \mathrm{Id}(A_\Box)$. Probemos ahora que $\langle x \cap A_\Box\rangle_{A_\Box} \cap (\Box\,(y^c)]_{A_\Box} = \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir, consideremos que existe $a \in A_\Box$ tal que $a \in \langle x \cap A_\Box\rangle_{A_\Box}$ y $a \in (\Box\,(y^c)]_{A_\Box}$. Esto es, existe $p \in x \cap A_\Box$ y $c \in y^c$ tal que $p \leq a$ y $a \leq \Box c$. Por ende, $p \leq \Box c$ y consecuentemente, $\Box c \in x$. Como $(x,y) \in Q_A$, resulta $c \in y$, lo cual es imposible. Luego, por Teorema 2.2.10, podemos asegurar que existe $w \in X\,(A_\Box)$ tal que $x \cap A_\Box \subseteq w$ y $(\Box\,(y^c)]_{A_\Box} \cap w = \emptyset$. Como $w \in X\,(A_\Box)$, por Lema 4.6.10, existe $v \in X(A)$ tal que $w = v \cap A_\Box$. Entonces,

$$x \cap A_\Box \subseteq v \cap A_\Box \text{ y } (\Box\,(y^c)]_{A_\Box} \cap v \cap A_\Box = \emptyset.$$

Sea $z = \Box^{-1}(w)$. Por Lema 4.6.10, $z \in X(A)$. Mostremos que $(z,z) \in Q_A$. Sea $a \in \Box^{-1}(z)$. Por lo tanto, $\Box a \in z = \Box^{-1}(w)$. Esto es, $\Box^2 a = \Box a \in w$ y consecuentemente, $a \in z$. Finalmente probemos que $x \subseteq z \subseteq y$. Sea $a \in x$. Como $a \leq \Box a$, resulta $\Box a \in x \cap A_\Box$. Por lo tanto, $\Box a \in v \cap A_\Box = w$ y por consiguiente, $a \in z$. Luego, $x \subseteq z$. Supongamos que $z \nsubseteq y$, i.e., existe $b \in z$ tal que $b \notin y$. Por lo tanto, $\Box b \in w$ y $\Box b \in \Box\,(y^c)$. Es decir, $\Box b \in v \cap A_\Box \cap (\Box\,(y^c)]$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, $x \subseteq z \subseteq y$.

$\Longleftarrow$) Asumamos la existencia de $z \in X(A)$ tal que $(z,z) \in Q_A$ y $x \subseteq z \subseteq y$. Probemos que $(x,y) \in Q_A$. Sea $a \in \Box^{-1}(x)$. Por lo tanto, $\Box a \in x \subseteq z$ y consecuentemente, $a \in \Box^{-1}(z) \subseteq z$. Luego, $a \in z \subseteq y$ y entonces, $a \in y$. ■

Denotemos con $\mathcal{LM}_\Box\mathcal{SR}$ a la categoría formada por espacios de Hilbert Lax y $\Box H$-relaciones. Luego, por los Teoremas 4.2.10 y 4.3.4, la categoría $\mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box\mathcal{S}$ es dualmente equivalente a la categoría $\mathcal{LM}_\Box\mathcal{SR}$.

Observemos que por la Proposición 4.6.14 y la Definición 4.6.13, tenemos que si $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, Q\rangle$ es un espacio de Hilbert Lax entonces,

$$xQy \iff \exists z \in X\,(zQz \;\&\; x \leq z \leq y) \iff \exists z \in X\,(xQz \;\&\; zQy \;\&\; x \leq y)\,.$$

La equivalencia anterior nos permite extender para el caso de álgebras de Hilbert Lax la dualidad encontrada en [4] por G. Berzhanishvili y S. Ghilardi para álgebras de Heyting con núcleo.

4.6.2. Espacio de los elementos abiertos

Dada un álgebra de Hilbert Lax $\langle A, \Box\rangle$, por Lema 4.6.6 queda probado que $\langle A_\Box, \to, 1\rangle$ es una subálgebra de $\langle A, \to, 1\rangle$. En esta subsección mostramos una caracterización del espacio dual de $\langle A_\Box, \to, 1\rangle$ en términos de ciertos elementos reflexivos del espacio dual de $\langle A, \Box\rangle$.

Recordemos que si $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un espacio topológico e Y es un subconjunto de X entonces la familia

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

de subconjuntos de Y es una topología para Y llamada la *topología relativa* heredada de $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ y el espacio topológico $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$ es un *subespacio* de $\langle X, \mathcal{T}\rangle$. Los conjuntos $V \in \mathcal{T}_Y$ son los subconjuntos abiertos relativos de Y y los conjuntos $V^c \cap Y$, con $V \in \mathcal{T}_Y$, son los subconjuntos cerrados relativos de Y. Sea $S \subseteq Y$. Denotamos con $\mathrm{sat}_Y(S)$ y $\mathrm{cl}_Y(S)$ la saturación y la clausura de S en el espacio $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$, respectivamente. Esto es,

$$\mathrm{sat}_Y(S) = \mathrm{sat}(S) \cap Y \text{ y } \mathrm{cl}_Y(S) = \mathrm{cl}(S) \cap Y.$$

Lema 4.6.15. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}\rangle$ un espacio topológico con una base $\mathcal{K}$. Sea $Y \subseteq X$. Entonces, la familia*

$$\mathcal{K}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{K}\}$$

es una base para la topología relativa $\mathcal{T}_Y$ sobre Y.

Demostración. Notemos que $Y = X \cap Y = \bigcup\{U : U \in \mathcal{K}\} \cap Y = \bigcup\{U \cap Y : U \in \mathcal{K}\}$. Más aún, si $U \cap V \cap Y \neq \emptyset$, con $U, V \in \mathcal{K}$, entonces existe $x \in U \cap V$ y $x \in Y$. Como $\mathcal{K}$ es una base de $\mathcal{T}_\mathcal{K}$, existe $W \in \mathcal{K}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$. Por lo tanto, $x \in W \cap Y \subseteq U \cap V \cap Y$. Luego, $\mathcal{K}_Y$ es una base para la topología $\mathcal{T}_Y$ sobre Y. ■

Definición 4.6.16. Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un espacio topológico con una base $\mathcal{K}$ de subconjuntos abiertos y compactos. Diremos que un subconjunto Y de X es un $\mathcal{K}$-*subconjunto* si $U \cap Y$ es un conjunto compacto en el espacio topológico $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$, para cada $U \in \mathcal{K}$.

Lema 4.6.17. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un espacio topológico con una base $\mathcal{K}$ de subconjuntos abiertos y compactos. Sea Y un $\mathcal{K}$-subconjunto de X. Entonces,*

1. *$\mathcal{K}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{K}\}$ es una base de subconjuntos abiertos y compactos para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_Y}$ sobre Y.*

2. *Si Z es un subconjunto cerrado irreducible de $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$, entonces $\mathrm{cl}(Z)$ es un subconjunto cerrado irreducible de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ y $Z = \mathrm{cl}(Z) \cap Y$.*

Demostración. 1. Resulta inmediatamente de Lema 4.6.15 y Definición 4.6.16.

2. Sea Z un subconjunto cerrado irreducible de $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$. Probemos que $Y \cap \mathrm{cl}(Z) = Z$. Es claro que $Z \subseteq Y \cap \mathrm{cl}(Z)$. Sea $x \in \mathrm{cl}(Z) \cap Y$. Supongamos que $x \notin Z$. Como Z es un subconjunto cerrado de $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$, existe $U \in D(X)$ tal que $Z \subseteq U \cap Y \subseteq U$ y $x \notin U$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}(Z) \subseteq \mathrm{cl}(U) = U$ y consecuentemente, $x \in U$, lo cual es imposible. Luego, $Z = Y \cap \mathrm{cl}(Z)$.

Sólo nos resta probar que $\mathrm{cl}(Z)$ es un subconjunto irreducible de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$. Sean W_1 y W_2 dos subconjuntos cerrados de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ tales que $\mathrm{cl}(Z) \subseteq W_1 \cup W_2$. Entonces, $Z = \mathrm{cl}(Z) \cap Y \subseteq (W_1 \cap Y) \cup (W_2 \cap Y)$. Los subconjuntos $W_1 \cap Y$ y $W_2 \cap Y$ son cerrados en la topología $\mathcal{T}_Y$ y además Z es un subconjunto irreducible de $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$, por lo tanto, $Z \subseteq W_1 \cap Y \subseteq W_1$ o $Z \subseteq W_2 \cap Y \subseteq W_2$. Entonces, $\mathrm{cl}(Z) \subseteq W_1$ o $\mathrm{cl}(Z) \subseteq W_2$. Luego, $\mathrm{cl}(Z)$ es un subconjunto cerrado irreducible de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$. ∎

Consideremos el subconjunto

$$X^* = X^*(A) = \{x \in X(A) : \Box^{-1}(x) = x\}$$

de $X(A)$. Por Teorema 4.6.12, los conjuntos ordenados $\langle X^*, \subseteq\rangle$ y $\langle X(A_\Box), \subseteq\rangle$ son isomorfos. A continuación extendemos este resultado probando que los espacios topológicos $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*}\rangle$ y $\left\langle X(A_\Box), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{A_\Box}}\right\rangle$ son homeomorfos.

Proposición 4.6.18. *Sea $\langle A, \Box\rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box$ y sea $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, Q_A\rangle$ su espacio de Hilbert Lax dual. Entonces,*

1. *X^* es un $\mathcal{K}_A$-subconjunto de $X(A)$.*

2. *$\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*}\rangle$ es un H-espacio.*

3. *Los espacios topológicos $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*}\rangle$ y $\left\langle X(A_\Box), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{A_\Box}}\right\rangle$ son homeomorfos.*

Demostración. *1.* Necesitamos probar que los elementos de $(\mathcal{K}_A)_{X^*} = \{\varphi(a)^c \cap X^* : \varphi(a)^c \in \mathcal{K}_A\}$ son subconjuntos compactos de $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*}\rangle$. Para ello, primero probemos que para cada $a \in A$,

$$(\varphi(a)^c \cap X^*] = \varphi(\Box a)^c. \tag{4.3}$$

Sea $a \in A$ y $x \in X(A)$. Si $x \in \varphi(a)^c \cap X^*$ entonces, $a \notin x = \Box^{-1}(x)$. Por lo tanto, $\Box a \notin x$, i.e., $x \in \varphi(\Box a)^c$. Luego, $(\varphi(a)^c \cap X^*] \subseteq (\varphi(\Box a)^c] = \varphi(\Box a)^c$ pues $\varphi(\Box a)^c$ es un subconjunto decreciente de $X(A)$. Ahora tomemos $x \in \varphi(\Box a)^c$, i.e., $\Box a \notin x$. Por Lema 4.1.5, existe $y \in X(A)$ tal que $(x, y) \in Q_A$ y $a \notin y$. Por Proposición 4.6.14, existe $z \in X(A)$ tal que $(z, z) \in Q_A$ y $x \subseteq z \subseteq y$. Como $a \notin y$, tenemos que $a \notin z$, i.e., $z \in \varphi(a)^c$. Por Observación 4.6.9, $z \in X^*$ y por ende, $z \in \varphi(a)^c \cap X^*$. Luego, $x \in (\varphi(a)^c \cap X^*]$.

Ahora probemos que $\varphi(a)^c \cap X^*$ es un subconjunto compacto de $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*}\rangle$, para todo $a \in A$, teniendo en cuenta que $(\mathcal{K}_A)_{X^*}$ es una base para la topología $\mathcal{T}_{X^*}$ sobre X^*. Sea

$$\varphi(a)^c \cap X^* \subseteq \bigcup \{\varphi(b_i)^c \cap X^* : b_i \in B \subseteq A\}.$$

Por (4.3), tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(\Box a)^c &= (\varphi(a)^c \cap X^*] \subseteq \bigcup \{(\varphi(b_i)^c \cap X^*] : b_i \in B \subseteq A\} \\ &= \bigcup \{\varphi(\Box b_i)^c : b_i \in B \subseteq A\}. \end{aligned}$$

Como $\varphi(\Box a)^c$ es un subconjunto compacto de $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$, existen $b_1, ..., b_n \in B$ tales que $\varphi(\Box a)^c \subseteq \varphi(\Box b_1)^c \cup \ldots \cup \varphi(\Box b_n)^c$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi(a)^c \cap X^* &\subseteq (\varphi(a)^c \cap X^*] = \varphi(\Box a)^c \subseteq \varphi(\Box b_1)^c \cup \ldots \cup \varphi(\Box b_n)^c \\ &\subseteq \varphi(b_1)^c \cup \ldots \cup \varphi(b_n)^c. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\varphi(a)^c \cap X^* \subseteq (\varphi(b_1)^c \cup \ldots \cup \varphi(b_n)^c) \cap X^* = (\varphi(b_1)^c \cap X^*) \cup \ldots \cup (\varphi(b_n)^c \cap X^*),$$

y consecuentemente $\varphi(a)^c \cap X^*$ es un subconjunto compacto de $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*}\rangle$. Por consiguiente, X^* es un $\mathcal{K}_A$-subconjunto de $X(A)$.

2. Sean cl_{X^*} y sat_{X^*} la clausura y saturación topológica en el espacio topológico $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*}\rangle$, respectivamente. Como X^* es un $\mathcal{K}_A$-subconjunto de $X(A)$, por Lema 4.6.17 tenemos que $(\mathcal{K}_A)_{X^*} = \{\varphi(a)^c \cap X^* : \varphi(a)^c \in \mathcal{K}_A\}$ es una base de subconjuntos abiertos y compactos para la topología $\mathcal{T}_{X^*}$ definida sobre X^*. Probaremos que $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*}\rangle$ es sober. Sea Z un subconjunto cerrado irreducible de $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*}\rangle$. Por Lema 4.6.17, $\mathrm{cl}(Z)$ es un subconjunto cerrado irreducible de $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$ y $Z = \mathrm{cl}(Z) \cap X^*$. Como $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$ es sober, existe $x \in X(A)$ tal que $\mathrm{cl}(x) = [x) = \mathrm{cl}(Z)$. Probemos que

$$Z = \mathrm{cl}_{X^*}\left(\Box^{-1}(x)\right).$$

Sea $z \in Z$. Entonces $z \in \mathrm{cl}(Z) \cap X^* = [x) \cap X^*$. Por lo tanto, $x \subseteq z$ y esto implica que $\Box^{-1}(x) \subseteq \Box^{-1}(z) = z$. Por ende, $z \in [\Box^{-1}(x)) \cap X^* = \mathrm{cl}_{X^*}(\Box^{-1}(x))$. Recíprocamente. Supongamos que $z \in \mathrm{cl}_{X^*}(\Box^{-1}(x))$. Entonces $\Box^{-1}(x) \subseteq z$. Como $x \subseteq \Box^{-1}(x)$, resulta $z \in [x) = \mathrm{cl}(Z)$, i.e. $z \in [x) \cap X^* = \mathrm{cl}(Z) \cap X^* = Z$. Luego, $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*}\rangle$ es sober. Sólo nos resta probar que $\mathrm{sat}_{X^*}(U \cap V^c) \in (\mathcal{K}_A)_{X^*}$ para todo $U, V \in (\mathcal{K}_A)_{X^*}$. Como $U, V \in (\mathcal{K}_A)_{X^*}$ existen $a, b \in A$ tales que $U = \varphi(a)^c \cap X^*$ y $V = \varphi(b)^c \cap X^*$. Consecuentemente,

$$\mathrm{sat}_{X^*}(U \cap V^c) = \mathrm{sat}(U \cap V^c) \cap X^* = (\varphi(a)^c \cap \varphi(b) \cap X^*] \cap X^*.$$

Notemos que $(\varphi(a)^c \cap \varphi(b) \cap X^*] = (\varphi(b) \cap (\varphi(a)^c \cap X^*]]$. En efecto. Sea $x \in X(A)$ tal que $x \in (\varphi(b) \cap (\varphi(a)^c \cap X^*]]$, i.e., existe $y \in \varphi(b) \cap (\varphi(a)^c \cap X^*]$ tal que $x \leq y$. Por lo tanto, $y \in \varphi(b)$ y existe $z \in \varphi(a)^c \cap X^*$ tal que $y \leq z$. Como $\varphi(b)$ es un subconjunto creciente de $X(A)$, tenemos que $z \in \varphi(b)$. Por lo tanto, existe $z \in \varphi(b) \cap \varphi(a)^c \cap X^*$ tal que $x \leq z$, esto es, $x \in (\varphi(a)^c \cap \varphi(b) \cap X^*]$. La otra inclusión es inmediata pues $\varphi(a)^c \cap X^* \subseteq (\varphi(a)^c \cap X^*]$. Luego, por (4.3) resulta

$$\begin{aligned}\mathrm{sat}_{X^*}(U \cap V^c) &= (\varphi(b) \cap (\varphi(a)^c \cap X^*]] \cap X^* = (\varphi(b) \cap \varphi(\Box a)^c] \cap X^* \\ &= (\varphi(b) \Rightarrow \varphi(\Box a))^c \cap X^* = (\varphi(b \to \Box a))^c \cap X^* \in (\mathcal{K}_A)_{X^*}.\end{aligned}$$

3. Por Lema 4.6.6, $A_\Box$ es subálgebra de Hilbert de A y por lo tanto, $\left\langle X(A_\Box), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{A_\Box}}\right\rangle$ es su dual H-espacio. Sea $f : X^* \to X(A_\Box)$ tal que

$$f(x) = \langle x \cap A_\Box\rangle_{A_\Box}.$$

Por Lema 4.6.11, f está bien definida y es inmediato que f es una función que preserva el orden. Sea $g : X(A_\Box) \to X^*$ tal que

$$g(x) = \Box^{-1}(x).$$

Por item 3 del Lema 4.6.10, $g(x) \in X^*$, y por lo tanto, g está bien definida. Notemos que si $x, y \in X(A_\Box)$ tales que $x \subseteq y$ implica $\Box^{-1}(x) \subseteq \Box^{-1}(y)$. Luego, g es una función que preserva el orden.

Más aún, $g \circ f = \mathrm{id}_{X^*}$ y $f \circ g = \mathrm{id}_{X(A_\Box)}$. En efecto. Sea $a \in A$ y $x \in X^*$. Si $a \in g(f(x))$ entonces $\Box a \in f(x) = \langle x \cap A_\Box\rangle_{A_\Box}$. Por lo tanto, existe $f \in x \cap A_\Box$ tal que $f \to \Box a = 1 \in x$. Por Modus Ponens, $\Box a \in x$, i.e., $a \in \Box^{-1}(x) = x$. Luego, $(g \circ f)(x) \subseteq x$. Sea $a \in x = \Box^{-1}(x)$. Por lo tanto, $\Box a \in x \cap A_\Box \subseteq \langle x \cap A_\Box\rangle_{A_\Box}$. Luego, $a \in g(f(x))$. Queda probado que $(g \circ f)(x) = x$, para toda $x \in X^*$.

Sea $a \in A_\Box$ y $x \in X(A_\Box)$. Por lo tanto, $a \in f(g(x))$ si y sólo si $a \in \langle\Box^{-1}(x) \cap A_\Box\rangle_{A_\Box} = x$, por lo probado en el Teorema 4.6.8.

Consideremos el homomorfismo definido en la subálgebra de Hilbert $A_\Box$,

$$\varphi_\Box : A_\Box \to \mathcal{P}_\subseteq(X(A_\Box)) \text{ tal que } \varphi_\Box(a) = \{x \in X(A_\Box) : a \in x\}.$$

Para probar que f es continua, mostramos primero que

$$f^{-1}\left(\varphi_\Box(\Box a)^c\right) = \varphi(a)^c \cap X^*$$

para cada $a \in A$. Sea $x \in X^*$ y $a \in A$. Si $x \in f^{-1}\left(\varphi_\Box(\Box a)^c\right)$ entonces $f(x) \notin \varphi_\Box(\Box a)$. Esto es, $\Box a \notin \langle x \cap A_\Box \rangle_{A_\Box}$. Como $x \cap A_\Box \subseteq \langle x \cap A_\Box \rangle_{A_\Box}$, $\Box a \notin x \cap A_\Box$ y consecuentemente, $a \notin x = \Box^{-1}(x)$. Por ende, $x \in \varphi(a)^c \cap X^*$. Luego, $f^{-1}\left(\varphi_\Box(\Box a)^c\right) \subseteq \varphi(a)^c \cap X^*$. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $\varphi(a)^c \cap X^* \nsubseteq f^{-1}\left(\varphi_\Box(\Box a)^c\right)$. Por lo tanto, existe $x \in \varphi(a)^c \cap X^*$ tal que $x \notin f^{-1}\left(\varphi_\Box(\Box a)^c\right)$. Entonces, $a \notin x = \Box^{-1}(x)$ y $f(x) \in \varphi_\Box(\Box a)$. Por lo tanto, $\Box a \in \langle x \cap A_\Box \rangle_{A_\Box}$. Existe $f \in x \cap A_\Box$ tal que $f \to \Box a = 1 \in x$. Por Modus Ponens, $\Box a \in x$, i.e., $a \in \Box^{-1}(x)$, lo cual es imposible. Luego, $f^{-1}\left(\varphi_\Box(\Box a)^c\right) = \varphi(a)^c \cap X^*$ para cada $a \in A$.

Sea U un subconjunto abierto de $\left\langle X(A_\Box), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{A_\Box}} \right\rangle$. Por lo tanto, existe $B \subseteq A$ tal que $U = \bigcup\{\varphi_\Box(\Box b)^c : b \in B\}$. Por consiguiente,

$$f^{-1}(U) = \bigcup\left\{f^{-1}\left(\varphi_\Box(\Box b)^c\right) : b \in B\right\} = \bigcup\{\varphi(b)^c \cap X^* : b \in B\},$$

es un subconjunto abierto de $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*} \rangle$. Luego, f es continua.

Finalmente, probaremos la continuidad de g. Para ello demostremos que $g^{-1}\left(\varphi(a) \cap X^*\right) = \varphi_\Box(\Box a)$ para todo $a \in A$. Sea $x \in X(A_\Box)$ y $a \in A$:

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}\left(\varphi(a) \cap X^*\right) &\iff g(x) = \Box^{-1}(x) \in \varphi(a) \cap X^* \\ &\iff \Box a \in x \qquad \iff \quad x \in \varphi_\Box(\Box a). \end{aligned}$$

Sea V un subconjunto cerrado de $\langle X^*, \mathcal{T}_{X^*} \rangle$. Por lo tanto, existe $C \subseteq A$ tal que $V = \bigcap\{\varphi(c) \cap X^* : c \in C\}$. Por lo tanto,

$$g^{-1}(V) = \bigcap\left\{g^{-1}\left(\varphi(c) \cap X^*\right) : c \in C\right\} = \bigcap\{\varphi_\Box(\Box c) : c \in C\},$$

es un subconjunto cerrado de $\left\langle X(A_\Box), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{A_\Box}} \right\rangle$. Luego, g es continua. ∎

4.6.3. Submarcos

A continuación, definimos el concepto de H-funciones parciales que volveremos a utilizar en el Capítulo 5.

Definición 4.6.19. Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ H-espacios. Sea $f : X_1 \to X_2$ una función parcial y sea $dom(f)$ el dominio de f. Diremos que f es una *H-función parcial* si satisface las siguientes condiciones:

1. $f([x)) = [f(x))$ en X_2 para todo $x \in dom(f)$,

2. $x \in dom(f)$ si y sólo si existe $y \in X_2$ tal que $f([x)) = [y)$,
3. Si $U \in \mathcal{K}_2$, entonces $(f^{-1}(U)] \in \mathcal{K}_1$.

La definición anterior nos permite introducir la noción de submarco de un espacio de Hilbert, generalizando lo realizado por G. Berzhanishvili y S. Ghilardi en [4], donde prueban que ciertas relaciones binarias definidas en espacios de Heyting están en correspondencia con los submarcos definidos sobre espacios de Heyting.

Definición 4.6.20. Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un H-espacio y $S \subseteq X$. Diremos que S es un *submarco* de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ si:

1. S es un $\mathcal{K}$-subconjunto de X,
2. la función identidad $id : X \to S$ es una H-función parcial.

Denotamos con $\mathrm{SM}(X)$ al conjunto de todos los submarcos del H-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$. El siguiente resultado da una caracterización para submarcos definidos en H-espacios.

Lema 4.6.21. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un H-espacio y sea S un subconjunto de X. Entonces, S es un submarco de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ si y sólo si S es un $\mathcal{K}$-subconjunto de X y $(U] \in \mathcal{K}$ para todo $U \in \mathcal{K}_S$, donde $\mathcal{K}_S = \{V \cap S : V \in \mathcal{K}\}$.*

Demostración. Sea $S \subseteq X$. Consideremos el subespacio $\langle S, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_S}\rangle$ de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$. Asumamos que $S \in \mathrm{SM}(X)$. Por lo tanto, S es un $\mathcal{K}$-subconjunto de X. Como la función identidad id es una H-función parcial tenemos que $(id^{-1}(U)] \in \mathcal{K}$ para cada $U \in \mathcal{K}_S$. Si $U \in \mathcal{K}_S$ entonces existe $V \in \mathcal{K}$ tal que $U = V \cap S \subseteq S$. Como $dom(id) = S$ y $U \subseteq S$, resulta que $id^{-1}(U) = U$ y consecuentemente, $(U] = (id^{-1}(U)] \in \mathcal{K}$.

Para probar la recíproca sólo nos resta probar que la función identidad $id : X \to S$ es una H-función parcial. Sea $x \in dom(id) = S$. Es claro que $id([x)) = [x) = [id(x))$ en S. El item 2 de la Definición 4.6.19 es inmediato. Finalmente, sea $U \in \mathcal{K}_S$. Por lo tanto, $U \subseteq S$ y consecuentemente, $(id^{-1}(U)] = (U] \in \mathcal{K}$. ■

Ahora estamos en condiciones de mostrar la correspondencia 1-1 que existe entre los submarcos de un H-espacio y las relaciones binarias definidas sobre él de manera que convierten a dicho H-espacio en un espacio de Hilbert Lax.

Lema 4.6.22. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un H-espacio. Existe una correspondencia 1-1 entre los submarcos de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ y las relaciones binarias $Q \subseteq X \times X$ donde $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ es un espacio de Hilbert Lax.*

Demostración. Supongamos que S es un submarco de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$. Definimos la relación binaria Q_S sobre X de la siguiente manera:

$$(x, y) \in Q_S \iff (\exists s \in S)(x \leq s \leq y).$$

Probemos que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q_S\rangle$ es un espacio de Hilbert Lax. Notemos que

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in Q_S & \iff & (\exists s \in S)\,(x \leq s \leq y) \quad \iff \quad (\exists s \in S)\,(s \in [x) \& \; s \leq y) \\ & \iff & (\exists s \in S \cap [x))\,(s \leq y) \quad \iff \quad y \in [S \cap [x)). \end{array}$$

Como $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ es sober, $Q_S(x) = [S \cap [x)) = \mathrm{cl}(S \cap [x))$, i.e, $Q_S(x)$ es un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ para cada $x \in X$. Ahora demostremos que $Q_S^{-1}(U) \in \mathcal{K}$ para cada $U \in \mathcal{K}$. Sea $U \in \mathcal{K}$. Entonces U es un subconjunto decreciente de X y consecuentemente, tenemos que $Q_S^{-1}(U) = (S \cap U]$. En efecto.

$$\begin{array}{rcl} x \in Q_S^{-1}(U) & \iff & (\exists y \in U)((x,y) \in Q_S) \\ & \iff & (\exists y \in U)(\exists s \in S)(x \leq s \leq y) \\ & \iff & (\exists s \in S \cap (U])(x \leq s) \\ & \iff & x \in (S \cap U]. \end{array}$$

Como $S \cap U \in \mathcal{K}_S$, resulta que $Q_S^{-1}(U) = (S \cap U] = (id^{-1}(S \cap U)] \in \mathcal{K}$ para cada $U \in \mathcal{K}$. Por lo tanto, $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q_S\rangle$ es un $H\Box$-espacio. Supongamos que $(x, y) \in Q_S$. Esto es, existe $s \in S$ tal que $x \leq s \leq y$, i.e., $x \leq y$. Es claro que $(s, s) \in Q_S$ para todo $s \in S$. Por lo tanto,

$$(x,y) \in Q_S \iff \exists s \in S\,((s,s) \in Q_S \;\&\; x \leq s \leq y).$$

Por Proposición 4.6.14, $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q_S\rangle$ es un espacio de Hilbert Lax.

Para probar la recíproca, asumamos que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ es un espacio de Hilbert Lax. Consideremos el subconjunto $S_Q = \{x \in X : (x, x) \in Q\}$ de X y equipamos a S_Q con la topología relativa. Usando la Observación 4.6.9 y la Proposición 4.6.18, S_Q es un $\mathcal{K}$-subconjunto de X. Sea $U \in \mathcal{K}_{S_Q}$. Por lo tanto, existe $V \in \mathcal{K}$ tal que $U = V \cap S_Q$. Como $V = (V]$, tenemos que $(U] = ((V] \cap S_Q]$. Notemos que

$$\begin{array}{rcl} x \in ((V] \cap S_Q] & \iff & (\exists y \in (V] \cap S_Q)(x \leq y) \\ & \iff & (\exists z \in V)(\exists y \in X)(yQy \;\&\; x \leq y \leq z) \\ & \iff & (\exists z \in V)(xQz) \\ & \iff & x \in Q^{-1}(V). \end{array}$$

Por lo tanto, $(U] = Q^{-1}(V) \in \mathcal{K}$ para todo $U \in \mathcal{K}_{S_Q}$. Por Lema 4.6.21, S_Q es un submarco del H-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$.

Finalmente, para todo $x, y \in X$:

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in Q_{S_Q} & \iff & (\exists s \in S_Q)(x \leq s \leq y) \\ & \iff & (\exists s \in X)(x \leq s \;\&\; (s,s) \in Q \;\&\; s \leq y) \\ & \iff & (x,y) \in Q. \end{array}$$

Esto es, $Q_{S_Q} = Q$. Más aún,

$$\begin{array}{llllll} x \in S_{Q_S} & \iff & (x,x) \in Q_S & \iff & (\exists s \in S)(x \leq s \leq x) \\ & \iff & (\exists s \in S)(x = s) & \iff & x \in S. \end{array}$$

Luego, $S_{Q_S} = S$, lo cual completa la demostración. ■

Definición 4.6.23. Sea $\mathbb{V}$ una variedad de álgebras de Hilbert. Diremos que $\mathbb{V}$ es *nuclear* si cuando $A \in \mathbb{V}$ y $\Box$ es un núcleo definido sobre A, entonces $A_\Box \in \mathbb{V}$.

Por ejemplo, la variedad de álgebras de Hilbert Lax es nuclear.

Definición 4.6.24. Sea $\mathbb{V}$ una variedad de álgebras de Hilbert. Diremos que $\mathbb{V}$ es *variedad submarco* si $A \in \mathbb{V}$ y S es submarco del H-espacio dual $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$, entonces $D(S) \in \mathbb{V}$.

Teorema 4.6.25. *Sea $\mathbb{V}$ una variedad de álgebras de Hilbert. Entonces, $\mathbb{V}$ es variedad submarco si y sólo si $\mathbb{V}$ es variedad nuclear.*

Demostración. Sea $\langle A, \Box\rangle \in \mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box$ y $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, Q_A\rangle$ su correspondiente espacio de Hilbert Lax dual. Sea $\left\langle X(A_\Box), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{A_\Box}}\right\rangle$ el H-espacio dual del álgebra de Hilbert $A_\Box$. Para $Q \subseteq X^2$ tal que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, Q\rangle$ es un espacio de Hilbert Lax, sea $\Box_Q$ el operador modal correspondiente de $D(X)$. Usando la dualidad existente entre las categorías $\mathcal{L}\mathrm{Hil}_\Box$ y $\mathcal{L}\mathcal{M}_\Box\mathcal{S}\mathcal{R}$, la Proposición 4.6.18 y el Lema 4.6.22, obtenemos que:

$\mathbb{V}$ es variedad submarco $\iff$ para cada $A \in \mathbb{V}$ y cada submarco S de $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$, tenemos que $D(S) \in \mathbb{V}$ $\iff$ para cada $A \in \mathbb{V}$ y para cada $Q_A \subseteq X(A)^2$ tal que $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, Q_A\rangle$ es un espacio de Hilbert Lax, resulta $D(X(A))_{\Box_{Q_A}} \in \mathbb{V}$ $\iff$ para cada $A \in \mathbb{V}$ y cada núcleo $\Box$ definido sobre A, $A_\Box \in \mathbb{V}$ $\iff$ $\mathbb{V}$ es variedad nuclear. ■

Capítulo 5

Álgebras de Hilbert con Supremo

Trabajamos en este capítulo con álgebras de Hilbert donde que resultan supremo-semiretículos con el orden asociado, a las cuales llamamos álgebras de Hilbert con supremo, o $H^{\vee}$-álgebras para abreviar. Esta clase de álgebras es una clase particular de ciertas BCK-álgebras con operaciones de retículo estudiadas por P. M. Idziak en [41]. Nuestro principal logro en este capítulo consiste en extender la dualidad encontrada para álgebras de Hilbert en el Capítulo 3 con el objeto de encontrar una representación y dualidad para las $H^{\vee}$-álgebras. Además, mostramos que el conjunto ordenado de todos los ideales de un álgebra de Hilbert con supremo tiene estructura de retículo, en el cual es posible definir una implicación, sin resultar ser, la estructura, ni un álgebra de Heyting ni un semiretículo implicativo. Por último, damos una caracterización del retículo formado por todos los ideales de un álgebra de Hilbert con supremo. Lo expuesto en este capítulo se encuentra publicado en la revista Algebra Universalis (ver [22]).

5.1. Conceptos preliminares

Definición 5.1.1. Un álgebra $\langle A, \rightarrow, \vee, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 0)$ es un *álgebra de Hilbert con supremo*, o $H^{\vee}$*-álgebra* para abreviar, si

1. $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert.
2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un $\vee$-semiretículo con último elemento 1.
3. Para todo $a, b \in A$, $a \rightarrow b = 1$ si y sólo si $a \vee b = b$.

Denotamos con $\mathrm{Hil}\mathcal{S}^{\vee}$ la categoría cuyos objetos son $H^{\vee}$-álgebras y cuyos morfismos son semi-homomorfismos que preservan la operación $\vee$.

Ejemplos 5.1.2. 1. Recordemos que un álgebra de Tarski es un álgebra de Hilbert $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ tal que $(a \rightarrow b) \rightarrow b = (b \rightarrow a) \rightarrow a$ para todo $a, b \in A$. Es conocido que A es un $\vee$-semiretículo bajo la operación $\vee$ definida por $a \vee b = (a \to b) \to b$. Luego, A es un álgebra de Hilbert con supremo.

2. En todo $\vee$-semiretículo $\langle A, \vee, 1\rangle$ con último elemento 1 es posible definir una estructura de álgebra de Hilbert con supremo considerando la implicación $\to$ inducida por el orden.

3. El retículo Booleano con dos átomos $B_2 = \{0, a, b, 1\}$ con la implicación $\to$ inducida por el orden es un álgebra de Hilbert donde el supremo existe para cualquier par de elementos, pero no es un álgebra de Heyting.

La clase de $H^{\vee}$-álgebras es una variedad, a la cual denotamos con $\mathrm{Hil}^{\vee}$. Un $H_0^{\vee}$-*álgebra* es un $H^{\vee}$-álgebra acotada. Indicamos con $\mathrm{Hil}_0^{\vee}$ a la variedad formada por $H_0^{\vee}$-álgebras. El hecho de que la clase de $H^{\vee}$-álgebras es una variedad resulta por lo demostrado en [41] por P. M. Idziak para BCK-álgebras con operaciones de retículo. A continuación escribimos la demostración.

Teorema 5.1.3. *Consideremos un álgebra* $\langle A, \to, \vee, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 0)$. *Entonces,* $\langle A, \to, \vee, 1\rangle$ *es un* $H^{\vee}$*-álgebra si y sólo si*

1. $\langle A, \to, 1\rangle$ *es un álgebra de Hilbert,*
2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ *es un* $\vee$*-semiretículo con último elemento* 1*,*
3. A *satisface las siguientes ecuaciones:*

   (a) $a \to (a \vee b) = 1$,

   (b) $(a \to b) \to ((a \vee b) \to b) = 1$.

Demostración. $\Longrightarrow$) Como $a \vee (a \vee b) = a \vee b$ entonces tenemos que $a \to (a \vee b) = 1$. Por otro lado, recordemos que para todo $a, b \in A$, $a \leq (a \to b) \to b$, y $b \leq (a \to b) \to b$. Entonces,

$$a \vee (a \to b) \to b \quad = \quad (a \to b) \to b$$

y

$$b \vee (a \to b) \to b \quad = \quad (a \to b) \to b.$$

Por lo tanto, $(a \vee b) \vee ((a \to b) \to b) = (a \to b) \to b$, es decir, $a \vee b \leq (a \to b) \to b$. Esto es, $1 = (a \vee b) \to ((a \to b) \to b) = (a \to b) \to ((a \vee b) \to b)$.

$\Longleftarrow$) Sólo resta probar que $a \to b = 1$ es equivalente a $a \vee b = b$, para todo $a, b \in A$. Supongamos que $a \to b = 1$. Entonces,

$$1 = (a \to b) \to ((a \vee b) \to b) = 1 \to ((a \vee b) \to b).$$

Por lo tanto, $(a \vee b) \to b = 1$. Como además $b \to (a \vee b) = 1$, tenemos que $a \vee b = b$. Asumamos que $a \vee b = b$. Luego, $1 = a \to (a \vee b) = a \to b$. ■

Sea $A \in \mathrm{Hil}^{\vee}$. Un hecho bien conocido es que si a, b son elementos de una BCK-álgebra tales que $a \vee b$ existe, entonces para cada elemento $c \in A$ se tiene que $(a \to c) \wedge (b \to c)$ existe y $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$. Esto permite probar el siguiente resultado dado en [17].

Lema 5.1.4. *Sea* $A \in \mathrm{Hil}^{\vee}$. *Sea* $D \in \mathrm{Ds}(A)$. *Para todo* $a, b, c \in A$, *si* $a \to b \in D$ *entonces* $(a \vee c) \to (b \vee c) \in D$.

Demostración. Asumamos que $a \to b \in D$. Como $a \to b \leq a \to (b \vee c) \in D$, resulta

$$\begin{aligned} (a \vee c) \to (b \vee c) &= (a \to (b \vee c)) \wedge (c \to (b \vee c)) \\ &= (a \to (b \vee c)) \wedge 1 = a \to (b \vee c) \in D. \end{aligned}$$

■

Consecuentemente, este Lema permite demostrar que las congruencias definidas sobre un álgebra de Hilbert con supremo $\langle A, \to, \vee, 1\rangle$ son las mismas congruencias del álgebra de Hilbert $\langle A, \to, 1\rangle$. Denotamos con $\mathrm{Con}\,(A, \to, \vee)$ al conjunto de las congruencias de un $H^{\vee}$-álgebra A.

Teorema 5.1.5. *Sea* $A \in \mathrm{Hil}^{\vee}$. *Entonces,* $\mathrm{Con}\,(A, \to, \vee) = \mathrm{Con}\,(A, \to\,)$.

Demostración. Es claro que $\mathrm{Con}\,(A, \to, \vee) \subseteq \mathrm{Con}\,(A, \to\,)$. Sea $\theta \in \mathrm{Con}\,(A, \to\,)$ y sean $a, b \in A$ tales que $(a, b) \in \theta$. Entonces, $a \to b, b \to a \in 1_{\theta}$. Por Lema 5.1.4, $(a \vee c) \to (b \vee c), (b \vee c) \to (a \vee c) \in 1_{\theta}$, para cualquier $c \in A$. Por ende, $(a \vee c, b \vee c) \in \theta$. Luego, $\mathrm{Con}\,(A, \to\,) \subseteq \mathrm{Con}\,(A, \to, \vee)$. ■

5.2. Representación y dualidad de $H^{\vee}$-álgebras

En esta sección definimos el espacio dual de un $H^{\vee}$-álgebra como un H-espacio con una condición adicional. Generalizando lo realizado en el Capítulo 3 para las álgebras de Hilbert, daremos primero un teorema de representación para $H^{\vee}$-álgebras y luego desarrollaremos la dualidad topológica.

Sea $A \in \mathrm{Hil}^{\vee}$ y sea $D \in \mathrm{Ds}(A)$. Diremos que D es *primo* si y sólo si $D \neq A$ y para todo $a, b \in A$ tal que $a \vee b \in D$ resulta que $a \in D$ o $b \in D$. Como consecuencia inmediata del Teorema 2.2.7 resulta que un sistema deductivo es irreducible si y sólo si es primo.

Lema 5.2.1. *Sea* $A \in \mathrm{Hil}^{\vee}$. *La función* $\varphi : A \to \mathcal{P}_{\subseteq}(X(A))$ *definida por* $\varphi(a) = \{x \in X(A) \mid a \in x\}$ *es un homomorfismo inyectivo definido entre* $H^{\vee}$*-álgebras.*

Demostración. Sabemos por Teorema 2.4.1 que φ es un homomorfismo inyectivo de H-álgebras. Sean $a, b \in A$. Necesitamos probar que $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$. Sea $x \in X(A)$. Supongamos que $x \in \varphi(a \vee b)$. Esto es, $a \vee b \in x$. Como x es primo, $a \in x$ o $b \in x$. Por lo tanto, $x \in \varphi(a) \cup \varphi(b)$. Ahora supongamos que $x \in \varphi(a)$ o $x \in \varphi(b)$. Entonces, $a \in x$ o $b \in x$. Como $a \leq a \vee b, b \leq a \vee b$ y x es un subconjunto creciente de A, tenemos que $a \vee b \in x$. Luego, $x \in \varphi(a \vee b)$. ■

A continuación, definimos los espacios duales correspondientes a un $H^{\vee}$-álgebra.

Definición 5.2.2. Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un H-espacio. Diremos que $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un $H^{\vee}$*-espacio* si $U \cap V \in \mathcal{K}$ para todo $U, V \in \mathcal{K}$.

De la definición de $H^{\vee}$-espacio, es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 5.2.3. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un $H^{\vee}$-espacio. Entonces, $D(X) = \langle D(X), \Rightarrow, \cup, X \rangle$ es un álgebra de Hilbert con supremo.*

A continuación caracterizamos a los $H^{\vee}$-espacios. Primero observemos que si $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un espacio topológico con una base $\mathcal{K}$ formada por subconjuntos abiertos y compactos, entonces podemos definir sobre el conjunto X otra topología, ésta es $\mathcal{T}_{D(X)}$ y lo logramos tomando la familia $D(X) = \{U \mid U^c \in \mathcal{K}\}$ como subbase. Denotamos a este espacio topológico con $\left\langle X, \mathcal{T}_{D(X)} \right\rangle$.

Proposición 5.2.4. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un espacio topológico con una base $\mathcal{K}$ de subconjuntos abiertos y compactos para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ tal que $U \cap V \in \mathcal{K}$, para todo $U, V \in \mathcal{K}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todo subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un subconjunto compacto del espacio topológico $\left\langle X, \mathcal{T}_{D(X)} \right\rangle$.*
2. *Si Y es un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ y $L \subseteq \mathcal{K}$ es un conjunto dualmente directo tal que $Y \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in L$, entonces $\bigcap \{U \mid U \in L\} \cap Y \neq \emptyset$.*

Demostración. *1.* $\Longrightarrow$ *2.* Sea Y un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ y sea L un subconjunto dualmente directo de $\mathcal{K}$ tal que $Y \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in L$. Por lo asumido Y resulta ser un subconjunto compacto en $\left\langle X, \mathcal{T}_{D(X)} \right\rangle$. Necesitamos probar que $Y \cap \bigcap \{U \mid U \in L\} \neq \emptyset$. Por el contrario, supongamos que $Y \subseteq \bigcup \{U^c \mid U \in L\}$. Como los conjuntos U^c son subconjuntos abiertos del espacio topológico $\left\langle X, \mathcal{T}_{D(X)} \right\rangle$ y además Y es compacto en este espacio, existe un conjunto finito $\{U_1, ..., U_n\} \subseteq L$ tal que $Y \subseteq U_1^c \cup ... \cup U_n^c$. Como L es un subconjunto dualmente directo de $\mathcal{K}$, existe $U \in L$ tal que $U \subseteq U_1 \cap ... \cap U_n$. Luego, $Y \cap U = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

2. $\Longrightarrow$ *1.* Sea Y un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$. Sea $J = \{U_i \mid i \in I\} \subseteq D(X)$ tal que $Y \subseteq \bigcup \{U_i \mid i \in I\}$. Consideremos la familia $\tilde{J}$ formada por conjuntos $V \subseteq X$

tal que existe una subfamilia finita $\{U_1, ..., U_n\}$ de J tal que $V = U_1 \cup ... \cup U_n$. Es claro que $J \subseteq \tilde{J}$ y que $\left\{V^c \mid V \in \tilde{J}\right\}$ es un subconjunto dualmente directo de $\mathcal{K}$ pues $\mathcal{K}$ es cerrado bajo la intersección de conjuntos. Como $Y \cap \bigcap \left\{V^c \mid V \in \tilde{J}\right\} = \emptyset$, y como $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un H-espacio, por Teorema 3.1.6 podemos asegurar que existe $V = U_1 \cup ..., U_n \in \tilde{J}$ tal que $Y \cap V^c = \emptyset$, i.e., $Y \subseteq U_1 \cup ... \cup U_n$ para $U_1, ..., U_n \in D(X)$. Hemos probado entonces que Y es un subconjunto compacto del espacio $\left\langle X, \mathcal{T}_{D(X)} \right\rangle$.

A partir del resultado anterior obtenemos una manera alternativa de definir un $H^{\vee}$-espacio. ■

Corolario 5.2.5. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un espacio topológico con una base $\mathcal{K}$ de subconjuntos abiertos y compactos para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. Entonces, $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un $H^{\vee}$-espacio si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$U \cap V \in \mathcal{K}$, para todo $U, V \in \mathcal{K}$.*
2. *Para todo $U, V \in \mathcal{K}$, $\mathrm{sat}(U \cap V^c) \in \mathcal{K}$.*
3. *Todo subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un subconjunto compacto del espacio topológico $\left\langle X, \mathcal{T}_{D(X)} \right\rangle$.*

Demostración. Sigue inmediatamente de usar la Definición 5.2.2, el Teorema 3.1.6 y el Lema 5.2.4. ■

Mostramos a continuación un teorema de representación para las álgebras de Hilbert con supremo.

Teorema 5.2.6. *Sea A un $H^{\vee}$-álgebra. Entonces, $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$ es un $H^{\vee}$-espacio y la aplicación $\varphi : A \to D(X(A))$ es un isomorfismo de $H^{\vee}$-álgebras.*

Demostración. Por Teorema 3.2.2 tenemos que $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$ es un H-espacio. Del Lema 5.2.1 se sigue que $U \cap V \in \mathcal{K}_A$, para todo $U, V \in \mathcal{K}_A$. Luego, $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$ es un $H^{\vee}$-espacio y consecuentemente, por Proposición 5.2.3, podemos asegurar que $D(X(A)) = \langle D(X(A)), \Rightarrow, \cup, X(A) \rangle$ es un $H^{\vee}$-álgebra. ■

Proposición 5.2.7. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un $H^{\vee}$-espacio. Entonces la aplicación $\varepsilon_X : X \to X(D(X))$ es un homeomorfismo entre los espacios $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ y $\left\langle X(D(X)), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}} \right\rangle$.*

Demostración. Por Teorema 3.2.3, sabemos que la función ε_X es un homeomorfismo entre los H-espacios $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ y $\left\langle X(D(X)), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}} \right\rangle$. Por Proposición 5.2.3, si $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un $H^{\vee}$-espacio, entonces $D(X)$ es un $H^{\vee}$-álgebra, y por Lema 5.2.1 se sigue que

$\left\langle X\left(D\left(X\right)\right), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}}\right\rangle$ es un $H^{\vee}$-espacio. ■

Con el objeto de encontrar una dualidad total entre las categorías formadas por $H^{\vee}$-álgebras y $H^{\vee}$-espacios, investigamos los morfismos correspondientes.

Definición 5.2.8. Sean A, $B \in \mathrm{Hil}^{\vee}$. Llamamos $\vee$-*semi-homomorfismo* a todo semi-homomorfismo $h : A \to B$ que preserva el supremo, es decir, que satisface que $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$ para todo $a, b \in A$.

Similarmente, si h es un homomorfismo que preserva el supremo, lo llamamos $\vee$-*homomorfismo*.

Denotamos con $\mathrm{Hil}\mathcal{S}^{\vee}$ a la categoría compuesta por $H^{\vee}$-álgebras con $\vee$-semi-homomorfismos, y con $\mathrm{Hil}\mathcal{H}^{\vee}$ a la categoría de $H^{\vee}$-álgebras con $\vee$-homomorfismos.

Definición 5.2.9. Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ H-espacios. Consideremos la relación binaria $R \subseteq X_1 \times X_2$. Diremos que R es *irreducible* si, para cada $x \in X_1$, $R(x)$ es un subconjunto cerrado irreducible de $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ cuando $R(x) \neq \emptyset$.

Denotamos con $\mathcal{SR}^{\vee}$ a la categoría de $H^{\vee}$-espacios cuyos morfismos son las H-relaciones irreducibles, y con $\mathcal{SF}^{\vee}$, la categoría de $H^{\vee}$-espacios con H-relaciones funcionales irreducibles.

Teorema 5.2.10. *Sean $A, B \in \mathrm{Hil}^{\vee}$ y sea $h : A \to B$ un semi-homomorfismo de álgebras de Hilbert. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *h preserva la operación $\vee$,*
2. *la relación R_h es irreducible,*
3. *para todo $x \in X(B)$, $h^{-1}(x) \in X(A)$ o $h^{-1}(x) = A$.*

Demostración. *1.* $\Longrightarrow$ *2.* Sea $x \in X(B)$. Asumamos que $R_h(x) \neq \emptyset$. Por Teorema 3.3.7, $R_h(x)$ es un subconjunto cerrado de $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$. Sólo resta probar que $R_h(x)$ es un subconjunto irreducible de $X(A)$. Sean Z y W dos subconjuntos cerrados de $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$ tal que $R_h(x) \subseteq Z \cup W$. Supongamos que $R_h(x) \nsubseteq Z$ y $R_h(x) \nsubseteq W$. Por lo tanto, existen $z, w \in X(A)$ tales que $z \in R_h(x) - Z$ y $w \in R_h(x) - W$. Luego, existen $a, b \in A$ tales que $Z \subseteq \varphi(a)$ con $z \notin \varphi(a)$, y $W \subseteq \varphi(b)$ con $w \notin \varphi(b)$. Como $h^{-1}(x) \subseteq z, h^{-1}(x) \subseteq w$ y $\varphi(a), \varphi(b)$ son subconjuntos crecientes de $X(A)$, resulta que $a, b \notin h^{-1}(x)$. Como $R_h(x) \subseteq \varphi(a \vee b)$, resulta que $x \in h_{R_h}(\varphi(a \vee b))$. Por Lema 3.3.11, $h_{R_h}(\varphi(a \vee b)) = \varphi(h(a \vee b))$. Por lo tanto, $h(a \vee b) \in x$. Como x es primo, $h(a) \in x$ o $h(b) \in x$, i.e., $a \in h^{-1}(x)$ o $b \in h^{-1}(x)$, lo cual es una contradicción. Hemos probado entonces que $R_h(x)$ es irreducible.

2. $\Longrightarrow$ *3.* Sea $x \in X(B)$. Por Teorema 2.3.2, $h^{-1}(x) \in \mathrm{Ds}(A)$. Supongamos que $h^{-1}(x) \neq A$. Sea $a \vee b \in h^{-1}(x)$. Por lo tanto, para todo $y \in R_h(x)$ se satisface que $a \vee b \in y$, i.e., $y \in \varphi(a \vee b)$. Entonces, $R_h(x) \subseteq \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$, y como $R_h(x)$ es irreducible, deducimos que $R_h(x) \subseteq \varphi(a)$ o $R_h(x) \subseteq \varphi(b)$, i.e., $h(a) \in x$ o $h(b) \in x$. Luego, $h^{-1}(x) \in X(A)$.

3. $\Longrightarrow$ *1.* Para mostrar que h preserva la operación $\vee$, tomemos $a, b \in A$. Como h es monótono, $h(a) \vee h(b) \leq h(a \vee b)$. Supongamos que $h(a \vee b) \nleq h(a) \vee h(b)$. Por lo tanto, existe $x \in X(B)$ tal que $h(a \vee b) \in x$ y $h(a) \vee h(b) \notin x$. Por ende, $h^{-1}(x) \neq A$. Por otro lado, como x es un subconjunto creciente de A, $h(a) \notin x$ y $h(b) \notin x$. Esto es, $a, b \notin h^{-1}(x)$. Por lo asumido, $h^{-1}(x) \in X(A)$. Luego, $a \vee b \notin h^{-1}(x)$ y consecuentemente, $h(a \vee b) \notin x$, lo cual es una contradicción. ■

Corolario 5.2.11. *Sean $A, B \in \mathrm{Hil}^{\vee}$. Sea $h : A \to B$ un semi-homomorfismo de álgebras de Hilbert. Entonces, h es un $\vee$-homomorfismo si y sólo si R_h es una H-relación funcional irreducible.*

Demostración. Resulta de los Teoremas 3.3.7, 3.3.13 y 5.2.10. ■

Teorema 5.2.12. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H^{\vee}$-espacios. Sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una H-relación. Entonces, R es irreducible si y sólo si $h_R : D(X_2) \to D(X_1)$ preserva la operación $\cup$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Asumamos que R es una H-relación irreducible. Por Teorema 3.3.9 resulta que h_R es un semi-homomorfismo de álgebras de Hilbert. Probaremos que $h_R(U \cup V) = h_R(U) \cup h_R(V)$ para todo $U, V \in D(X_2)$. Sea $x \in X_1$ tal que $x \in h_R(U \cup V)$. Esto es, $R(x) \subseteq U \cup V$. Supongamos que $R(x) \neq \emptyset$. Como $R(x)$ es un subconjunto irreducible de X_2, $R(x) \subseteq U$ o $R(x) \subseteq V$. Por lo tanto, $x \in h_R(U) \cup h_R(V)$. La recíproca es inmediata. Luego queda demostrado que h_R preserva la operación $\cup$.

$\Longleftarrow$) Tomemos $x \in X_1$ de manera que $R(x) \neq \emptyset$. Probemos que $R(x)$ es irreducible. Sean Z y W dos subconjuntos cerrados de $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ tales que $R(x) \subseteq Z \cup W$ y supongamos que $R(x) \nsubseteq Z$ y $R(x) \nsubseteq W$. Por lo tanto, existen $z \in R(x) - Z$ y $w \in R(x) - W$. Luego, existen $U, V \in D(X_2)$ tales que $Z \subseteq U$, $W \subseteq V$, con $z \notin U$ y $w \notin V$. Esto implica que $R(x) \subseteq U \cup V$ y consecuentemente, $x \in h_R(U \cup V) = h_R(U) \cup h_R(V)$. Entonces, $R(x) \subseteq U$ o $R(x) \subseteq V$, lo cual es imposible pues $z, w \in R(x)$. ■

Corolario 5.2.13. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H^{\vee}$-espacios. Sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una H-relation. Entonces, $h_R : D(X_2) \to D(X_1)$ es un homomorfismo de $H^{\vee}$-álgebras si y sólo si R es una H-relación funcional irreducible.*

Demostración. Sigue de los Teoremas 3.3.7, 3.3.13 y 5.2.12. ■

De los resultados anteriores podemos concluir que las categorías $\mathcal{SR}^{\vee}$ y Hil$\mathcal{S}^{\vee}$ son dualmente equivalentes, como así también lo son las categorías $\mathcal{SF}^{\vee}$ y Hil$\mathcal{H}^{\vee}$.

5.3. H-funciones parciales

En esta sección mostramos que las H-relaciones funcionales irreducibles definidas entre $H^{\vee}$-espacios pueden ser caracterizadas por medio de funciones parciales especiales definidas entre $H^{\vee}$-espacios (ver Definición 4.6.19).

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}\rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ $H^{\vee}$-espacios y sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una H-relación funcional irreducible. Tomemos $x \in X_1$ tal que $R(x) \neq \emptyset$. Como $R(x)$ es un subconjunto cerrado irreducible de $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ y además, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ es un espacio topológico sober, existe un único $y \in X_2$ tal que $R(x) = \mathrm{cl}(y) = [y)$. Por lo tanto, podemos definir una función parcial

$$f_R : X_1 \to X_2$$

como sigue. Sea

$$dom(f_R) = \{x \in X_1 \mid R(x) \neq \emptyset\},$$

y para cada $x \in dom(f_R)$ definimos $f_R(x) = y$, i.e.,

$$f_R(x) = y \text{ si y sólo si } R(x) = \mathrm{cl}(y) = [y)\,.$$

Notemos que $R(x) = [f_R(x))$, para cada $x \in dom(f_R)$.

Lema 5.3.1. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}\rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}\rangle$ $H^{\vee}$-espacios y sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una H-relación funcional irreducible. Entonces, f_R es una H-función parcial.*

Demostración. Probemos las tres condiciones de la Definición 4.6.19:

1. Veamos que $[f_R(x)) = f_R([x))$ para cada $x \in dom(f_R)$. Sea $z \in [f_R(x)) = R(x)$. Como R es una H-relación funcional, existe $w \in X_1$ tal que $x \leq_1 w$ y $R(w) = [z)$. Por lo tanto, $w \in [x)$ y $f_R(w) = z$. Luego, $z \in f_R([x))$. Recíprocamente, sea $z \in f_R([x))$. Entonces existe $a \in [x)$ tal que $f_R(a) = z$. Esto es, $x \leq_1 a$ y $z \in \mathrm{cl}(z) = R(a)$. Por Teorema 3.3.4, $\leq_1 \circ R = R$, por lo tanto, $(x, z) \in R$. Luego, $z \in R(x) = [f_R(x))$.

2. Si $x \in dom(f_R)$ entonces $R(x) = [f_R(x)) = f_R([x)) \neq \emptyset$. Por lo tanto existe $y = f_R(x) \in X_2$ tal que $f_R([x)) = [y)$. La recíproca es inmediata.

3. Sea $V \in \mathcal{K}_2$. Veamos que $(f_R^{-1}(V)] \in \mathcal{K}_1$. Tomemos $x \in R^{-1}(V)$. Existe $w \in V$ tal que $w \in R(x) = [f_R(x))$. Como V es un subconjunto decreciente de X, $f_R(x) \in V$ y consecuentemente, $x \in f_R^{-1}(V)$. Luego, $x \in (f_R^{-1}(V)]$. Por lo tanto, $R^{-1}(V) \subseteq (f_R^{-1}(V)]$. Para probar la otra inclusión, tomemos $x \in (f_R^{-1}(V)]$. Entonces, $V \cap [f_R(x)) = V \cap R(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in R^{-1}(V)$. Como R es un H-relación, , $(f_R^{-1}(V)] = R^{-1}(V) \in \mathcal{K}_1$ para todo $V \in \mathcal{K}_2$.

■

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H^\vee$-espacios y sea $f : X_1 \to X_2$ una H-función parcial. Definimos la relación binaria $R_f \subseteq X_1 \times X_2$ de la siguiente manera:

$$R_f(x) = \begin{cases} [f(x)) & \text{si} \quad x \in dom(f), \\ \emptyset & \text{si} \quad x \notin dom(f), \end{cases}$$

para cada $x \in X_1$.

Lema 5.3.2. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H^\vee$-espacios y sea $f : X_1 \to X_2$ una H-función parcial. Entonces, R_f es una H-relación funcional irreducible.*

Demostración. Sea $x \in dom(f)$. Entonces $R_f(x) = [f(x)) = \mathrm{cl}(f(x))$ es un subconjunto cerrado de $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$. Si $x \notin dom(f)$, entonces $R_f(x) = \emptyset \in \mathcal{C}(X_2)$, para todo $x \in X_1$. Sea $U \in \mathcal{K}_2$. Veamos que $R_f^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$. Para ello probemos que $R_f^{-1}(U) = (f^{-1}(U)]$. Sea $x \in R_f^{-1}(U)$. Esto es, existe $w \in U$ tal que $w \in R_f(x)$, i.e., $f(x) \leq_2 w$. Como U es decreciente, $f(x) \in U$. Entonces, $x \in f^{-1}(U)$ y consecuentemente, $x \in (f^{-1}(U)]$. Para probar la otra inclución, tomemos $x \in (f^{-1}(U)]$. Entonces, $[x) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $[f(x)) \cap U = U \cap R_f(x) \neq \emptyset$, i.e., $x \in R_f^{-1}(U)$. Luego, por la tercer condición de la Definición 4.6.19, $R_f^{-1}(U) = (f^{-1}(U)] \in \mathcal{K}_1$ para todo $U \in \mathcal{K}_2$. Luego, R_f es una H-relación. Supongamos que $y \in R_f(x) = [f(x))$. Como f es una H-función parcial, $[f(x)) = f([x))$. Por lo tanto, existe $z \in [x)$ tal que $y = f(z)$. Esto es, $x \leq_1 z$ y $[y) = [f(z)) = R_f(z)$. Luego, R_f es una H-relación funcional.

Si $x \in dom(f)$, entonces $R_f(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto, para probar que R_f es una relación irreducible, sólo nos resta demostrar que $R_f(x)$ es un subconjunto irreducible de $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ para todo $x \in dom(f)$. Sean Z, W dos subconjuntos cerrados de $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ tales que $R_f(x) = [f(x)) \subseteq Z \cup W$. Por lo tanto, $f(x) \in Z$ o $f(x) \in W$. Como Z, W son subconjuntos crecientes de X_2, $[f(x)) \subseteq Z$ o $[f(x)) \subseteq W$. Esto es, $R_f(x) \subseteq Z$ o $R_f(x) \subseteq W$.

Hemos probado que R_f es una H-relación funcional irreducible. ■

Usando el Corolario 5.2.13 y los Lemas 5.3.1 y 5.3.2 queda probado el siguiente resultado.

Corolario 5.3.3. *Existe una equivalencia dual entre la categoría formada por $H^{\vee}$-álgebras y homomorfismos que preservan supremo y la categoría de $H^{\vee}$-espacios cuyos morfismos son H-funciones parciales.*

5.4. Ideales de $H^{\vee}$-álgebras

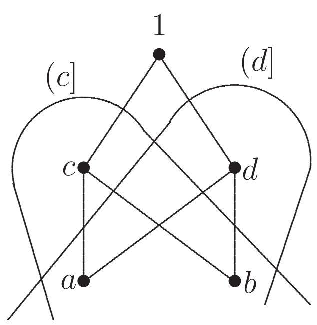
Recordemos que un ideal de orden de un álgebra de Hilbert A es un subconjunto decreciente I de A tal que para cada $a, b \in I$ existe $c \in I$ de manera que $a \leq c$ y $b \leq c$, e indicamos con $\mathrm{Id}(A)$ al conjunto de todos los ideales de orden de A (ver subsección 2.2.2). Ahora bien, si A es un $H^{\vee}$-álgebra, la noción usual de ideal definido en un $\vee$-semiretículo coincide con la noción de ideal de orden, como se establece en el siguiente resultado.

Lema 5.4.1. *Sea $\langle A, \rightarrow, \vee, 1\rangle$ un $H^{\vee}$-álgebra. Un subconjunto I de A es un ideal de $\langle A, \vee, 1\rangle$ si y sólo si I es un ideal de orden del álgebra de Hilbert $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$.*

Demostración. Asumamos que I es un ideal de $\langle A, \vee, 1\rangle$, por lo tanto I es decreciente y para cada $a, b \in A$ existe $a \vee b \in I$ tal que $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$. Luego, $I \in \mathrm{Id}(A)$. Recíprocamente. Sea I un subconjunto decreciente de A tal que para cada $a, b \in I$ existe $c \in I$ de tal que $a \leq c$ y $b \leq c$. Entonces, $a \vee b \leq c$ y consecuentemente, $a \vee b \in I$. ■

Sea $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ un álgebra de Hilbert. A diferencia del caso de los sistemas deductivos de $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$, la intersección no vacía de una familia de ideales de $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ puede no ser un ideal, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.4.1. La siguiente figura nos muestra un álgebra de Hilbert finita $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ donde $A = \{a, b, c, d, 1\}$ y la operación $\rightarrow$ es la implicación inducida por el orden. Los conjuntos $(c]$ y $(d]$ son claramente ideales sin embargo $(c] \cap (d] = \{a, b\}$ no es un ideal.



Este problema se soluciona al trabajar con álgebras de Hilbert con supremo. En efecto. Sea $A \in \mathrm{Hil}^{\vee}$ y sean $I, J \in \mathrm{Id}(A)$. Es claro que $I \cap J$ es un subconjunto decreciente de

A. Sean $a, b \in I \cap J$. Entonces $a, b \in I$ y $a, b \in J$. Luego, $a \vee b \in I$ y $a \vee b \in J$, por ende $a \vee b \in I \cap J$. Por Lema 5.4.1, $I \cap J \in \mathrm{Id}(A)$.

Sea A una $H^{\vee}$-álgebra. En $\mathrm{Id}(A)$ podemos definir las operaciones de retículo $\sqcap$ y $\sqcup$, y una implicación $\twoheadrightarrow$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl} I \sqcap J & = & I \cap J, \\ I \sqcup J & = & \{a \in A \mid \exists i \in I \, \exists j \in J \; (a \leq i \vee j)\}, \\ I \twoheadrightarrow J & = & \{a \in A \mid \forall i \in I \, \exists j \in J \, (a \leq i \to j)\}, \end{array}$$

para todo $I, J \in \mathrm{Id}(A)$.

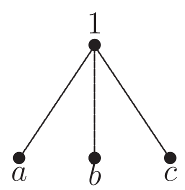
Si A es acotada, i.e., si existe $0 \in A$ tal que $0 \leq a$ para todo $a \in A$, podemos asegurar que el elemento 0 siempre pertenece a cualquier ideal. Entonces, $I \sqcap H \neq \emptyset$ para cualquiera $I, H \in \mathrm{Id}(A)$. Pero si A no es acotada, pueden existir ideales I y H tales que $I \sqcap H = \emptyset$. Por tal razón, para el caso de álgebras A no acotadas, consideramos al conjunto $\mathrm{Id}(A) \cup \{\emptyset\}$.

Usando resultados conocidos sobre $\vee$-semiretículos (ver [26]) obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.4.2. *Sea A un $H^{\vee}$-álgebra. Entonces, $\langle \mathrm{Id}(A) \cup \{\emptyset\}, \sqcap, \sqcup, A\rangle$ es un retículo.*

El siguiente ejemplo muestra que el retículo $\langle \mathrm{Id}(A) \cup \{\emptyset\}, \sqcap, \sqcup, A\rangle$ no es necesariamente distributivo.

Ejemplo 5.4.2. La siguiente figura muestra un álgebra de Hilbert con supremo finita cuyo universo es $A = \{a, b, c, 1\}$ y la operación $\to$ es la implicación inducida por el orden. Consideremos los siguientes ideales: $(a]$, $(b]$ y $(c]$. Entonces, $(a] \sqcap ((b] \sqcup (c]) = (a] \sqcap (1] = (a]$, pero $((a] \sqcap (b]) \sqcup ((a] \sqcap (c]) = \emptyset$.



Proposición 5.4.3. *Sea A un $H^{\vee}$-álgebra. Entonces,*

1. *$I \twoheadrightarrow J \in \mathrm{Id}(A)$ para todo $I, J \in \mathrm{Id}(A)$.*

2. *$I \twoheadrightarrow J = A$ si y sólo si $I \subseteq J$ para todo $I, J \in \mathrm{Id}(A)$.*

3. *$J \subseteq I \twoheadrightarrow J$ para todo $I, J \in \mathrm{Id}(A)$.*

4. *Si $I \twoheadrightarrow J = A$ y $J \twoheadrightarrow I = A$ entonces, $I = J$ para todo $I, J \in \mathrm{Id}(A)$.*

5. *Si $I \subseteq J \twoheadrightarrow Z$ entonces $I \cap J \subseteq Z$ para todo $I, J, Z \in \mathrm{Id}(A)$.*

Demostración.

1. Comencemos probando que $I \twoheadrightarrow J$ es un subconjunto decreciente de A. Sean $a, b \in A$ tales que $a \in I \twoheadrightarrow J$ y $b \leq a$. Como $a \in I \twoheadrightarrow J$ resulta que para todo $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $a \leq i \rightarrow j$. Por ende, $b \leq i \rightarrow j$ y consecuentemente, $b \in I \twoheadrightarrow J$. Ahora tomemos $a, b \in I \twoheadrightarrow J$. Por lo tanto, para todo $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $a \leq i \rightarrow j$ y para todo $i \in I$ existe $h \in J$ tal que $b \leq i \rightarrow h$. Como $J \in \mathrm{Id}(A)$ y $h, j \in J$, existe $t \in J$ tal que $h \leq t$ y $j \leq t$. Como $i \rightarrow h \leq i \rightarrow t$ y $i \rightarrow j \leq i \rightarrow t$ para todo $i \in I$, podemos concluir que $a \leq i \rightarrow t$ y $b \leq i \rightarrow t$. Luego, para todo $i \in I$ existe $t \in J$ tal que $a \vee b \leq i \rightarrow t$. Esto es, $a \vee b \in I \twoheadrightarrow J$ donde $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$. Hemos mostrado entonces que $I \twoheadrightarrow J \in \mathrm{Id}(A)$.

2. Si $I \twoheadrightarrow J = A$, entonces $x \in I \twoheadrightarrow J$ para todo $x \in A$. En particular, $1 \in I \twoheadrightarrow J$. Por lo tanto, para todo $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $1 \leq i \rightarrow j$. Luego, $i \rightarrow j = 1$. Esto es, $i \leq j$ para todo $i \in I$. Como J es un subconjunto decreciente de A, $i \in J$ para todo $i \in I$. Luego, $I \subseteq J$. Para probar la recíproca, asumamos que $I \subseteq J$ y supongamos que $I \twoheadrightarrow J \neq A$. Por lo tanto, existe $x \in A$ tal que $x \notin I \twoheadrightarrow J$. Esto es, existe $i_0 \in I$ tal que para toda $j \in J$ tenemos que $x \not\leq i_0 \rightarrow j$. Como $I \subseteq J$, obtenemos que $i_0 \in J$. Entonces, en particular, $x \not\leq i_0 \rightarrow i_0 = 1$, lo cual es una contradicción.

3. Para probar que $J \subseteq I \twoheadrightarrow J$, tomamos $j \in J$. Como $j \leq i \rightarrow j$ para todo $i \in I$, inmediatamente tenemos que $j \in I \twoheadrightarrow J$.

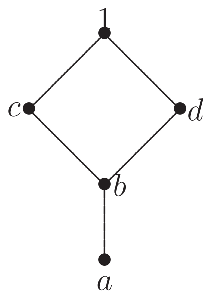
4. Sea $I \twoheadrightarrow J = A$ y $J \twoheadrightarrow I = A$. Aplicando 2. obtenemos que $I = J$.

5. Si $I \cap J = \emptyset$, la proposición es trivial. Supongamos que $I \cap J \neq \emptyset$. Sea $I \subseteq J \twoheadrightarrow Z$ y tomemos $x \in I \cap J$. Como $x \in I$, por lo asumido, $x \in J \twoheadrightarrow Z$. Por lo tanto, para toda $j \in J$ existe $z \in Z$ tal que $x \leq j \rightarrow z$. En particular, para $x \in J$ tenemos que $x \leq x \rightarrow z$ y consecuentemente, $1 = x \rightarrow (x \rightarrow z) = x \rightarrow z$. Es decir, $x \leq z$. Como Z es un subconjunto decreciente de A, $x \in Z$. Luego, $I \cap J \subseteq Z$.

■

Desafortunadamente, el conjunto de ideales de un $H^{\vee}$-álgebra con la implicación $\twoheadrightarrow$ no siempre es un álgebra de Hilbert como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.4.3. La siguiente figura muestra un $H^{\vee}$-álgebra finita cuyo universo es $A = \{a, b, c, d, 1\}$ y la operación $\rightarrow$ está definida en la siguiente tabla.



$\to$	a	b	c	d	1
a	1	1	1	1	1
b	b	1	1	1	1
c	b	d	1	d	1
d	b	c	c	1	1
1	a	b	c	d	1

Consideremos los ideales $I = (d], J = (b]$ y $Z = (a]$. Tenemos que
$I \twoheadrightarrow (J \twoheadrightarrow Z) = (d] \twoheadrightarrow ((b] \twoheadrightarrow (a]) = (d] \twoheadrightarrow (b] = (c]$, pero
$(I \twoheadrightarrow J) \twoheadrightarrow (I \twoheadrightarrow Z) = ((d] \twoheadrightarrow (b]) \twoheadrightarrow ((d] \twoheadrightarrow (a]) = (c] \twoheadrightarrow (b] = (d]$.

Observación 5.4.4. Sea A un $H^{\vee}$-álgebra. En general, $\langle \mathrm{Id}(A) \cup \{\emptyset\}, \twoheadrightarrow, \sqcap, A \rangle$ no es un semiretículo implicativo. Consideremos el retículo Booleano con dos átomos $A = \{0, a, b, 1\}$ y sea la operación $\to$ la implicación inducida por el orden. Considerando los siguientes ideales: $I = (a]$, $J = (b]$ y $Z = (0]$, tenemos que $I \cap J \subseteq Z$, pero $I \nsubseteq J \twoheadrightarrow Z$.

Teorema 5.4.5. *Sea A un $H^{\vee}$-álgebra. Entonces, la función $\eta : A \to \mathrm{Id}(A)$ definida por $\eta(a) = (a]$ para cada $a \in A$ es monótona y preserva las operaciones de supremo e implicación.*

Demostración. Para probar que η es monótona, tomemos $a, b \in A$ tales que $a \leq b$. Sea $c \in \eta(a) = (a]$, i.e., $c \leq a \leq b$. Luego, $c \in \eta(b)$. Por lo tanto, $\eta(a) \subseteq \eta(b)$. Ahora probaremos que $\eta(a \vee b) = \eta(a) \sqcup \eta(b)$, cualesquiera sean $a, b \in A$. Si $c \in \eta(a) \sqcup \eta(b)$, existe $i \leq a$ y existe $j \leq b$ tales que $c \leq i \vee j \leq a \vee b$. Por lo tanto, $c \in \eta(a \vee b)$. Para probar la otra inclusión, supongamos que existe $c \in A$ tal que $c \notin \eta(a) \sqcup \eta(b)$. Entonces, para todo $i \in \eta(a)$ y para todo $j \in \eta(b)$ tenemos que $c \nleq i \vee j$. En particular, para $i = a$ y $j = b$ resulta $c \nleq a \vee b$. Entonces $c \notin \eta(a \vee b)$. Por último, probaremos que $\eta(a \to b) = \eta(a) \twoheadrightarrow \eta(b)$, para todo $a, b \in A$. Sea $c \in \eta(a \to b)$, i.e., $c \leq a \to b$. Como $i \leq a$ para todo $i \in \eta(a)$, tenemos que $c \leq a \to b \leq i \to b$. Por lo tanto, $c \in \eta(a) \twoheadrightarrow \eta(b)$. Ahora, supongamos que $c \in \eta(a) \twoheadrightarrow \eta(b)$. Esto es, para todo $i \in \eta(a)$ existe $j \in \eta(b)$ tal que $c \leq i \to j$. En particular, para $i = a$, tenemos que $c \leq a \to j$. Como $j \leq b$, resulta $c \leq a \to j \leq a \to b$. Por lo tanto, $c \in \eta(a \to b)$. ■

5.5. Ideales y subconjuntos abiertos dirigidos

En esta sección mostramos como la dualidad desarrollada para las álgebras de Hilbert con supremo nos permite establecer una descripción dual de la noción de ideal.

Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un $H^{\vee}$-espacio. Consideremos $Y \subseteq X$, y sea $\mathcal{B} \subseteq D(X)$. Usaremos las siguientes notaciones:

$$\overline{\mathcal{B}} = \{X - U \mid U \in \mathcal{B}\} = \{U^c \mid U \in \mathcal{B}\} \text{ e } I(Y) = \{U \in D(X) \mid U \subseteq Y\}.$$

Observemos que $I(Y)$ es un ideal de $D(X)$. En efecto. Es claro que $I(Y)$ es un subconjunto decreciente de $D(X)$. Sean $U, V \in I(Y)$. Entonces, $U, V \in D(X)$ tales que $U \subseteq Y$ y $V \subseteq Y$. Por lo tanto, $U \cup V \subseteq Y$. Además, como $U^c, V^c \in \mathcal{K}$ y $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un $H^{\vee}$-espacio, resulta que $U^c \cap V^c \in \mathcal{K}$. Consecuentemente, $U \cup V \in D(X)$ con $U \cup V \subseteq Y$. Luego, $I(Y) \in \mathrm{Id}\,(D(X))$.

Recordemos que a partir de un H-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ podemos definir otro espacio topológico, $\left\langle X, \mathcal{T}_{D(X)} \right\rangle$, definido sobre X considerando el subconjunto $D(X) = \{U^c \mid U \in \mathcal{K}\}$ como sub-base de la topología $\mathcal{T}_{D(X)}$.

Definición 5.5.1. Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un $H^{\vee}$-espacio. Diremos que $Y \subseteq X$ es un *abierto dirigido* si y sólo si existe un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq D(X)$ tal que $Y = \bigcup \{U \mid U \in \mathcal{B}\} = \bigcup \mathcal{B}$.

Notaremos con $\mathrm{Od}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos abiertos dirigidos del $H^{\vee}$-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$.

Observaciones 5.5.2.

1. Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un $H^{\vee}$-espacio. Sea $Y \in \mathrm{Od}(X)$, y sea $\mathcal{B} \subseteq D(X)$ tal que $Y = \bigcup \{U \mid U \in \mathcal{B}\} = \bigcup \mathcal{B}$. Entonces, para todo $U \in \mathcal{B}$, tenemos que $U \subseteq \bigcup \mathcal{B} = Y$, i.e., $\mathcal{B} \subseteq I(Y)$. Como $Y = \bigcup \mathcal{B} \subseteq \bigcup I(Y) = \{U \in D(X) \mid U \subseteq Y\} \subseteq Y$, resulta que $Y = \bigcup I(Y)$. Podemos concluir que
$$Y \subseteq X \textit{ es un abierto dirigido} \iff Y = \bigcup I(Y).$$

2. Es claro que $\bigcup I(O) \subseteq O$ para cualquier subconjunto abierto O de $\left\langle X, \mathcal{T}_{D(X)} \right\rangle$. Sin embargo, no todo subconjunto abierto de $\left\langle X, \mathcal{T}_{D(X)} \right\rangle$ puede escribirse como $\bigcup I(O)$ pues $D(X)$ es solamente una sub-base de $\left\langle X, \mathcal{T}_{D(X)} \right\rangle$.

El siguiente resultado nos muestra que definiendo operaciones de ínfimo y supremo, y una implicación adecuadas en $\mathrm{Od}(X)$, obtenemos un retículo cerrado con respecto a la implicación definida.

Proposición 5.5.3. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un $H^{\vee}$-espacio. Entonces, $\mathrm{Od}(X)$ es cerrado bajo uniones de conjuntos y bajo las operaciones de ínfimo e implicación definidas de la siguiente manera:*

$$Y \barwedge Z = \bigcup I\,(Y \cap Z),$$
$$Y \rightarrowtail Z = \bigcup \{U \in D(X) \mid U \subseteq Y^c \cup Z\} = \bigcup I(Y^c \cup Z),$$

para cada $Y, Z \in \mathrm{Od}(X)$.

Demostración. Sean $Y, Z \in \mathrm{Od}(X)$. Usando la definición de subconjunto abierto dirigido, es inmediato que $Y \rightarrowtail Z$ y $Y \,\overline{\wedge}\, Z$ pertenecen a $\mathrm{Od}(X)$. Nos resta probar que $Y \cup Z \in \mathrm{Od}(X)$. Para ello, mostremos que $Y \cup Z = \bigcup I\,(Y \cup Z)$. Claramente, $\bigcup I\,(Y \cup Z) \subseteq Y \cup Z$. Como $Y \subseteq Y \cup Z$, tenemos que $I(Y) \subseteq I(Y \cup Z)$. Por lo tanto, $Y = \bigcup I(Y) \subseteq \bigcup I\,(Y \cup Z)$. Similarmente, $Z \subseteq \bigcup I\,(Y \cup Z)$. Luego, $Y \cup Z \subseteq \bigcup I\,(Y \cup Z)$, lo cual completa la demostración. ■

Teorema 5.5.4. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un $H^{\vee}$-espacio. Entonces, $\langle \mathrm{Od}(X), \overline{\wedge}, \cup, X\rangle$ es un retículo, y para todo $Y, Z \in \mathrm{Od}(X)$ se satisface:*

1. *$Y \subseteq Z$ si y sólo si $Y \rightarrowtail Z = X$.*

2. *$Z \subseteq Y \rightarrowtail Z$.*

3. *Si $Y \rightarrowtail Z = X$ y $Z \rightarrowtail Y = X$, entonces $Y = Z$.*

Demostración. Por Proposición anterior, tenemos que $\langle \mathrm{Od}(X), \overline{\wedge}, \cup, X\rangle$ es un retículo.

1. Si $Y \subseteq Z$, entonces $Y^c \cup Z = X$. Por lo tanto, $Y \rightarrowtail Z = \bigcup I(Y^c \cup Z) = \bigcup I(X) = X$. Ahora, asumamos que $Y \rightarrowtail Z = X$ y supongamos que $Y \nsubseteq Z$. Luego, existe $a \in Y$ tal que $a \notin Z$. Como $a \in X = Y \rightarrowtail Z$, existe $U \in D(X)$ tal que $a \in U$ y $U \subseteq Y^c \cup Z$. Por lo tanto, $a \in Y^c \cup Z$. Esto es, $a \in Y^c$ o bien $a \in Z$, ambas posibilidades imposibles. Hemos probado entonces que $Y \subseteq Z$.

2. Si $U \in D(X)$ tal que $U \subseteq Z$, entonces $U \subseteq Y^c \cup Z$. Consecuentemente, $\bigcup I(Z) \subseteq \bigcup I(Y^c \cup Z)$. Esto es, $Z \subseteq Y \rightarrowtail Z$.

3. Si $Y \rightarrowtail Z = X$ y $Z \rightarrowtail Y = X$, aplicando *1.* es inmediato que $Y = Z$.

■

Ahora estamos en condiciones de mostrar que el retículo de ideales de un álgebra de Hilbert con supremo es isomorfo al retículo formado por los subconjuntos abiertos dirigidos del espacio dual correspondiente.

Proposición 5.5.5. *Sea A un $H^{\vee}$-álgebra y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ su correspondiente $H^{\vee}$-espacio dual. Entonces, la aplicación $\beta : \mathrm{Id}(A) \to \mathrm{Od}(X)$ definida por*

$$\beta(I) = \{x \in X \mid x \cap I \neq \emptyset\},$$

para cada $I \in \mathrm{Id}(A)$, es un isomorfismo de retículos que preserva la implicación.

Demostración. Sea $I \in \mathrm{Id}(A)$ y sea $x \in X$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x \in \beta(I) &\iff x \cap I \neq \emptyset &&\iff \exists a \in A(a \in x \text{ y } a \in I) \\ &\iff \exists a \in A\,(x \in \varphi(a) \text{ y } a \in I) &&\iff x \in \bigcup\{\varphi(a) : a \in I\}. \end{aligned}$$

Luego, $\beta(I) = \bigcup\{\varphi(a) \mid a \in I\}$ y por lo tanto $\beta(I) \in \mathrm{Od}(X)$ para todo $I \in \mathrm{Id}(A)$. Lo cual demuestra que $\beta(I)$ está bien definida.

Probemos que $I \subseteq J$ si y sólo si $\beta(I) \subseteq \beta(J)$ para cada $I, J \in \mathrm{Id}(A)$. Asumamos que $I \subseteq J$ y sea $x \in \beta(I)$. Esto es, existe $a \in I$ y $a \in x$. Como $I \subseteq J$, $a \in J \cap x$ y consecuentemente, $x \in \beta(J)$. Ahora supongamos que existen $I, J \in \mathrm{Id}(A)$ tales que $I \nsubseteq J$. Esto es, existe $a \in I$ tal que $a \notin J$, i.e., $[a) \cap J = \emptyset$. Por lo tanto, existe $y \in X$ tal que $a \in y$ e $y \cap J = \emptyset$. Es decir, existe $y \in \beta(I)$ pero $y \notin \beta(J)$. Luego, $\beta(I) \nsubseteq \beta(J)$. Hemos probado entonces que β es un isomorfismo de orden y consecuentemente, β es inyectiva. Ésto nos permite concluir que β es un homomorfismo de retículo, i.e., $\beta(I \cap J) = \beta(I) \barwedge \beta(J)$ y $\beta(I \sqcup J) = \beta(I) \cup \beta(J)$, para todo $I, J \in \mathrm{Id}(A)$.

Para probar que β es sobreyectiva, tomemos $Y \in \mathrm{Od}(X)$. Esto es, existe $B \subseteq A$ tal que $Y = \bigcup\{\varphi(a) \mid a \in B\}$. Mostremos que existe $I \in \mathrm{Id}(A)$ tal que $\beta(I) = Y$. Consideremos el ideal generado por B, i.e.,

$$Ig(B) = \{c \in A \mid \exists\, \{b_1, ..., b_n\} \subseteq B\ (c \leq b_1 \vee ... \vee b_n)\}\,.$$

Probemos que $\beta(Ig(B)) = Y$. Sea $x \in \beta(Ig(B)) = \bigcup\{\varphi(b) \mid b \in Ig(B)\}$. Entonces existe $b \in Ig(B)$ tal que $x \in \varphi(b)$. Por lo tanto, existen $b_1, ..., b_n \in B$ tales que $b \leq b_1 \vee ... \vee b_n$ y $b \in x$. Luego, $b_1 \vee ... \vee b_n \in x$ y como $x \in X$, $b_i \in x$ para algún $b_i \in \{b_1, ..., b_n\}$. Entonces, $x \in \varphi(b_i)$ para algún $b_i \in \{b_1, ..., b_n\}$, i.e., $x \in \bigcup\{\varphi(b) \mid b \in B\} = Y$. Ahora, tomemos $x \in Y$. Esto es, existe $b \in B$ tal que $x \in \varphi(b)$. Por lo tanto, $x \cap Ig(B) \neq \emptyset$, i.e., $x \in \beta(Ig(B))$. Luego, $Y = \beta(Ig(B))$. Hemos probado entonces que β es biyectiva.

Sólo resta probar que $\beta(I \twoheadrightarrow J) = \beta(I) \rightarrowtail \beta(J)$, para todo $I, J \in \mathrm{Id}(A)$. Sea $x \in X$ tal que $x \in \beta(I \twoheadrightarrow J)$. Entonces, $x \cap (I \twoheadrightarrow J) \neq \emptyset$. Esto es, existe $a \in A$ tal que $a \in x$ y $a \in I \twoheadrightarrow J$. Supongamos que $x \notin \beta(I) \rightarrowtail \beta(J) = \bigcup\{\varphi(b) \in D(X) \mid \varphi(b) \subseteq \beta(I)^c \cup \beta(J)\}$. Entonces

$$x \in \bigcap\{\varphi(b)^c \mid \varphi(b) \subseteq \beta(I)^c \cup \beta(J)\}\,.$$

Como $a \in x$, resulta $\varphi(a) \nsubseteq \beta(I)^c \cup \beta(J)$. Entonces existe $y \in X$ tal que $y \in \varphi(a)$ pero $y \notin \beta(I)^c \cup \beta(J)$. Por consiguiente, $a \in y$, $y \cap I \neq \emptyset$ e $y \cap J = \emptyset$. Como $y \cap I \neq \emptyset$, existe $i_0 \in I$ tal que $i_0 \in y$. Como $a \in I \twoheadrightarrow J$, para todo $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $a \leq i \rightarrow j$. En particular, $a \leq i_0 \rightarrow j$. Como $a \in y$, $i_0 \rightarrow j \in y$, y por Modus Ponens, $j \in y$, lo cual es una contradicción pues $y \cap J = \emptyset$. Luego, $\beta(I \twoheadrightarrow J) \subseteq \beta(I) \rightarrowtail \beta(J)$.

Para mostrar que $\beta(I) \rightarrowtail \beta(J) \subseteq \beta(I \twoheadrightarrow J)$, tomamos $x \in X$ tal que $x \in \beta(I) \rightarrowtail \beta(J)$. Por lo tanto, existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) \subseteq \beta(I)^c \cup \beta(J)$ y $x \in \varphi(a)$. Supongamos que $x \notin \beta(I \twoheadrightarrow J)$, i.e., $x \cap (I \twoheadrightarrow J) = \emptyset$. Como $a \in x$, tenemos que $a \notin I \twoheadrightarrow J$. Luego, existe $i_0 \in I$ tal que $a \nleq i_0 \to j$ para toda $j \in J$. Por lo tanto, $i_0 \to j \notin \langle a \rangle$ para toda $j \in J$, i.e., $j \notin \langle \{a, i_0\} \rangle$ para toda $j \in J$. Consecuentemente, $\langle \{a, i_0\} \rangle \cap J = \emptyset$. Luego, existe $y \in X$ tal que $\langle \{a, i_0\} \rangle \subseteq y$ e $y \cap J = \emptyset$. Como $a \in y$ y $\varphi(a) \subseteq \beta(I)^c \cup \beta(J)$, resulta $y \in \beta(I)^c$ o $y \in \beta(J)$. Como $y \notin \beta(J)$, tenemos que $I \cap y = \emptyset$, lo cual es una contradicción pues $i_0 \in y$ y $i_0 \in I$. Luego, hemos probado que $\beta(I) \rightarrowtail \beta(J) = \beta(I \twoheadrightarrow J)$ para todo $I, J \in \mathrm{Id}(A)$.

Por lo tanto, tenemos que β es un isomorfismo de retículos que preserva la implicación. $\blacksquare$

Capítulo 6

$H_{\Diamond}^{\vee}$-álgebras

El principal objetivo de este capítulo es el estudio del $\{\rightarrow, \vee, \perp, \Diamond\}$-fragmento de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IntK}_{\Diamond}$ y su correspondiente semántica algebraica. Para ello introducimos y estudiamos la variedad formada por las álgebras de Hilbert acotadas con supremo enriquecidas con un operador modal $\Diamond$, a las que llamamos $H_{\Diamond}^{\vee}$-álgebras. Nuestro próposito es obtener una representación topológica para estas álgebras usando la encontrada para álgebras de Hilbert con supremo en el capítulo anterior. Gran parte de lo expuesto en este c1apítulo se encuentra publicado en la revista Studia Logica (ver [24]).

Definición 6.0.6. Un álgebra $\langle A, \Diamond\rangle$ es un $H_{\Diamond}^{\vee}$-álgebra si $\langle A, \rightarrow, \vee, 0, 1\rangle \in \mathrm{Hil}_0^{\vee}$ y $\Diamond$ es un operador unario definido en A que satisface las siguientes condiciones:

($\Diamond$1) $\Diamond 0 = 0$,

($\Diamond$2) $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$.

Observemos que bajo estas condiciones el operador $\Diamond$ es monótono. En efecto. Sean $a, b \in A$ tal que $a \leq b$. Entonces $a \vee b = b$ y por lo tanto, $\Diamond a \vee \Diamond b = \Diamond(a \vee b) = \Diamond b$. Esto es, $\Diamond a \leq \Diamond b$. Denotamos con $\mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}$ a la variedad formada por $H_{\Diamond}^{\vee}$-álgebras. La variedad $\mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}$ corresponde al $\{\vee, \rightarrow, 0, \Diamond\}$-reducto de la variedad de álgebras de Heyting con operador modal $\Diamond$ (ver [56], [57] o [66]).

Sean $\langle A, \Diamond\rangle, \langle B, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}$. Diremos que la función $h : A \rightarrow B$ conmuta con $\Diamond$ si se satisface que $h(\Diamond a) = \Diamond h(a)$ para todo $a \in A$. Denotamos con $\mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}\mathcal{S}$ a la categoría cuyos objetos son $H_{\Diamond}^{\vee}$-álgebras y cuyos morfismos son $\vee$-semi-homomorfismos que conmutan con $\Diamond$ y satisfacen que $h(0) = 0$. Denotamos con $\mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}\mathcal{H}$ a la categoría de $H_{\Diamond}^{\vee}$-álgebras y $\vee$-homomorfismos que conmutan con $\Diamond$ y $h(0) = 0$.

Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}$ y $C \subseteq A$. Definimos el conjunto

$$\Diamond^{-1}(C) = \{a \in A : \Diamond a \in C\}.$$

Notemos que por la monotonía del operador $\Diamond$, para cada subconjunto decreciente (creciente) C de A se satisface que $\Diamond^{-1}(C)$ es un subconjunto decreciente (creciente) de A. Más aún, $\Diamond^{-1}(I)$ y $(\Diamond(I)]$ son ideales de A para cada $I \in \mathrm{Id}(A)$. Luego, podemos afirmar que para cada $x \in X(A)$, tenemos que $\Diamond^{-1}(x^c) = \Diamond^{-1}(x)^c \in \mathrm{Id}(A)$. Estos resultados serán de utilidad en el presente capítulo.

6.1. Dualidad para objetos

Procedemos a encontrar una representación topológica para las $H_\Diamond^\vee$-álgebras.

Sea X un conjunto y $S \subseteq X \times X$. Consideramos la aplicación $\Diamond_S : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definida por:

$$\Diamond_S(U) = \{x \in X : S(x) \cap U \neq \emptyset\} = S^{-1}(U).$$

A continuación definimos los espacios topológicos asociados a las $H_\Diamond^\vee$-álgebras.

Definición 6.1.1. Diremos que $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ es un $H_\Diamond^\vee$-espacio si $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}\rangle$ es un $H^\vee$-espacio y S es una relación binaria definida en X tal que:

1. $X \in \mathcal{K}$.
2. Para cada $x \in X$, $S(x)^c \in \mathrm{Od}(X)$.
3. Si $U \in D(X)$, entonces $\Diamond_S(U) \in D(X)$.

Lema 6.1.2. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ un $H_\Diamond^\vee$-espacio. Entonces*

1. *$S(x)$ es un subconjunto compacto de $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}\rangle$, para cada $x \in X$.*
2. *$(\leq^{-1} \circ S) = (S \circ \leq^{-1}) = S$, donde $\leq$ es $\leq_\mathcal{K}$.*

Demostración.

1. Tomemos $x \in X$ y sea $L \subseteq \mathcal{K}$. Consideremos $S(x) \subseteq \bigcup\{U : U \in L\}$, i.e., $\bigcap\{U^c : U \in L\} \subseteq S(x)^c$. Como $S(x)^c \in \mathrm{Od}(X)$ resulta

$$S(x)^c = \bigcup\{V \in D(X) : V \subseteq S(x)^c\},$$

y consecuentemente, $\bigcap\{U^c : U \in L\} \cap \bigcap\{V^c : V \in D(X) \text{ y } V \subseteq S(x)^c\} = \emptyset$. Observemos que $\{V^c : V \in D(X) \text{ y } V \subseteq S(x)^c\}$ es un subconjunto dualmente directo de $\mathcal{K}$. En efecto. Sean $V, W \in D(X)$ tales que $V \subseteq S(x)^c$ y $W \subseteq S(x)^c$. Como $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}\rangle$ es un $H^\vee$-espacio, $V \cup W \in D(X)$. Más aún, $V \cup W \subseteq S(x)^c$ y $(V \cup W)^c \subseteq V^c, W^c$. Como $\bigcap\{U^c : U \in L\}$ es un subconjunto cerrado de

$\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$, por Teorema 3.1.6, existe $V_0 \in D(X)$ con $V_0 \subseteq S(x)^c$ tal que $\bigcap \{U^c : U \in L\} \cap V_0^c = \emptyset$, esto es,

$$S(x) \subseteq V_0^c \subseteq \bigcup \{U : U \in L\}\,.$$

Como V_0^c es un subconjunto compacto de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$, existen $U_1, ..., U_n \in L$ tales que $S(x) \subseteq V_0^c \subseteq U_1 \cup ... \cup U_n$.

2. Por la reflexividad de $\leq^{-1}$, es inmediato que $S \subseteq (\leq^{-1} \circ S)$ y $S \subseteq (S \circ \leq^{-1})$. Para probar que $(\leq^{-1} \circ S) \subseteq S$, tomemos $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in (\leq^{-1} \circ S)$. Es decir, existe $z \in X$ tal que $z \leq x$ y $(z, y) \in S$. Supongamos que $(x, y) \notin S$, esto es, $y \in S(x)^c$. Como $S(x)^c \in \mathrm{Od}(X)$, existe $U \in D(X)$ tal que $U \subseteq S(x)^c$ con $y \in U$. Como $y \in S(z)$, resulta $z \in \Diamond_S(U)$. Como $\Diamond_S(U) \in D(X)$ y $z \leq x$, tenemos que $x \in \Diamond_S(U)$. Esto es, $S(x) \cap U \neq \emptyset$, lo cual es imposible. Luego, $S = (\leq^{-1} \circ S)$. Probemos ahora que $(S \circ \leq^{-1}) \subseteq S$. Sea $(x, y) \in (S \circ \leq^{-1})$, i.e., existe $z \in X$ tal que xSz e $y \leq z$. Supongamos que $y \notin S(x)$. Por lo tanto, existe $V \in D(X)$ tal que $V \subseteq S(x)^c$ y $y \in V$. Luego, $z \in V$ y consecuentemente, $z \notin S(x)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $S = (S \circ \leq^{-1})$.

■

Observación 6.1.3. En [57] está probado que si $\langle X, \leq\rangle$ es un conjunto ordenado y S es una relación binaria definida sobre X entonces la condición $(\leq^{-1} \circ S) \subseteq (S \circ \leq^{-1})$ es equivalente a afirmar que $\mathcal{P}_{\leq}(X)$ es cerrado bajo $\Diamond_S$.

Consecuentemente, tenemos el siguiente resultado.

Lema 6.1.4. *Si $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, S\rangle$ es un $H^{\vee}_{\Diamond}$-espacio, entonces*

$$\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Diamond_S\rangle = \langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Rightarrow, \cup, \Diamond_S, \emptyset, X\rangle$$

es un $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebra, y $\langle D(X), \Diamond_S\rangle = \langle D(X), \Rightarrow, \cup, \Diamond_S, \emptyset, X\rangle$ es una subálgebra de $\langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Diamond_S\rangle$.

Sea $\langle A, \Diamond\rangle$ un $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebra. Consideremos la relación binaria S_A definida sobre $X(A)$ por:

$$(x, y) \in S_A \Longleftrightarrow y \subseteq \Diamond^{-1}(x).$$

El siguiente Lema será usado con frecuencia durante este capítulo :

Lema 6.1.5. *Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}$ y sea $x \in X(A)$. Entonces, $\Diamond a \in x$ si y sólo si existe $y \in X(A)$ tal que $(x, y) \in S_A$ y $a \in y$.*

Demostración. Supongamos que $\Diamond a \in x$. Por lo tanto, $a \notin \Diamond^{-1}(x^c)$. Como $\Diamond^{-1}(x^c) \in \mathrm{Id}(A)$, tenemos que $[a) \cap \Diamond^{-1}(x)^c = \emptyset$. Por Teorema 2.2.10, existe $y \in X(A)$ tal que $y \subseteq \Diamond^{-1}(x)$ y $a \in y$. La recíproca es inmediata. ■

Proposición 6.1.6. *Si $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$, entonces $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, S_A\rangle$ es un $H_\Diamond^\vee$-espacio.*

Demostración. En el Teorema 5.2.6 hemos probado que $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$ es un $H^\vee$-espacio. A continuación demostramos que S_A satisface las condiciones de la Definición 6.1.1:

1. Como $0 \in A$, $\varphi(0) = \emptyset \in D(X(A))$ y consecuentemente, $X \in \mathcal{K}_A$.

2 Sean $x, y \in X(A)$.

$$\begin{aligned} y \in S_A(x)^c &\iff y \nsubseteq \Diamond^{-1}(x) &&\iff y \cap \Diamond^{-1}(x)^c \neq \emptyset \\ &\iff y \in \beta\left(\Diamond^{-1}(x)^c\right). \end{aligned}$$

Por Proposición 5.5.5, $S_A(x)^c \in \mathrm{Od}(X(A))$.

3. Observemos que si $U \in D(X(A))$ entonces existe $a \in A$ tal que $U = \varphi(a)$. Por Lema 6.1.5:

$$\begin{aligned} x \in \Diamond_{S_A}(U) = \Diamond_{S_A}(\varphi(a)) &\iff S_A(x) \cap \varphi(a) \neq \emptyset \\ &\iff \exists y \in X(A)\, (y \subseteq \Diamond^{-1}(x)\ \&\ a \in y) \\ &\iff \Diamond a \in x \\ &\iff x \in \varphi(\Diamond a). \end{aligned}$$

■

Considerando la Proposición anterior tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.1.7. *Para cada $H_\Diamond^\vee$-álgebra $\langle A, \Diamond\rangle$ existe un $H_\Diamond^\vee$-espacio $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ tal que $\langle A, \Diamond\rangle$ es isomorfo a $\langle D(X), \Diamond_S\rangle$.*

Demostración. Consideremos la estructura $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, S_A\rangle$. Por Teorema 5.2.6, tenemos que $\varphi : A \to D(X(A))$ es un isomorfismo definido entre $H^\vee$-álgebras y que $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$ es un $H^\vee$-espacio. Como $\langle A, \Diamond\rangle$ es una $H_\Diamond^\vee$-álgebra, por Proposición 6.1.6 tenemos que $\varphi(\Diamond a) = \Diamond_{S_A}(\varphi(a))$ para cada $a \in A$ y que $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, S_A\rangle$ es un $H_\Diamond^\vee$-espacio. Por Lema 6.1.4, $\langle D(X(A)), \Diamond_{S_A}\rangle$ es una $H_\Diamond^\vee$-álgebra y consecuentemente, φ es un isomorfismo entre las $H_\Diamond^\vee$-álgebras $\langle A, \Diamond\rangle$ y $\langle D(X(A)), \Diamond_{S_A}\rangle$. ■

Notemos que si $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ es un $H_\Diamond^\vee$-espacio, entonces $\left\langle X(D(X)), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}}, S_{D(X)}\right\rangle$ es el $H_\Diamond^\vee$-espacio correspondiente al $H_\Diamond^\vee$-álgebra $\langle D(X), \Diamond_S\rangle$, donde para todo $F, P \in X(D(X))$,

$$(F, P) \in S_{D(X)} \iff P \subseteq \Diamond_S^{-1}(F).$$

Teorema 6.1.8. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ un $H_\Diamond^\vee$-espacio. Entonces, la aplicación $\varepsilon_X : X \to X(D(X))$ es un homeomorfismo entre $H_\Diamond^\vee$-espacios tal que*

$$(x, y) \in S \iff (\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in S_{D(X)}$$

para todo $x, y \in X$.

Demostración. En Proposición 5.2.7, hemos probado que ε_X es un homeomorfismo entre los $H^{\vee}$-espacios $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ y $\left\langle X(D(X)), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}} \right\rangle$. Más aún, como $\langle D(X), \Diamond_S \rangle \in \mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}$, la Proposición 6.1.6 demuestra que $\left\langle X(D(X)), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}}, S_{D(X)} \right\rangle$ es un $H^{\vee}_{\Diamond}$-espacio. Sean $x, y \in X$. Sólo necesitamos probar que $(x, y) \in S$ es equivalente a $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in S_{D(X)}$. Asumamos que $(x, y) \in S$. Para probar que $\varepsilon_X(y) \subseteq \Diamond_S^{-1}(\varepsilon_X(x))$, tomamos $U \in D(X)$ tal que $U \in \varepsilon_X(y)$. Por lo tanto, $y \in U$ y como $y \in S(x)$, obtenemos que $x \in \Diamond_S(U)$. Como $\Diamond_S(U) \in D(X)$, $\Diamond_S(U) \in \varepsilon_X(x)$ y por lo tanto, $U \in \Diamond_S^{-1}(\varepsilon_X(x))$. Para probar la recíproca, supongamos que $y \notin S(x)$. Como $S(x)^c \in \mathrm{Od}(X)$, $y \in S(x)^c = \bigcup \{U \in D(X) : U \subseteq S(x)^c\}$. Por lo tanto, existe $U \in D(X)$ tal que $U \in \varepsilon_X(y)$ y $U \cap S(x) = \emptyset$. Esto es, $x \notin \Diamond_S(U)$. Luego, existe $U \in \varepsilon_X(y)$ tal que $\Diamond_S(U) \notin \varepsilon_X(x)$. Entonces, $\varepsilon_X(y) \nsubseteq \Diamond_S^{-1}(\varepsilon_X(x))$, i.e., $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \notin S_{D(X)}$. ■

6.2. Dualidad para morfismos

Para completar la dualidad, necesitamos asignarle una apropiada H-relación irreducible a cada $\vee$-semi-homomorfismo que conmuta con $\Diamond$ y preserva el primer elemento entre $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebras.

Definición 6.2.1. Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ H-espacios. Sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una relación. Diremos que R es una *H-relación irreducible fuerte* si es una H-relación irreducible tal que $R(x) \neq \emptyset$, para cada $x \in X_1$.

Observemos que

$$\forall x \in X_1\, (R(x) \neq \emptyset) \quad \textit{si y sólo si } h_R(\emptyset) = \emptyset.$$

En efecto. Considerar $h_R(\emptyset) \neq \emptyset$ es equivalente a asegurar la existencia de $x \in X$ tal que $x \in h_R(\emptyset)$. Lo cual significa que $R(x) \subseteq \emptyset$. Es decir, existe $x \in X$ tal que $R(x) = \emptyset$.

Por lo tanto, si R es una relación binaria definida entre $H^{\vee}_{\Diamond}$-espacios, podemos afirmar que R es una H-relación irreducible fuerte si y sólo si h_R es un $\vee$-semi-homomorfismo que preserva el primer elemento.

Recordemos que en el Capítulo 5, cada H-relación irreducible R definida entre $H^{\vee}$-espacios $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ nos provee de una función parcial $f_R : X_1 \to X_2$ tal que

$$f_R(x) = y \ \textit{ si y sólo si } \ R(x) = \mathrm{cl}(y) = [y),$$

donde $x \in dom(f_R) = \{x \in X_1 \mid R(x) \neq \emptyset\}$. Ahora bien, si R es una H-relación irreducible fuerte definida entre los $H^{\vee}_{\Diamond}$-espacios $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, S_1 \rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, S_2 \rangle$ entonces

f_R es una función ya que por definición $R(x) \neq \emptyset$, para cada $x \in X_1$, i.e., $dom(f_R) = X_1$. Luego, para cada $x \in X_1$, resulta $R(x) = [f_R(x))$. Más aún, para cada $U \in \mathcal{K}_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} R^{-1}(U) &= \{x \in X_1 : (x,y) \in R \text{ para algún } y \in U\} \\ &= \{x \in X_1 : [f_R(x)) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X_1 : f_R(x) \in U\} = f_R^{-1}(U), \end{aligned}$$

y como R es una H-relación, $R^{-1}(U) = f_R^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$.

Observación 6.2.2. Notemos que si R es una H-relación irreducible fuerte definida entre los $H_{\Diamond}^{\vee}$-espacios $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, S_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, S_2\rangle$, entonces

$$h_R(U) = f_R^{-1}(U),$$

para cualquier $U \in D(X_2)$. En efecto. Sea $U \in D(X_2)$ y sea $x \in h_R(U)$. Como U es un subconjunto creciente de X_2 resulta:

$$x \in h_R(U) \iff R(x) = [f_R(x)) \subseteq U \iff f_R(x) \in U \iff x \in f_R^{-1}(U).$$

Definición 6.2.3. Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, S_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, S_2\rangle$ $H_{\Diamond}^{\vee}$-espacios. Sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una H-relación irreducible fuerte. Diremos que R es una $\Diamond$-*relación* si satisface las siguientes condiciones:

$(MF1)$ Si $(x,y) \in S_1$, entonces $(f_R(x), f_R(y)) \in S_2$.

$(MF2)$ $h_R(\Diamond_{S_2}(U)) \subseteq \Diamond_{S_1}(h_R(U))$, para todo $U \in D(X_2)$.

Denotamos con $\mathcal{M}_{\Diamond}\mathcal{SR}^{\vee}$ a la categoría cuyos objetos son $H_{\Diamond}^{\vee}$-espacios y cuyos morfismos son $\Diamond$-relaciones.

Proposición 6.2.4. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, S_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, S_2\rangle$ $H_{\Diamond}^{\vee}$-espacios. Sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una H-relación irreducible fuerte. Entonces, R satisface la condición $(MF1)$ si y sólo si $\Diamond_{S_1}(h_R(U)) \subseteq h_R(\Diamond_{S_2}(U))$, para todo $U \in D(X_2)$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $U \in D(X_2)$ y $x \in \Diamond_{S_1}(h_R(U))$. Por lo tanto, $S_1(x) \cap h_R(U) \neq \emptyset$, i.e., existe $w \in X_1$ tal que $w \in S_1(x)$ y $w \in h_R(U) = f_R^{-1}(U)$. Esto es, $f_R(w) \in U$. Como $(x,w) \in S_1$, por $(MF1)$, $f_R(w) \in S_2(f_R(x))$. Luego, $S_2(f_R(x)) \cap U \neq \emptyset$ y por ende, $f_R(x) \in \Diamond_{S_2}(U)$. Por lo tanto, $x \in f_R^{-1}(\Diamond_{S_2}(U)) = h_R(\Diamond_{S_2}(U))$.

$\Longleftarrow$) Sea $x \in X_1$. Supongamos que existe $y \in S_1(x)$ tal que $f_R(y) \notin S_2(f_R(x))$. Como $S_2(f_R(x))^c \in \mathrm{Od}(X_2)$, tenemos que

$$f_R(y) \in S_2(f_R(x))^c = \bigcup \{U \in D(X_2) : U \subseteq S_2(f_R(x))^c\}.$$

Luego, existe $U \in D(X_2)$ tal que $U \subseteq S_2(f_R(x))^c$ y $f_R(y) \in U$. Por lo tanto, $y \in h_R(U)$. Como $S_1(x) \cap h_R(U) \neq \emptyset$, resulta $x \in \Diamond_{S_1}(h_R(U))$. Por lo asumido, $x \in h_R(\Diamond_{S_2}(U))$, i.e., $f_R(x) \in \Diamond_{S_2}(U)$. Luego, $U \cap S_2(f_R(x)) \neq \emptyset$, lo cual contradice que $U \subseteq S_2(f_R(x))^c$. ■

Considerando la Proposición 6.2.4 y el Teorema 5.2.12, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.2.5. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, S_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{K}_2, S_2\rangle$ $H^{\vee}_{\Diamond}$-espacios y $R \subseteq X_1 \times X_2$ una $\Diamond$-relación. Entonces, h_R es un morfismo de $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathcal{S}$.*

Ahora estudiamos la relación R_h definida en (3.2) cuando h es un morfismo de la categoría $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathcal{S}$.

Proposición 6.2.6. *Sean $\langle A, \Diamond\rangle, \langle B, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}$. Sea $h : A \to B$ un $\vee$-semi-homomorfismo que conmuta con $\Diamond$ y preserva el primer elemento. Entonces, R_h es una $\Diamond$-relación.*

Demostración. Por Teorema 5.2.10, R_h es una H-relación irreducible. Para probar que R_h es una H-relación irreducible fuerte mostraremos que $R_h(x) \neq \emptyset$, para cada $x \in X(B)$. Como h es un $\vee$-semi-homomorfismo, por Teorema 5.2.10 resulta que $h^{-1}(x) \in X(A)$ o $h^{-1}(x) = A$ para cada $x \in X(B)$. Supongamos que existe $x \in X(B)$ tal que $h^{-1}(x) = A$. Por lo tanto, $0 \in h^{-1}(x)$. Es decir, $h(0) = 0 \in x$ y por lo tanto, $x = A$, lo cual es imposible. Luego, $h^{-1}(x) \in X(A)$ y consecuentemente, $h^{-1}(x) \in R_h(x)$ para cada $x \in X(B)$. Esto prueba que R_h una H-relación irreducible fuerte y por lo tanto, $R_h(x) = [h^{-1}(x))$ para cada $x \in X(B)$. Entonces tenemos la siguiente función,

$$f_{R_h} : X(B) \to X(A) \textit{ tal que } f_{R_h}(x) = h^{-1}(x).$$

Probaremos que R_h satisface las condiciones de la Definición 6.2.3 . Por Lema 3.3.11 tenemos que $h_{R_h} \circ \varphi_A = \varphi_B \circ h$, i.e., $h_{R_h}(\varphi_A(a)) = \varphi_B(h(a))$, para todo $a \in A$. Entonces, para cada $a \in A$ se satisface:

$$\begin{array}{rclclcl} h_{R_h}(\Diamond_{S_A}(\varphi_A(a))) & = & h_{R_h}(\varphi_A(\Diamond a)) & = & \varphi_B(h(\Diamond a)) & = & \\ & = & \varphi_B(\Diamond h(a)) & = & \Diamond_{S_B}\varphi_B(h(a)) & = & \Diamond_{S_B} h_{R_h}(\varphi_A(a)). \end{array}$$

Luego, por Definición 6.2.3 y Proposición 6.2.4, R_h resulta ser una $\Diamond$-relación. ■

Luego, por los Teoremas 6.1.7 y 6.1.8, el Corolario 6.2.5 y la Proposición 6.2.6, podemos afirmar que las categorías $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathcal{S}$ y $\mathcal{M}_{\Diamond}\mathcal{SR}^{\vee}$ son dualmente equivalentes.

Sea $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathcal{H}$ la categoría con $H^{\vee}_{\Diamond}$-álgebras y $\vee$-homomorfismos que conmutan con $\Diamond$ y preservan el primer elemento y sea $\mathcal{M}_{\Diamond}\mathcal{SF}^{\vee}$ la categoría con $H^{\vee}_{\Diamond}$-espacios cuyos morfismos son las H-relaciones funcionales irreducibles que son $\Diamond$-relaciones. Por los Corolarios 5.2.11 y 5.2.13, tenemos que los $\vee$-homomorfismos definidos entre $H^{\vee}$-álgebras son duales a las H-relaciones funcionales irreducibles definidas en los $H^\vee$-espacios correspondientes. Luego, de los resultados obtenidos previamente podemos afirmar que las categorías $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}_\Diamond\mathcal{SF}^\vee$ son dualmente equivalentes.

6.3. Algunas subvariedades de $H_\Diamond^\vee$-algebras

En esta sección consideramos algunas variedades particulares de $H_\Diamond^\vee$-álgebras. Estas variedades son la contraparte algebraica de extensiones de los fragmentos implicativos de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IntK}_\Diamond$.

Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, definimos inductivamente la fórmula $\Diamond^n$ como

$$\Diamond^0 a = a$$

y

$$\Diamond^{n+1} a = \Diamond(\Diamond^n a).$$

Análogamente a lo realizado en el Capítulo 4 para las $H\Box$-álgebras, denotamos con $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee + \{\Gamma\}$ a la variedad de $H_\Diamond^\vee$-álgebras generadas por un conjunto finito de identidades Γ.

Consideremos las siguientes identidades:

$$\begin{array}{ll} \Diamond\mathbf{T} & a \to \Diamond a \approx 1, \\ \Diamond\mathbf{4} & \Diamond^2 a \to \Diamond a \approx 1, \\ \Diamond\mathbf{5} & \Diamond\left(\Diamond a \to \Diamond b\right) \to \left(\Diamond a \to \Diamond b\right) \approx 1. \end{array}$$

Siguiendo la notación estándar, identificamos dos subvariedades importantes de $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S4} & = & \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee + \{\Diamond\mathbf{T}, \Diamond\mathbf{4}\}, \\ \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5} & = & \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee + \{\Diamond\mathbf{T}, \Diamond\mathbf{5}\}. \end{array}$$

Observación 6.3.1. La variedad $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}$ es subvariedad de $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S4}$. En efecto. Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}$. Como $a \leq \Diamond a$ para todo $a \in A$, en particular se satisface para $a = 1$. Por lo tanto, $\Diamond 1 = 1$. Luego, para todo $b \in A$ resulta:

$$1 = \Diamond\left(\Diamond 1 \to \Diamond b\right) \to \left(\Diamond 1 \to \Diamond b\right) = \Diamond\left(1 \to \Diamond b\right) \to \left(1 \to \Diamond b\right) = \Diamond^2 b \to \Diamond b.$$

El siguiente resultado será de gran utilidad en esta sección y es una generalización del Lema 6.1.5 .

Lema 6.3.2. *Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ su correspondiente $H_\Diamond^\vee$-espacio. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $x \in X$. Entonces, $\Diamond^n a \in x$ si y sólo si existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in S^n$ y $a \in y$.*

Demostración. La prueba se hace por inducción sobre n. Por Lema 6.1.5, la equivalencia es válida para $n = 1$. Supongamos que la proposición se satisface para n. Consideremos $\Diamond^{n+1}a = \Diamond(\Diamond^n a) \in x$. Por Lema 6.1.5, existe $y \in X$ tal que $y \in S(x)$ y $\Diamond^n a \in y$. Por lo asumido, existe $z \in X$ tal que $(y, z) \in S^n$ y $a \in z$. Luego, existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in S^{n+1}$ y $a \in z$. Ahora probemos la recíproca. Asumamos que existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in S^{n+1}$ con $a \in y$. Por lo tanto, existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in S^n$ y $(z, y) \in S$. Como $a \in y$, tenemos $\Diamond a \in z$ y como $(x, z) \in S^n$, por hipótesis inductiva resulta $\Diamond^n(\Diamond a) = \Diamond^{n+1}a \in x$. ■

Sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ un $H_\Diamond^\vee$-espacio. Siguiendo la notación usada en [30], definimos las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{array}{lcl} \varrho & \Leftrightarrow & \forall x \forall y \forall z\, [xSy \wedge xSz \Rightarrow \exists t(y \leq t \wedge tSz \wedge \forall u(tSu \Rightarrow xSu))]\,. \\ \varrho' & \Leftrightarrow & \forall x \forall y\, [xSy \Rightarrow \exists t(y \leq t \wedge tSx \wedge xSt)]\,. \end{array}$$

Observación 6.3.3. Notemos que si S es reflexiva y transitiva entonces ϱ y ϱ' son equivalentes. En efecto. Supongamos que ϱ se satisface en $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ y sean $x, y \in X$ tales que xSy. Como S es reflexiva, tenemos que xSy y xSx. Por ϱ, podemos asegurar que existe $t \in X$ tal que $y \leq t$, tSx y para todo $u \in X$, tSu implica xSu. En particular, como tSt, resulta xSt. Con lo cual ϱ' se satisface en $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$. Recíprocamente, sean $x, y, z \in X$ tales que $(x, y) \in S$ y $(x, z) \in S$. Si xSy entonces existe $t \in X$ tal que $y \leq t$, tSx y xSt. Como tSx y xSz, por la transitividad de S resulta tSz. Tomemos ahora cualquier $u \in X$ tal que tSu. Como xSt, por transitividad de S tenemos que xSu. Luego, existe $t \in T$ tal que $y \leq t, tSz$ y para todo $u \in X$, tSu implica xSu.

Establecemos a continuación ciertas condiciones adicionales definidas en un $H_\Diamond^\vee$-álgebra las cuales están en correspondencia con determinadas propiedades definidas en su correspondiente espacio dual.

Teorema 6.3.4. *Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$ y $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ su $H_\Diamond^\vee$-espacio dual correspondiente. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

1. $\Diamond^n a \to a = 1$ *para todo* $a \in A$ *si y sólo si* $\forall x, y[(x, y) \in S^n \Rightarrow y \subseteq x]$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
2. $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee + \{\Diamond\mathbf{T}\}$ *si y sólo si* S *es reflexiva.*
3. $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee + \{\Diamond\mathbf{4}\}$ *si y sólo si* S *es transitiva.*
4. $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee + \{\Diamond\mathbf{5}\}$ *si y sólo si* ϱ *se satisface en* $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$.
5. $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee + \{\Diamond\mathbf{T}, \Diamond\mathbf{5}\}$ *si y sólo si* ϱ' *se satisface en* $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ *y* S *es reflexiva y transitiva.*

Demostración. *1.* Sea $n \in \mathbb{N}$. Asumamos que $\Diamond^n a \leq a$ para todo $a \in A$. Consideremos $(x, y) \in S^n$ y tomemos $b \in y$. Por Lema 6.3.2, $\Diamond^n b \in x$. Como $\Diamond^n b \leq b$, resulta $b \in x$. Queda probado entonces que $y \subseteq x$. Recíprocamente, asumamos que $(x, y) \in S^n$ implica $y \subseteq x$. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $\Diamond^n a \nleq a$. Por lo tanto, existe $x \in X$ tal que $\Diamond^n a \in x$ y $a \notin x$. Por Lema 6.3.2, existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in S^n$ y $a \in y$. Por lo asumido, $y \subseteq x$ y consecuentemente, $a \in x$, lo cual es una contradicción.

2. Asumamos que $a \leq \Diamond a$ para todo $a \in A$. Sea $x \in X$ y tomemos $b \in x$. Por ende, $\Diamond b \in x$ y consecuentemente, $b \in \Diamond^{-1}(x)$. Por lo tanto, $x \subseteq \Diamond^{-1}(x)$ cualquiera sea $x \in X$. Luego, S es reflexiva. Ahora consideremos que S es reflexiva y supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \nleq \Diamond a$. Entonces existe $x \in X$ tal que $a \in x$ y $\Diamond a \notin x$. Por lo asumido, $x \subseteq \Diamond^{-1} x$ y como $a \in x$, resulta $\Diamond a \in x$, lo cual es imposible.

3. Asumamos que $\Diamond^2 a \leq \Diamond a$ para todo $a \in A$. Sean $x, y, z \in X$ tal que $(x, y) \in S$ y $(y, z) \in S$. Es decir, $y \subseteq \Diamond^{-1}(x)$ y $z \subseteq \Diamond^{-1}(y)$. Para mostrar que $(x, z) \in S$, tomemos $a \in z$. Por ende, $\Diamond a \in y$ y consecuentemente, $\Diamond^2 a \in x$. Por lo asumido, $\Diamond a \in x$ y entonces $a \in \Diamond^{-1}(x)$. Luego, S es transitiva. Para probar la recíproca, supongamos que existe $a \in A$ tal que $\Diamond^2 a \nleq \Diamond a$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\Diamond^2 a \in x$ y $\Diamond a \notin x$. Por Lema 6.3.2, podemos asegurar que existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in S^2$ y $a \in y$. Por lo asumido, $(x, y) \in S$ y por lo tanto, $\Diamond a \in x$, lo cual es imposible.

4. Asumamos que $\Diamond (\Diamond a \to \Diamond b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$ para todo $a, b \in A$. Para probar que existe un elemento $t \in X$ tal que $y \leq t$ y $z \in S(t)$, consideremos el sistema deductivo $\langle y \cup \Diamond z \rangle$ y el ideal de orden $(\Diamond (\Diamond^{-1}(x^c))]$ definidos en A. Probemos que $\langle y \cup \Diamond z \rangle \cap (\Diamond (\Diamond^{-1}(x^c))] = \emptyset$. Supongamos lo contrario, esto es, existe $a \in A$ tal que $a \in \langle y \cup \Diamond z \rangle$ y $a \in (\Diamond (\Diamond^{-1}(x^c))]$. Por lo tanto, existen $b \in y$, $c \in z$ y $d \in \Diamond^{-1}(x^c)$ tal que $b \to (\Diamond c \to \Diamond d) = 1 \in y$. Luego, $\Diamond c \to \Diamond d \in y$ y como $y \subseteq \Diamond^{-1}(x)$, resulta $\Diamond(\Diamond c \to \Diamond d) \in x$. Por lo asumido, $\Diamond c \to \Diamond d \in x$. Como $z \subseteq \Diamond^{-1}(x)$, tenemos que $\Diamond c \in x$, y entonces $\Diamond d \in x$, lo cual es una contradicción. Luego, existe $t \in X$ tal que $y \subseteq t$, $\Diamond z \subseteq t$ y $\Diamond (\Diamond^{-1}(x^c)) \cap t = \emptyset$. Esto es, $z \subseteq \Diamond^{-1}(t)$ y $\Diamond^{-1}(x^c) \subseteq \Diamond^{-1}(t^c)$. Sea $u \in X$ tal que tSu, i.e., $u \subseteq \Diamond^{-1}(t)$. Como $\Diamond^{-1}(t) \subseteq \Diamond^{-1}(x)$, tenemos que xSu. Luego, existe $t \in X$ tal que $y \subseteq t$, tSz y para todo $u \in X$, si tSu entonces xSu.

Para la recíproca, supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $\Diamond (\Diamond a \to \Diamond b) \nleq \Diamond a \to \Diamond b$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\Diamond (\Diamond a \to \Diamond b) \in x, \Diamond a \in x$ y $\Diamond b \notin x$. Por Lema 6.1.5, existen $y, z \in S(x)$ tales que $\Diamond a \to \Diamond b \in y$ y $a \in z$. Como ϱ se satisface en $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S \rangle$, tenemos que existe $t \in X$ tal que $y \subseteq t$, $z \subseteq \Diamond^{-1}(t)$ y para todo $u \in X$, tSu implica xSu. Por lo tanto, $\Diamond a \to \Diamond b \in t$ y $\Diamond a \in t$. Por ende, $\Diamond b \in t$. Por Lema 6.1.5, existe $v \in X$ tal que $(t, u) \in S$ y $b \in u$. Luego, $(x, u) \in S$ y consecuentemente, $\Diamond b \in x$, lo cual es imposible.

5. Resulta inmediatamente de aplicar los items $(2), (3), (4)$ anteriores y la Observación 6.3.3. ■

6.3.1. La subvariedad $\mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}\mathbf{S5}$

En esta parte del trabajo estudiamos particularmente a la subvariedad $\mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}\mathbf{S5}$, es decir, a las $H_{\Diamond}^{\vee}$-álgebras que satisfacen las identidades $a \to \Diamond a \approx 1$ y $\Diamond(\Diamond a \to \Diamond b) \to (\Diamond a \to \Diamond b) \approx 1$. La importancia de estas álgebras reside en el hecho de que son el reducto $\{\vee, \to, \perp, \Diamond\}$ de las álgebras de Heyting monádicas, la cuales han sido muy estudiadas principalmente por A. Monteiro y O. Varsavsky en [54], por G. Bezhanishvili en [2] y [3], y por Gisele Fischer Servi en [33] y [34].

Siguiendo las ideas de R.Cignoli en [28] para Q-retículos distributivos, podemos dar otra definición de dichas álgebras usando el concepto de cuantificador.

Definición 6.3.5. Sea $A = \langle A, \to, \vee, 1, 0\rangle$ un álgebra de Hilbert con supremo acotada. Un *cuantificador* definido en A es un operador unario ∇ que satisface:

1. $\nabla 0 = 0$,
2. $a \leq \nabla a$,
3. $\nabla(\nabla a \to \nabla b) \leq (\nabla a \to \nabla b)$,
4. $\nabla(a \vee b) = \nabla a \vee \nabla b$.

Podemos decir también que cada cuantificador ∇ es un operador de clausura aditivo del $H^{\vee}$-álgebra acotada A, como lo definen R. Balbes y P.Dwinger en [1].

Luego, $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}\mathbf{S5}$ si y sólo si A es un álgebra de Hilbert con supremo acotada y $\Diamond$ es un cuantificador definido sobre A.

Consideremos el subconjunto de $\langle A, \Diamond\rangle$ siguiente.

$$A_{\Diamond} = \{\Diamond a : a \in A\}.$$

Lema 6.3.6. *Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}\mathbf{S5}$. Entonces*

1. $A_{\Diamond} = \{a \in A : a = \Diamond a\}$.
2. $\langle A_{\Diamond}, \Diamond\rangle$ *es subálgebra de* $\langle A, \Diamond\rangle$.
3. $\Diamond a$ *es el menor elemento en el conjunto* $[a) \cap A_{\Diamond}$.
4. $y \cap A_{\Diamond} \subseteq x$ *si y sólo si* $y \subseteq \Diamond^{-1}(x)$.

Demostración. *1.* Es claro que $\{a \in A : a = \Diamond a\} \subseteq A_{\Diamond}$. Para probar la otra inclusión tomamos $a \in A_{\Diamond}$. Esto es, existe $b \in A$ tal que $a = \Diamond b$. Por lo tanto, $\Diamond a = \Diamond^2 b = \Diamond b = a$.

2. Es claro que $A_{\Diamond} \subseteq A$. Como $\Diamond 0 = 0$ y $\Diamond 1 = 1$, entonces $0, 1 \in A_{\Diamond}$. Como $\Diamond a = \Diamond^2 a$ cualquiera sea $a \in A$, tenemos que $\Diamond a \in A_{\Diamond}$. Sean $a, b \in A_{\Diamond}$. $a \vee b \in A_{\Diamond}$ pues

$a \vee b = \Diamond a \vee \Diamond b = \Diamond(a \vee b)$. Veamos ahora que $a \to b \in A_{\Diamond}$. Como $a, b \in A$ entonces $a \to b \in A$ y por lo tanto, $a \to b \leq \Diamond(a \to b)$. Pero $a \to b = \Diamond a \to \Diamond b \geq \Diamond(\Diamond a \to \Diamond b) = \Diamond(a \to b)$. Luego, $a \to b = \Diamond(a \to b)$ y por consiguiente, $a \to b \in A_{\Diamond}$.

3. Como $a \leq \Diamond a$ y $\Diamond a \in A_{\Diamond}$, tenemos que $\Diamond a \in [a) \cap A_{\Diamond}$. Sea $b \in [a) \cap A_{\Diamond}$, entonces $a \leq b$ y $b = \Diamond b$. Luego, $\Diamond a \vee \Diamond b = \Diamond(a \vee b) = \Diamond b$ y consecuentemente, $\Diamond a \leq \Diamond b = b$. Hemos probado que $\Diamond a$ es el menor elemento en el conjunto $[a) \cap A_{\Diamond}$.

4. Asumamos que $y \cap A_{\Diamond} \subseteq x$ y tomemos $a \in y$. Entonces $\Diamond a \in y \cap A_{\Diamond}$, por lo tanto $\Diamond a \in x$ y consecuentemente, $a \in \Diamond^{-1}(x)$. La recíproca es inmediata. ■

Representación topológica

En [58], A. Petrovich define el concepto de *cuasi-equivalencia* como relaciones binarias S definidas en un conjunto X siendo S reflexiva, transitiva y tal que satisface que para $x, y \in X$ con xSy, existe $t \in X$ tal que $y \leq t$, xSt y tSx.

Teniendo en cuenta la notación de A. Petrovich y la caracterización dada en el Teorema 6.3.4, podemos afirmar que toda álgebra $\langle A, \Diamond \rangle \in \mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathbf{S5}$ está en correspondencia con un $H^{\vee}_{\Diamond}$-espacio $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, S \rangle$, donde S es una cuasi-equivalencia. Notamos con $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathbf{S5}\mathcal{S}$ a la categoría formada por álgebras de la variedad $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathbf{S5}$ y cuyos morfismos son semi-homomorfismos que preservan primer elemento, supremo y el operador modal $\Diamond$.

A continuación probamos una dualidad topológica para las álgebras pertenecientes a la variedad $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathbf{S5}$ distinta a la descripta anteriormente, siguiendo las ideas utilizadas por G. Bezhanisvili en [3] para álgebras de Heyting monádicas.

Definición 6.3.7. Sea X un conjunto y R una relación binaria definida sobre X. Definimos la relación $E_R \subseteq X \times X$ de la siguiente manera:

$$(x, y) \in E_R \iff xRy \;\&\; yRx.$$

Observaciones 6.3.8. Es claro que si R es reflexiva y transitiva, entonces E_R es una relación de equivalencia.

Siguiendo la notación utilizada por G. Bezhanisvili en [3], llamamos marcos de Kripke argumentados perfectos a los espacios asociados a las álgebras pertenecientes a la variedad $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathbf{S5}$.

Definición 6.3.9. Diremos que una terna $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, E \rangle$ es un *marco de Kripke argumentado perfecto* si $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ es un $H^{\vee}$-espacio con $X \in \mathcal{K}$ y E es una relación de equivalencia definida sobre X tal que:

1. $(E\circ \leq) \subseteq (\leq \circ E)$,
2. $E = E_{E\circ\leq^{-1}}$,

3. $E(U) = \{x \in X : E(x) \cap U \neq \emptyset\} \in D(X)$ para todo $U \in D(X)$,

4. para cada $x \in X$, si $y \in E(x)^c$ entonces existe $U \in D(X)$ tal que $x \in U, y \notin U$ y $E(U) = U$ o bien, existe $V \in D(X)$ tal que $y \in V, x \notin V$ y $E(V) = V$.

El siguiente resultado prueba que para todo marco de Kripke argumentado perfecto existe un álgebra asociada en la variedad $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathbf{S5}$.

Proposición 6.3.10. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, E\rangle$ un marco de Kripke argumentado perfecto. Entonces $\langle D(X), E\rangle \in \mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathbf{S5}$.*

Demostración. Como $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ es un $H^{\vee}$-espacio con $X \in \mathcal{K}$, por Proposición 5.2.3, tenemos que $\langle D\left(X\right), \Rightarrow, \cup, X, \emptyset\rangle$ es un $H^{\vee}$-álgebra acotada. Veamos que E es un cuantificador definido sobre $D(X)$. Como $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, E\rangle$ es un marco de Kripke argumentado perfecto, para todo $U \in D(X)$ tenemos que $E(U) \in D(X)$. Es claro que $E(\emptyset) = \emptyset$ y que $E(U \cup V) = E(U) \cup E(V)$ para todo $U, V \in D(X)$. Además, por la reflexividad de E tenemos que $U \subseteq E(U)$. Sólo resta probar que

$$E(E(U) \Rightarrow E(V)) \subseteq E(U) \Rightarrow E(V).$$

Tomemos $x \in X$ tal que $x \in E(E(U) \Rightarrow E(V))$. Esto es, existe $y \in E(U) \Rightarrow E(V)$ tal que $(y, x) \in E$, i.e., $[y) \cap E(U) \subseteq E(V)$ y además, $x \in E(y)$. Veamos que $x \in E(U) \Rightarrow E(V)$. Para ello, tomemos $z \in [x) \cap E(U)$. Como yEx y $x \leq z$, resulta $(y, z) \in (E\circ \leq) \subseteq (\leq \circ E)$. Por lo tanto, existe $u \in X$ tal que $y \leq u$ y uEz. Como $z \in E(U)$ y E es simétrica y transitiva, podemos asegurar que $u \in E(U)$. Luego, $u \in [y) \cap E(U)$ y por lo asumido resulta $u \in E(V)$. Como $(u, z) \in E$, por la transitividad de E resulta $z \in E(V)$. ∎

Para toda álgebra en la variedad $\mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathbf{S5}$ podemos encontrar un marco de Kripke argumentado perfecto asociado, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 6.3.11. *Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}^{\vee}_{\Diamond}\mathbf{S5}$. Entonces, $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, E_A\rangle$ es un marco de Kripke argumentado perfecto, donde $E_A \subseteq X(A) \times X(A)$ tal que*

$$(x, y) \in E_A \textit{ si y sólo si } x \cap A_{\Diamond} = y \cap A_{\Diamond}.$$

Demostración. Por como está definida la relación binaria E_A es inmediato que E_A es una relación de equivalencia. Además, por Teorema 5.2.6, tenemos que si $A \in \mathrm{Hil}^{\vee}$ entonces $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$ es un $H^{\vee}$-espacio. Además, como $0 \in A$, $\varphi(0) = \emptyset \in D(X(A))$ y consecuentemente, $X \in \mathcal{K}_A$. Veamos que $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, E_A\rangle$ cumple con las condiciones de la Definición 6.3.9. Tomemos $x, y \in X(A)$.

1. Si $(x,y) \in (E_A \circ \subseteq)$, existe $z \in X(A)$ tal que $(x,z) \in E_A$ y $z \subseteq y$. Consideremos el sistema deductivo $\langle x \cup (y \cap A_\Diamond)\rangle$ y el ideal generado por $y^c \cap A_\Diamond$, y probemos que son disjuntos. Supongamos lo contrario. Sea $a \in A$ tal que $a \in \langle x \cup (y \cap A_\Diamond)\rangle$ y $a \in Ig(y^c \cap A_\Diamond)$. Por lo tanto, existe $b \in x$, $c \in y \cap A_\Diamond$ y $k_1, ..., k_n \in y^c \cap A_\Diamond$ tales que $b \to (c \to a) = 1$ y $a \leq k_1 \vee ... \vee k_n$. Consecuentemente, $b \to (c \to (k_1 \vee ... \vee k_n)) = 1$, i.e., $b \leq c \to (k_1 \vee ... \vee k_n)$. Usando la monotonía de $\Diamond$ y sabiendo que $c, k_1, ..., k_n \in A_\Diamond$, resulta:

$$\begin{aligned} \Diamond b &\leq \Diamond(\Diamond c \to (\Diamond k_1 \vee ... \vee \Diamond k_n)) = \Diamond(\Diamond c \to \Diamond(k_1 \vee ... \vee k_n)) \\ &\leq \Diamond c \to \Diamond(k_1 \vee ... \vee k_n). \end{aligned}$$

   Como $\Diamond b \in x \cap A_\Diamond = z \cap A_\Diamond$, tenemos que $\Diamond b \in z \subseteq y$. Luego, $\Diamond c \to \Diamond(k_1 \vee ... \vee k_n) \in y$. Como $\Diamond c = c \in y$, resulta $\Diamond(k_1 \vee ... \vee k_n) = \Diamond k_1 \vee ... \vee \Diamond k_n \in y$. Teniendo en cuenta que y es sistema deductivo primo, existe i, con $1 \leq i \leq n$, tal que $\Diamond k_i = k_i \in y$, lo cual es imposible. Luego,

$$\langle x \cup (y \cap A_\Diamond)\rangle \cap Ig(y^c \cap A_\Diamond) = \emptyset.$$

   Por Teorema 2.2.10, existe $w \in X(A)$ tal que $x \subseteq w$, $y \cap A_\Diamond \subseteq w$ y $w \cap y^c \cap A_\Diamond = \emptyset$. Esto es, $w \cap A_\Diamond \subseteq y$. Luego $w \cap A_\Diamond \subseteq y \cap A_\Diamond$. Como $y \cap A_\Diamond \subseteq w \cap A_\Diamond$ tenemos que $(w,y) \in E_A$. Por lo tanto, $(x,y) \in (\subseteq \circ E_A)$.

2. Sea $(x,y) \in E_A$. Por la reflexividad de $\subseteq^{-1}$ y la simetría de E_A tenemos que $(x,y) \in E_A \circ \subseteq^{-1}$y además que $(y,x) \in E_A \circ \subseteq^{-1}$. Luego, $(x,y) \in E_{A_{(E_A \circ \subseteq^{-1})}}$. Ahora tomemos $(x,y) \in E_{A_{(E_A \circ \subseteq^{-1})}}$. Esto es, $(x,y) \in (E_A \circ \subseteq^{-1})$ e $(y,x) \in (E_A \circ \subseteq^{-1})$. Por lo tanto, existen $z, w \in X(A)$ tales que $(x,z) \in E_A, z \subseteq^{-1} y, (y,w) \in E_A$ y $w \subseteq^{-1} x$. Por ende, $x \cap A_\Diamond = z \cap A_\Diamond, y \subseteq z, y \cap A_\Diamond = w \cap A_\Diamond$ y $x \subseteq w$. Luego, $y \cap A_\Diamond \subseteq z \cap A_\Diamond = x \cap A_\Diamond$ y $x \cap A_\Diamond \subseteq w \cap A_\Diamond = y \cap A_\Diamond$. Por lo tanto $(x,y) \in E_A$.

3. Veamos que $E_A(U) \in D(X(A))$, para todo $U \in D(X(A))$. Sea $U \in D(X(A))$. Por lo tanto existe $a \in A$ tal que $U = \varphi(a)$. Probemos que $E_A(\varphi(a)) = \varphi(\Diamond a)$. Sea $x \in E_A(\varphi(a))$. Por lo tanto, existe $y \in \varphi(a)$ tal que $(y,x) \in E_A$. Como $a \in y$ y $a \leq \Diamond a$, resulta $\Diamond a \in y \cap A_\Diamond = x \cap A_\Diamond$ y por lo tanto, $x \in \varphi(\Diamond a)$. Para probar la otra inclusión, tomemos $x \in \varphi(\Diamond a)$. Esto es, $\Diamond a \in x$ y en consecuencia, $[a) \cap A_\Diamond \subseteq x \cap A_\Diamond$. En efecto. Tomemos $b \in [a) \cap A_\Diamond$. Entonces $a \leq b$ y $b = \Diamond b$. Entonces, $\Diamond a \leq \Diamond b$ y como $\Diamond a \in x$, $\Diamond b = b \in x$. Luego, $b \in x \cap A_\Diamond$. Consideremos ahora el sistema deductivo $\langle [a) \cup (x \cap A_\Diamond)\rangle$ y el ideal generado por $x^c \cap A_\Diamond$. Usando las mismas técnicas aplicadas en el item *1.*, se prueba que

$$\langle [a) \cup (x \cap A_\Diamond)\rangle \cap Ig(x^c \cap A_\Diamond) = \emptyset.$$

Por lo tanto, existe $z \in X(A)$ tal que $[a) \subseteq z, x \cap A_\Diamond \subseteq z$ y $z \cap x^c \cap A_\Diamond = \emptyset$. Esto es, $a \in z, x \cap A_\Diamond \subseteq z \cap A_\Diamond$ y $z \cap A_\Diamond \subseteq x \cap A_\Diamond$. Es decir, existe $z \in \varphi(a)$ tal que $(x, z) \in E_A$. Por consiguiente, $x \in E_A(\varphi(a))$. Luego, $E_A(\varphi(a)) = \varphi(\Diamond a) \in D(X(A))$.

4. Sea $y \in E_A(x)^c$. Entonces $y \cap A_\Diamond \neq x \cap A_\Diamond$, esto es, $y \cap A_\Diamond \nsubseteq x \cap A_\Diamond$ o bien $x \cap A_\Diamond \nsubseteq y \cap A_\Diamond$. Si $y \cap A_\Diamond \nsubseteq x \cap A_\Diamond$, existe $a \in y \cap A_\Diamond$ tal que $a \notin x \cap A_\Diamond$. Esto es, existe $a \in A$ tal que $a \in y, a \notin x$ y $a = \Diamond a$. Por lo tanto, existe $\varphi(a) \in D(X(A))$ tal que $y \in \varphi(a), x \notin \varphi(a)$ y $\varphi(a) = \varphi(\Diamond a) = E_A(\varphi(a))$. Análogamente se prueba la condición cuando $x \cap A_\Diamond \nsubseteq y \cap A_\Diamond$.

■

Sea $\langle A, \Diamond \rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}$. Por Teorema 5.2.6, $\varphi : A \to D(X(A))$ es un isomorfismos entre $H^\vee$-álgebras, donde $\varphi(0) = \emptyset$. Además, por Proposición 6.3.11, $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, E_A \rangle$ es un marco de Kripke argumentado perfecto y consecuentemente, por Proposición 6.3.10, $\langle D(X(A)), E_A \rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}$ y $\varphi(\Diamond a) = E_A(\varphi(a))$. Por lo tanto, φ es un isomorfismo entre las álgebras de la variedad $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}$, $\langle A, \Diamond \rangle$ y $\langle D(X(A)), E_A \rangle$.

Por otro lado, si $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, E \rangle$ es un marco de Kripke argumentado perfecto, entonces $\left\langle X\left(D(X)\right), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}}, E_{D(X)} \right\rangle$ es el marco de Kripke argumentado perfecto correspondiente al álgebra $\langle D(X), E \rangle$ de la variedad $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}$, donde para todo $F, P \in X(D(X))$,

$$(F, P) \in E_{D(X)} \iff F \cap D(X)_E = P \cap D(X)_E$$

y $D(X)_E = \{U \in D(X) : U = E(U)\}$.

Teorema 6.3.12. *Sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, E \rangle$ un marco de Kripke argumentado perfecto. Entonces, la aplicación $\varepsilon_X : X \to X\left(D\left(X\right)\right)$ es un homeomorfismo entre marcos de Kripke argumentados perfectos tal que*

$$(x, y) \in E \iff (\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in E_{D(X)}.$$

Demostración. Por Proposición 5.2.7, $\varepsilon : X \to X(D(X))$ es un homeomorfismo entre $H^\vee$espacios. Más aún, como $\langle D(X), E \rangle$ es un álgebra de la variedad $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}$, por Proposición 6.3.10 resulta que $\left\langle X(D(X)), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_{D(X)}}, E_{D(X)} \right\rangle$ es un marco de Kripke argumentado perfecto. Sólo necesitamos probar que $(x, y) \in E$ es equivalente a $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in E_{D(X)}$, para todo $x, y \in X$. Asumamos que $(x, y) \in E$ y probemos primero que $\varepsilon_X(x) \cap D(X)_E \subseteq \varepsilon_X(y) \cap D(X)_E$. Para ello tomamos $U \in D(X)$ tal que $U \in \varepsilon_X(x) \cap D(X)_E$. Esto es, $x \in U$ y $U = E(U)$. Como $y \in E(x)$ entonces $y \in E(U) = U$. Luego, $U \in \varepsilon_X(y) \cap D(X)_E$. Usando la simetría de E se prueba la otra inclusión, resultando $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in E_{D(X)}$. Supongamos ahora que $x \notin E(y)$. Por condición 4 de la definición 6.3.9, existe $U \in D(X)$ tal que $x \in U, y \notin U$ y $E(U) = U$ o bien, existe $V \in D(X)$

tal que $y \in V, x \notin V$ y $E(V) = V$. Esto es, $U \in \varepsilon_X(x) \cap D(X)_E$ y $U \notin \varepsilon_X(y) \cap D(X)_E$ o bien, $V \in \varepsilon_X(y) \cap D(X)_E$ y $V \notin \varepsilon_X(x) \cap D(X)_E$. En ambos casos tenemos que $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \notin E_{D(X)}$. ■

Hemos probado entonces el siguiente resultado.

Teorema 6.3.13. *Para toda álgebra $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}$ existe un marco de Kripke argumentado perfecto $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, E\rangle$ tal que $\langle A, \Diamond\rangle$ es isomorfa al álgebra $\langle D(X), E\rangle$ perteneciente a la variedad $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}$. Más aún, para todo marco de Kripke argumentado perfecto $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, E\rangle$ existe un álgebra $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}$ tal que $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, E\rangle$ es homeomorfo al marco de Kripke argumentado perfecto $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, E_A\rangle$, donde $(x, y) \in E_A$ si y sólo si $x \cap A_\Diamond = y \cap A_\Diamond$.*

Dualidad para morfismos

En orden de completar la dualidad, necesitamos asignarle una apropiada H-relación irreducible a cada morfismo de la categoría $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee\mathbf{S5}\mathcal{S}$.

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, E_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, E_2\rangle$ espacios de Kripke argumentados perfectos y sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una H-relación irreducible. Como $h_R(\emptyset) = \emptyset$, resulta que toda H-relación irreducible definida entre espacios de Kripke argumentados perfectos es fuerte y consecuentemente, nos provee de una función $f_R : X_1 \to X_2$ tal que

$$f_R(x) = y \;\; \textit{si y sólo si} \;\; R(x) = \mathrm{cl}(y) = [y) = [f_R(x)).$$

Definición 6.3.14. Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, E_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, E_2\rangle$ espacios de Kripke argumentados perfectos. Sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una H-relación irreducible fuerte. Diremos que R es una *E-relación* si satisface las siguientes condiciones:

$(EF1)$ Si $(x, y) \in E_1$, entonces $(f_R(x), f_R(y)) \in E_2$.

$(EF2)$ Para todo $x \in X_1, y \in X_2$, si $(f_R(x), y) \in E_2$, entonces existe $z \in X_1$ tal que $(x, z) \in E_1$ e $y \leq f_R(z)$.

Proposición 6.3.15. *Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, E_1\rangle$ y $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, E_2\rangle$ espacios de Kripke argumentados perfectos. Sea $R \subseteq X_1 \times X_2$ una E-relación. Entonces $h_R : D(X_2) \to D(X_1)$ es un $\vee$-semi-homomorfismo que conmuta con E y preserva el primer elemento.*

Demostración. Por Teorema 5.2.12, tenemos que h_R es un $\vee$-semi-homomorfismo y por ser R una H-relación irreducible fuerte, $h_R(\emptyset) = \emptyset$. Sea $U \in D(X_2)$. Veamos que $E_1(h_R(U)) = h_R(E_2(U))$. Sea $x \in E_1(h_R(U))$. Entonces existe $y \in h_R(U)$ tal que $(y, x) \in E_1$. Por $(EF1)$, $(f_R(y), f_R(x)) \in E_2$. Además, $R(y) = [f_R(y)) \subseteq U$, esto es $f_R(y) \in U$. Por lo tanto, $f_R(x) \in E_2(U)$ y como $E_2(U) \in D(X_2)$, resulta

$R(x) = [f_R(x)) \subseteq E_2(U)$. Luego, $x \in h_R(E_2(U))$. Para probar la otra inclusión, tomamos $x \in h_R(E_2(U))$, i.e., $R(x) = [f_R(x)) \subseteq E_2(U)$. Como $f_R(x) \in E_2(U)$, existe $y \in U$ tal que $(f_R(x), y) \in E_2$. Por $(EF2)$, existe $z \in X_1$ tal que $(x, z) \in E_1$ e $y \leq f_R(z)$. Como $y \in U$ resulta $f_R(z) \in U$ y consecuentemente, $R(z) \subseteq U$. Por la simetría de E_1, $x \in E_1(z)$ con $z \in h_R(U)$. Esto es, $x \in E_1(h_R(U))$. ■

A continuación, estudiamos la relación R_h definida en (3.2) cuando h es un $\vee$-semi-homomorfismo definido entre álgebras de la variedad $\mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}\mathbf{S5}$ que conmuta con $\Diamond$ y preserva el primer elemento.

Proposición 6.3.16. *Sean $\langle A, \Diamond\rangle, \langle B, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}\mathbf{S5}$. Sea $h : A \to B$ un $\vee$-semi-homomorfismo tal que conmuta con $\Diamond$ y preserva el primer elemento. Entonces, R_h es una E-relación.*

Demostración. De lo demostrado en la Proposición 6.2.6, podemos asegurar que $R_h \subseteq X(B) \times X(A)$ es una H-relación irreducible fuerte y por consiguiente, nos provee de una función $f_{R_h} : X(B) \to X(A)$ tal que $f_{R_h}(x) = h^{-1}(x)$. Veamos que R_h satisface las condiciones de la Definición 6.3.14:

$(EF1)$ Sean $x, y \in X(B)$ tales que $(x, y) \in E_B$, i.e., $x \cap B_{\Diamond} = y \cap B_{\Diamond}$. Tomemos $a \in A$ tal que $a \in f_{R_h}(x) \cap A_{\Diamond}$. O sea, $a \in h^{-1}(x)$ y $a \in A_{\Diamond}$. Por lo tanto, $h(a) \in x$ y $a = \Diamond a$. Luego, $h(a) = h(\Diamond a) = \Diamond h(a) \in x \cap B_{\Diamond} = y \cap B_{\Diamond}$. Esto es, $a \in h^{-1}(y) \cap A_{\Diamond}$. Luego, $f_{R_h}(x) \cap A_{\Diamond} \subseteq f_{R_h}(y) \cap A_{\Diamond}$. Análogamente se prueba que $f_{R_h}(y) \cap A_{\Diamond} \subseteq f_{R_h}(x) \cap A_{\Diamond}$. Queda probado que $(f_{R_h}(x), f_{R_h}(y)) \in E_A$.

$(EF2)$ Sea $x \in X(B)$ e $y \in X(A)$ tales que $(f_{R_h}(x), y) = (h^{-1}(x), y) \in E_A$. Para probar que existe $z \in X(B)$ tal que $(x, z) \in E_B$ e $y \leq f_{R_h}(z)$, consideremos el sistema deductivo $\langle h(y) \cup (x \cap B_{\Diamond})\rangle$ y el ideal generado por $x^c \cap B_{\Diamond}$ pertenecientes a B, y veamos que estos conjuntos son disjuntos. Para ello supongamos lo contrario, es decir, asumamos que existe $a \in B$ tal que $a \in \langle h(y) \cup (x \cap B_{\Diamond})\rangle$ y $a \in Ig\,(x^c \cap B_{\Diamond})$. Por lo tanto, existe $b \in y, c \in x \cap B_{\Diamond}$ y $k_1, ..., k_n \in x^c \cap B_{\Diamond}$ tales que $h(b) \to (c \to a) = 1$ y $a \leq k_1 \vee ... \vee k_n$. Por ende, $h(b) \to (c \to (k_1 \vee ... \vee k_n)) = 1$, i.e., $h(b) \leq c \to (k_1 \vee ... \vee k_n)$. Considerando la monotonía de $\Diamond$ y que $c, k_1, ..., k_n \in B_{\Diamond}$, resulta:

$$\begin{aligned}\Diamond h(b) = h(\Diamond b) &\leq \Diamond\,(\Diamond c \to (\Diamond k_1 \vee ... \vee \Diamond k_n)) = \Diamond\,(\Diamond c \to \Diamond\,(k_1 \vee ... \vee k_n)) \\ &\leq \Diamond c \to \Diamond\,(k_1 \vee ... \vee k_n).\end{aligned}$$

Como $b \in y$ y $b \leq \Diamond b$, tenemos que $\Diamond b \in y$ y consecuentemente $\Diamond b \in y \cap A_{\Diamond} = h^{-1}(x) \cap A_{\Diamond}$. Por lo tanto, $h(\Diamond b) \in x$ y por la desigualdad anterior, $\Diamond c \to \Diamond\,(k_1 \vee ... \vee k_n) \in x$. Como $\Diamond c \in x$, por Modus Ponens, $\Diamond k_1 \vee ... \vee \Diamond k_n \in x$ y consecuentemente, existe algún i, con $1 \leq i \leq n$, tal que $\Diamond k_i = k_i \in x$, lo cual es imposible. Hemos probado entonces que $\langle h(y) \cup (x \cap B_{\Diamond})\rangle \cap Ig\,(x^c \cap B_{\Diamond}) = \emptyset$. Luego, existe $z \in X(B)$ tal que $h(y) \subseteq z, x \cap B_{\Diamond} \subseteq z$ y $x^c \cap B_{\Diamond} \cap z = \emptyset$. Esto es, $y \subseteq h^{-1}(z), x \cap B_{\Diamond} \subseteq z \cap B_{\Diamond}$ y $B_{\Diamond} \cap z \subseteq x$, o sea, $B_{\Diamond} \cap z \subseteq x \cap B_{\Diamond}$, con lo cual queda probado la condición. ■

De los resultados obtenidos previamente podemos afirmar que la categoría $\mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}\mathbf{S5}\mathcal{S}$ es dualmente equivalente a la categoría formada por los marcos de Kripke argumentados perfectos y cuyos morfismos son E-relaciones. Consecuentemente, como la categoría $\mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}\mathbf{S5}\mathcal{S}$ es dualmente equivalente a la categoría de $H_{\Diamond}^{\vee}$-espacios $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, S\rangle$, donde S es una cuasi-equivalencia y cuyos morfismos son $\Diamond$-relaciones, podemos asegurar que dicha categoría es equivalente a la categoría de marcos de Kripke argumentados perfectos y E-relaciones.

6.4. El $\{\to, \vee, \bot, \Diamond\}$-fragmento de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IntK}_{\Diamond}^{\to}$

En esta sección estudiamos el $\{\to, \vee, \bot, \Diamond\}$-fragmento de la lógica modal normal intuicionista $\mathbf{IntK}_{\Diamond}$(ver [2], [9], [57], [56] y [64]). Vamos a demostrar que toda extensión $\mathcal{I}_{\Diamond}$ del fragmento $\mathbf{IntK}_{\Diamond}^{\to}$ es canónica y en consecuencia es completa con respecto a la clase de sus marcos $\mathrm{Fr}(\mathcal{I}_{\Diamond})$.

Sea $\mathcal{L}_{\Diamond}$ el lenguaje proposicional modal universal, el cual consiste del lenguaje $\mathcal{L}$ definido en la sección 2.6, más la constante proposicional $\bot$, el conectivo $\vee$ y el operador unario $\Diamond$. La lógica $\mathbf{IntK}_{\Diamond}^{\to}$ es una lógica en el lenguage $\mathcal{L}_{\Diamond}$ caracterizada por la siguiente lista de axiomas y reglas:

1. $\phi \to (\psi \to \phi)$,
2. $(\phi \to (\psi \to \varepsilon)) \to ((\phi \to \psi) \to ((\phi \to \varepsilon))$,
3. $\phi \to (\psi \vee \phi)$,
4. $\psi \to (\psi \vee \phi)$,
5. $(\psi \to \varepsilon)) \to ((\phi \to \varepsilon) \to ((\psi \vee \phi) \to \varepsilon))$,
6. $\bot \!\to \psi$,
7. $\Diamond(\phi \vee \psi) \to (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$,

$(MP)\ \dfrac{\phi, \phi \to \psi}{\psi}$, $(R_{\Diamond})\ \dfrac{\phi \to \psi}{\Diamond\phi \to \Diamond\psi}$.

Es claro que $\mathbf{IntK}_{\Diamond}^{\to}$ es el $\{\to, \vee, \bot, \Diamond\}$-fragmento de la lógica modal intuiticionista $\mathbf{IntK}_{\Diamond}$. Una *lógica implicativa modal universal* $\mathcal{I}_{\Diamond}$ es cualquier extensión de $\mathbf{IntK}_{\Diamond}^{\to}$.

Definición 6.4.1. La estructura $\langle X, \mathcal{K}, S\rangle$ es un $H\Diamond$-*marco general* si:

1. $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ es un H-marco general,

2. $(\leq^{-1} \circ S) \subseteq (S\circ \leq^{-1})$, donde $\leq$ es $\leq_{\mathcal{K}}$,

3. $S^{-1}(U) = \Diamond_S(U) \in D(X)$, para todo $U \in D(X)$.

Notemos que los $H_{\Diamond}^{\vee}$-espacios son casos particulares de $H\Diamond$-marcos generales.

Sea $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}, S\rangle$ un $H\Diamond$-marco general. Por lo probado en [57], la segunda condición de la definición de $H\Diamond$-marco general nos permite asegurar que $\mathcal{P}_{\leq}(X)$ es cerrado bajo $\Diamond_S$ y consecuentemente tenemos que

$$A(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Diamond_S\rangle = \langle \mathcal{P}_{\leq}(X), \Rightarrow, \cup, \Diamond_S, \emptyset, X\rangle$$

es un $H_{\Diamond}^{\vee}$-álgebra, y $\langle D(X), \Diamond_S\rangle = \langle D(X), \Rightarrow, \cup, \Diamond_S, \emptyset, X\rangle$ es una subálgebra de $A(\mathcal{F})$.

Una *valuación* definida sobre $\mathcal{F}$ es una función $V : Var \to D(X)$. Toda valuación V puede extenderse recursivamente a Fm por medio de las siguientes cláusulas:

1. $V(\perp) = \emptyset$,

2. $V(\top) = X$,

3. $V(\phi \vee \psi) = V(\phi) \cup V(\psi)$,

4. $V(\phi \to \psi) = V(\phi) \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} V(\psi) = \mathrm{sat}(V(\phi) \cap V(\psi)^c)^c$,

5. $V(\Diamond\phi) = \Diamond_S(\phi) = \{x \in X : S(x) \cap V(\phi) \neq \emptyset\}$.

Llamaremos *$H\Diamond$-modelo general* a toda estructura $\mathcal{M} = \langle X, \mathcal{K}, S, V\rangle$ donde $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}, S\rangle$ es un $H\Diamond$-marco general y V es una valuación definida sobre $\mathcal{F}$. Una función V es una valuación en un $H\Diamond$-marco general $\mathcal{F}$ si y sólo si V es un homomorfismo entre el álgebra de todas las fórmulas Fm y $D(X)$. Por lo tanto, ϕ es válida en un $H\Diamond$-marco general si y sólo si la ecuación $\phi \approx 1$ es válida en el álgebra de Hilbert $D(X)$. Luego, si $\mathcal{F}$ es un $H\Diamond$-marco general, entonces

$$\mathcal{F} \vDash \phi \text{ si y sólo si } D(X) \vDash \phi \approx 1$$

Sea $\mathcal{I}_{\Diamond}$ una lógica implicativa modal universal. Denotamos con $\mathrm{Fr}(\mathcal{I}_{\Diamond})$ a la clase de todos los $H\Diamond$-marcos generales donde las fórmulas de $\mathcal{I}_{\Diamond}$ son válidas. Sea $\mathrm{HSp}(\mathcal{I}_{\Diamond})$ la clase de todos los $H_{\Diamond}^{\vee}$-espacios $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, S\rangle$ tal que $\mathcal{F} \vDash \phi$, para todo $\phi \in \mathcal{I}_{\Diamond}$. Como todo $H_{\Diamond}^{\vee}$-espacio es un $H\Diamond$-marco general, la clase $\mathrm{HSp}(\mathcal{I}_{\Diamond})$ es una subclase de $\mathrm{Fr}(\mathcal{I}_{\Diamond})$.

Análogamente a lo realizado para lógicas implicativas modales necesidad en la Sección 4.4, diremos que una lógica implicativa modal universal $\mathcal{I}_{\Diamond}$ está *caracterizada* por la clase F de $H\Diamond$-marcos generales, cuando $\phi \in \mathcal{I}_{\Diamond}$ si y sólo si ϕ es válida en cualquier $H\Diamond$-marco general $\langle X, \mathcal{K}, S\rangle \in \mathsf{F}$. Más aún, $\mathcal{I}_{\Diamond}$ es *completa respecto a marcos* cuando $\phi \in \mathcal{I}_{\Diamond}$ si y sólo si ϕ es válido en cualquier $H\Diamond$-marco general $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{K}, S\rangle$, para todo $\mathcal{F} \in \mathrm{Fr}(\mathcal{I}_{\Diamond})$.

Sea $\mathcal{I}_\Diamond$ una lógica implicativa modal universal. Consideremos la variedad de $H_\Diamond^\vee$-álgebras

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}_\Diamond) = \left\{ A \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee : A \vDash \phi \approx 1, \text{ para todo } \phi \in \mathcal{I}_\Diamond \right\}.$$

Tenemos entonces que

$$\mathcal{F} \in \mathrm{HSp}(\mathcal{I}_\Diamond) \text{ si y sólo si } D(X) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Diamond).$$

Luego,

Proposición 6.4.2. *Toda lógica implicativa modal universal $\mathcal{I}_\Diamond$ está caracterizada por la clase* $\mathrm{HSp}(\mathcal{I}_\Diamond)$.

Diremos que una variedad $\mathcal{V}$ of $H_\Diamond^\vee$-algebras es *canónica*, si $A\left(\mathcal{F}(A)\right) \in \mathcal{V}$, cuando $A \in \mathcal{V}$. Una extensión de $\mathbf{IntK}_\Diamond^\rightarrow$, $\mathcal{I}_\Diamond$ es canónica si la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{I}_\Diamond)$ es canónica. Además, $\mathcal{I}_\Diamond$ es H-*persistente* si $A(\mathcal{F}) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Diamond)$, cuando $D(X) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_\Diamond)$, para todo $H_\Diamond^\vee$-espacio $\mathcal{F} = \langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$.

De los resultados sobre dualidad obtenidos entre $H_\Diamond^\vee$-espacios y $H_\Diamond^\vee$-álgebras, podemos dar los siguientes resultados análogamente a lo realizado para el caso de la lógica modal implicacional $\mathcal{I}_\Box$ (ver Sección 4.4).

Proposición 6.4.3. *Una extensión de* $\mathbf{IntK}_\Diamond^\rightarrow$*, $\mathcal{I}_\Diamond$ es H-persistente si y sólo si es canónica.*

Proposición 6.4.4. *Toda extensión canónica de* $\mathbf{IntK}_\Diamond^\rightarrow$*, $\mathcal{I}_\Diamond$ es completa con respecto a* $\mathrm{Fr}(\mathcal{I}_\Diamond)$.

Usando las caracterizaciones probadas en la Sección 6.3, podemos asegurar que cualquier variedad de $H_\Diamond^\vee$-álgebras axiomatizada por algunos de los subconjuntos pertenecientes al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$P = \{\Diamond\mathbf{T}, \Diamond\mathbf{4}, \Diamond\mathbf{5}, \Diamond^n a \rightarrow a \approx 1\}$$

es canónica. Luego, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.4.5. *Cualquier variedad de $H_\Diamond^\vee$-álgebras axiomatiza por fórmulas pertenecientes al conjunto P es canónica. Luego, las lógicas asociadas son canónicas y completas respecto a marcos.*

6.5. Congruencias de $H_\Diamond^\vee$-álgebras

En esta parte del trabajo estudiamos las congruencias de las $H_\Diamond^\vee$-álgebras, a las que denominamos $\Diamond$-congruencias, e introducimos la noción de sistemas deductivos cerrados. Probamos que los retículos formado por $\Diamond$-congruencias y por sistemas deductivos cerrados son isomorfos, y demostramos además que ambos retículos son dualmente isomorfos al retículo formado por ciertos subconjuntos cerrados del correspondiente espacio asociado. Estos resultados nos permiten caracterizar, en la sección siguiente, a las $H_\Diamond^\vee$-álgebras simples y subdirectamente irreducibles.

Sea A es un álgebra de Hilbert. Recordemos que

$$\langle \mathrm{Con}(A, \to), \subseteq\rangle \cong \langle \mathrm{Ds}\,(A)\,, \subseteq\rangle \cong \langle \mathcal{C}(X), \subseteq\rangle^d .$$

Además, si $\langle A, \to, \vee, 1\rangle$ es un $H_0^\vee$-álgebra, su retículo de congruencias $\mathrm{Con}(A, \to, \vee)$ es igual al retículo de congruencias $\mathrm{Con}(A, \to)$ del álgebra de Hilbert A. Recordemos además que denotamos con $\max Y$ al conjunto de todos los elementos máximales de Y (ver Sección 3.4).

Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$. Diremos que θ es una $\Diamond$-*congruencia* si y sólo si θ es una relación de congruencia definida sobre A la cual es compatible con $\to$, $\vee$ y $\Diamond$. Denotamos con $\mathrm{Con}_\Diamond\,(A)$ al conjunto de todas las $\Diamond$-congruencias de $\langle A, \Diamond\rangle$.

Definición 6.5.1. Sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ un $H_\Diamond^\vee$-espacio. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es S-*maximal* si para todo $x \in Y$ se satisface que $\text{máx}\, S(x) \subseteq Y$.

Es claro que X y $\emptyset$ son conjuntos S-maximales triviales y es fácil chequear, teniendo en cuenta la definición anterior, que la intersección y la unión de cualquier familia de conjuntos S-maximales es nuevamente un conjunto S-maximal. Por lo cual podemos afirmar que el conjunto de todos los subconjuntos S-maximales del $H_\Diamond^\vee$-espacio $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$, ordenados bajo la relación inclusión, es un subretículo completo de $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq\rangle$. En particular, los subconjuntos S-maximales y cerrados de $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ forman el conjunto $\mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$, el cual ordenado bajo la inclusión, forma un subretículo de $\langle \mathcal{C}(X), \subseteq\rangle$ cerrado bajo intersecciones arbitrarias.

Sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ un $H_\Diamond^\vee$-espacio. La familia de todos los subconjuntos cerrados y S-maximales de $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ define una topología,

$$\mathcal{T}_S = \{X - Y : Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)\},$$

sobre X, donde sus subconjuntos cerrados son exactamente los elementos de $\mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$. Denotamos con $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(Y)$ a la clausura de un subconjunto Y de X, donde X está dotado con la topología $\mathcal{T}_S$. Es claro que $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(Y) \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$. En particular, si $Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$, entonces $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(Y) = \mathrm{cl}(Y)$. Un subconjunto Y de X es llamado S-*cerrado* (S-*denso*), si es un subconjunto cerrado (denso) de X con respecto a la topología $\mathcal{T}_S$.

Observación 6.5.2. Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ su correspondiente $H_\Diamond^\vee$-espacio dual. Notemos que

$$\textit{si } S(x) \neq \emptyset \textit{ entonces } \text{máx}\, S(x) \neq \emptyset, \textit{ para } x \in X.$$

Para probar esto, mostraremos que para cada $x \in X$ se satisface que toda cadena en $S(x)$ tiene cota superior en $S(x)$. Sea $x \in X$ y tomemos una familia $\{y_i\}_{i\in I}$ totalmente ordenada, con $y_i \in S(x)$ para cada $i \in I$. Sea $z = \bigcup \{y_i\}_{i\in I}$. Es claro que z es cota superior de la cadena $\{y_i\}_{i\in I}$. Probemos que $z \in X$. Por ser unión de subconjuntos crecientes de X, z es subconjunto creciente de X. Sean $a, b \in A$ tales que $a, a \to b \in z$. Esto es, existen $i, j \in I$ tal que $a \in y_i$ y $a \to b \in y_j$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i \leq j$, por lo tanto, $y_i \subseteq y_j$. Luego, $a \in y_j, a \to b \in y_j$ y consecuentemente, $b \in y_j$. Por ende, $b \in z$ y queda probado que z es un sistema deductivo de A. Supongamos ahora que $a \vee b \in z$. Entonces existe $i \in I$ tal que $a \vee b \in y_i$. Como $y_i \in X$, $a \in y_i$ o $b \in y_i$. En cualquiera de los dos casos, $a \in z$ o $b \in z$. Luego, $z \in X$. Para mostrar que $z \in S(x)$, tomemos $a \in z$. Entonces existe $i \in I$ tal que $a \in y_i$ y como $y_i \in S(x)$, resulta que $a \in \Diamond^{-1}(x)$. Hemos probado que toda cadena en $S(x)$ tiene cota superior en $S(x)$, y por Lema de Zorn tenemos que existe m tal que $m \in \text{máx}\, S(x)$. Es decir, $\text{máx}\, S(x) \neq \emptyset$.

A continuación daremos una caracterización de las $\Diamond$-congruencias aplicando la dualidad encontrada y usando técnicas dadas en [58].

Teorema 6.5.3. *Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_{\Diamond}^{\vee}$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, S\rangle$ su correspondiente $H_{\Diamond}^{\vee}$-espacio dual. Entonces,*

$$\langle \mathcal{C}_{\text{máx}}(X), \subseteq\rangle^d \cong \langle \mathrm{Con}_{\Diamond}(A), \subseteq\rangle .$$

Demostración. Probemos que la aplicación $\Phi : \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) \to \mathrm{Con}_{\Diamond}(A)$ definida por

$$\Phi(Y) = \{(a, b) \in A \times A : a \to b, b \to a \in \pi(Y)\}$$

es un anti-isomorfismo, donde $\pi(Y) = \{a \in A : Y \subseteq \varphi(a)\}$.

Sea $Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$. Por Observación 3.5.3, $\pi(Y) \in \mathrm{Ds}(A)$. Luego, $\Phi(Y) = \theta(\pi(Y)) \in \mathrm{Con}(A)$. Para mostrar que Φ está bien definida necesitamos demostrar que $\Phi(Y)$ preserva $\Diamond$. Esto es, si $a, b \in A$ tales que $(a, b) \in \Phi(Y)$, probemos que $(\Diamond a, \Diamond b) \in \Phi(Y)$. Para ello, mostremos que $\Diamond a \to \Diamond b \in \pi(Y)$, i.e.,

$$Y \subseteq \varphi(\Diamond a) \Rightarrow \varphi(\Diamond b) = \{x \in X : [x) \cap \varphi(\Diamond a) \subseteq \varphi(\Diamond b)\}.$$

Sea $x \in Y$ y sea $y \in X$ tal que $y \in [x) \cap \varphi(\Diamond a)$. Por lo tanto, $x \subseteq y$ y $\Diamond a \in y$. Por Lema 6.1.5, existe $z \in X$ tal que $z \in S(y)$ y $a \in z$. Por Observación 6.5.2, existe $w \in \text{máx}\, S(y)$ tal que $z \subseteq w \subseteq \Diamond^{-1}(y)$ y como $a \in z$, resulta $a \in w$. Por otro lado, como $x \in Y$ e Y es un subconjunto creciente de X, tenemos que $y \in Y$ y como $\text{máx}\, S(y) \subseteq Y$, resulta $w \in Y$. Por lo asumido, $a \to b \in \pi(Y)$ y entonces, $[w) \cap \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$. Como $w \in \varphi(a)$, tenemos que $w \in \varphi(b)$. Luego, $b \in w \subseteq \Diamond^{-1}(y)$ y consecuentemente $\Diamond b \in y$, i.e., $y \in \varphi(\Diamond b)$. Por ende, $\Diamond a \to \Diamond b \in \pi(Y)$. Con argumentos similares se prueba que $\Diamond b \to \Diamond a \in \pi(Y)$. Luego, hemos mostrado que $\Phi(Y) \in \mathrm{Con}_{\Diamond}(A)$ para cada $Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$.

Sean $Y, W \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$. Es claro que si $Y \subseteq W$ entonces $\Phi(W) \subseteq \Phi(Y)$. Para probar que la función Φ es uno a uno, asumamos que $\Phi(Y) = \Phi(W)$ y supongamos que $Y \neq W$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe $x \in Y$ tal que $x \notin W$. Como W es un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$, existe $a \in A$ tal que $W \subseteq \varphi(a)$ y $x \notin \varphi(a)$. Luego, $a = 1 \to a \in \pi(W)$ y como $\pi(W) \in \mathrm{Ds}(A)$, $1 = a \to 1 \in \pi(W)$. Por lo tanto, $(1, a) \in \Phi(W) = \Phi(Y)$ y consecuentemente, $a \in \pi(Y)$. Esto es, $Y \subseteq \varphi(a)$ y por ende, $x \in \varphi(a)$, lo cual es una contradicción.

Para completar la demostración, sólo nos resta probar que Φ es sobreyectiva. Sea $\theta \in \mathrm{Con}_{\Diamond}(A)$ y

$$Z = \bigcap \{\varphi(a) : a \in [1]_\theta\} = \{x \in X : [1]_\theta \subseteq x\}.$$

Es claro que $Z \in \mathcal{C}(X)$. Veamos que Z es un subconjunto S-maximal de $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, S \rangle$. Para ello, supongamos lo contrario, es decir, tomemos $x \in Z$, $y \in \max S(x)$ con $y \notin Z$. Entonces existe $a \in [1]_\theta$ tal que $a \notin y$. Consecuentemente, el sistema deductivo $\langle y \cup \{a\} \rangle$ y el ideal $\Diamond^{-1}(x^c)$ definidos en A son disjuntos. En efecto. Supongamos lo contrario, esto es, sea $b \in A$ tal que $b \in \langle y \cup \{a\} \rangle \cap \Diamond^{-1}(x^c)$. Entonces existe $c \in y$ tal que $c \to (a \to b) = 1 \in y$ y $\Diamond b \notin x$. Como $c \in y$, resulta $a \to b \in y$, y como $y \in S(x)$, $\Diamond(a \to b) \in x$. Por otro lado, como $(a, 1) \in \theta$ tenemos que $(a \to b, b) \in \theta$. Luego, $(\Diamond(a \to b), \Diamond b) \in \theta$ y por ende, $(\Diamond(a \to b) \to \Diamond b, 1) \in \theta$. Entonces, $\Diamond(a \to b) \to \Diamond b \in [1]_\theta$ y como $[1]_\theta \subseteq x$, $\Diamond(a \to b) \to \Diamond b \in x$. Como $\Diamond(a \to b) \in x$, resulta $\Diamond b \in x$, lo cual es una contradicción. Luego, $\langle y \cup \{a\} \rangle \cap \Diamond^{-1}(x^c) = \emptyset$, y por lo tanto, existe $w \in X$ tal que $\langle y \cup \{a\} \rangle \subseteq w$ y $w \cap \Diamond^{-1}(x^c) = \emptyset$. Esto es, $y \subseteq w$ y $w \in S(x)$. Como $y \in \max S(x)$, tenemos que $y = w$ y por lo tanto $a \in y$, lo cual es imposible. Hemos probado entonces que $\max S(x) \subseteq Z$, para todo $x \in Z$. Luego, $Z \in \mathcal{C}_{\max}(X)$.

Ahora probemos que $\Phi(Z) = \theta$. Notemos que $Z \subseteq \varphi(a)$ si y sólo si $a \in [1]_\theta$. En efecto. Por como está definido el conjunto Z, es claro que si $a \in [1]_\theta$ entonces $Z \subseteq \varphi(a)$. Ahora supongamos que $a \notin [1]_\theta$. Entonces, $[1]_\theta \cap (a] = \emptyset$. Por lo tanto, existe $x \in X$ tal que $[1]_\theta \subseteq x$ y $a \notin x$. Esto es, $Z \nsubseteq \varphi(a)$.

Luego,

$$\begin{array}{ccccc} (a, b) \in \Phi(Z) & \iff & a \to b, b \to a \in \pi(Z) & \iff \\ Z \subseteq \varphi(a \to b), \varphi(b \to a) & \iff & a \to b, b \to a \in [1]_\theta & \iff \\ (a \to b, 1), (b \to a, 1) \in \theta & \iff & (a, b) \in \theta. & \end{array}$$

Probemos esta última equivalencia. La condición necesaria es inmediata. Probemos la condición suficiente, para ello tomemos $(a \to b, 1), (b \to a, 1) \in \theta$. Como $(b \to a, 1) \in \theta$, $((b \to a) \to a, a) \in \theta$. Como $(a \to b, 1) \in \theta$, tenemos que $((a \to b) \to ((b \to a) \to a), 1 \to a) = ((a \to b) \to ((b \to a) \to a), a) \in \theta$. Análogamente se prueba que $((b \to a) \to ((a \to b) \to b), b) \in \theta$ y como por Lema 2.1.2, $(a \to b) \to ((b \to a) \to a) = (b \to a) \to ((a \to b) \to b)$, por la transitividad y simetría de θ resulta $(a, b) \in \theta$. ■

Ahora estudiamos a los sistemas deductivos definidos en $H_\Diamond^\vee$-álgebras que están en correspondencia con las $\Diamond$-congruencias.

Definición 6.5.4. Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$. Un sistema deductivo F de A es un *sistema deductivo cerrado* si $a \to b \in F$ implica $\Diamond a \to \Diamond b \in F$, para todo $a, b \in A$.

Al conjunto formado por todos los sistemas deductivos cerrados del $H_\Diamond^\vee$-álgebra $\langle A, \Diamond\rangle$ lo denotamos con $\mathrm{Ds}_\Diamond(A)$.

Proposición 6.5.5. *Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ su $H_\Diamond^\vee$-espacio dual. Entonces*

$$\langle \mathrm{Ds}_\Diamond(A), \subseteq\rangle \cong \langle \mathcal{C}_{\text{máx}}(X), \subseteq\rangle^d .$$

Demostración. Sea $\mu : \mathrm{Ds}_\Diamond(A) \to \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$ tal que $\mu(F) = \{x \in X : F \subseteq x\}$ para todo $F \in \mathrm{Ds}_\Diamond(A)$. Por Observación 3.5.3, sabemos que $\mu(F)$ es un subconjunto cerrado de $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}\rangle$, para todo $F \in \mathrm{Ds}(A)$. Es claro que si $F, D \in \mathrm{Ds}_\Diamond(A)$ tal que $F \subseteq D$ entonces $\mu(D) \subseteq \mu(F)$. Probemos ahora que $\mu(F)$ es un subconjunto S-maximal de $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ para cada $F \in \mathrm{Ds}_\Diamond(A)$. Sea $x \in \mu(F)$. Supongamos que existe $y \in \text{máx}\, S(x)$ tal que $y \notin \mu(F)$, i.e., $F \nsubseteq y$. Entonces, existe $f \in F$ tal que $f \notin y$. Consideremos el sistema deductivo $\langle y \cup \{f\}\rangle$ definido en A. Como $y \in \text{máx}\, S(x)$,

$$\langle y \cup \{f\}\rangle \nsubseteq \Diamond^{-1}(x).$$

Luego, existe $d \in A$ tal que $d \in \langle y \cup \{f\}\rangle$ y $d \notin \Diamond^{-1}(x)$. Esto es, existe $q \in y$ tal que $f \to (q \to d) = 1 \in F$ y $\Diamond d \notin x$. Por lo tanto, $q \to d \in F$ y como F es un sistema deductivo cerrado, $\Diamond q \to \Diamond d \in F$. Como $F \subseteq x$, $\Diamond q \to \Diamond d \in x$. Teniendo en cuenta que $q \in y$ con $y \in S(x)$, resulta $\Diamond q \in x$. Luego, por Modus Ponens, $\Diamond d \in x$, lo cual es una contradicción. Luego, $\mu(F) \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$.

Sea $\pi : \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) \to \mathrm{Ds}_\Diamond(A)$ tal que $\pi(Y) = \{a \in A : Y \subseteq \varphi(a)\}$. Por lo probado en la demostración del Teorema 6.5.3, sabemos que $\pi(Y)$ es un sistema deductivo cerrado para todo $Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$. Como μ y π son inversas una de la otra, deducimos que μ es un anti-isomorfismo de retículos. ■

Por Teorema 6.5.3 y Proposición 6.5.5, es inmediato el siguiente resultado.

Corolario 6.5.6. *Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ su correspondiente $H_\Diamond^\vee$-espacio dual. Entonces,*

$$\langle \mathrm{Con}_\Diamond(A), \subseteq\rangle \cong \langle \mathrm{Ds}_\Diamond(A), \subseteq\rangle \cong \langle \mathcal{C}_{\text{máx}}(X), \subseteq\rangle^d .$$

6.6. $H_\Diamond^\vee$-álgebras simples y subdirectamente irreducibles

Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$. Por Teorema 6.5.3 y Proposición 6.5.5, podemos afirmar que un $H_\Diamond^\vee$-álgebra $\langle A, \Diamond\rangle$ es subdirectamente irreducible si y sólo si en su $H_\Diamond^\vee$-espacio dual $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ existe un único $Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$ máximo en $\mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$ distinto de X y $\emptyset$, o lo que es equivalente a asegurar que existe un único $\Diamond$-sistema deductivo mínimo no trivial. Más aún, $\langle A, \Diamond\rangle$ es simple si y sólo si $\mathcal{C}_{\text{máx}}(X) = \{\emptyset, X\}$ si y sólo si $\mathrm{Ds}_\Diamond(A) = \{\{1\}, A\}$.

El siguiente resultado caracteriza a las álgebras simples y subdirectamente irreducibles de la variedad $\mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$.

Teorema 6.6.1. *Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee$ y $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ su correspondiente $H_\Diamond^\vee$-espacio dual. Entonces:*

1. *$\langle A, \Diamond\rangle$ es simple si y sólo si todo subconjunto unitario de X es S-denso en X, i.e., $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) = X$, para cada $x \in X$.*

2. *$\langle A, \Diamond\rangle$ es subdirectamente irreducible si y sólo si $\{x \in X : \mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) \neq X\} \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}$.*

Demostración. *1.* Asumamos que $\langle A, \Diamond\rangle$ es simple. Por lo tanto, $\mathcal{C}_{\text{máx}}(X) = \{\emptyset, X\}$. Sea $x \in X$. Como $x \in \mathrm{cl}_{\text{máx}}(x)$, resulta $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) \neq \emptyset$ y como $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$, tenemos que $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) = X$. Para probar la recíproca, asumamos que $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) = X$ para todo $x \in X$ y supongamos que existe $Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$ tal que $Y \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $y \in X$ tal que $y \in Y$ y consecuentemente, $X = \mathrm{cl}_{\text{máx}}(y) \subseteq Y$. Luego, $X = Y$ y por lo tanto, $\langle A, \Diamond\rangle$ es simple.

2. Consideremos el conjunto

$$V = \{x \in X : \mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) \neq X\}.$$

Supongamos que $\langle A, \Diamond\rangle$ es subdirectamente irreducible y sea Y el último elemento de $\mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}$. Veamos que $Y = V$. Sea $x \in Y$. Entonces, $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) \subseteq Y \neq X$ y consecuentemente, $x \in V$. Por lo tanto, $Y \subseteq V$. Ahora tomemos $x \in V$. Luego, $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}$ y por lo asumido, $\mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) \subseteq Y$. Entonces, $x \in Y$. Hemos probado entonces que $V = Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{\emptyset, X\}$. Recíprocamente, sea $V \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}$. Veamos que V es el último elemento de $\mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}$. Supongamos que existe $Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X)$ tal que $Y \nsubseteq V$. Entonces existe $x \in Y$ tal que $x \notin V$. Por lo tanto, $X = \mathrm{cl}_{\text{máx}}(x) \subseteq Y$. Es decir, $Y = X$, lo cual completa la demostración. ■

A continuación, caracterizamos las álgebras simples y subdirectamente irreducibles de las $H_\Diamond^\vee$-álgebras que satisfacen la ecuación $a \to \Diamond a \approx 1$.

Teorema 6.6.2. *Sea $\langle A, \Diamond\rangle \in \mathrm{Hil}_\Diamond^\vee + \{\Diamond\mathbf{T}\}$ y sea $\langle X, \mathcal{T}_\mathcal{K}, S\rangle$ su correspondiente $H_\Diamond^\vee$-espacio dual. Entonces,*

1. *$\langle A, \Diamond\rangle$ es simple si y sólo si* $\text{máx}\, S(x)$ *es S-denso en X, para cada $x \in X$.*

2. *$\langle A, \Diamond\rangle$ es subdirectamente irreducible si y sólo si*

$$\{x \in X : \text{máx}\, S(x) \text{ no es } S\text{-denso en } X\} \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}.$$

Demostración. Por Teorema 6.3.4, S es reflexiva.

1. Asumamos que $\langle A, \Diamond\rangle$ es simple. Por lo tanto, $\mathcal{C}_{\text{máx}}(X) = \{\emptyset, X\}$. Por ser S reflexiva, $S(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y consecuentemente, por Observación 6.5.2 resulta $\text{máx}\, S(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\text{cl}_{\text{máx}}\,(\text{máx}\, S(x)) \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{\emptyset\}$. Luego, $\text{cl}_{\text{máx}}\,(\text{máx}\, S(x)) = X$ cualquiera sea $x \in X$. Para probar la recíproca, asumamos que $\text{máx}\, S(x)$ es S-denso para cada $x \in X$. Sea $Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{\emptyset\}$. Por ende, existe $x \in Y$ y como Y es S-maximal, $\text{máx}\, S(x) \subseteq Y$. Luego, $X = \text{cl}_{\text{máx}}\,(\text{máx}\, S(x)) \subseteq Y$ y entonces, $Y = X$. Queda probado que $\langle A, \Diamond\rangle$ es simple.

2. Sea $T = \{x \in X : \text{máx}\, S(x)$ *no es S-denso en* $X\}$. Asumamos que $\langle A, \Diamond\rangle$ es subdirectamente irreducible y sea Y el último elemento de $\mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}$. Es claro que $Y \subseteq T$. Para probar que $T \subseteq Y$, tomemos $y \in T$, i.e., $\text{cl}_{\text{máx}}(\text{máx}\, S(y)) \neq X$ y consecuentemente, $\text{cl}_{\text{máx}}(\text{máx}\, S(y)) \subseteq Y$. Por ser S reflexiva, $y \in S(y)$, lo que implica que existe $z \in \text{máx}\, S(y)$ tal que $y \subseteq z$. Por ende,

$$y \in \text{cl}_{\text{máx}}(y) \subseteq \text{cl}_{\text{máx}}(z) \subseteq \text{cl}_{\text{máx}}(\text{máx}\, S(y)) \subseteq Y.$$

Luego, $Y = T \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}$. Para probar la recíproca, supongamos que $T \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}$. Probaremos que T es el último elemento de $\mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}$. Sea $Y \in \mathcal{C}_{\text{máx}}(X) - \{X\}$. Si $x \in Y$ entonces, $\text{cl}_{\text{máx}}(\text{máx}\, S(x)) \subseteq Y \neq X$. Esto es, $x \in T$ y entonces, $Y \subseteq T$. Luego, queda probado que $\langle A, \Diamond\rangle$ es subdirectamente irreducible. ■

Bibliografía

[1] R. Balbes and Ph. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, (1974).

[2] G.Bezhanisvili, *Varieties of monadic Heyting algebras. Part I*, Studia Logica 61 (1998), pp. 367-402.

[3] G.Bezhanisvili, *Varieties of monadic Heyting algebras. Part II: Duality Theory*, Studia Logica 62 (1998), pp. 1-28.

[4] G. Bezhanishvili and S. Ghilardi, *An algebraic approach to subframe logics. Intuitionistic case,* Annals of Pure and Applied Logic, 147 (2007), pp. 84-100.

[5] G. Bezhanishvil and R. Jansana, *Priestley Style Duality for Distributive Meet-semilattices,* Studia Logica, 98, (2011), pp. 83-122.

[6] G. Bezhanishvil and R. Jansana, *Esakia Style Duality for Implicative Semilattices,* Applied Categorical Structures, Volume 21, 2 (2013), pp. 181-208.

[7] G. Bierman and V. de Paiva, *On an Intuitionistic Modal*, Logic Studia Logica 65 (2000), pp. 383-416.

[8] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 53. Cambridge University Press (2001).

[9] M. Bozic and K. Dosen, *Models for normal intuitionistic modal logics*, Studia Logica, 44 (1984), pp. 217-245.

[10] H. Burris and H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Vol 78, Springer, Berlin (1981).

[11] D. Busneag, *A note on deductive systems of a Hilbert algebra*, Kobe J. Math. Vol. 2 (1985), pp. 29-35.

[12] S. A. Celani, *Topological representation of distributive semilattice,* Scientiae Math. Japonicae online, Vol. 8 (2003), pp. 41-51.

[13] S. A. CELANI, *Modal Tarski algebras*, Reports on Math. Logic, 39 (2005), pp.113-126.

[14] S. A. CELANI, *Simple and subdirectly irreducibles bounded distributive lattices with unary operators*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 2006, Article ID 21835, 20 pages, (2006). doi:10.1155/IJMMS/2006/21835.

[15] S. A. CELANI, *A note on homomorphism of Hilbert algebras*, Int. Journal of Math. and Mathematical Sc. Vol. 29, 1 (2002), pp. 55-61.

[16] S. A. CELANI, *Representation of Hilbert algebras and implicative Semilattices*, Central European Journal of Mathematics Vol. 1 No. 4 (2003), pp. 561-572.

[17] S. A. CELANI, *Notes on bounded Hilbert algebras with supremum*, Acta Scientiarum Mathematicarum. Bolyai Institute, University of Szeged, Szeged, 80 (2014), pp. 3-19.

[18] S. A. CELANI AND L. M. CABRER, *Duality for finite Hilbert algebras*, Discrete Mathematics 305 (2005), pp. 74-99.

[19] S. A. CELANI AND L.M. CABRER, *Topological duality for Tarski algebras*, Algebra Universalis, 58 (2008), pp. 73-94.

[20] S. A. CELANI, L. M. CABRER AND D. MONTANGIE, *Representation and Duality for Hilbert algebras*, Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, 3 (2009), pp. 463-478.

[21] S. A. CELANI AND I. CALOMINO, *Some remarks on distributive semilattices*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 54, 3 (2013), pp. 407-428.

[22] S. A. CELANI AND D. MONTANGIE, *Hilbert Algebras with supremum*, Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

[23] S. A. CELANI AND D.MONTANGIE, *Hilbert Algebras with a necessity modal operator*, Reports on Mathematical Logic, 49**,** (2014), pp. 47-77.

[24] S. A. CELANI AND D.MONTANGIE, *Hilbert Algebras with a modal operator* $\Diamond$, Studia Logica Vol. 103, Issue 3 (2015), pp. 639-662.

[25] A. CHAGROV AND M. ZAKHARYASCHEV, *Modal Logic.* Oxford University Press, (1997).

[26] I. CHAJDA, R. HALAŠ AND J. KÜHR, *Semilattice Structures*, Heldermann Verlag, Research and Exposition in Mathematics, Vol. 30 (2007).

[27] I. CHAJDA AND R. HALAŠ, *Congruences and ideals in Hilbert algebras*, Kyungpook Math. J., 39 (1999), pp. 429-432.

[28] R. CIGNOLI, *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Mathematics 96 (1991), pp. 183-197.

[29] A. DIEGO, *Sur les algèbres de Hilbert*, Colléction de Logique Mathèmatique, serie A, 21 (1966), Gouthier-Villars, Paris.

[30] K. DOSEN, *Models for Stronger Normal Intuitionistic Modal Logics*, Studia Logica 44, 1 (1983), pp. 39-70.

[31] M. FAIRTLOUGH AND M. MENDLER, *Propositional Lax Logic*, Information and Computation, Vol.137, 1 (1997), pp. 1-33.

[32] A. V. FIGALLO, G. RAMON AND S. SAAD, *A note on Hilbert algebras with infimum*, Mat. Contemp. 24, (2003), pp. 23–37.

[33] G. FISCHER SERVI, *On Modal Logics with an Intuitionistic Base*, Studia Logica Vol. 36, 3 (1977), pp. 141-149.

[34] G. FISCHER SERVI, *Axiomatizations for some Intuitionistic Modal Logics*, Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università Politecnica di Torino, Vol.42, 3 (1984), pp. 179-194.

[35] D. GLUSCHANKOF AND M. TILLI, *Maximal deductive systems and injective objects in the category of Hilbert algebras*, Mathematical Logic Quarterly. 34, 3 (1988), pp. 213-220.

[36] R. GOLDBLATT, *Grothendieck Topology as Geometric Modality*, Mathematical Logic Quarterly, Vol. 27, 31-35,(1981) pp. 495-529.

[37] R. GOLDBLATT, *Cover Semantics for Quantified Lax Logic,* Journal of Logic and Computation, 21, 6, (2010) pp. 1035-1063.

[38] G. GRÄTZER, *General Lattice Theory.* Birkhäuser Verlag (1998).

[39] P. HALMOS, *Algebraic logic, I. Monadic Boolean algebras*, Compositio Mathematica, 12 (1954-1956), pp. 217-249.

[40] L. HENKIN, *An algebraic characterization of quantifiers*, Fundam. Math. Vol. 37, 1 (1950), pp. 63-74.

[41] P.M. IDZIAK, *Lattice operations in BCK-algebras*, Math.Japonica 29, 6 (1984), pp. 839-846.

[42] P.M. IDZIAK, *Some theorems about BCK-semilattices*, Math.Japonica **29**, 6 (1984), pp. 919-921.

[43] P. M. IDZIAK, *Filters and Congruences relations in BCK-algebras*, Math. Japonica 29, No. 6 (1984), pp. 975-980.

[44] B. JÓNSON AND A. TARSKI, *Boolean algebras with operator, Part I*, American Journal of Mathematics, Vol. 73, 4 (1951), pp. 891-939.

[45] B. JÓNSON AND A. TARSKI, *Boolean algebras with operator, Part II*, American Journal of Mathematics, Vol. 74, 1 (1952), pp. 127-162.

[46] R. KIRK, *A Complete Semantics for Implicational Logics*, Mathematical Logic Quarterly, Vol. 27, 23-24 (1981), pp. 381–383.

[47] P. KÖHLER, *Brouwerian semilattices,* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 268, (1981), pp. 103-126.

[48] Y. HASIMOTO, *Heyting algebras with operators*, Mathematical Logic Quarterly Vol. 47, 2 (2001), pp. 187-196.

[49] D. S. MACNAB, *Modal Operators On Heyting Algebras*, Algebra Universalis, Vol. 12, 1 (1981), pp. 5-29.

[50] L. MAKSIMOVA, *Pretabular superintuitionistic logics*, Algebra and Logic, Vol. 11, 5 (1972), pp. 308-314.

[51] L. MAKSIMOVA, *Pretabular extensions of the Lewis ´logic S4*, Algebra and Logic, Vol. 14, 1 (1975), pp. 16-33.

[52] A. MONTEIRO, *Unpublished lectures given at Universidad Nacional del Sur,* Bahía Blanca (1960-1961).

[53] A. MONTEIRO, *Cálculo Proposicional Implicativo Clásico,* redacción de L. Monteiro, Informes Técnicos Internos Nro. 90, INMABB-CONICET-UNS, (2005).

[54] A. MONTEIRO AND O. VARSAVSKY, *Álgebras de Heyting Monádicas,* Notas de Lógica Matemática 1, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, (1974), pp. 1-16.

[55] A. MONTEIRO, *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Mathematica 39 (1980), fasc. 1-4.

[56] E. ORLOWSKA AND I. REWITZKY, *Discrete Dualities for Heyting Algebras with Operators*, Fundamenta Informaticae, Vol. 81, 1-3 (2007), pp. 275-295.

[57] A. PALMIGIANO, *Dualities for Some Intuitionistic Modal Logics*, Dick de Jongh's Liber Amicorum, ILLC Publications, (2004).

[58] A. PETROVICH, *Distributive Lattices with an Operator*, Studia Logica, Vol. 56 1-2(1996), 205-224.

[59] H. PRIESTLEY, *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bulletin of the London Mathematical Society, Vol. 2, 2 (1970), pp. 186-190.

[60] H. PRIESTLEY, *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 24, (1972), pp. 507-530.

[61] A. PRIOR, *Two additions to positive implication*, Journal of Symbolic Logic, Vol. 29, 1 (1964), pp. 31-32.

[62] H. RASIOWA, *An algebraic approach to non-classical logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 78**,** North-Holland and PWN, (1974).

[63] H. RASIOWA AND R. SIKORSKI, *The Mathematics of Metamathematics*, Warszawa (1963).

[64] L. RUEDA, *Linear Heyting algebras with a quantifier*, Annals of Pure and Applied Logic, Vol. 108, (1–3), (2001), pp. 327-343.

[65] G. SAMBIN AND V. VACCARO, *Topology and duality in modal logic*, Annals of Pure and Applied Logic 37 (1988), pp. 249-296.

[66] V. H. SOTIROV, *Modal Theories with Intuitionistic Logic,* In Mathematical Logic, Proceedings of the Conference on Mathematical Logic, Dedicated to the Memory of A. A. Markov (1903-1979), Sofia, September 22-23, 1980 (1984), pp. 139-171.

[67] M. STONE, *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67, 1 (1938), pp.1-25

[68] M. STONE, *The theory of representations of Boolean algebras*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 40**, 1** (1936), pp. 37-111.